meSalva! ENEM

FUNÇÕES I
RETAS E PARÁBOLAS

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ FUNÇ - Introdução - Conceito e exemplos de funções diversas
- ✓ TFUN - Teoria de funções
- ✓ FNPG - Funções de 1º Grau
- ✓ EFPG - Funções de 1º Grau - Aplicações e Exercícios
- ✓ FSGI - Funções de 2º Grau - Introdução e Raízes
- ✓ FSGR - Funções de 2º Grau - Análise gráfica, máximos e mínimos
- ✓ EXFN - Funções de 2º Grau - Aplicações e Exercícios
- ✓ INPS - Inequações de 1º e 2º grau
- ✓ EINQ - Exercícios de Inequações

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	FUNÇÕES I
PROFESSORES	TAMARA SALVATORI, ARTHUR LOVATO

FUNÇÕES I

TEORIA DE FUNÇÕES

Iniciar o estudo de conceitos abstratos a partir de situações cotidianas é parte do objetivo dessa apostila para que você consiga fazer a conexão entre conhecimentos práticos e teóricos. Por isso, uma situação estudada em diversas áreas do conhecimento é o movimento de um carro com velocidade constante, que permite que sejam avaliados fatores que podem aparentemente passar despercebidos. Então, a partir do movimento de um carro nessa condição, anotamos as distâncias que ele percorreu a cada hora, com velocidade constante de 80 km/h. Veja a tabela abaixo:

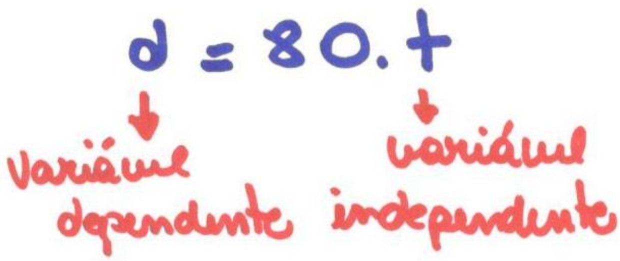
Tempo (h)	1	2	3	4	5
Distância (km)	80	160	240	320	400

Na Física, isso é tratado como Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e você deve lembrar que a equação que o rege é: x = v.t (ou d = v.t, como você preferir), conhecida como equação horária da distância. Perceba que, se substituirmos o valor da velocidade, que já sabemos ser 80 km/h, e o valor do tempo, por exemplo, 1 hora, é possível calcular a distância, que será x = 80.1 = 80 km. Se quisermos saber a distância na segunda hora, basta fazer x = 80.2 = 160 km e assim por diante. Veja, então, que há uma relação de dependência entre uma grandeza e outra. No caso, a distância percorrida depende do tempo que o carro andou, sempre com velocidade de 80 km/h. Assim, podemos reescrever a equação horária da distância como:

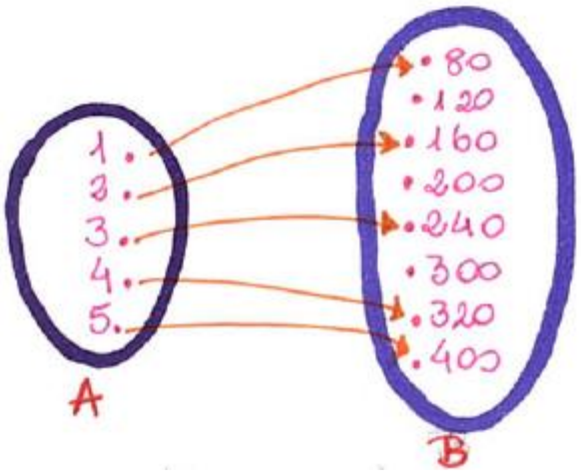
$$d = v.t$$

$$d = 80.t$$

Portanto, seria possível calcular a distância que o carro percorreu em qualquer tempo a partir da equação acima. Essa dependência entre duas grandezas variáveis (uma dependente e outra independente) é chamada de função. Podemos dizer que a distância é dada em função do tempo, ou, simplesmente, que a distância depende do tempo e por isso será a variável dependente (enquanto o tempo é a independente). Veja:



Outra forma de entendermos funções é utilizando o conceito de conjuntos. Considere que o conjunto A é formado por horas e que o conjunto B é formado por distâncias:



Perceba que as setas que ligam os conjuntos saem de A e chegam em B e isso pode ser entendido como: todos os elementos de A têm correspondente em B. A notação matemática é f: A -> B (lê-se “f é uma função de A em B”). Sempre que descrevemos uma função teremos uma letra ao lado de outra entre parênteses para indicar em função de qual variável está sendo escrita aquela equação. Tínhamos a seguinte equação da distância em função do tempo, por exemplo:

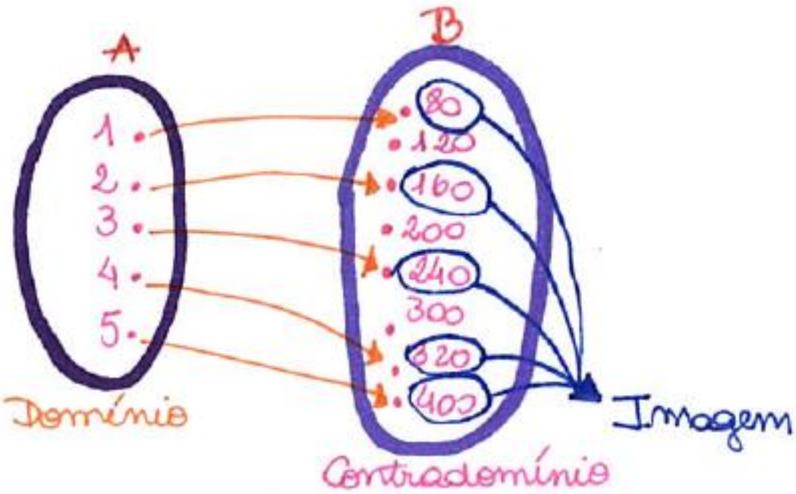
$$f\colon A \rightarrow B$$

Para indicarmos explicitamente que é uma função, poderíamos escrever

$$f(t) = 80.t$$

O mais comum é encontrarmos equações sendo expressas por f(x) ou g(x), já que o termo entre parênteses, que é a variável independente, quando traçamos um gráfico, ocupa o lugar do eixo das abscissas (coordenada horizontal), enquanto que o valor resultante da função ocupa o eixo das ordenadas (coordenada vertical).

Voltando à nossa análise a partir de conjuntos, para que você se familiarize com a nomenclatura, chamamos A o conjunto das variáveis independentes de Domínio, e chamamos o conjunto das possíveis distâncias de Contra domínio. Por fim, os valores que têm correspondência do conjunto A ao conjunto B são denominados Imagem. No nosso exemplo, teremos o seguinte:



Reorganizando todas essas informações, teremos:

- ✓ Domínio: {1, 2, 3, 4, 5};
- ✓ Contradomínio: {80, 120, 160, 200, 240, 300, 320, 400};
- ✓ Imagem: {80, 160, 240, 320, 400}.

Resolva o exercício abaixo:

Um serviço de motorista por aplicativo oferece a locomoção aos seus passageiros sobre as seguintes regras.
- tarifa de R$ 12,00 iniciais para percorrer qualquer distância
- tarifa de R$ 0,50 para cada km rodado
Dentre as alternativas abaixo, qual representa uma possível lei de formação para a função do valor a ser pago em função do km rodado

a) y = 0,50x+12

b) y = 5x +12

c) y = 12x

d) y = 0,5x

e) y = 0,5 + 12x

Alternativa correta: A

Módulo: FUNÇ – Introdução – Conceitos e Exemplos de Funções Diversas

Lista: FUNÇEX – Exercícios de Fixação #3

FUNÇÕES DE 1º GRAU (INTRODUÇÃO, COEFICIENTES E GRÁFICO)

Funções de 1º Grau são compostas por Equações de 1º Grau e, por isso, possuem comportamento linear, podendo ser crescentes, decrescentes ou constantes. Em geral, as funções desse tipo são chamadas de Função Afim, tendo como um caso particular a Função Linear. Vamos estudar isso em detalhes a seguir.

FUNÇÃO AFIM

Voltando ao problema que atacamos anteriormente, do carro andando a velocidade constante, vamos imaginar que, ao iniciar a contagem do tempo, o carro já tivesse andado 10 km. Devemos considerar essa informação quando formos calcular a distância total a cada hora, certo? Então, a função que descreve esse movimento não seria apenas d = 80.t, mas teria uma informação a mais, os 10 km. Veja como ficaria:

$$f(t) = 80.t + 10$$

Funções desse tipo são chamadas de Funções Afim e sua forma geral é dada por:

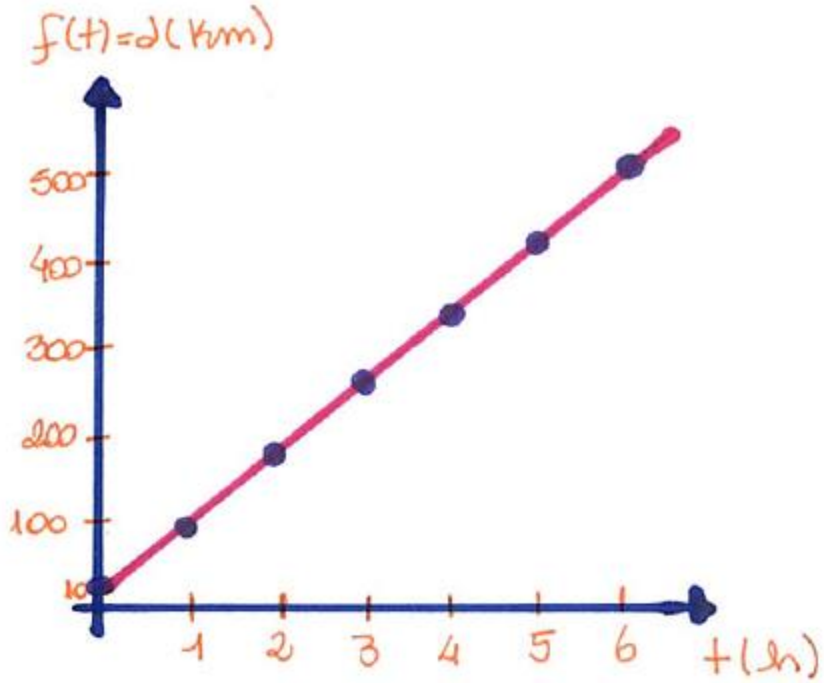
$$f(x) = ax + b$$

Em que a e b são os coeficientes da função. No caso do nosso exemplo, a = 80 (a velocidade) e b = 10, o termo independente, que é a distância que foi percorrida antes mesmo de o tempo começar a ser contado.

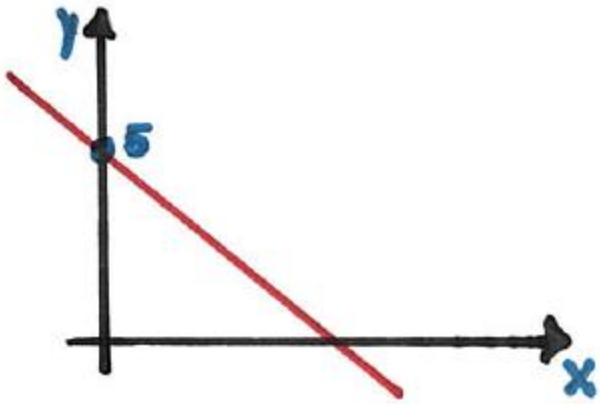
A função nos ajuda a compreender o comportamento de uma determinada grandeza em função de outra, mas tudo fica muito mais fácil a partir do momento em que conseguimos demonstrar isso visualmente, como em gráficos. Por isso, vamos montar uma tabela que relaciona o tempo (t) com a distância percorrida (f(t) = d) a partir da função afim que acabamos de estudar (f(t) = 80.t + 10) para podermos traçar o gráfico. Você pode colocar quantos valores de t achar necessário. Acompanhe:

t	$f(t)=80t+10$	$f(t)=d$
0	$f(0)=80(0)+10$	10
1	$f(1)=80(1)+10$	90
2	$f(2)=80(2)+10$	170
3	$f(3)=80(3)+10$	250
4	$f(4)=80(4)+10$	320
5	$f(5)=80(5)+10$	410
6	$f(6)=80(6)+10$	500

Agora é possível traçar o gráfico da distância em função do tempo, ou seja, o tempo estará no eixo x e a distância no eixo y:

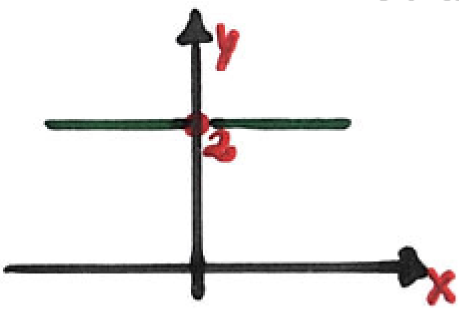


Veja que, à medida que o tempo avança, a distância aumenta, então temos uma função crescente (sempre analisamos da esquerda para a direita). Isso já era possível saber apenas analisando a função, sem substituir valores. Se a > 0, teremos uma função crescente (exatamente como a do nosso exemplo). Caso a < 0, teremos uma função decrescente, então a linha que liga os pontos estará “descendo”. Além disso, outra informação que é facilmente obtida apenas olhando para o termo independente da função é o ponto pelo qual a reta passa (ou corta) pelo eixo y. No gráfico da função crescente, a reta corta o eixo y em 10, que é o termo independente. Veja abaixo outro exemplo:



Apesar de não sabermos exatamente qual é a função que descreve esse gráfico, sabemos que é decrescente (já que a reta está descendo) e que, portanto, o coeficiente a é menor do que zero; sabemos também que o termo independente é 5 (já que é nesse ponto que a reta corta o eixo y). Além disso, sabemos que a função é linear, já que temos a representação de uma reta ligando seus possíveis pontos.

Além de a função poder ser crescente ou decrescente, ela pode ser constante. Ou seja, se tivermos f(x) = 2, essa função não varia e seus coeficientes são a = 0 e b = 2. Como b é o termo independente que corta o eixo y, teremos o gráfico abaixo:



FUNÇÃO LINEAR

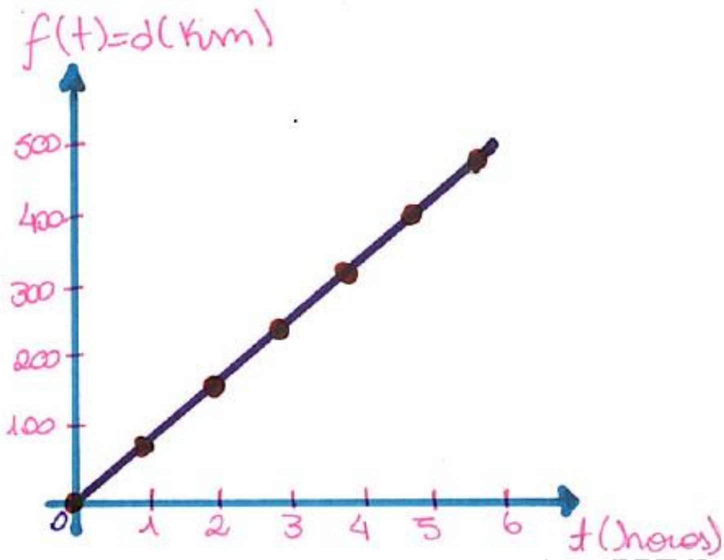
Um caso particular da função afim é a função linear. Ela ocorre quando b = 0, então a função será f(x) = ax. Já vimos um exemplo nesse formato, aquele primeiro sobre velocidade constante, em que a função era descrita como:

$$d = 80.t$$

A partir dessa função podemos reproduzir e estender a primeira tabela relacionando o tempo e encontrando a distância. Acompanhe:

t	f(t)=80.t	f(t)=d
0	f(0)=80.0	0
1	f(1)=80.1	80
2	f(2)=80.2	160
3	f(3)=80.3	240
4	f(4)=80.4	320
5	f(5)=80.5	400
6	f(6)=80.6	480

Com os dados da tabela acima podemos traçar o gráfico da distância em função do tempo, mas, antes disso, perceba que, como a > 0, teremos uma reta crescente, e como b = 0, essa reta passará pela origem (0, 0). Confira:



Exatamente como havíamos previsto, certo? Note que, como a função linear é um caso particular da função afim, ela também pode ser crescente ou decrescente.

Resolva os exercícios:

(Cesgranrio) O valor de um carro novo é de R$9.000,00 e, com 4 anos de uso, é de R$4.000,00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, o valor de um carro com 1 ano de uso é:

a) R$8.250,00

b) R$8.000,00

c) R$7.750,00

d) R$7.500,00

e) R$7.000,00

Alternativa correta: C

Módulo: FNPG – Funções de Primeiro Grau

Lista: FNPGEX – Exercícios de Fixação #3

(UFPI) A função real de variável real, definida por $f(x) = (3 - 2a).x + 2$, é crescente quando:

a) $a>0$

b) $a<3/2$

c) $a = 3/2$

d) $a> 3/2$

e) $a<3$

Alternativa correta: B

Módulo: FNPG – Funções de Primeiro Grau

Lista: FNPGEX – Exercícios de Fixação #5

(FGV) Uma função polinomial f do 1°grau é tal que $f(3) = 6$ e $f(4) = 8$. Portanto, o valor de $f(10)$ é:

a) 16

b) 17

c) 18

d) 19

e) 20

Alternativa correta: E

Módulo: FNPG – Funções de Primeiro Grau

Lista: FNPGEX – Exercícios de Fixação #7

Uma companhia de gás irá pagar para um proprietário de terra $ 15.000,00 pelo direito de perfurar a terra para encontrar gás natural, e $ 0,3 para cada mil pés cúbicos de gás extraído. Expresse o total que o proprietário irá receber com função da quantidade de gás extraído

a) y = 15000x + 0,3

b) y = 15000x + 0,3/1000

c) y = 0,3x/1000 + 15000

d) y = 15000

e) y = 0,3x

Alternativa correta: C

Módulo: EFPG – Funções de Primeiro Grau – Aplicações e Exercícios

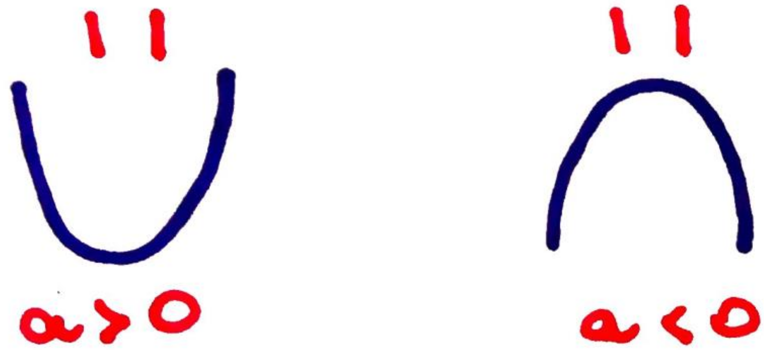
Lista: EFPGEX – Exercícios de Fixação #2

FUNÇÕES DE 2º GRAU (INTRODUÇÃO E RAÍZES)

Funções de 2º grau também são conhecidas como funções quadráticas justamente por relacionar uma variável com outra a partir de uma equação de 2º grau. Por isso, a forma de uma Função de 2º Grau é:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Novamente esses coeficientes carregam bastante informação sobre essa função. Perceba que, como temos uma equação de 2º grau, agora o termo independente volta a ser o c. Além disso, como a função não é linear, no lugar de termos uma reta caracterizando a relação entre as duas grandezas, teremos uma parábola cuja concavidade é dada pelo coeficiente a. Então, se $a > 0$, a concavidade será para cima; se $a < 0$, a concavidade será para baixo. Um macete para lembrar disso é pensar que a parábola sorri quando a é positivo e fica triste quando a é negativo. Dá uma olhada:



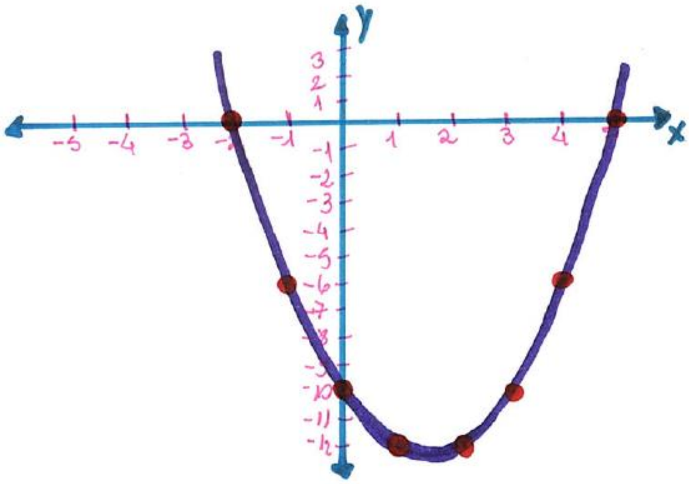
Vamos analisar a equação de 2º grau que utilizamos para descobrir o lado da mesa que seu avô havia solicitado que você fizesse variando o x (apostila de Álgebra II). Então, essa equação será transformada na seguinte função:

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

Veja que a > 0, então a concavidade da função será para cima e o termo independente é -10, valor em que a parábola encostará (ou cortará) o eixo y. Sabendo disso, vamos arbitrar valores para x e analisar o valor que a função assumirá a partir deles na tabela abaixo.

x	$f(x) = x^2 - 3x - 10$	$f(x) = y$
-2	$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) - 10$	$f(-2) = 0$
-1	$f(-1) = (-1)^2 - 3(-1) - 10$	$f(-1) = -6$
0	$f(0) = 0^2 - 3(0) - 10$	$f(0) = -10$
1	$f(1) = 1^2 - 3(1) - 10$	$f(1) = -12$
2	$f(2) = 2^2 - 3(2) - 10$	$f(2) = -12$
3	$f(3) = 3^2 - 3(3) - 10$	$f(3) = -10$
4	$f(4) = 4^2 - 3(4) - 10$	$f(4) = -6$
5	$f(5) = 5^2 - 3(5) - 10$	$f(5) = 0$

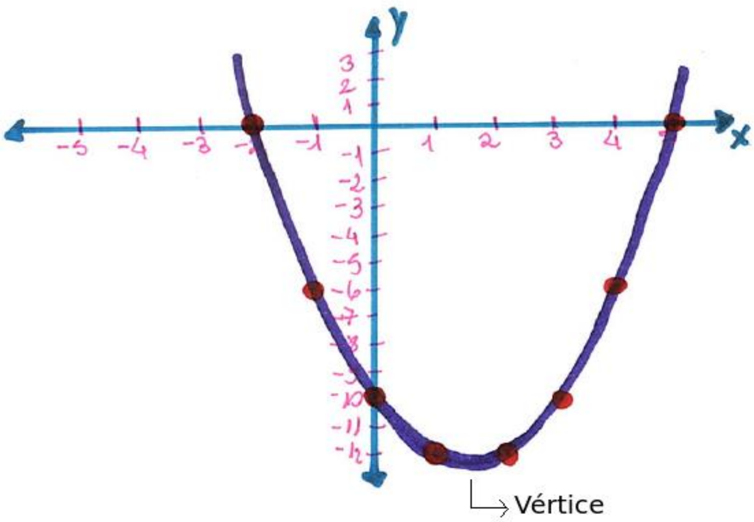
Agora que temos todos os valores, podemos traçar o gráfico de f(x) em função de x. Veja:



Perceba que a parábola toca o eixo x duas vezes, uma em -2 e outra em 5; essas são as raízes da função. Caso você tenha dúvidas, basta aplicar a Bhaskara e conferir, ok? Mas isso também é visível na tabela que fizemos, já que o resultado é zero quando substituímos esses valores na equação. Faça o teste!

FUNÇÕES DE 2º GRAU (ANÁLISE GRÁFICA)

Agora que já estudamos como são as funções de 2º grau, podemos analisar com mais detalhes seus gráficos. É possível calcular o vértice da parábola, por exemplo, e a partir dele saber o ponto máximo ou mínimo que ela atinge. Vamos começar voltando à função que estudamos anteriormente. Veja no gráfico onde fica o vértice da parábola:



Perceba que o vértice é o encontro entre a parte decrescente com a parte crescente da parábola. Em alguns casos você poderá estar procurando o valor máximo ou mínimo que um produto descrito por uma função de 2º grau pode atingir, e por isso é bastante útil saber qual será seu ponto máximo ou mínimo. Vamos encontrar o vértice da função que estamos estudando. As equações que facilitam esse cálculo são:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Outra forma de calcular x_v é fazendo a média aritmética das raízes (somando as duas raízes e dividindo por 2).

Obteremos um valor para x e outro para y substituindo os coeficientes da função nas equações acima, ou seja, teremos um par ordenado, descrito como:

$$V = (x_v, y_v) \quad \Rightarrow \quad V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Lembre que nossos coeficientes são a = 1, b = -3 e c = -10. Vamos aplicar os valores nas equações acima para encontrarmos o vértice da parábola que descreve essa função:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$x_v = -\frac{(-3)}{2(1)} \qquad y_v = -\frac{(b^2-4ac)}{4a}$$

$$x_v = \frac{3}{2} \qquad y_v = -\frac{((-3)^2-4(1)(-10))}{4(1)}$$

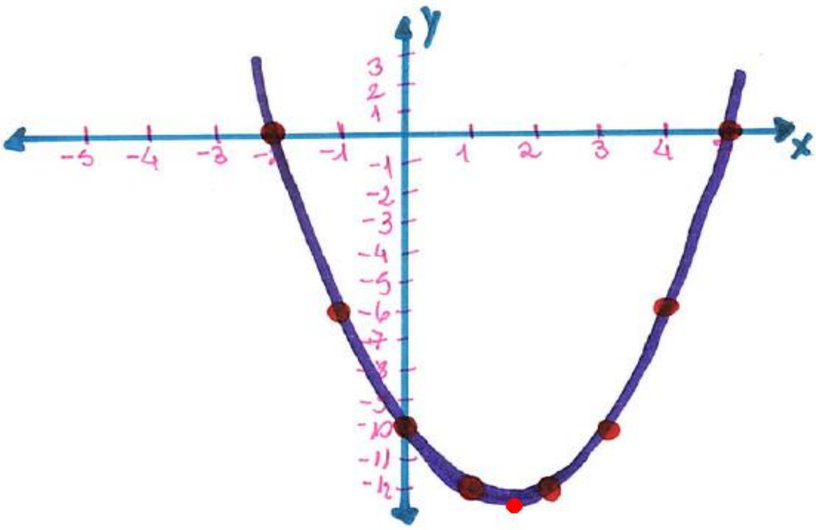
$$x_v \simeq 1{,}5 \qquad y_v = -\frac{(9+40)}{4}$$

$$y_v = -\frac{49}{4} \simeq -12{,}25$$

Veja então que o par ordenado do vértice dessa função é:

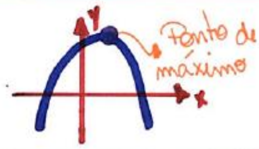
$$V = (1{,}5, \ -12{,}25)$$

Agora podemos acrescentar esse ponto à nossa parábola. Lembre que o valor que vem antes corresponde a x e em seguida ao y:

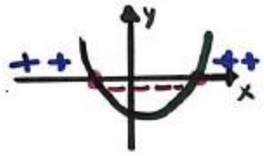
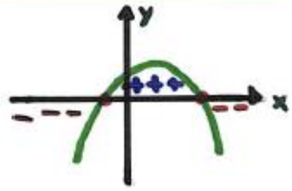
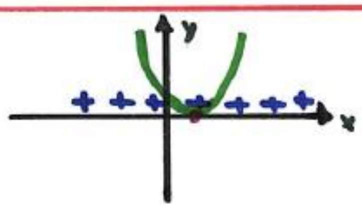
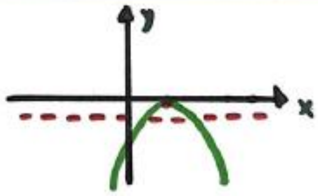
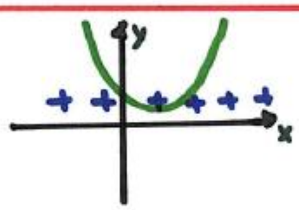
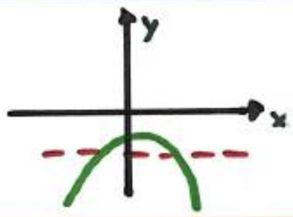


Perceba que V(xv, yv) é o menor valor que a parábola pode atingir, logo este é o ponto mínimo da função. Isso acontece porque a parábola tem concavidade para cima (lembre que a > 0). Se a concavidade fosse para baixo, no vértice teríamos um ponto de máximo, calculado da mesma forma.

Vamos fazer um esqueminha para lembrar desses detalhes:

Coeficiente a	Concavidade	Vértice	Gráfico
$a > 0$	Para cima	Ponto de mínimo	
$a < 0$	Para baixo	Ponto de máximo	

Veja outro esqueminha que relaciona o coeficiente a, o discriminante e os sinais das funções.

Coeficiente a	Raízes	Gráfico e Sinal
$a > 0$	$\Delta > 0$ Reais e distintos	
$a < 0$	$\Delta > 0$ Reais e distintas	
$a > 0$	$\Delta = 0$ uma raiz real	
$a < 0$	$\Delta = 0$ uma raiz real	
$a > 0$	$\Delta < 0$ Nenhuma raiz real	
$a < 0$	$\Delta < 0$ Nenhuma raiz real	

Note que a análise do sinal, nesses casos, é feita a partir do eixo y (a parábola é positiva quando está com uma parte acima do eixo x, caso contrário é negativa). Além disso, perceba que a parábola não toca o eixo x nos dois últimos gráficos. Isso acontece quando não temos raízes reais (ela toca duas vezes se temos duas raízes reais e uma vez quando há apenas uma raiz). Guarde essa informação para quando formos estudar Números Complexos, ok?

Perceba que não é sempre necessário construir a tabela arbitrando valores para x para conhecermos o gráfico da função. Se você lembrar de alguns detalhes, como a concavidade a partir do coeficiente a, o valor que a parábola corta o eixo y com o coeficiente c e o número de raízes a partir do valor do discriminante, o trabalho de calcular fica bem menor. Comece devagar, lembrando desses detalhes e tentando esboçar o gráfico, depois faça a tabela e trace os pontos que encontrou e veja o que você errou ou acertou. Assim você vai pegando o jeito!

Resolva os exercícios:

(UFSM) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t)=at^2+b$, onde v(t) é o número de elementos vivos no tempo t (meses). Sabendo-se que o último frango morreu quando t=12 meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estava viva no 10° mês é

a) 80

b) 100

c) 120

d) 220

e) 300

Alternativa correta: D

Módulo: FSGI – Funções de Segundo Grau

Lista: FSGIEX – Exercícios de Fixação #3

(Unirio) Em uma fábrica, o custo de produção de x produtos é dado por $c(x)=-x^2+22x+1$. Sabendo-se que cada produto é vendido por R$10,00, o número de produtos que devem ser vendidos para se ter um lucro de R$44,00 é:

a) 3

b) 10

c) 12

d) 13

e) 15

Alternativa correta: E

Módulo: FSGI – Funções de Segundo Grau

Lista: FSGIEX – Exercícios de Fixação #5

(UFRGS) O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela equação $y = -40x^2 + 200x$. Onde y é a altura, em metros, atingida pelo projétil x segundos após o lançamento. A altura máxima atingida e o tempo que esse projétil permanece no ar corresponde, respectivamente, a

a) 6,25 m, 5s

b) 250 m, 0s

c) 250 m, 5s

d) 250 m, 200s

e) 10.000 m, 5s

Alternativa correta: C

Módulo: FSGR – Funções de Segundo Grau – Análise de Máximos e Mínimos

Lista: FSGREX – Exercícios de Fixação #1

(VUNESP) A parábola de equação $y = ax^2$ passa pelo vértice da parábola y = 4x - x2. Ache o valor de a

a) 1

b) 2

c) 3

d) -1

e) n.d.a

Alternativa correta: A

Módulo: FSGR – Funções de Segundo Grau – Análise de Máximos e Mínimos

Lista: FSGREX – Exercícios de Fixação #3

Sabe-se que o custo de C para produzir x unidades de certo produto é dado pela expressão $C = x^2 - 80x + 3000$. Calcule o a quantidade de unidades produzidas para que o custo seja mínimo e o valor desse custo mínimo.

a) 40 unidades e R$1400

b) 50 unidades e R$1600

c) 0 unidades e R$0

d) 60 unidades e R$1700

e) 70 unidades e R$1900

Alternativa correta: A

Módulo: EXFN – Funções de Segundo Grau – Aplicações e Exercícios

Lista: EXFNEX – Exercícios de Fixação #4

INEQUAÇÕES DE 1º E DE 2º GRAUS

Vimos no estudo de álgebra que inequações são equações que resultam em um valor diferente de zero, podendo ser maiores, menores ou maiores e iguais, menores e iguais a zero. Vimos também que as funções podem ser descritas como equações de 1º e de 2º graus e já sabemos como resolvê-las, mas algumas vezes estamos interessados em estudar apenas o sinal dessas funções – e é aí que entram as inequações. A grande diferença aqui é que não precisamos montar tabelas para analisarmos funções que envolvem inequações, mas apenas ver qual é o comportamento do seu gráfico. Por isso, precisamos estudar os sinais dessas funções e é bastante importante que você lembre dos detalhes que comentamos anteriormente: se a função é crescente ou decrescente a partir do coeficiente "a" ou sua concavidade. Vamos iniciar nosso estudo pelas inequações de 1º grau que já conhecemos e depois vamos partir para as inequações de 2º grau.

INEQUAÇÃO DE 1º GRAU

Temos uma inequação de primeiro grau quando o grau do x que envolve essa inequação é 1, assim teremos uma inequação linear. Disso você deve lembrar, certo? Agora vamos analisar a inequação abaixo.

$$f(x) = -3x + 6 \geq 0$$

Essa inequação busca encontrar valores de x que fazem com que a função f(x) seja positiva (veja que o sinal indica maior ou igual a zero). Como já foi dito, não precisamos construir uma tabela para ver quais valores obteremos para f(x) variando o x, basta analisarmos o gráfico. Por isso, vamos iniciar encontrando a solução dessa inequação:

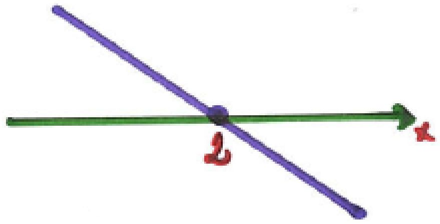
$$-3x + 6 \geq 0$$

$$-3x \geq -6$$

$$-x \geq -\frac{6}{3}$$

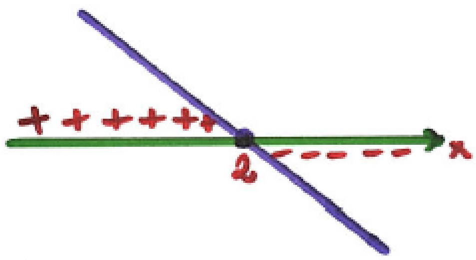
$$x \geq 2$$

Encontramos que x deve ser maior ou igual a 2. O sinal maior ou igual indica que o 2 está incluso na solução. A forma de representarmos isso no gráfico é preenchendo a bolinha que indica o número 2. Além disso, o coeficiente a dessa inequação vale -1, ou seja, é menor do que zero. Vimos no nosso estudo de funções de 1º grau que quando $a < 0$ a função é decrescente (reta descendo). Vamos construir o gráfico com essas informações:



Veja que nem é necessário traçarmos o eixo y, já que não teremos valores para marcar, por isso é bastante comum que façamos o gráfico de funções com inequações apenas traçando o eixo x. Não se apavore, é a mesma coisa de antes, ok?

Mas lembre que a função está pedindo valores maiores ou iguais a zero, por isso precisamos estudar o sinais desse gráfico. Não se engane pensando que, como 2 é maior do que zero, a resposta é essa! Lembre que o sinal da função é analisado olhando para o que está cima e o que está abaixo do eixo x. Então, no nosso caso, a função ficará acima do eixo x. Isso significa que ela é positiva para valores de x até 2 e negativa para valores a partir de 2. Veja o gráfico:



Então, o problema solicita valores maiores ou iguais a 0, ou seja, positivos, e para isso x deve ser menor ou igual a 2. Você deve lembrar que a notação correta é:

$$S = \{x \in \Re \mid x \leq 2\} \; para \; f(x) \geq 0$$

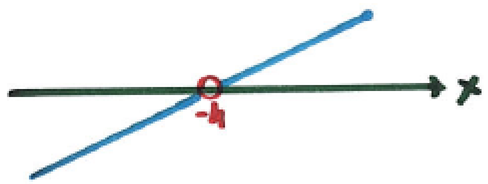
Pode parecer complicado no início, mas você vai pegar o jeito. Sempre analise o gráfico e você entenderá o resultado. Vamos analisar outro problema; veja o caso em que queremos obter uma função positiva (sinal maior do que zero):

$$f(x) = x + 4 > 0$$

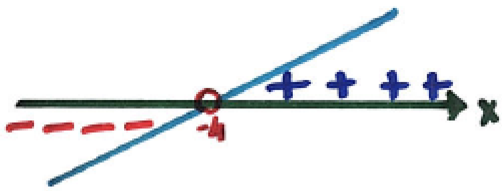
Perceba que agora a função solicita valores maiores do que zero e não maiores ou iguais a zero, ok? Para resolvê-la, vamos iniciar encontrando a raiz:

$$x + 4 > 0$$
$$x > -4$$

Veja que x deve ser maior do que -4; para representarmos essa informação no gráfico vamos utilizar uma bolinha sem preenchimento no lugar do -4, que se chama intervalo aberto. Analisando o coeficiente a, vemos que a função é crescente (já que nesse caso a > 0). Podemos construir o gráfico dessa função a partir dessas informações. Veja:



E a análise dos sinais dessa função, feita a partir do gráfico, ficará dessa forma:



Novamente você precisa prestar muita atenção do que está sendo dito na função. Para sabermos para quais valores de x a função é positiva, precisamos analisar os sinais. Lembre que o que está acima do eixo x é positivo e o restante é negativo, mas atente para um detalhe: nesse caso temos uma bolinha "aberta" no -4, então a função será negativa para valores menores que -4 e positiva para valores maiores do que -4. A diferença é sutil, mas em nenhum dos casos o -4 foi incluído, ok? Portanto, a solução para o problema que solicita valores positivos (f(x) > 0) é:

$$S = \{x \in \Re \mid x > -4\} \; para \; f(x) > 0$$

INEQUAÇÃO DE 2º GRAU

Agora que estamos bastante familiarizados com equações de 1º e 2º graus, já que analisamos funções desse tipo e inequações de 1º grau, vai ser moleza entender inequações de 2º grau, que são basicamente funções que aplicam equações de segundo grau diferentes de zero. Novamente não precisaremos construir tabelas para entendermos o comportamento dessas funções; basta analisarmos os coeficientes, as raízes e traçarmos o gráfico entendendo o comportamento dos sinais. Vamos aplicar todos os conhecimentos que aprendemos anteriormente no problema abaixo:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 > 0$$

Assim como fizemos nos exemplos de funções aplicadas a inequações de 1º grau, vamos encontrar as raízes dessa inequação de 2º grau. Apesar daquele sinal "estranho", podemos aplicar Bhaskara normalmente (ou soma e produto, caso você prefira) para encontrá-las. Vamos encontrar o discriminante, veja que a = 1, b = -6 e c = 8:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(8)$$
$$\Delta = 36 - 32$$
$$\Delta = 4$$

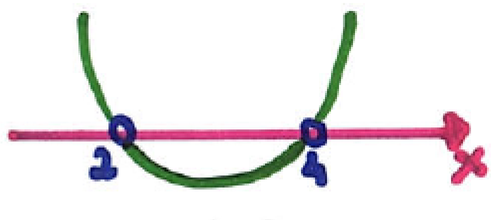
Como o discriminante é maior do que zero, sabemos que teremos duas raízes reais e distintas; vamos aplicar a fórmula de Bhaskara para encontrá-las:

$$x = \frac{-\ b \ \pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

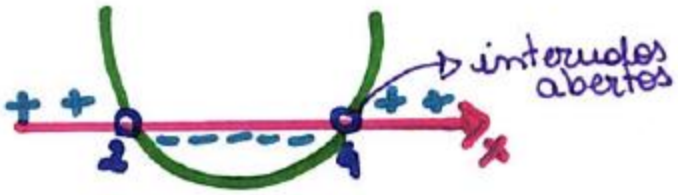
$$x = \frac{-\ (-6) \ \pm\sqrt{4}}{2\,(1)}$$

$$x = \frac{6 \ \pm \ 2}{2} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x' = \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ x'' = \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

Agora você precisa lembrar o que são, conceitualmente, as raízes de uma (in)equação. O que acontecerá se substituirmos os valores das raízes na inequação? O resultado deve ser zero, certo? Se não for zero, não é raiz. Lembre que o problema está pedindo por valores MAIORES do que zero, portanto, quando formos expressar essas raízes no gráfico, será necessário fazer a bolinha sem preenchimento, para que esses valores não sejam incluídos na solução. Outra informação que a função nos fornece é o coeficiente a, que é maior do que zero, então a concavidade da função será para cima. Sabendo as raízes e sabendo a concavidade, já podemos esboçar o gráfico dessa função:



Lembre-se que não precisamos expressar o eixo y nessa representação, mas devemos fazer a análise do sinal da função. Então, o que está acima do eixo x é positivo e o que está abaixo é negativo. No nosso caso, até o 2 é positivo (sem incluir o 2) e depois do 4 também (sem incluir o 4). O que está entre 2 e 4 (sem incluí-los) é negativo. Veja como fica a representação:



Note que o problema solicita valores maiores do que zero, então o conjunto solução dessa inequação deve abranger apenas os intervalos positivos que vemos no gráfico. Por isso, x é positivo para valores menores do que 2 e para maiores do que 4. Representamos essa solução na forma:

$$S = \{x \in \Re \mid x < 2 \text{ e } x > 4\} \text{ para } f(x) > 0$$

Vamos resolver o problema abaixo, que tem uma cara um pouco diferente:

$$f(x) = -x^2 + 4 \leq 0$$

Nosso primeiro passo é analisar o discriminante. Perceba que os coeficientes são a=-1, b=0 e c=4, já que temos uma inequação de 2º grau incompleta. Então vamos lá:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (0)^2 - 4(-1)(4)$$
$$\Delta = 16$$

Como o discriminante é maior do que zero, já sabemos que vamos obter duas raízes reais e distintas. Portanto, aplicando a Bhaskara, teremos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$

$$x = \frac{\pm 4}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Agora lembre que o problema pede por valores menores ou iguais a zero, então essas nossas raízes podem fazer parte da resposta, concorda? Se as substituirmos na função, teremos zero como resultado, mas, como os valores aceitos são os menores ou iguais a zero, está tudo bem. Então, os valores -2 e 2 serão representados no gráfico como bolinhas preenchidas. Além disso, analisando o coeficiente a, sabemos que a concavidade da função será para baixo (já que a < 0). Com essas informações podemos esboçar o gráfico:

Veja que os valores abaixo de -2 (incluindo -2) são negativos e os valores acima de 2 (incluindo 2) também são negativos. A parte positiva está entre -2 e 2, incluindo ambos. Perceba:

Note que, para satisfazer a desigualdade, é necessário que os valores sejam menores ou iguais a zero. Então, o conjunto solução NÃO inclui a parte entre -2 e 2, mas os valores abaixo de -2 e acima de 2. Veja como esse conjunto solução é representado:

$$S = \{x \in \Re \mid x \leq -2 \text{ e } x \geq 2\}$$

Bastante parecido com todas as outras inequações sobre as quais já conversamos, certo? Para resolver problemas desse tipo você precisa prestar atenção nos detalhes. São eles que vão definir se a função cresce ou decresce, se é de 2º grau ou se é uma inequação. Então, a grande dica não é decorar, mas entender e se concentrar!

Faça os exercícios abaixo:

(UFG - 2003 - adaptada) Um posto de combustíveis vende em média 2.140 litros de gasolina, por dia, a R$ 1,75 por litro. O proprietário constatou que, ao reduzir o preço do litro, ocorre um aumento no volume de combustível vendido, na proporção de 20 litros vendidos a mais por dia, para cada centavo de redução no preço do litro. Com base no exposto, determine o maior desconto que o posto pode dar sem diminuir sua arreacadação diária.

a) 28 centavos

b) 48 centavos

c) 68 centavos

d) 88 centavos

e) 1,08 reais

Alternativa correta: C

Módulo: INPS – Inequações de Primeiro e Segundo Grau

Lista: INPSEX – Exercícios de Fixação #1

(UEG - 2012 - adaptada) Em um terreno, na forma de um triângulo retângulo, será construído um jardim retangular, conforme figura abaixo. Sabendo-se que os dois menores lados do terreno medem 9 m e 4 m, quais as possíveis dimensões do menor lado do jardim para garantir que a sua área seja maior que $6,75m^2$?

a) Entre 1m e 3m

b) Entre 2m e 4m

c) Entre 1m e 4m

d) Maior que 1m

e) Maior que 2m

Alternativa correta: A

Módulo: INPS – Inequações de Primeiro e Segundo Grau

Lista: INPSEX – Exercícios de Fixação #6

Resolva a seguinte inequação: -6(2x-5)+1 > -4 -2(7-x)

a) x > 3,5

b) x < 3,5

c) x > 2

d) x < -2

e) x < -3,5

Alternativa correta: B

Módulo: EINQ – Exercícios de Inequações

Lista: EINQEX – Exercícios de Fixação #2

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.