FUNÇÕES II
EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ IXPN - Introdução a exponenciais
- ✓ EQXP - Equações exponenciais (redução de base)
- ✓ LOGT - Logaritmos
- ✓ PLOG - Propriedades dos logaritmos
- ✓ EQLG - Equações logarítmicas
- ✓ FEXP - Funções exponenciais
- ✓ FLOG - Funções logarítmicas
- ✓ EXLG - Exercícios de Exponenciais e Logaritmos
- ✓ INXP - Inequações logarítmicas e exponenciais

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	FUNÇÕES II
PROFESSORES	TAMARA SALVATORI, ARTHUR LOVATO

FUNÇÕES II

INTRODUÇÃO A EXPONENCIAIS

Você deve lembrar que encontramos uma forma bastante simples de representar números iguais que são multiplicados repetidamente. Por exemplo: 3.3.3.3.3.3.3 pode ser representado como 37 e lido como "3 elevado ao expoente 7" (ou "3 elevado à 7ª potência"). Então, quando temos um número elevado a algum expoente, podemos dizer que temos uma exponencial. No mundo real é muito comum que fenômenos sejam descritos por exponenciais. O número de bactérias em uma colônia, por exemplo, cresce exponencialmente com o tempo; o decaimento da radioatividade de um elemento químico é descrito como uma exponencial decrescente, entre outros diversos exemplos. Justamente por ser tão comum é que é necessário que estudemos as particularidades das exponenciais, mas antes vamos fazer uma breve revisão das propriedades de potenciação que já aprendemos.

- ✓ Multiplicação de potências: quando temos bases iguais, podemos somar os expoentes mantendo a base. Veja:

$$3^2.3^3 = 3^{(2+3)} = 35.$$

Divisão de potências: quanto temos bases iguais, podemos subtrair os expoentes, mantendo a base. Acompanhe:

$$\frac{3^3}{3^2} = 3^{(3-2)} = 3^1$$

- ✓ Potência de potência: nessa situação basta multiplicar os expoentes. Veja um caso:

$$(3^3)^2 = 3^{(3.2)} = 3^6$$

Mas, se não tivéssemos parênteses, resolveríamos "de cima para baixo", ou seja, primeiro a potência da potência, depois o restante. Acompanhe:

$$3^{3^2} = 3^9$$

Vamos fazer alguns exercícios:

5^{-4} equivale a:

a) 1/20

b) 1/-20

c) 1/125

d) 1/625

e) -625

Alternativa correta: D

Módulo: IXPN – Introdução a Exponenciais

Lista: IXPN04EX – Exercícios de Compreensão #2

$16^{-0,5} =$

a) 4

b) -4

c) ¼

d) 1/-4

e) ½

Alternativa correta: C

Módulo: IXPN – Introdução a Exponenciais

Lista: IXPN06EX – Exercícios de Compreensão #2

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS (REDUÇÃO DE BASE)

Depois de alguns anos você voltou à sua antiga escola para rever os professores e descobriu que havia ficado com uma pendência na biblioteca. A bibliotecária informou que a multa era de R$ 2,00 no primeiro ano, R$ 4,00 no segundo, R$ 8,00 no terceiro e assim por diante, até chegar em R$ 32,00. Como descobrir há quanto tempo você ficou devendo? Vamos reescrever essas informações matematicamente, utilizando expoentes:

$$
\begin{array}{lcl}
1^{\circ}\text{ ano} & \rightarrow & 2{,}00 = 2^1 \\
2^{\circ}\text{ ano} & \rightarrow & 4{,}00 = 2^2 \\
3^{\circ}\text{ ano} & \rightarrow & 8{,}00 = 2^3 \\
x^{\circ}\text{ ano} & \rightarrow & 32{,}00 = 2^x
\end{array}
$$

Veja que temos uma variável na última linha, o x, e precisamos encontrá-lo para saber quantos anos você ficou devendo. Assim, podemos montar a seguinte equação:

$$2^x = 32$$

De um lado da igualdade temos base 2 e do outro temos base 32, mas podemos fatorar o 32 para tentarmos reescrevê-lo na base 2. Vamos fazer esse procedimento:

$$
\begin{array}{r|l}
32 & 2 \\
16 & 2 \\
8 & 2 \\
4 & 2 \\
2 & 2 \\
1 & 2^5
\end{array}
$$

Então, como podemos reescrever 32 como 25, vamos substituir esse valor na primeira equação. Esse procedimento é chamado de redução de base e permite que problemas que envolvem equações exponenciais sejam resolvidos.

$$2^x = 2^5$$

Agora que temos bases iguais, vamos “cortá-las”, já que o nosso interesse está no expoente. Depois de cortarmos as bases, podemos igualar os expoentes:

$$x = 5 \ anos$$

Então, você ficou devendo por 5 anos e por isso a multa chegou a R$ 32,00!

Essa equação exponencial foi bastante simples de resolver, mas nem sempre será assim. Podem aparecer expoentes mais complexos e você precisará resolver equações de 1º ou de 2º graus. Como exemplo, encontre o valor de x da equação abaixo:

$$3^{(3x-4)} = 9$$

O primeiro passo é realizar a redução da base do lado direito da igualdade, ou seja, fatorar o número 9.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & 3^2 \end{array}$$

Agora você pode substituir o número fatorado na equação e cortar as bases, já que serão iguais, certo?

$$3^{(3x-4)} = 9$$
$$3^{(3x-4)} = 3^2$$

Igualando os expoentes, teremos uma equação de primeiro grau para resolver. Lembre que, nesse caso, basta isolar o x para conseguir encontrá-lo.

$$3x - 4 = 2$$
$$3x = 2 + 4$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3}$$
$$x = 2$$

Então, o valor de x é 2! Equações exponenciais têm uma cara pouco amigável, mas não são tão complexas quanto parecem. Sempre tente aplicar as propriedades de potenciação e realizar a redução de base para iniciar a resolução.

Teste o que você aprendeu até agora:

$7^{x-3} = 7$, o único valor de x que satisfaz a igualdade é:

a) 1

b) -1

c) -4

d) 4

e) 0

Alternativa correta: D

Módulo: IXPN – Introdução a Exponenciais

Lista: IXPN04EX – Exercícios de Compreensão #2

Para que a equação abaixo seja verdadeira, o valor correto de X é: $2^{x+x} = 4$

a) 4

b) -4

c) 2

d) -2

e) 1

Alternativa correta: E

Módulo: EQXP – Equações Exponenciais (redução de base)

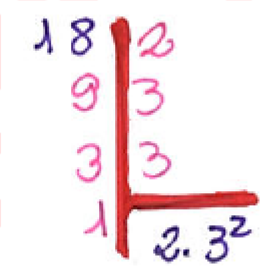
Lista: EQXP04EX – Exercícios de Compreensão #2

LOGARITMOS

Na mesma visita que você fez à escola, você soube que seu primo também esqueceu de pagar a multa da biblioteca, que também iniciou em R$ 2,00. Como ele havia retirado mais livros do que você, o crescimento da dívida não foi o mesmo e ele estava devendo R$ 18,00. Quanto tempo ele ficou devendo? Vamos atacar esse problema montando uma equação exponencial como do problema anterior:

$$2^x = 18$$

Lembre que o primeiro passo é aplicar a redução de base, certo? Então vamos fatorar o número 18:



Substituindo o número fatorado na equação teremos:

$$2^x = 2.3^2$$

Perceba que agora **não** temos bases iguais, então como faremos esse cálculo? Vamos conhecer uma operação para podermos resolver este tipo de problema, o chamado logaritmo.

Vamos deixar um pouco de lado o nosso problema para iniciarmos o estudo dos logaritmos com um exemplo mais simples. Vimos anteriormente que o resultado de 2x = 32 é 25 = 32, já que x = 5, certo? Quando tratamos de logaritmos, essa expressão pode ser reinterpretada como “5 é logaritmo de 32 na base 2”, ou, ainda, pode ser reescrita como:

$$\log_2 32 = 5$$

Que é o mesmo que: 25 = 32. Para você saber como montar o logaritmo, veja o esquema, que alguns gostam de chamar de “orelhinha”:

$$\log_2 32 = 5 \rightsquigarrow 2^5 = 32$$

Então, saindo do 2 e indo até o resultado, chegamos ao logaritmando. Veja que o logaritmo é equivalente à exponencial:

$$\log_2 32 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2^5 = 32$$

Sabendo disso, vamos conhecer como se chama cada um dos termos do logaritmo:

$$\log_a b = c$$

- ✓ a é a base e deve ser $a \neq 1$ e $a > 0$;
- ✓ b é o logaritmando e deve ser $b > 0$;
- ✓ c é o logaritmo;

Assim, podemos dizer que c é o logaritmo de b na base a.

Será bastante comum a utilização de base igual a 10, como:

$$\log_{10} 200 = x \quad \Leftrightarrow \quad 10^x = 200$$

Fique atento, pois, assim como quando temos um expoente 1 podemos omití-lo, quando temos base decimal também podemos omití-la, o que ficaria como log 200 = x, apenas. A frequência na utilização de bases 10 ocorre, em geral, porque os exercícios fornecem esses valores no enunciado, ou, ainda, porque são facilmente encontramos na sua calculadora científica (que vem de fábrica com a possibilidade de resolução de logaritmos de base decimal). Outra base que aparece com alguma regularidade é a e, o número de Euler, que vale 2,71828182846, mas não se preocupe com isso agora.

Apesar de saber tudo isso, ainda não estamos prontos para resolver nosso problema inicial, então vamos estudar um pouco sobre as consequências da definição dos logaritmos.

Consequências da definição de logaritmo

✓ $\log_a 1 = 0$, para a > 0 e a ≠ 1.

Exemplo:

$$\log_2 1 = x \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$$

✓ $\log_a a = 1$, para a ≠ 1.

Exemplo:

$$\log_2 2 = x \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$$

✓ $\log_a a^n = n$, para a > 0, a ≠ 1 e n $\in \Re$.

Exemplo:

$$\log_2 2^3 = x \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$$, para a > 0, a ≠ 1, b > 0 e c > 0.

Exemplo:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b$$
$$\log_a c = x \Rightarrow a^x = c$$
$$b = c$$

✓ $$a^{\log_a b} = b$$, para a > 0, a ≠ 1 e b > 0.

Exemplo:

$$2^{\log_2 3} = 3$$

Esses consequências são bastante úteis para podermos manipular os problemas que envolvem logaritmos sem sair fazendo conta adoidado. Agora vamos estudar outras propriedades que são essenciais na resolução de logaritmos.

Vamos praticar!

O valor de $\log_2 64$ é:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

e) 1

Alternativa correta: B

Módulo: LOGT – Logaritmos

Lista: LOGT04EX – Exercícios de Compreensão #1

O valor de Y na expressão $\log_3 Y = 3$ é

a) 1

b) 3

c) 9

d) 27

e) 81

Alternativa correta: D

Módulo: LOGT - Logaritmos

Lista: LOGT06EX – Exercícios de Compreensão #1

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

- ✓ Logaritmo do produto - quando temos uma multiplicação no logaritmando, podemos abri-la como uma soma de logaritmos mantendo a mesma base. Exemplo:

$$\log_2(5.3) = \log_2 5 + \log_2 5$$

Formalmente: $$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

- ✓ Logaritmo do quociente - quando temos uma divisão no logaritmando, podemos abri-la como uma subtração de logaritmos. Exemplo:

$$\log_2\left(\frac{5}{3}\right) = \log_2 5 - \log_2 3$$

Formalmente:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

- Logaritmo de potência – quando temos uma potência no **logaritmando**, passamos esse valor para frente do log. Então, sempre que você se deparar com essa situação, lembre que "o expoente vai para frente". Exemplo:

$$\log_2 3^4 = 4.\log_2 3$$

Formalmente: $$\log_a b^n = n.\log_a b$$

Note que isso não vale para quando o logaritmo inteiro está elevado a alguma potência, ok? Vale prestar atenção nisso.

Veja todas esses provas no Apêndice dessa apostila.

MUDANÇA DE BASE

A mudança de base é extremamente útil na resolução de problemas que envolvem logaritmos, pois facilmente podemos transformar a base de um logaritmo desconhecido em outro que convém. Então, veja:

Para mudar $\log_a b$ para base c, devemos fazer:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Lembrando que a > 0 e a ≠ 1, b > 0, c > 0 e c ≠ 1. Veja o exemplo em que temos base 2 e queremos mudar para base 5, assim c = 5:

$$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$$

Parece complicado, mas com treino e fazendo vários exercícios você vai lembrar dessas jogadas facilmente.

Resolva o exercício:

(UFRGS) - Dada a expressão S = log 0,001 + log 100, o valor de S é

a) -3

b) -2

c) -1

d) 0

e) 1

Alternativa correta: C

Módulo: PLOG – Propriedades dos Logaritmos

Lista: PLOGEX – Exercícios de Fixação #3

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS RESOLVIDAS COM LOGARITMOS

Agora que já sabemos tudo isso sobre os logaritmos, podemos resolver o nosso problema original. Vamos relembrá-lo:

$$2^x = 18$$

Lembre que, mesmo realizando a redução de base, não encontramos bases iguais nos dois lados da igualdade. Então, para podermos resolver esse problema, devemos aplicar logaritmos! Veja a equivalência entre a exponencial e o logaritmo:

$$2^x = 18 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 18 = x$$

Perceba que a base desse logaritmo é 2, então, para facilitar nossa vida utilizando a calculadora científica, vamos fazer uma mudança de base para a decimal, ou seja, para base 10. Nesse caso, a = 2, b = 18 e c = 10. Acompanhe abaixo:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_2 18 = \frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 2}$$

Realizando os cálculos separadamente, teremos que log 18 = 1,25 e que log 2 = 0,30 (a base 10 pode ser omitida, ok?). Então, substituindo esses valores, teremos:

$$\frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 2} = \frac{1{,}25}{0{,}30} = 4{,}16$$

Assim, como x = 4,16, seu primo ficou devendo por pouco mais de 4 anos a multa da biblioteca.

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

No primeiro problema tínhamos a equação exponencial 2x = 32 e podíamos reescrevê-la como $\log_2 32 = 5$ com o objetivo de encontrar o número de anos que você ficou devendo na biblioteca. Seguindo este raciocínio, se soubéssemos quantos anos você ficou devendo, mas não qual era o valor da multa inicial, poderíamos montar a equação x5 = 32 e, para resolvê-la, poderíamos aplicar logaritmos. Veja:

$$\log_x 32 = 5$$

Perceba que agora temos uma incógnita na base, caracterizando uma equação logarítmica. Esse tipo de equação pode conter a incógnita na base, no logaritmando ou em ambos; para resolvê-la é necessário primeiramente analisar as condições de existência, ou seja, $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$.

Vamos resolver essa equação logarítmica iniciando pela análise das condições de existência. Como a incógnita está na base, vamos analisar se $a > 0$ e $a \neq 1$. Veja

$$\log_x 32 = 5 \quad \rightarrow \quad x > 0 \text{ e } x \neq 1$$

Agora vamos resolver a equação em si, utilizando o esqueminha das setas:

$$\log_x 32 = 5$$
$$x^5 = 32$$
$$\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{32}$$
$$x = \sqrt[5]{32}$$
$$x = 2$$

Lembre que depois disso é necessário comparar a resposta com a condição de existência. Nesse caso, x deveria ser maior do que 0 e diferente de 1. Como encontramos $x = 2$, então essa é a solução dessa equação.

Vamos analisar outra equação logarítmica:

$$\log_{(x-1)} 4 = 2$$

Como novamente a incógnita se encontra na base, faremos a análise da condição de existência a partir de $a > 0$ e $a \neq 1$. Então:

$$x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1$$
$$x - 1 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2$$

Agora vamos fazer o esqueminha para podermos resolver a equação:

$$\log_{(x-1)} 4 = 2$$
$$(x-1)^2 = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 = 4$$
$$x^2 - 2x + 1 - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Perceba que temos aqui uma equação de 2º grau, logo, antes de mais nada, vamos analisar seu discriminante. Perceba que os coeficientes dessa função são a = 1, b = -2 e c = -3. Não confunda esses coeficientes com os termos do logaritmo, ok? Seu discriminante será:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(-3)$$
$$\Delta = 4 + 12$$
$$\Delta = 16$$

Portanto, sabemos que essa equação de 2º grau possui duas raízes reais e distintas. Vamos aplicar Bhaskara para encontrá-las:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2.(1)}$$
$$x = \frac{4 \pm 4}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{4+4}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x'' = \dfrac{4-4}{2} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases}$$

Então uma raiz vale 4 e a outra vale 0, mas lembre que vimos que a condição de existência é x ser maior do que 1 e diferente de 2. Isso significa que a solução para essa equação logarítmica é apenas S = {4}, ok?

Vamos ver agora um exemplo um pouco diferente, com a incógnita no logaritmando:

$$\log_2(x^2+x-6) = \log_2(3x+2)$$

Primeiramente é necessário analisar as condições de existência. Como agora a incógnita está no logaritmando, temos que ver se b > 0 em ambos os lados da igualdade. Veja que temos uma equação de 2º grau no lado esquerdo e, para avaliarmos a condição de existência, é necessário encontrar suas raízes.

$$x^2 + x - 6 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$\Delta = 1^2 - 4.(1).(-6) \qquad x = \frac{-(1) \pm \sqrt{25}}{2.(1)}$$

$$\Delta = 1 + 24 \qquad x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$\Delta = 25 \qquad x = \frac{-1 \pm 5}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ x'' = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

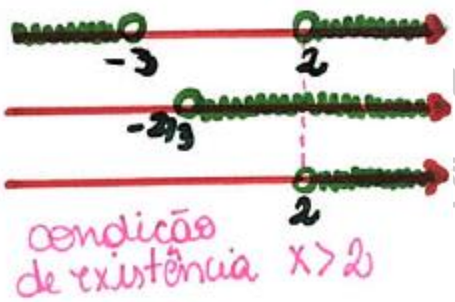
O mesmo procedimento deve ser aplicado à equação de 1º grau do lado direito da igualdade.

$$3x + 2 > 0$$

$$3x > -2$$

$$x > \frac{-2}{3}$$

De posse dessas raízes, vamos analisar a condição de existência montando um gráfico. No primeiro caso, temos que as raízes são -3 e 2, então a condição de existência para a equação 1 é ser menor que -3 e maior do que 2 (perceba que o intervalo é aberto, ou seja, não inclui -3 e 2). No segundo caso, a raiz é -2/3, então x deve ser maior do que -2/3 (também intervalo aberto). Vamos colocar essas três condições em um gráfico e analisar o que acontece na união entre elas:



Note que para a condição de existência ser válida para ambas equações é necessário que x seja maior do que 2. Qualquer outra possibilidade, como x ser menor do que -3, não inclui a condição da segunda equação e por isso não é verdadeira. Então, sabendo que x deve ser maior do que 2, podemos finalmente resolver a equação logarítmica. Para facilitar os cálculos, você precisará lembrar da propriedade abaixo

$$\log_a b = \log_a c$$
$$b = c$$

Teremos que:

$$\log_2(x^2+x-6) = \log_2(3x+2)$$
$$x^2+x-6 = 3x+2$$

Manipulando essa equação, chegaremos a uma outra equação de 2º grau:

$$x^2 + x - 6 = 3x + 2$$
$$x^2 + x - 6 - 3x - 2$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

Primeiramente, vamos analisar o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(-8)$$
$$\Delta = 4 + 32$$
$$\Delta = 36$$

Agora sabemos que essa equação possui duas raízes reais e distintas, então vamos encontrá-las a partir da fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2.(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \dfrac{2+6}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x'' = \dfrac{2-6}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

Veja que uma raiz é 4 e a outra é -2, mas a condição de existência diz que x deve ser maior do que 2. Portanto, a solução dessa equação logarítmica é apenas S = {4}.

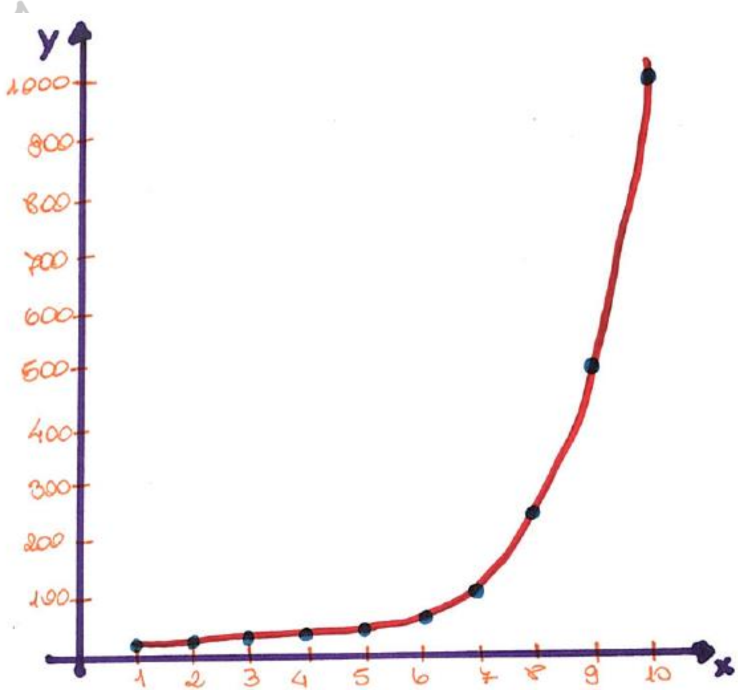
FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Vamos relembrar a equação exponencial que descreve o nosso problema inicial da multa da biblioteca, $2^x = 32$. Antes o nosso objetivo era descobrir há quantos anos você devia, já que a multa chegou a R$ 32,00. Mas e se quiséssemos saber quanto seria essa multa em 10, em 12 ou em 15 anos? Seria possível calcular o valor da multa se substituíssemos esses valores no x – você consegue notar? Então, teríamos o valor da multa em função do tempo. Portanto, teríamos uma função exponencial, já que temos uma função baseada em uma equação exponencial, f(x) = 2x. O conceito é o mesmo de quando trabalhamos com funções de 1º e de 2º graus e elas eram descritas por equações de 1º e de 2º graus, mas agora temos a forma geral como f(x) = ax, sendo a > 0 e a ≠ 1. No caso do problema que estamos abordando, a = 2, portanto é maior do que zero e diferente de 1.

Vamos iniciar nosso estudo arbitrando valores para x (anos) e aplicando-os na função para saber qual é o valor de y (multa). Acompanhe a tabela:

x	$f(x) = 2^x$	y
1	$f(1) = 2^1$	2
2	$f(2) = 2^2$	4
3	$f(3) = 2^3$	8
4	$f(4) = 2^4$	16
5	$f(5) = 2^5$	32
6	$f(6) = 2^6$	64
7	$f(7) = 2^7$	128
8	$f(8) = 2^8$	256
9	$f(9) = 2^9$	512
10	$f(10) = 2^{10}$	1024

Perceba que tanto os valores de x quanto os valores de y estão crescendo; isso significa que temos uma função crescente. Veja como ela se comporta em um gráfico traçado a partir dos valores calculados na tabela (analise da esquerda para a direita):



Sempre que você tiver o coeficiente a maior do que zero, terá uma função exponencial crescente.

Perceba que o crescimento de uma função exponencial acontece muito mais rapidamente do que aconteceria se tivéssemos uma função linear, concorda? Dê uma olhada na apostila de Funções I e compare.

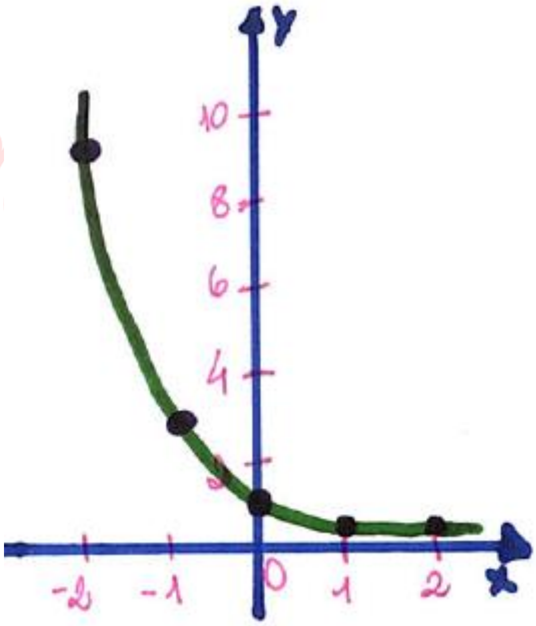
Vamos analisar agora uma função que tenha o valor de a entre zero e 1. Veja:

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Para a construção da tabela, vamos arbitrar alguns poucos valores para x:

x	$f(x) = (1/3)^x$	y
-2	$f(-2) = (1/3)^{-2}$	9
-1	$f(-1) = (1/3)^{-1}$	3
0	$f(0) = (1/3)^0$	1
1	$f(1) = (1/3)^1$	0,33
2	$f(2) = (1/3)^2$	0,11

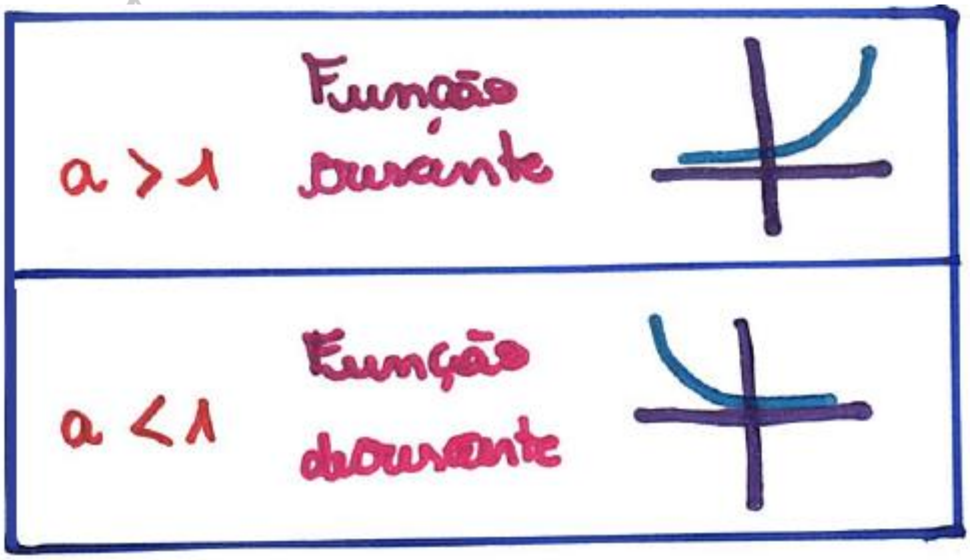
Podemos traçar o gráfico dessa função a partir desses valores:



Veja que temos agora uma função decrescente (sempre analise do lado esquerdo para o direito), que está “caindo”. Isso sempre acontecerá quando o coeficiente a estiver entre zero e um.

Note também que, por estarmos trabalhando com uma exponencial, sua função nunca resultará em zero ou em valores negativos para y. Além disso, ela possui função inversa, o que estudaremos em seguida.

Veja o esquema abaixo sobre o comportamento das funções exponenciais de acordo com o coeficiente a:



FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

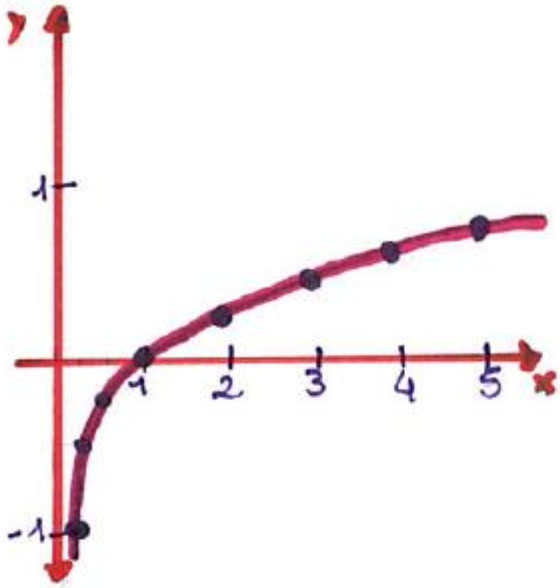
Assim como funções exponenciais são descritas a partir de equações exponenciais, equações logarítmicas nos permitem descrever funções logarítmicas. Lembre que, no caso das equações logarítmicas, as incógnitas podem aparecer tanto na base quanto no logaritmando, mas as funções logarítmicas são descritas por equações que contém a incógnita no logaritmando, descritas por $f(x) = \log_a x \quad ou \quad y = \log_a x$, com a > 0 e a ≠ 1 (lembrando que essa é uma das condições de existência). Vamos analisar a função abaixo:

$$f(x) = \log_{10} x$$

Veja que a = 10, então é maior do que zero e diferente de 1. Para podermos construir a tabela e analisarmos o comportamento dessa função, vamos arbitrar os valores de x:

x	$f(x) = \log_{10} x$	y
0,1	$f(0,1) = \log_{10} 0,1$	-1
0,5	$f(0,5) = \log_{10} 0,5$	-0,30
1	$f(1) = \log_{10} 1$	0
2	$f(2) = \log_{10} 2$	0,30
3	$f(3) = \log_{10} 3$	0,47
4	$f(4) = \log_{10} 4$	0,60
5	$f(5) = \log_{10} 5$	0,69

Perceba que enquanto os valores de x crescem, os valores de f(x) – ou de y, como você preferir chamar – também apresentam crescimento. Dessa forma sabemos que a função é crescente. Note também que utilizamos apenas valores maiores do que zero para x porque ele é o logaritmando e, a partir das condições de existência, sabemos que ele não pode ser menor do que zero. Vamos traçar o gráfico a partir dos valores da tabela:



Outra forma de enxergar que a função é crescente é analisando a curva do gráfico da esquerda para a direita. Perceba que ela está subindo, portanto é crescente.

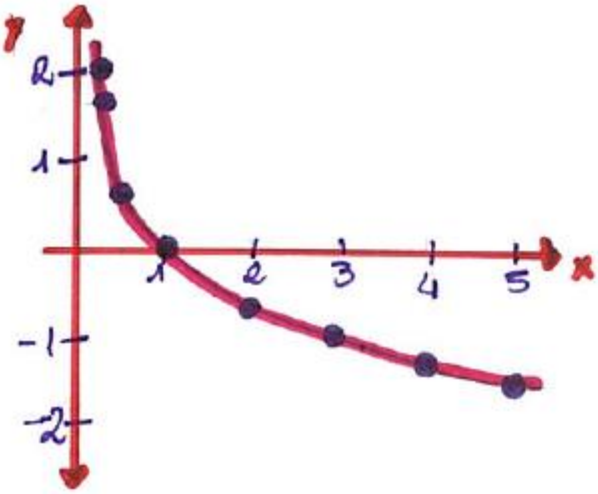
Agora vamos analisar outra função:

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

Veja que a = 1/3 é igual a 0,33, assim a está entre zero e um – o que está certo, já que o que não pode acontecer é ser 1 ou menor do que zero. Vamos construir a tabela a partir de valores arbitrários para x:

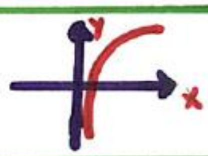
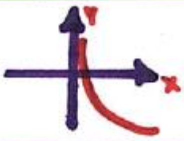
x	$f(x) = (1/3)^x$	y
-2	$f(-2) = (1/3)^{-2}$	9
-1	$f(-1) = (1/3)^{-1}$	3
0	$f(0) = (1/3)^0$	1
1	$f(1) = (1/3)^1$	0,33
2	$f(2) = (1/3)^2$	0,11

Perceba que enquanto os valores de x crescem, os valores de y decrescem, então essa função é decrescente. Vamos traçar o gráfico a partir dos valores da tabela para termos essa informação visualmente:



Analisando o gráfico da esquerda para a direita, percebemos que a função está “decaindo” ou decrescendo, corroborando o que havíamos dito anteriormente.

Podemos dizer, a partir dessas duas funções, que quando temos a > 0 a função é crescente, e quando temos 0 < a < 1 a função é decrescente. Veja o esqueminha abaixo:

$a > 1$	Função crescente	
$0 < a < 1$	Função decrescente	

Perceba que a função logarítmica nunca toca ou ultrapassa o eixo y. Além disso, se fizermos a inversa dessa função, ou seja, f(x)-1, obteremos ax, a função exponencial. Portanto, a função logarítmica tem como inversa a função exponencial.

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Anteriormente estudamos equações exponenciais e logarítmicas, ou seja, expressões que envolviam igualdade. Mas às vezes não precisamos necessariamente de valores exatos, podemos simplesmente ter um intervalo em que a equação é válida e é aí que entram as inequações exponenciais e logarítmicas, expressões que envolvem desigualdade. No fim das contas, você perceberá que a resolução de inequações não é muito diferente das equações, mas é necessário atentar para alguns detalhes. Vamos analisá-las separadamente.

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Vamos analisar a inequação abaixo. Perceba que ela é caracterizada por haver um sinal de maior ou igual (poderia ser apenas maior, apenas menor ou menor e igual):

$$5^{3x} \geq 25^{x+2}$$

O primeiro passo é realizar a redução de base. Vamos fazer isso do lado direito da inequação. Fatorando 25, teremos:

25	5
5	5
1	5^2

Agora o procedimento é o mesmo que vimos anteriormente. Basta substituir o valor fatorado na inequação, "cortar" as bases – que agora são iguais – e resolver a inequação.

$$5^{3x} \geq 5^{2(x+2)}$$
$$5^{3x} \geq 5^{2x+4}$$

$$3x \geq 2x + 4$$
$$3x - 2x \geq 4$$
$$x \geq 4$$

Portanto, x deve ser maior ou igual a 4 para satisfazer essa inequação.

Um detalhe bastante importante que você precisa lembrar é que se a desigualdade é invertida "a" estiver entre zero e 1. Caso você não lembre, volte à Apostila de Álgebra I.

INEQUAÇÃO LOGARÍTMICA

A resolução de inequações logarítmicas é bastante parecida com a de equações logarítmicas. Vamos ver isso na prática com a inequação abaixo:

$$\log_2(5x+10) \leq \log_2 45$$

Novamente o primeiro passo é analisar a condição de existência. Como a incógnita está no logaritmando, é necessário analisarmos se b > 0. Perceba que agora o sinal da inequação não está influenciando em nada; o sinal presente é da condição de existência. Então, acompanhe:

$$5x + 10 > 0$$
$$5x > 10$$
$$x > -2$$

Vamos guardar essa informação para mais tarde, ok? Perceba que temos logaritmos de mesma base em ambos os lados da inequação, portanto podemos utilizar a propriedade abaixo (que também é válida para desigualdades):

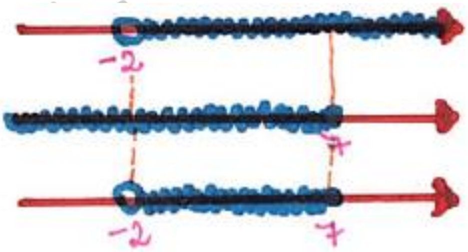
$$\log_a b \leq \log_a c \quad \rightsquigarrow \quad b = c$$

E resolver a inequação:

$$5x + 10 \leq 45$$
$$5x \leq 45 - 10$$
$$5x \leq 35$$
$$x \leq \frac{35}{5}$$
$$x \leq 7$$

Lembre-se: caso a estivesse entre zero e um, seria necessário inverter o sinal da inequação, ok?

Precisamos analisar a resposta a partir da condição de existência e do valor que encontramos para x. Veja os gráficos:



Perceba que o último gráfico é a intersecção entre a condição de existência e os valores possíveis para x. Então, o conjunto solução dessa inequação será:

$$S = \{x \in \Re \mid -2 < x \leq 7\}$$

A grande dica para você conseguir resolver inequações logarítmicas é lembrar das condições de existência. Se conseguir utilizar alguma propriedade, possivelmente sua conta vai reduzir bastante também. Assim, tenha calma! Não se apavore ao ver os símbolos e tudo vai dar certo, ok?

Resolva os exercícios:

(UFRGS)- A solução da equação

$\log_2(4-x)=\log_2(x+1)+1$ está no intervalo:

a) [-2;-1]

b) (-1;0]

c) (0;1]

d) (1;2]

e) (2;3]

Alternativa correta: C

Módulo: EQLG – Equações Logarítmicas

Lista: EQLGEX – Exercícios de Fixação #3

(UFRJ-2005) O número de bactérias em uma certa cultura dobra a cada hora. A partir da amostra inicial, são necessárias 24 horas para que o número de bactérias atinja uma certa quantidade Q de bactérias. Calcule quantas horas são necessárias para que a quantidade de bactérias nessa cultura atinja a metade de Q.

a) 8

b) 9

c) 11

d) 12

e) 23

Alternativa correta: E

Módulo: FEXP – Funções Exponenciais

Lista: FEXPEX – Exercícios de Fixação #2

A expressão $C(t) = A.2^t$ nos dá o montante de um capital inicial A, a uma certa taxa anual, após um período t de anos de aplicação. Nessas condições, após quanto tempo um capital de R$ 1500,00 produzirá o montante de R$ 3000,00?

a) 2 anos

b) 1 ano

c) 3 anos

d) 1 ano e 5 meses

Alternativa correta: B

Módulo: FEXP – Funções Exponenciais

Lista: FEXPEX – Exercícios de Fixação #4

(CESGRANRIO)- O conjunto solução da inequação $9 - x^2$ maior que 0 é:

a) $-3>x>3$

b) $-3<x<3$

c) $x=3$

d) $x<3$

e) $x>3$

Alternativa correta: B

Módulo: INXP – Introdução a Exponenciais

Lista: INXPEX – Exercícios de Fixação #2

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.