GEOMETRIA
PLANA I

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ IGEM - Introdução à geometria e figuras básicas
- ✓ CICA - Circunferências
- ✓ EGPL - Exercícios de geometria plana I

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	GEOMETRIA PLANA I
PROFESSORES	TAMARA SALVATORI, ARTHUR LOVATO

GEOMETRIA PLANA I

Nessa apostila faremos um estudo sobre o perímetro e as áreas das figuras geométricas planas, como quadrados, triângulos, losangos, círculos, etc. Como este é um campo bastante amplo, o estudo da geometria em duas dimensões foi dividido em três apostilas, para que possamos aprofundar nosso conhecimento e fazer relações entre essas formas. Por enquanto, divirta-se com os conceitos iniciais. Entendendo eles você verá que a geometria plana não é apenas um emaranhado de fórmulas, mas algo que intuitivamente você sabe podendo desenvolvê-la a partir do seu próprio conhecimento.

PERÍMETRO DE FORMAS GEOMÉTRICAS PLANAS

A placa abaixo contém um aviso que informa que naquele local é permitido o estacionamento de automóveis, desde que haja o pagamento de uma tarifa relacionada ao tempo de ocupação da vaga.

Provavelmente você conhece esse sistema, chamado de *Zona* ou *Área Azul*. Dependendo do município em que funciona, a Zona Azul tem como um dos objetivos permitir a ocupação de vagas de estacionamento nas áreas mais movimentadas da cidade por diversas pessoas, gerando maior rotatividade de veículos. Para a implementação desse sistema vários estudos são realizados, como uma pesquisa para saber em qual região as pessoas mais procuram estacionamento, qual a quantidade de veículos que circulam por lá, os horários de maior movimento, etc.

A imagem abaixo mostra parte de um mapa de uma cidade. As linhas sinuosas presentes nas quadras Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 e Q_5 demarcam os locais em que se pretende implementar o estacionamento rotativo (Zona Azul) e os números indicam o comprimento das quadras em metros. Considerando que, em média, cada vaga de estacionamento tem 5,50 m de comprimento, quantas delas poderiam ser implementadas de acordo com o planejamento apresentado na figura?

Vendo as quadras de cima, é possível perceber que cada uma delas tem uma forma geométrica. Uma das maneiras de saber a quantidade de vagas é calcular o *perímetro* das quadras, somar todos eles e dividir o resultado pelo tamanho médio das vagas. É bem simples! E fica ainda mais fácil se soubermos que o perímetro é apenas a soma de todos os lados da forma geométrica estudada e a figura fornece os comprimentos de cada um dos lados das quadras. Vamos iniciar as contas a cada quadra separadamente.

- ✓ **Perímetro Q_1:** Perceba que a forma geométrica envolvida aqui é um retângulo de lados com tamanho de 250 m (os dois maiores) e 50 m (os dois menores). Por isso, esse perímetro será P = 250 + 50 + 250 + 50 = 600 m, ou seja, a soma de todos os lados. Mas atenção: Apenas um dos lados faz parte da Zona Azul, um dos lados de 250 m. Então, apesar de o perímetro da Q_1 ser 600 m, o que nos interessa para fins de cálculo é só 250 m, ok?

- **Perímetro Q_2**: Essa quadra é um triângulo retângulo (a seguir veremos com mais detalhes os tipos de triângulo e na apostila de Geometria Plana II). Perceba que o seu perímetro será P = 60 + 80 + 100 = 240 m.

- **Perímetro Q_3:** Aqui temos uma forma chamada de trapézio. Por enquanto, basta sabermos que ela tem 4 lados e somarmos os valores fornecidos na figura para encontrar o perímetro, que será P = 90 + 90 + 80 + 10 = 270 m.

- **Perímetro Q_4:** Essa quadra é um quadrado, já que os lados têm o mesmo comprimento. Assim, o perímetro dela será: P = 110 + 110 + 110 + 110 = 440 m.

- **Perímetro Q_5:** Temos novamente um retângulo. O perímetro dessa quadra é: P = 200 + 50 + 200 + 50 = 500 m.

Agora que já calculamos todos os perímetros, ou seja, a soma de todos os lados de cada uma das quadras, podemos somar todos e dividir pelo tamanho médio das vagas:

$$P_{total} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$$
$$P_{total} = 250 + 240 + 270 + 440 + 500$$
$$P_{total} = 1700$$

Lembrando que o tamanho médio das vagas é 5, 5m:

$$\frac{1700}{5,5} = 309,09 \simeq 309 \ vagas$$

Ótimo! Sabemos agora que, nessa região, teremos por volta de 309 vagas para estacionamento rotativo já que não é possível ter 0,09 vagas, certo? É necessário um número inteiro de vagas e por isso realizamos a aproximação de 309 vagas. Podemos explorar um pouco mais essa questão, veja a seguir.

Exercício 1: (FVG) A quantidade de retângulos com lados de comprimento inteiro que é possível formar, tendo sempre um perímetro de 24 cm, é

a) 6 retângulos

b) 12 retângulos

c) 36 retângulos

d) Apenas um retângulo

e) Um número infinito de retângulos

Correta: A

Exercício 2: Sabendo que o perímetro de um hexágono regular é de 42 m, qual o comprimento do seu lado

a) 10 m

b) 7 m

c) 6 m

d) 8 m

e) 9 m

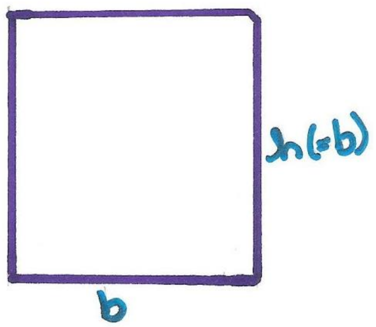
Correta: B

ÁREA DE FORMAS GEOMÉTRICAS PLANAS

Na seção anterior aprendemos a calcular quanto mede o contorno das formas geométricas planas para saber quantos veículos poderiam ser estacionados em uma determinada região. Mas e se quisermos saber qual é a área delimitada por essas quadras para a construção de imóveis com espaço para calçadas? Para cada forma geométrica há uma "fórmula" que permite saber qual é a área (simbolizada por *A*) delimitada por ela, mas é importante que você saiba que o cerne dessas equações é o mesmo: multiplicação da base (b) da forma pela sua altura (h, vem do inglês, *high = altura*). Além disso, a unidade de medida de área sempre será uma unidade de comprimento ao quadrado (como km^2, m^2, cm^2 etc.), já que tanto a base quanto a altura estarão em uma dessas unidades. Vamos ver a seguir algumas das equações para o cálculo da área das formas geométricas mais comuns.

QUADRADO

Essa forma é composta por 4 lados idênticos. Por isso a altura tem o mesmo tamanho da base e podemos escrever a equação para o cálculo da área das duas formas abaixo.

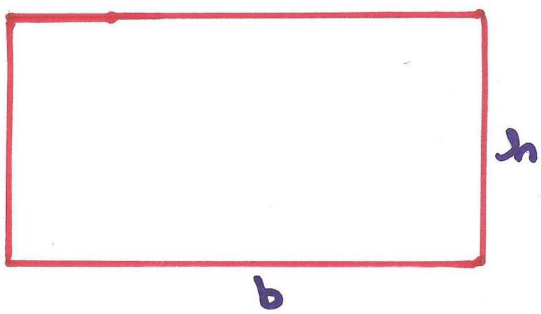


$$A_{quadrado} = b.h$$

$$A_{quadrado} = b^2$$

RETÂNGULO

Também é um quadrilátero (possui quatro lados) e tem dois lados iguais maiores do que os outros dois lados iguais.



$$A_{retângulo} = b.h$$

TRIÂNGULO

Essa forma possui apenas 3 lados, mas eles podem formar figuras diferentes, como triângulo retângulo, triângulo equilátero ou triângulo qualquer. Por isso, é bastante comum que se “decore” três equações diferentes para calcular a área desses triângulos, mas você vai ver que só precisa saber uma.

Triângulo retângulo: É caracterizado por ter um ângulo de 90°. Perceba que, se cortarmos um retângulo na diagonal, teremos dois triângulos retângulos, certo? Então, a área de um triângulo retângulo pode ser calculada a partir da área de um retângulo através da divisão por 2.

$$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2}$$

Outra forma de fazer isso é utilizando o ângulo de 90° formado entre a base e a altura. No decorrer do nosso estudo da matemática você entenderá melhor o porquê do “sen”, mas por enquanto você precisará apenas aceitar algumas partes das equações que seguem. Veja:

$$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2}.sen\ 90°$$

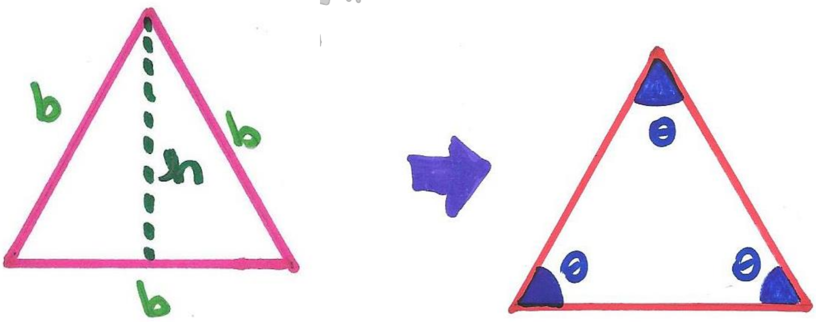
$$sen\ 90° = 1$$

$$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2}.1$$

$$A_{triângulo} = \frac{b.h}{2}$$

Perceba que chegamos à mesma equação apresentada anteriormente, certo?

Triângulo equilátero: Possui os três lados de mesmo tamanho e, portanto, seus ângulos internos também são iguais. Mais tarde você verá que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre é 180°. Isso significa que os ângulos internos de um triângulo equilátero serão sempre 60°. Assim, se não é fornecida a altura da forma, o cálculo da área desse triângulo é baseado no ângulo de 60°.



$$A_{triângulo} = \frac{b.b}{2}.sen\ 60°$$

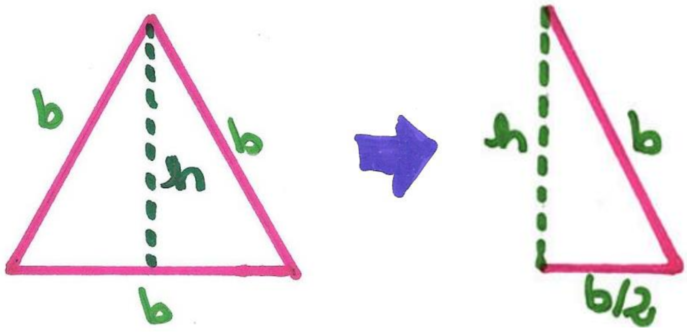
$$A_{triângulo} = \frac{b^2}{2}.sen\ 60°$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

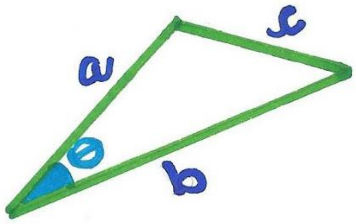
$$A_{triângulo} = \frac{b^2}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{triângulo} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

Se você tiver a informação da altura, é possível realizar o cálculo da área desse triângulo equilátero apenas dobrando a área do triângulo retângulo que ela forma com os outros dois lados.



Triângulo qualquer: Esse triângulo tem lados e ângulos diferentes, mas o raciocínio para o cálculo de sua área é o mesmo de antes: utilizar o ângulo formado entre dois lados conhecidos.



$$A_{triângulo} = \frac{a.b}{2}.sen\ \theta$$

Caso o ângulo fosse formado pelos lados a e c a equação seria:

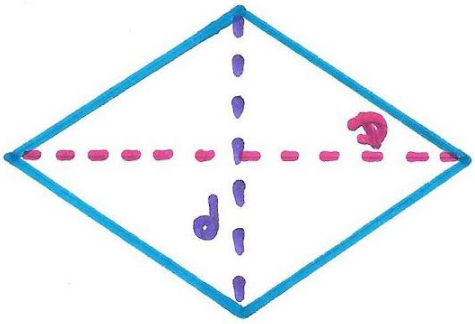
$$A_{triângulo} = \frac{a.c}{2} sen\ \theta$$

Ou pelos lados b e c:

$$A_{triângulo} = \frac{b.c}{2} sen\ \theta$$

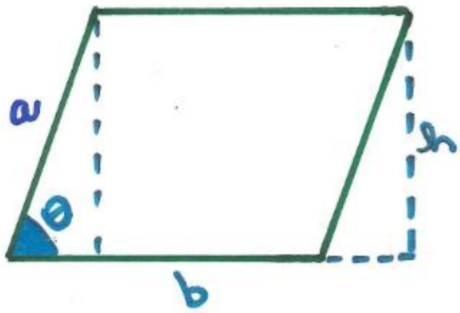
Portanto, basta que você lembre essa última equação para calcular a área de qualquer triângulo! Não é ótimo?

Losango: É também um quadrilátero bastante parecido com um quadrado esticado. Sempre tem uma diagonal maior do que a outra (se não tiver, é um quadrado!). Para saber a área dessa forma, basta multiplicar uma diagonal pela outra e dividir por 2.



$$A_{losango} = \frac{D.d}{2}$$

Paralelogramo: Outro quadrilátero parecido com um retângulo que está sendo “empurrado”. Quadrados, retângulos e losangos também são paralelogramos, já que possuem laterais paralelas. Há duas formas de calcular a área dessa figura: uma é conhecendo a altura e a base; a outra é conhecendo dois lados e o ângulo formado entre eles.

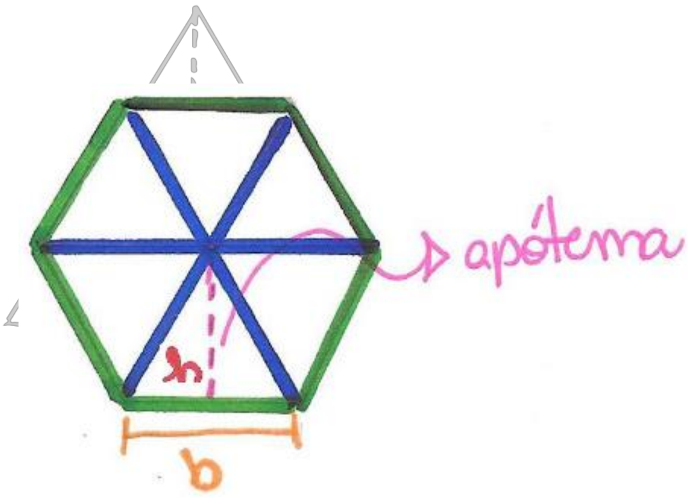


$$A_{paralelogramo} = b.h$$

$$A_{paralelogramo} = a.b.sen\ \theta$$

Trapézio: Quadrilátero formado por duas “bases”, uma maior do que a outra, unidas por duas laterais iguais ou não.

Hexágono: É uma forma geométrica de seis lados que possui todos os lados e ângulos internos e externos iguais. Esse tipo de forma é chamado de polígono regular e nesse caso temos um polígono regular de 6 lados (o quadrado também é um polígono regular, mas de quatro lados). Perceba que podemos dividir o hexágono em 6 triângulos equiláteros. Isso significa que, para calcular a área do hexágono, basta multiplicar a área do triângulo equilátero por 6, que é o número de triângulos que o compõem. Note que a *altura* do triângulo é chamada de *apótema* do hexágono e que o *lado*, que é igual à base (já que temos um triângulo equilátero), é chamado de *raio*. Note que o raio é maior do que a altura (apótema). Essa nomenclatura será útil no futuro.



$$A_{hexágono} = 6.\left(\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

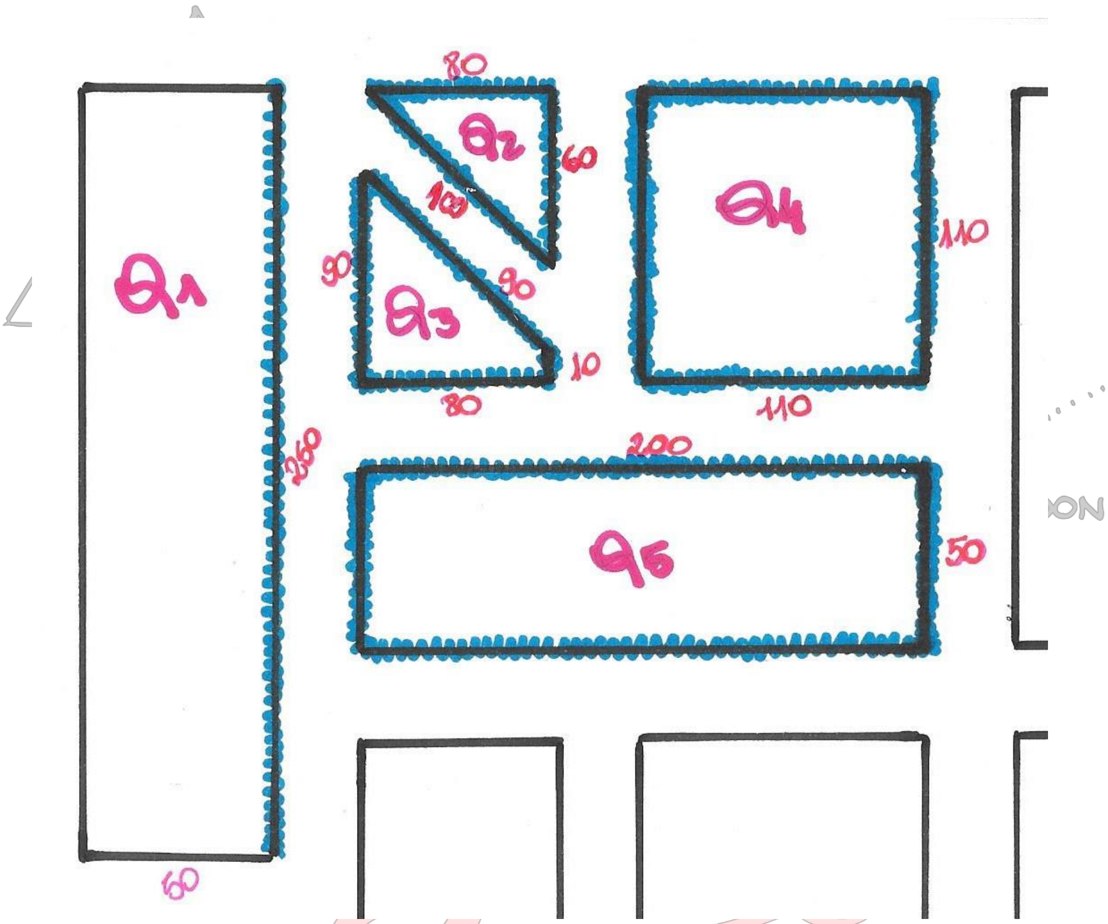
$$A_{hexágono} = 3.\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$$

Outros polígonos regulares: São as formas geométricas que possuem lados e ângulos iguais, como o hexágono que vimos acima, o pentágono, o octógono, etc. Você não precisa decorar as fórmulas para calcular a área de cada um deles, ok? Podemos utilizar a relação entre perímetro e apótema para isso, que será mais fácil agora que você é craque nesses cálculos:

$$A_{\substack{polígono\\regular}} = n.\left(\frac{P.h}{2}\right)$$

Lembre que *h* é o apótema (em alguns livros ele é também chamado de *a*), P é o perímetro e *n* é o número de lados do polígono regular.

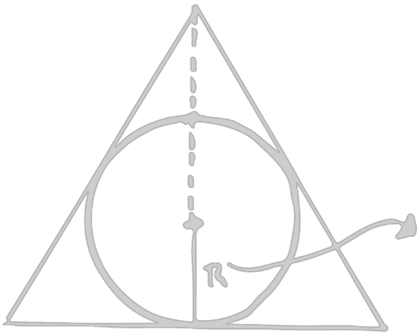
Agora que sabemos tudo isso, podemos voltar ao nosso problema anterior: qual é a área das quadras que possuem estacionamento rotativo? Vamos relembrar as formas das quadras: Q_1 é um retângulo, Q_2 um triângulo retângulo, Q_3 um trapézio, Q_4 um quadrado e Q_5 é outro retângulo. Vamos calcular cada área separadamente.



- Q1 – **retângulo**: duas laterais valem 250 m e outras duas valem 50 m, então a área é:

$$A_{Q_1} = b.h$$
$$A_{Q_1} = 50.250$$
$$A_{Q_1} = 12500\ m^2$$

- Q2 – **triângulo retângulo**: altura vale 60 m e base vale 80 m (vire o triângulo de “cabeça para baixo” para visualizar melhor a base), assim a área dessa quadra é:



$$A_{Q_2} = \frac{b.h}{2}$$
$$A_{Q_2} = \frac{80.60}{2}$$
$$A_{Q_2} = 2400 \ m^2$$

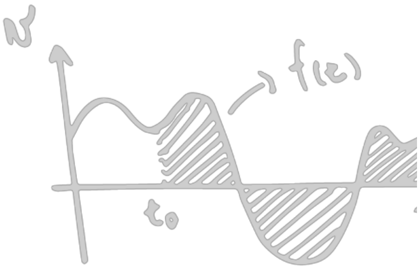
- **Q_3 – trapézio:** a base menor vale 10 m, a maior vale 90 m e a altura é 80 m. Talvez você tenha que torcer um pouco a cabeça para enxergar. ;) Calculando a área, teremos:

$$A_{Q_3} = \frac{h.(B+b)}{2}$$
$$A_{Q_3} = \frac{80.(90+10)}{2}$$
$$A_{Q_3} = 4000 \ m^2$$

- **Q_4 – quadrado:** os lados valem 110 m, então a área é:

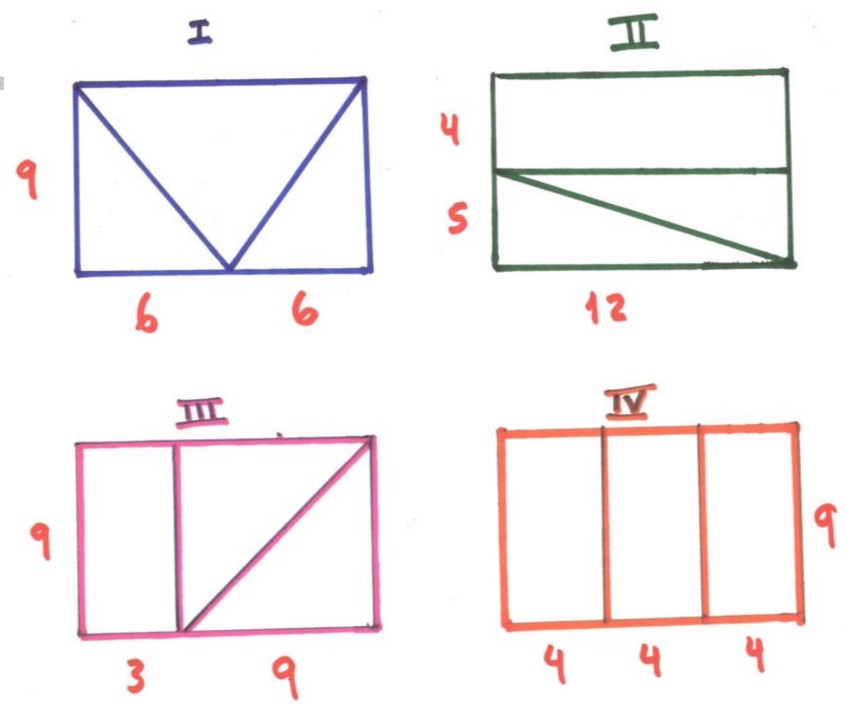
$$A_{Q_4} = b^2$$
$$A_{Q_4} = 110^2$$
$$A_{Q_4} = 11000 \ m^2$$

- **Q_5 – retângulo:** duas laterais valem 50 m e outras duas valem 200 m, então a área é:



$$A_{Q_5} = b.h$$
$$A_{Q_5} = 200.50$$
$$A_{Q_5} = 10000 \ m^2$$

Exercício 3: Três irmãos herdaram um terreno que tem o formato retangular, com 12m de comprimento e 9m de altura. Cada um dos irmãos pretende criar um tipo diferente de gado na sua parte do terreno, e para que nenhum saia prejudicado os terrenos devem ter a mesma área. Das divisões propostas, qual atende esse requisito?



a) Nenhuma proposta apresenta as três áreas iguais.

b) IV

c) III

d) II

e) I

Correta: B

Exercício 4: (COMPERVE) Um rodapé de cerâmica de 17,6m de comprimento foi colocado em um quarto quadrado. Esse quarto tem duas portas de 1,2m de largura. Sabendo que o rodapé não foi aplicado na largura das portas, a área desse quarto é de

a) 49 m^2

b) 36 m^2

c) 25 m^2

d) 16 m^2

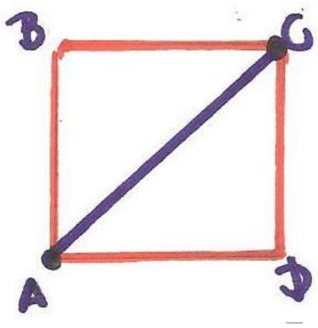
e) 10 m^2

Correta: C

DIAGONAIS DE FIGURAS PLANAS

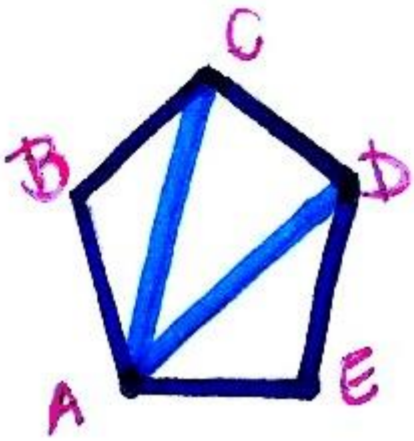
Outra análise interessante a ser feita além do perímetro e da área de figuras planas é o número de diagonais dos polígonos. Uma diagonal é traçada de um vértice a outro, desde que eles não sejam consecutivos, ou seja, que um vértice não esteja ao lado do outro (isso porque se você traçar uma reta entre dois vértices consecutivos será um lado da figura, certo?). Vamos analisar, a partir dos polígonos abaixo, o número de diagonais de saem de um dos seus vértices. Acompanhe:

QUADRADO



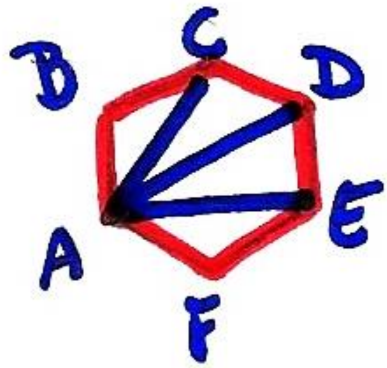
O número de lados e de vértices de um quadrado é 4, e apenas uma diagonal é formada a partir de um vértice. Portanto, cada um dos vértices forma uma diagonal, mas perceba que, por exemplo, a diagonal formada por AC é a mesma diagonal CA, assim como a diagonal formada por BD é a mesma formada por DB. Por isso, para saber o número de diagonais não basta multiplicar o número de vértices pelo número de diagonais que cada vértice forma, é necessário eliminar essas duplicidades, dividindo por 2. Em breve teremos uma fórmula bem simples para isso.

PENTÁGONO



O pentágono tem 5 vértices e o número de diagonais que saem de um de seus vértices é 2.

HEXÁGONO



O hexágono tem 6 lados e por isso 6 vértices, mas o número de diagonais de saem de um deles é 3.

Perceba que o número de diagonais que parte de um vértice é sempre 3 unidades abaixo do número de vértices. Esse é o motivo pelo qual o triângulo não possui diagonais. O triângulo tem três vértices e todos eles são consecutivos entre si, portanto, é impossível traçar uma diagonal. Utilizando o que aprendemos que de o número de diagonais que sai de um vértice é o número de vértices menos 3, teremos zero, e, então, nenhuma diagonal é traçada a partir de um de seus vértices.

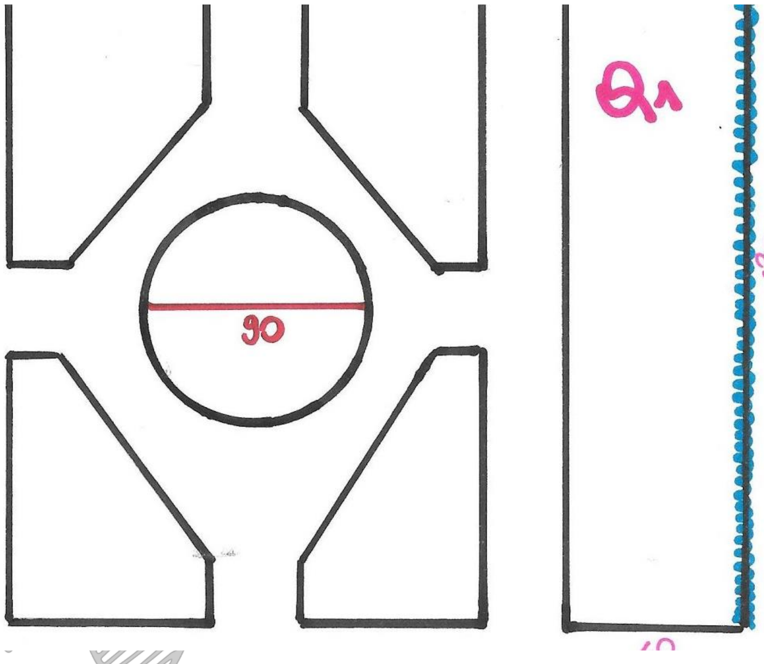
Depois de toda essa análise conseguiremos deduzir facilmente a fórmula para o número de diagonais de uma figura plana. Vamos chamar o número de vértices de n. Sabemos que o número de diagonais de sair de um vértice é 3 unidades abaixo do número total de vértices podemos escrever n - 3, então basta multiplicar o número de vértices pelo número de diagonais de cada um deles, dividindo por dois (lembre de eliminar a duplicidade). Portanto, teremos a seguinte equação:

$$d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

E assim é possível calcular o número de diagonais de qualquer polígono sabendo apenas o número de lados (e consequentemente de vértices).

PERÍMETRO E ÁREA DE CIRCUNFERÊNCIA

Vamos abordar um tópico que não foi comentado na seção anterior e talvez você já tenha notado. Na figura das quadras e ruas da cidade que estudamos anteriormente, à esquerda é possível ver uma rótula. Perceba também que ela apresenta uma linha que divide o círculo bem ao centro e que mede 90 m. Veja a figura abaixo para relembrar.



O porquê de não termos abordado esse assunto antes é bem simples: estávamos tratando de figuras geométricas que possuíam lados, diferentemente do que acontece com um círculo. Devido a esse detalhe, abordaremos a seguir algumas peculiaridades no cálculo de perímetro e área dessa figura geométrica. Então, vamos descobrir como é possível calcular o trajeto que os carros percorrem ao contornar completamente a rótula e qual é a área que ela ocupa na rua.

PERÍMETRO DO CÍRCULO *OU* CIRCUNFERÊNCIA:

É bastante comum que o perímetro de um círculo seja chamado apenas de comprimento da circunferência, ou apenas circunferência. Tente não se enganar, certo? Agora, imagine uma certa circunferência, de comprimento C_1 e com diâmetro D_1. Então essa circunferência sofre um aumento e seu diâmetro passa a ser $D_2 = 2D_1$. É intuitivo pensar que a circunferência também duplique, certo? E é verdade, mas não se preocupe com a prova. Vamos agora estabelecer a razão (divisão) dos dois diâmetros e circunferências.

$$\frac{C_2}{D_2} = \frac{2C_1}{2D_1} = \frac{C_1}{D_1}$$

Perceba que para ambas as circunferências, a razão é a mesma. Se ao invés de multiplicarmos a primeira circunferência por 2, multiplicássemos por qualquer numero K. Então utilizamos o mesmo raciocínio anterior para mostrar que:

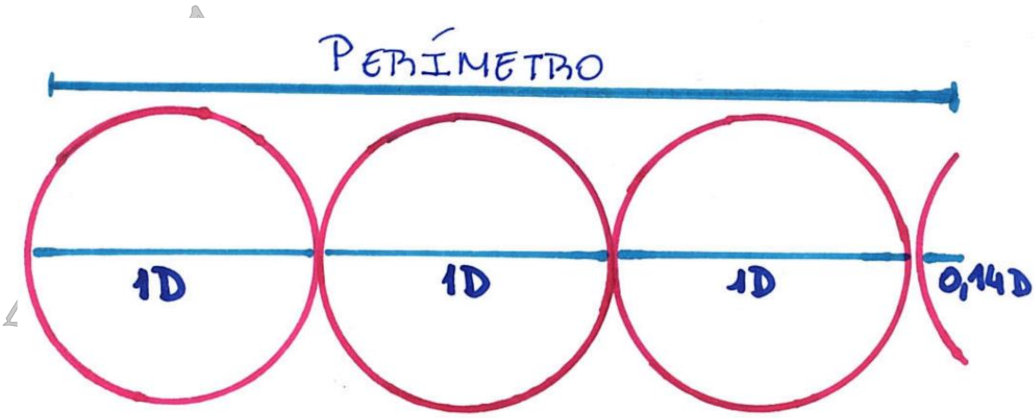
$$\frac{C_2}{D_2} = \frac{KC_1}{KD_1} = \frac{C_1}{D_1} = \frac{C}{D}$$

O que diabos isso significa? Que a razão C/D é a mesma para **qualquer** circunferência! E ela tem um valor bem definido que chamamos de Pi e representamos pela letra grega abaixo.

$$\pi = \frac{C}{D} = 3{,}14$$

Ele é uma constante irracional e vale 3,14159265359..., mas é normalmente arredondado para 3,14. Não importa o tamanho da circunferência, essa proporção sempre será a mesma, aproximadamente 3,14. Veja a figura abaixo.

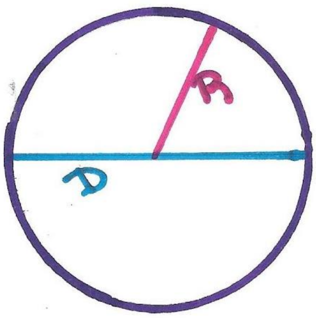
Você também pode conferir isso utilizando um barbante. Contorne um círculo com um barbante e divida-o em pedaços com o tamanho do diâmetro desse círculo. Você vai conseguir cortar 3 pedaços inteiros de diâmetro e apenas 0,14 de outro. Quer apostar?



Já que Pi sempre valerá 3,14, podemos reorganizar a equação acima para encontrar o perímetro da circunferência no caso de sabermos o valor do diâmetro. Veja:

$$C = \pi.D$$

Além disso, também é importante você saber que o diâmetro é duas vezes o **raio da circunferência**. Veja abaixo.



Em muitos problemas, o único dado fornecido é o raio. Por isso, podemos reescrever a equação acima como:

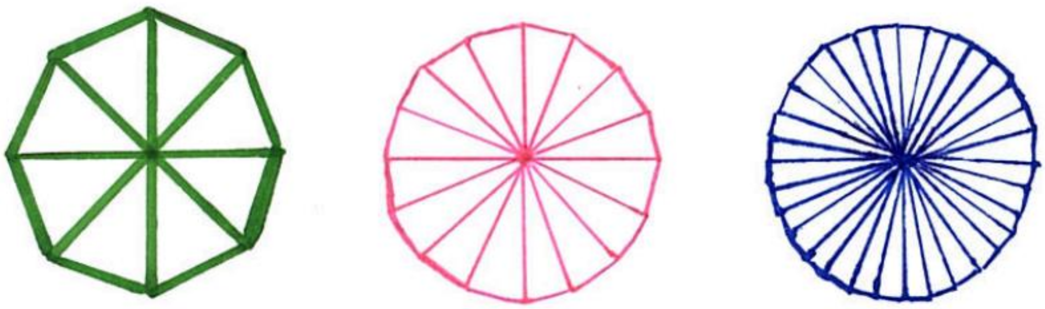
$$C = \pi.D \quad \rightsquigarrow \quad D = 2R$$

$$\boldsymbol{C = \pi.2R}$$

(Também conhecida como a equação dos dois franceses. Entendeu?)

ÁREA DO CÍRCULO

Todo o nosso raciocínio anterior para o cálculo das áreas dos polígonos regulares era baseado em figuras que continham lados, diferente do que acontece com o círculo. Será? Vamos analisar alguns exemplos. Veja os polígonos regulares abaixo.



Cada um deles possui vários lados, iniciando por 8 na primeira figura, passando por 16 na segunda e chegando a 32 na última. Poderíamos construir diversos outros aumentando o números de lados e, por consequência, aproximando raio e apótema, certo? Perceba que, se aumentarmos o número de lados num valor suficientemente grande, chegaremos a uma figura muito próxima de um círculo e, nesse caso, o apótema e o raio seriam praticamente o mesmo. É isso o que acontece no círculo: apótema e raio têm o mesmo valor e essa é a grande chave para o cálculo da área do círculo. Vamos relembrar a equação para o cálculo de um polígono regular de n lados:

$$A_{\substack{polígono \\ regular}} = n.\left(\frac{P.h}{2}\right)$$

No caso do círculo, não temos lado, então vamos ignorar o n. Além disso, o *P*, que é o perímetro, aqui é C. Vamos fazer essa substituição:

$$A_{círculo} = \frac{C.h}{2}$$

Podemos substituir ainda o valor do perímetro a partir do raio; como o apótema é igual ao raio, teremos:

$$C = \pi 2R \ e \ h = R$$

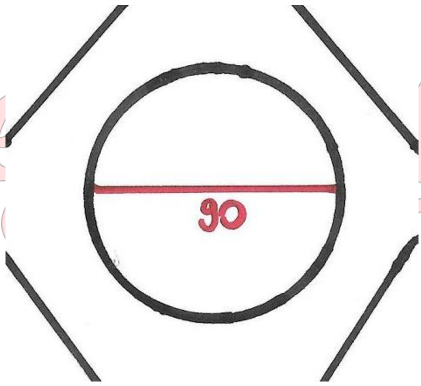
$$A_{círculo} = \frac{C.R}{2}$$

$$A_{círculo} = \frac{\pi 2R.R}{2}$$

Simplificando, chegaremos à equação final:

$$A_{círculo} = \pi R^2$$

Voltando ao nosso problema original, conseguimos visualizar facilmente que o diâmetro da rótula vale 90 m:



Então, o trajeto percorrido pelos motoristas ao contorná-la é o perímetro da circunferência, que será, portanto:

$$C = \pi D$$

$$C = 3{,}14.90$$

$$C = 282{,}6 \ m$$

Assim, os motoristas percorrem 282,6 m ao realizar a volta completa.

Lembre que também queremos saber a área que a rótula ocupa na rua. Perceba que, para isso, precisamos saber qual é o seu o raio. Felizmente já estamos muito espertos e sabemos que o raio é a metade do diâmetro, então:

$$D = 2R$$

$$R = \frac{D}{2} = \frac{90}{2} = 45 \ m$$

Agora basta realizar o cálculo da área:

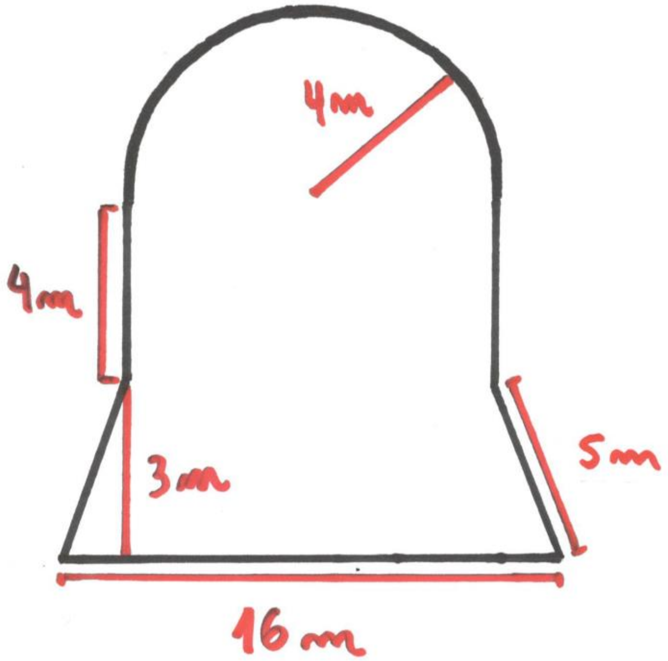
$$A = \pi R^2$$

$$A = 3{,}14.45^2$$

$$A = 6358{,}5 \ m^2$$

Assim, a área que a rótula ocupa é de 6358,5 m^2. Não esqueça as unidades, ok?

[Exercício 5](#): Uma casa foi desenhada conforme a figura abaixo:



Sendo assim, qual seu perímetro e sua área? (Utilize π=3)

a) 46 m e 92 m^2

b) 44 m e 90 m^2

c) 46 m e 90 m^2

d) 92 m e 46 m^2

e) 49 m e 93 m^2

Correta: A

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

PAIVA, Manoel. **Matemática.** 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003.