meSalva! ENEM

PROBABILIDADE

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ IPRB - Introdução à probabilidade e conceitos básicos
- ✓ PEXC - Relações entre probabilidades e eventos excludentes
- ✓ PCON - Probabilidade condicional e com combinação
- ✓ EPRB - Exercícios de probabilidade

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	PROBABILIDADE
PROFESSORES	TAMARA SALVATORI E MIGUEL BERNARDI

PROBABILIDADE

EVENTOS ALEATÓRIOS E DETERMINÍSTICOS

Você e seus amigos costumam jogar jogos de tabuleiro e dessa vez você está a poucos passos de ganhar. Para isso você precisa tirar 11 no somatório dos dados que regem o jogo na próxima rodada. Como vocês estão jogando com 2 dados não viciados de 6 faces cada, precisa tirar 6 em um e 5 em outro. Qual é a probabilidade de você ser o campeão conseguindo 11 nos dados?

Para conseguirmos solucionar este problema precisaremos compreender conceitos de probabilidade. Primeiramente note que, por exemplo, o lançamento de um dado comum não viciado, assim como o de uma moeda regular é um fenômeno aleatório, ou seja, não é previsível já que qualquer uma das possibilidades tem as mesmas chances de acontecer. Esses fenômenos são classificados desse jeito porque apesar de sabermos que há chances de o dado cair nas faces 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou de a moeda cair em cara ou em coroa, não temos certeza de qual face cairá antes de realizarmos o lançamento. Outros fenômenos aleatórios são, por exemplo, o resultado de uma roleta (aquela que você joga uma bolinha numa roleta em movimento, dividida em espaços numerados), a escolha de uma carta em um baralho, ou ainda o resultado da Mega Sena.

Existem também alguns fenômenos denominados ***determinísticos***, isso porque seu resultado pode ser determinado antes de acontecer. Por exemplo, sabemos que a água (sob pressão de 1 atm), quando aquecida até 100° C, entra em ebulição. Então, um evento determinístico é um evento certo (que vai acontecer certamente).

No caso do fenômeno aleatório do arremesso do dado existem 6 resultados possíveis para um lançamento: as faces 1, 2, 3, 4, 5, 6. Esse conjunto de possibilidades é chamado de ***espaço amostral*** (simbolizado por S, de space). Já o ato de lançar o dado e registrar os resultados é denominado ***evento***, e normalmente atribui-se uma letra maiúscula a ele (por exemplo, evento A). Vamos entender melhor esses detalhes nos exemplos abaixo:

- ✓ Evento A: Lançamento de um dado e registro dos resultados.

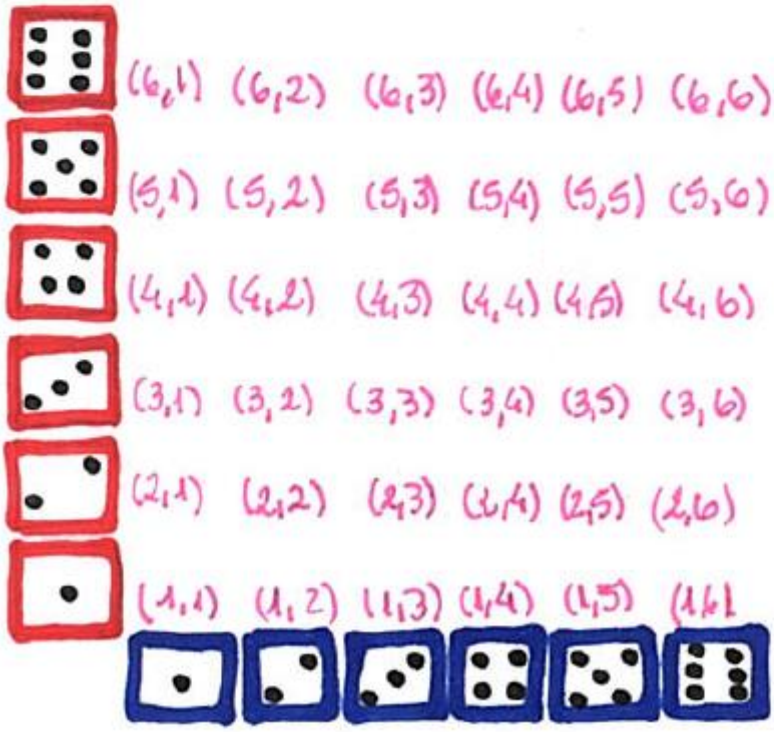
  Considerando que o dado tem 6 faces, temos 6 possibilidades para um lançamento. Então, o espaço amostral será S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

- ✓ Evento B: Ocorrer número ímpar no lançamento de um dado.

  Já sabemos que são 6 possibilidades para o lançamento de um dado, mas como há uma restrição de números ímpares, temos um subconjunto do espaço amostral para os números ímpares dessas possibilidades. Assim, o espaço amostral é S: {1, 2, 3, 4, 5, 6} e o subconjunto do S é {1, 3, 5}, apenas os números ímpares.

UNIÃO E INTERSECÇÃO

Agora que já estudamos isso, podemos começar a calcular a **probabilidade** que você tem de conseguir ganhar o jogo nessa rodada. A probabilidade também pode ser entendida como a **chance** de o evento acontecer frente às diversas possibilidades. No caso que estamos investigando, o evento (que vamos chamar de A por conveniência) é lançar dois dados e obter 5 **e** 6 como resultado. Vamos desenhar dois dados (o azul e o vermelho) e analisar cada uma das possibilidades de faces que podem cair quando o lançamento dos dois é realizado, vamos denominar evento A.



Note que o "e" foi grifado justamente porque ele tem um significado bem importante. Na probabilidade, quando utilizamos o conectivo "e" significa que as duas situações que ele está conectando devem acontecer **simultaneamente**. Ou seja, os dados serão jogados ao mesmo tempo e queremos que em um deles caia 5 **e** no outro 6, somando os dois teremos os 11 que você precisa.

O espaço amostral neste caso será:

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

Ou seja, os dados podem cair com qualquer uma das configurações acima. Contando o número de elementos você verá que tem 36 maneiras diferentes de os dados caírem ao serem lançados, mas há apenas duas formas de você conseguir atingir seu objetivo, o dado vermelho cair na face 5 e o dado azul cair na face 6, resultado (5, 6), ou o dado vermelho cair na face 6 e o azul na face 5, resultado (6, 5). Então, você tem 2 chances em 36 possibilidades de conseguir ganhar o jogo com o resultado do somatório dos dados resultando 11. Formalmente, podemos escrever o seguinte:

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

Equação que podemos traduzir como a *probabilidade de o evento A ocorrer é dado como o número de eventos favoráveis dividido pelo número de possibilidades*. Informalmente podemos dizer que a probabilidade de um evento ocorrer é o número de chances (ou número de casos presentes no subespaço favorável) dividido pelo número de possibilidades (espaço amostral).

No nosso caso, o número de eventos favoráveis é 2 (já que os dados podem cair no formato (5, 6) ou (6, 5) e o número de possibilidades é 36, que são todas as configurações em que os dados podem cair. Substituindo esses valores, teremos o seguinte:

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

$$P(A) = \frac{2}{36}$$

O resultado fracionário já é a probabilidade de o evento ocorrer, então interpretamos que há 2 chances em 36 de você obter o somatório 11 nos dados e conseguir vencer o jogo nesta rodada, mas na maioria das vezes a probabilidade é expressa em percentual, porque fica mais fácil de visualizá-la. Então, podemos reescrever esse resultado da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{2}{36} = 0{,}055$$

$$P(A) = 0{,}055.100$$

$$P(A) = 5{,}5\ \%$$

Portanto, a chance de você conseguir ganhar o jogo nessa rodada é de 5,5%. Bem baixinha, né? Não há nada a fazer senão contar com a sorte!

Outro jogo que você e seus amigos resolveram jogar foi utilizando um baralho. O jogo consiste em um de vocês segurar as cartas de apenas um naipe como num leque e dar uma ordem do tipo “você tem que escolher uma carta menor que 5 e par”. Qual a probabilidade de essa vez você conseguir vencer?

Veja que novamente o “e” está chamando atenção, assim temos novamente uma relação simultânea, que caracteriza uma intersecção entre conjuntos de uma afirmação e de outra. Nesse caso vamos analisar de uma forma um pouco diferente. Veja:

- ✓ **Evento B**: escolher uma carta menor que 5 e par. Como o jogo é realizado com apenas um naipe, temos 13 cartas (incluindo ás, valete, rainha e rei, que equivalem, respectivamente a 1, 11, 12, e 13) possíveis para escolher. Assim, o espaço amostral é S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

  O espaço amostral da primeira afirmação, ser par, são: (2, 4, 6, 8, 10, 12). E da segunda, ser menor do que 5,: (1, 2, 3, 4).

Veja que temos dois conjuntos, e que para que o evento ocorra eles precisam acontecer simultaneamente. Então, para saber a probabilidade de esse evento ocorrer basta realizar a intersecção entre eles e aplicar a fórmula que nos acompanhou até agora. Dá uma olhada:

$$(\underline{2},\underline{4},6,8,10,12) \cap (1,\underline{2},3,\underline{4}) = (2,4)$$

Portanto, temos apenas duas possibilidades para o evento ocorrer, frente a 13 opções de cartas. Aplicando a fórmula chegaremos a:

$$P(A) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

$$P(A) = \frac{2}{13}$$

Que em percentual é:

$$P(A) = \frac{2}{13} = 0{,}153$$

$$P(A) = 0{,}153.100$$

$$P(A) = 15{,}3\%$$

Assim, a probabilidade de você escolher de primeira uma carta par e menor do que 5 é de 15,3%. Um pouco mais alta do que no jogo anterior, né? Quem sabe você tem mais sorte dessa vez!

Agora o jogo é escolher uma carta que seja par **ou** que tenha número primo. Veja que agora temos o conectivo "**ou**" no lugar do "e" que estávamos acostumados. Ou seja, pelo menos um dos dois casos deve ocorrer e **não** dois simultaneamente. Portanto, o espaço amostral deste evento será a união do espaço amostral da primeira afirmação com o da segunda. Então, veja:

- ✓ **Evento B**: escolher uma carta par **ou** com número primo. O jogo continua sendo realizado com apenas um naipe, então temos 13 cartas possíveis para escolher, tendo como espaço amostral S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

  As possibilidades de a carta escolhida ser par são: (2, 4, 6, 8, 10, 12), **ou** de ser ímpar: (2, 3, 5, 7, 11, 13). Como temos uma relação de união, basta unirmos os dois conjuntos para chegarmos a um terceiro: (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13), que terá 11 elementos (note que o 2 faz parte dos dois conjuntos e por isso não é necessário repeti-lo). Portanto, temos 11 possibilidades de o evento ocorrer frente a 13 opções de cartas. Substituindo esses valores na equação teremos:

$$P(B) = \frac{\text{nº de resultados favoráveis}}{\text{nº de resultados possíveis}}$$

$$P(B) = \frac{11}{13}$$

Ou em percentual:

$$P(B) = \frac{11}{13} = 0{,}846$$

$$P(B) = 0{,}846.100$$

$$P(B) = 84{,}6\%$$

Então, você tem 84,6% chances de escolher uma carta par ou de número primo. Chances altas, certo?

PROBABILIDADE COM COMBINAÇÃO

Trabalhamos com situações bem interessantes até agora, mas a melhor de todas está por vir! Quem nunca sonhou em ganhar o prêmio milionário da Mega Sena? Você deve ter conhecimento de que, assim como o prêmio, são milhões de apostas e muitas vezes o prêmio acumula. Tem gente que faz até várias apostas com números diferentes para tentar a sorte, mas qual é a chance de alguém conseguir ganhar? Para entender o que acontece nesse caso você precisará de todos os conceitos que vimos até aqui e relembrar de Análise Combinatória.

Vamos começar supondo que você vai fazer um jogo escolhendo 6 números dos 60 disponíveis na cartela de apostas. Note que você vai realizar um processo de combinação de 60 elementos tomados 6 a 6. Quantas possibilidades de combinar esses elementos você tem? Relembrando a equação da combinação você sabe que n é o número de elementos (60) e p o número do agrupamento (6). Substituindo esses valores na equação, teremos o seguinte:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(54)!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60.59.58.57.56.55.54!}{6!54!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60.59.58.57.56.55}{6!}$$

$$C_{60,6} = \frac{60.59.58.57.56.55}{6.5.4.3.2.1}$$

Você vai precisar manipular essa última fração utilizando a simplificação para que o cálculo fique um pouco mais agradável de ser realizado. Por fim, você vai chegar em:

$$C_{60,\,6} = \frac{60.59.58.57.56.55}{6.5.4.3.2.1}$$

$$C_{60,\,6} = \frac{36045979200}{720}$$

$$C_{60,\,6} = 5006338860$$

Esse número gigantesco é o número de combinações que você pode fazer escolhendo 6 números dos 60 fornecidos na cartela. De todas essas possibilidades, apenas uma será a sorteada, então, existe uma chance em mais de 50 milhões. Formalmente podemos escrever:

$$P(A) = \frac{1}{5006338860}$$

Ou, em percentual:

$$P(A) = \frac{1}{5006338860} = 0{,}00000002$$

$$P(A) = 0{,}00000002.100$$

$$P(A) = 0{,}000002\%$$

Isso significa que uma pessoa tem 0,000002% de chance de ganhar na Mega Sena fazendo apenas uma aposta! Pouquíssimas chances, né? Mesmo assim muitas pessoas passam anos fazendo apostas para tentar realizar o sonho de ser milionário, afinal de contas, uma hora alguém vai ganhar, né? Mesmo que as chances sejam ínfimas.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES E EVENTOS INDEPENDENTES

- ✓ Eventos mutuamente excludentes: Qual é a probabilidade de conseguirmos, em **um único** lançamento de uma moeda, obter cara e coroa **simultaneamente**?

  Você consegue notar rapidamente que há 50% de chances de a moeda cair em cara e 50% de a moeda cair em coroa. Isso porque há uma chance entre duas possíveis (1/2 = 0,5 = 50%). E você também consegue notar facilmente que é impossível obter os dois resultados ao mesmo tempo, já que a moeda vai cair em cara ou do lado da coroa, nunca em ambos simultaneamente. Portanto, a probabilidade de obter os dois resultados ao mesmo tempo é zero e um evento deste tipo é chamado de mutuamente excludente.

- ✓ **Eventos independentes**: Em um pacote há 3 balas de limão, 3 de morango e 4 de café. Qual é a probabilidade de serem retiradas 3 balas de café **sucessivamente** sabendo que a cada retirada, a bala sorteada é **posta de volta** ao pacote?

  Note que o espaço amostral é composto por 10 elementos (balas de todos os sabores) e como a cada retirada a bala sorteada volta a fazer parte do pacote, o número de elementos do espaço amostral não é alterado. Então, para a primeira escolha temos 4 (são quatro balas de café) chances dentro de 10 possibilidades de conseguir tirar uma bala de café, como a bala retirada volta ao pacote, na segunda escolha também teremos 4 possibilidades em 10, na terceira escolha isso se repete, 4 possibilidades em 10. Perceba, portanto, que a probabilidade de ocorrer o segundo evento (escolha da segunda bala) não depende do primeiro (escolha da primeira bala), assim como probabilidade de ocorrer o terceiro evento não depende do segundo e assim por diante. Eventos desse tipo, em que a probabilidade de um evento ocorrer não depende do outro e em que há reposição de elementos são denominados eventos independentes.

  Resolvendo este problema teremos o seguinte:

$$P = \frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{64}{1000}$$

$$P = 0{,}064.100$$
$$P = 6{,}4\%$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade condicional é caracterizada por dois eventos, por exemplo, qual é a probabilidade de uma pessoa gostar de doces dado que é homem? Ou ainda, qual é a probabilidade de uma pessoa andar de bicicleta dado que é brasileira? Perceba que são dois eventos na primeira sentença, o evento A, que é gostar de doces e o evento B que é uma condição imposta, ser homem. Na segunda sentença temos que o evento A é andar de bicicleta e que o evento B é ter nacionalidade brasileira, a condição imposta. Para calcular este tipo de probabilidade vamos utilizar uma equação que é quase a mesma coisa que tínhamos anteriormente, com pequenas variações. Ela pode até parecer um monstro de longe, mas você logo vai perceber que é bem simples. Veja abaixo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Vamos estudar o caso da segunda sentença: qual é a probabilidade de uma pessoa andar de bicicleta dado que é brasileira? Veja a tabela abaixo que contém as informações necessárias para a resolução deste problema.

Nacionalidade \ Andar de bicicleta	Não	Sim	Total
Uruguaia	120	30	150
Brasileira	100	100	200
Total	220	130	350

Tendo essas informações fica bem mais simples utilizar a fórmula acima. Note que no numerador é solicitada a intersecção entre as pessoas que andam de bicicleta e que são brasileiras. Isso é, o número que consta na coluna do "sim" referente à linha dos brasileiros. Já o denominador pede algo bem mais simples: a probabilidade de ser brasileiro, que é o número total de brasileiros dividido pelo número total de pessoas. Substituindo esses valores separadamente teremos o seguinte:

$$P(A \cap B) = \frac{100}{350} \qquad P(B) = \frac{200}{350}$$

Substituindo esses valores na equação da probabilidade condicional teremos o seguinte:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{100}{350}}{\frac{200}{350}} = \frac{100}{350} \cdot \frac{350}{200}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$P(A|B) = 0{,}5.100$$

$$P(A|B) = 50\%$$

E assim chegaremos a 50% de chances de escolher uma pessoa dessa pesquisa que ande de bicicleta, dado que seja brasileira.

Não é tão terrível assim, né? A moral aqui é prestar atenção no evento que vem depois de “dado que...” ou “sendo que”, ou qualquer variação disso, porque é pela probabilidade de ocorrer este evento que a intersecção será dividida. Caso você utilize o outro evento para fazer isso, é muito PROVÁVEL que você chegue à resposta errada.

EXERCÍCIOS

1. Um conjunto de três dados possui média aritmética igual a 5. Sabendo que a mediana destes dados é 5 e que os outros dois dados estão separados por 4 unidades, qual das alternativas apresenta o produto entre esses dados?

a) 95

b) 100

c) 105

d) 110

e) 115

Alternativa correta: C

2. A probabilidade do nascimento de um bebê do sexo feminino é de 50%. Uma senhora possui 3 filhas mulheres e está grávida. Qual a probabilidade do novo bebê também ser mulher?

a) 1/4

b) 1/16

c) 1/2

d) 1/256

e) 1/8

Alternativa correta: C

3. Uma turma tem 20 alunos sendo que apenas um deles é homem. A professora cria grupos de 3 pessoas afim de realizar uma atividade. Escolhendo-se um desses grupos ao acaso, qual a probabilidade de ser o grupo do rapaz?

a) 1/5

b) 1/2048

c) 1/1140

d) 1/5642

e) 1/6568

Alternativa correta: C

4. Dadas as letras de MESALVA, são selecionadas 4 letras e formados anagramas. Qual a probabilidade de se formar um anagrama que contenha a letra A?

a) 50%

b) 60%

c) 70%

d) 80%

e) 90%

Alternativa correta: D

5. Jogando-se 2 dados, qual a probabilidade da soma dos números ser par ou um número primo?

a) 5/6

b) 8/11

c) 30/121

d) 10/11

e) 11/12

Alternativa correta: D

6. Foi realizado um experimento para teste de um novo remédio. Das 100 pessoas selecionadas, sendo 50% homens, foram distribuídos remédios verdadeiros e placebos, de forma igualitária entre os sexos. Escolhendo aleatoriamente uma pessoa no grupo, qual a probabilidade dela ser mulher e estar usando o placebo?

a) 15%

b) 20%

c) 25%

d) 45%

e) 50%

Alternativa correta: C

7. (ENEM 2013) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) 1/2

b) 5/8

c) 1/4

d) 5/6

e) 5/14

Alternativa correta: A

8. Vinte times de futebol disputam a Série A do Campeonato Brasileiro, sendo seis deles paulistas. Cada time joga duas vezes contra cada um dos seus adversários. A porcentagem de jogos nos quais os dois oponentes são paulistas é

a) menor que 7%.

b) maior que 7%, mas menor que 10%.

c) maior que 10%, mas menor que 13%.

d) maior que 13%, mas menor que 16%.

e) maior que 16%.

Alternativa correta: B

9. (UFRGS 2013) Para a disputa da Copa do Mundo de 2014 as 32 seleções que se classificarem serão divididas em 8 grupos, os quais serão constituídos de 4 seleções cada um. Nos jogos da primeira fase, cada seleção jogará com

todas as outras seleções do seu grupo. Uma empresa adquiriu um ingresso para cada jogo da primeira fase do mesmo grupo. Ao sortear dois ingressos entre seus funcionários a probabilidade de que esses ingressos envolvam uma mesma seleção é

a) 20%

b) 25%

c) 50%

d) 80%

e) 85%

Alternativa correta: D

10. (FUVEST) Ao lançar um dado muitas vezes, uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de freqüência da face 1, e que as outras faces saíam com a freqüência esperada em um dado não viciado. Qual a frequência da face 1?

a) 1/3

b) 2/3

c) 1/9

d) 2/9

e) 1/12

Alternativa correta: C

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.