NÚMEROS **COMPLEXOS**

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ ICNI - Introdução aos Números Complexos e Conceitos Iniciais
- ✓ RCTO - Representação cartesiana retangular e operações
- ✓ FTRG - Forma trigonométrica
- ✓ PTRC - Potenciação e radiciação de complexos
- ✓ ECMP - Exercícios de números complexos

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	NÚMEROS COMPLEXOS
PROFESSORES	TAMARA SALVATORI E MIGUEL BERNARDI

mesalva.com

NÚMEROS COMPLEXOS

Na apostila de Álgebra II estudamos como seria possível encontrar o comprimentos dos lados de uma mesa a partir de uma “charada” que dizia que um lado era 3 metros menor do que o outro e que a mesa deveria ter 10 m^2. Para descobrir esses lados, montamos uma equação e descobrimos ser de segundo grau, e a resolvemos utilizando a fórmula de Bhaskara. Vamos relembrar:

- ✓ Equação de 2º Grau:

$$(x)(x-3) = 10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

- ✓ Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$, com $\Delta = b^2 - 4.a.c$

Antes de sair calculando adoidado as raízes da equação, convinha ser feita uma análise do discriminante. Dependendo do valor dele, teríamos tipos diferentes de raízes. Veja:

- ✓ Se $\Delta > 0$: A equação tem duas raízes reais e distintas.
- ✓ Se $\Delta = 0$: A equação tem apenas uma raiz real.
- ✓ Se $\Delta < 0$: A equação não possui raízes reais.

Realizando o cálculo do discriminante referente ao problema acima, encontramos o seguinte (caso você não lembre dos detalhes até aqui, vale a pena revisar a apostila de Álgebra II):

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4.(1).(-10)$$

$$\Delta = 9 + 40$$

$$\Delta = 49$$

Nesse caso teremos duas raízes reais e distintas e, para encontrá-las, basta finalizar o cálculo substituindo o valor encontrado acima na raiz quadrada da fórmula de Bhaskara, chegando em:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$x' = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Encontramos duas raízes reais, como esperávamos, apesar de apenas uma delas ser solução do problema inicial (o comprimento da mesa não pode ser negativo).

Até aqui fizemos apenas uma revisão, certo?

Vimos, nessa revisão, que caso o discriminante fosse zero, teríamos apenas uma raiz real, mas caso fosse negativo, não teríamos raízes reais. Mas o que significa não ter raízes reais? Vamos tentar entender isso a partir da equação de segundo grau abaixo:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Ao calcularmos o discriminante dessa equação, chegaremos a:

$$a = 1 \quad b = -4 \quad c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(5)$$

$$\Delta = 16 - 20$$

$$\Delta = -4$$

Chegamos a um discriminante negativo, logo, a equação que estamos estudando agora não possui raízes reais. Vamos substituir o valor do discriminante na fórmula de Bhaskara para tentar encontrar raízes não reais:

$$x = \frac{-b \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Aqui encontramos um problema. Sabemos que não existe raiz quadrada de número negativo, então, o que fazer?

Note que podemos reescrever -4 como a multiplicação de 4 por -1, certo? Vamos substituir o -4 de dentro da raiz por 4.(-1):

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4(-1)}}{2}$$

Veja que podemos tirar a raiz quadrada de 4, deixando o -1 na raiz:

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{(-1)}}{2}$$

Para conseguirmos resolver essa raiz negativa, precisaremos utilizar um novo artifício matemático. Vamos substituir -1 por uma unidade imaginária (representada por i) ao quadrado, ou seja, i^2:

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{i^2}}{2}$$

Como i está elevado ao quadrado dentro de uma raiz quadrada, podemos cortar a potência com a raiz e obteremos o seguinte:

$$x = \frac{4 \pm 2\cancel{\sqrt{}}\, i^{\cancel{2}}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

E agora? Como encontramos as raízes? Como tiramos aquele "i" dali? A verdade é que não tiramos. Um número que contém esse "i" é um número que faz parte do conjunto dos Números Complexos. Por isso, nesse caso, teremos duas raízes complexas (lembre que chamamos o i de unidade imaginária) como solução dessa equação. Para encontrar essas raízes precisaremos estudar como resolver as operações básicas com números complexos, assim como fizemos com os números naturais, inteiros, reais etc.

Curiosidade: Segundo registros históricos, a unidade imaginária **i** surgiu a partir da fórmula de Tartaglia-Cardano para resolver equações de terceiro grau em meados de 1545. Isso porque alguns termos dessa fórmula, às vezes, recaíam em raízes quadradas de números negativos. Outro matemático que enfrentou problemas desse tipo e que recorreu ao que hoje conhecemos por números complexos foi Rafael Bombelli, na mesma época que os outros dois matemáticos acima. As ideias desses estudiosos soavam esquisitas perante a "sociedade matemática" da época deles. Esses números só foram realmente utilizados no século XVIII, porque Carl Friedrich Gauss (que é considerado o príncipe dos matemáticos) começou a utilizá-los em suas representações matemáticas. Além disso, Gauss sugeriu que esses números fossem chamados de "números laterais", porque eles existem, assim sendo, não são "imaginários". Ele usou um argumento geométrico para causar uma "rotação" de 90° entre números num plano (plano complexo), onde o -1 representava uma rotação de 180°.

REPRESENTAÇÃO CARTESIANA E OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

O conjunto de números complexos é uma extensão do conjunto dos números reais e podem ser representados em pares ordenados, por forma algébrica ou trigonométrica. Vamos ver as duas primeiras agora e guardar a terceira para mais tarde.

Um número complexo “z” pode ser escrito como:

$$z(a,b) \quad \text{ou} \quad z = a + bi$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\underbrace{z(3,4)}_{\text{Par ordenado}} \qquad\qquad \underbrace{z = 3 + 4i}_{\text{Forma algébrica}}$$

Note que as partes imaginárias em ambos os casos são representadas pelo “b”.

$$z(\underbrace{a}_{\text{Parte real}},\underbrace{b}_{\text{Parte imaginária}}) \qquad\qquad z = \underbrace{a}_{\text{Parte real}} + \underbrace{b}_{\text{Parte imaginária}}i$$

Veja outros exemplos:

$$z_1 = (2,3) \quad \text{ou} \quad z_1 = 2 + 3i$$

$$z_2 = (-1,6) \quad \text{ou} \quad z_2 = -1 + 6i$$

$$z_3 = (0,-4) \quad \text{ou} \quad z_3 = 0 - 4i$$

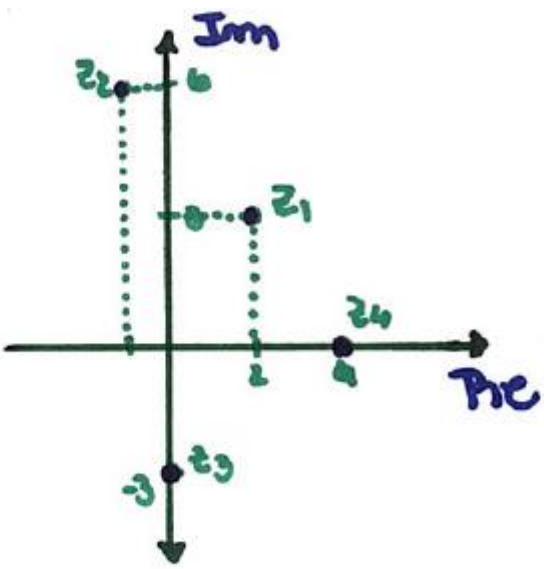
$$\underbrace{z_3 = -4i}_{\text{puro}}$$

Perceba que o último exemplo, z_3, não possui parte real (já que a = 0), então, ele é chamado de imaginário puro. Assim como se tivéssemos b = 0, o número não seria complexo, apenas real. Veja o exemplo abaixo:

$$z_4 = (4,0) \quad \text{ou} \quad z_4 = 4 - 0i$$

$$\underbrace{z_4 = 4}_{\text{número real}}$$

No caso da forma algébrica, isso fica bem evidente, já que há o "i" para identificar. No caso dos pares ordenados, o b é a parte imaginária, porque agora, para representar um número complexo geometricamente, utilizamos o eixo horizontal como eixo real, e o eixo vertical como eixo imaginário. Vamos representar geometricamente os números dos exemplos acima no plano de Argand-Gauss:



Agora que já sabemos como representar os números complexos, podemos passar para a próxima etapa: as operações com complexos!

ADIÇÃO

Para realizar esta operação com números complexos é necessário somar as partes reais e imaginárias separadamente. Veja os exemplos:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-1 + 6i)$$

$$z_1 + z_2 = 2 + \underline{3i} - 1 + \underline{6i}$$

$$z_1 + z_2 = 1 + 9i$$

$$z_3 + z_4 = (2 + 4i) + (4 - i)$$

$$z_3 + z_4 = 2 + 4i + 4 - i$$

$$z_3 + z_4 = 6 + 3i$$

Generalizando a adição de números complexos, teremos o seguinte:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

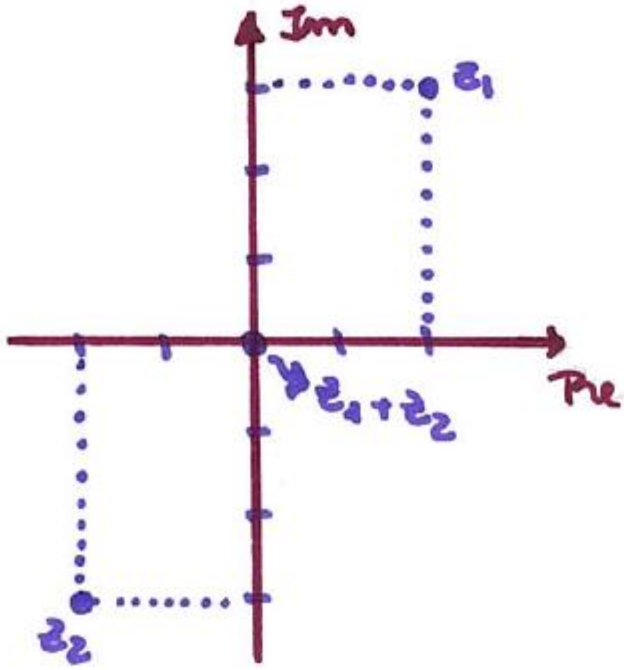
Uma propriedade da adição diz que existe um número complexo oposto (z_2) para cada número complexo (z_1), de forma que a soma deles é zero. Veja:

$$z_1 = 2 + 3i \xleftrightarrow{\text{OPOSTO}} z_2 = -2 - 3i$$

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i - 2 - 3i$$

$$z_1 + z_2 = 0 + 0i$$

Um número complexo $z_1 = a + bi$ tem como oposto o número complexo $z_2 = -a - bi$. Veja um exemplo e a representação geométrica dele:



Note que os números complexos opostos são simétricos entre si em relação à origem.

SUBTRAÇÃO

Para realizar esta operação, é necessário subtrair as partes reais e imaginárias separadamente, como fizemos na adição. Acompanhe os exemplos:

$$z_1 - z_2 = (2+3i) - (-1+6i)$$

$$z_1 - z_2 = 2 + \underline{3i} + 1 - \underline{6i}$$

$$z_1 - z_2 = 3 - 3i$$

$$z_3 - z_4 = (2+4i) - (4-i)$$

$$z_3 - z_4 = 2 + 4i - 4 + i$$

$$z_3 - z_4 = -2 + 5i$$

Generalizando a subtração, temos o seguinte:

$$z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di)$$

$$z_1 - z_2 = (a-c) + (b-d)i$$

MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação de números complexos é um pouco mais parecida com o que já fazemos: a famosa distributiva. Depois disso, basta aplicar o que vimos acima sobre a adição de números complexos. Veja os exemplos (dica: não esqueça que i^2 vale -1):

$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i) \cdot (-1+6i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = -2 + 12i - 3i + 18i^2 \rightarrow -1$$

$$z_1 \cdot z_2 = -2 + 9i + 18(-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = -2 + 9i - 18$$

$$z_1 \cdot z_2 = -20 + 9i$$

$$z_3 . z_4 = (2+4i).(4-i)$$

$$z_3 . z_4 = 8 - 2i + 16i - 4i^2 \rightarrow -1$$

$$z_3 . z_4 = 8 + 14i - 4(-1)$$

$$z_3 . z_4 = 8 + 14i + 4$$

$$z_3 . z_4 = 12 + 14i$$

Generalizando a multiplicação de números complexos, teremos:

$$z_1 . z_2 = (a+bi).(c+di)$$

$$z_1 . z_2 = ac + adi + cdi + bdi^2 \rightarrow -1$$

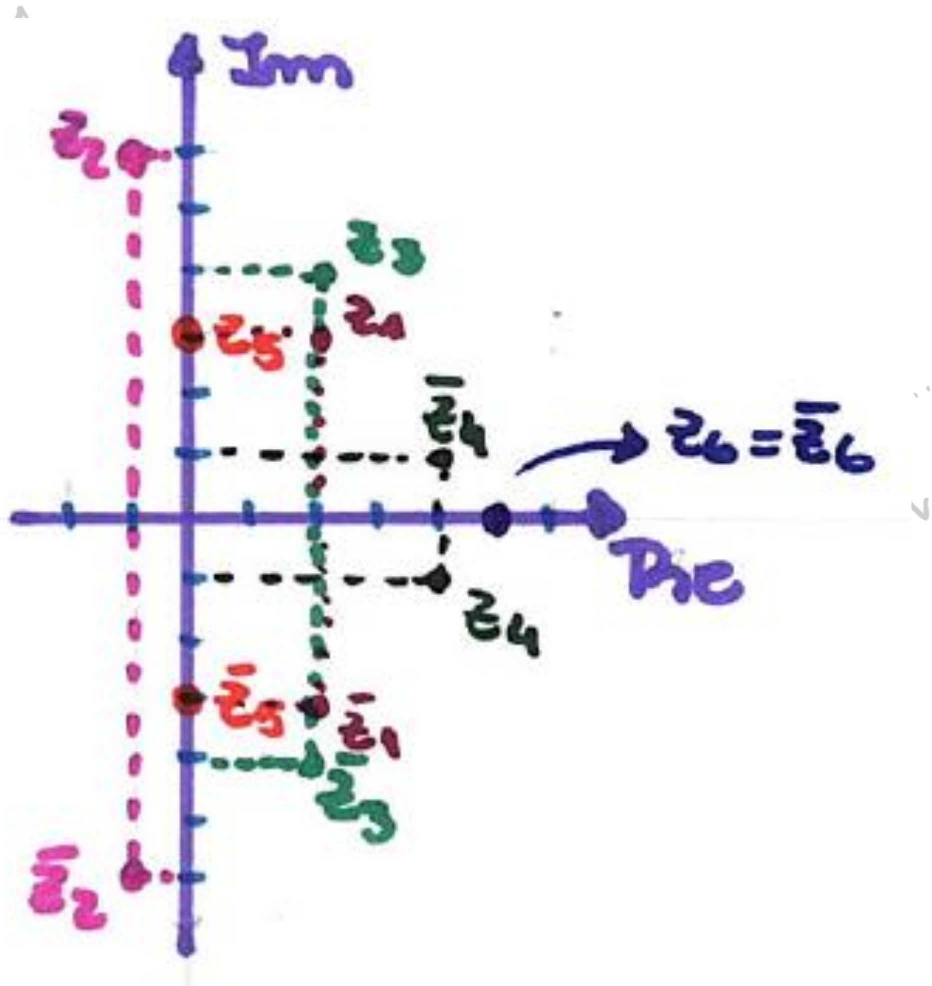
$$z_1 . z_2 = ac + adi + cdi - bd$$

$$z_1 . z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Anteriormente vimos que números complexos opostos são simétricos entre si em relação à origem. Já quando dois números complexos são simétricos entre si em relação apenas ao eixo dos Reais, diz-se que um é o conjugado do outro. Veja os exemplos abaixo:

$$z_1 = 2+3i \rightarrow \bar{z}_1 = 2-3i$$
$$z_2 = -1+6i \rightarrow \bar{z}_2 = -1-6i$$
$$z_3 = 2+4i \rightarrow \bar{z}_3 = 2-4i$$
$$z_4 = 4-i \rightarrow \bar{z}_4 = 4+i$$
$$z_5 = 3i \rightarrow \bar{z}_5 = -3i$$
$$z_6 = 5 \rightarrow \bar{z}_6 = 5$$

Perceba que apenas o sinal da parte imaginária muda, por isso, no caso de z_6, o conjugado é igual ao número complexo. Vamos ver a representação dos números complexos com seus conjugados geometricamente:



Uma característica interessante dessa modalidade é que, se multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado, o resultado dessa operação é um número real e não-negativo. Veja os exemplos abaixo:

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = (2+3i)(2-3i)$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4 - 6i + 6i - 9\underbrace{i^2}_{-1}$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4 - 9(-1)$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 4 + 9$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = 13$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = (-1+6i)(-1-6i)$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 1 + 6i - 6i - 36\underbrace{i^2}_{-1}$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 1 - 36(-1)$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 1 + 36$$

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = 37$$

Generalizando a multiplicação entre um número complexo e o seu conjugado:

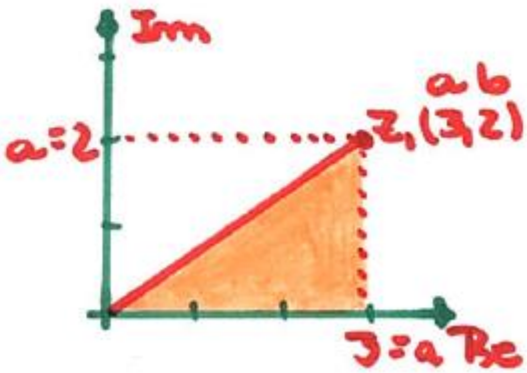
$$z \cdot \bar{z} = (a+bi).(a-bi)$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 - abi + abi + b^2\underbrace{i^2}_{-1}$$

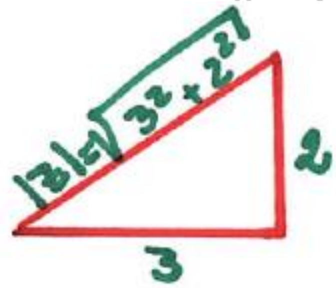
$$z \cdot \bar{z} = \underbrace{a^2 + b^2}_{\text{nº não negativo}}$$

Perceba que cada um dos números e seus conjugados, que marcamos no plano de Argand-Gauss, tem uma distância em linha reta até a origem. Essa distância pode ser calculada a partir do Teorema de Pitágoras e é chamada de módulo do número complexo. Veja os exemplos:

$$z_1 = 2 + 3i$$



Note que a distância entre o lugar em que marcamos o número complexo z_1 e o eixo Real temos um triângulo (entre o eixo Imaginário também, mas precisávamos escolher um deles). Lembre que o Teorema de Pitágoras diz que a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos catetos ao quadrado (para revisar, basta dar uma olhada na apostila de Geometria Plana I). Por isso, podemos escrever que essa distância entre a origem e o z_1 vale EQ. 38, porque os catetos valem 2 e 3, certo? Você consegue visualizar isso melhor a partir da figura abaixo:



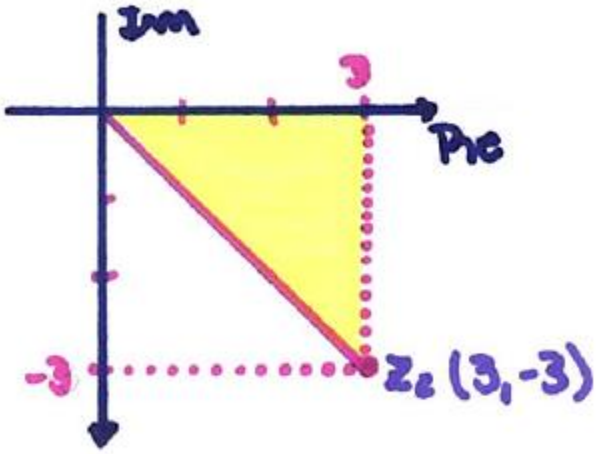
E, como foi dito acima, esse valor $\sqrt{3^2+2^2}$ é denominado módulo, que é representado por $|z_1|$. Então, o módulo do número complexo z_1 é:

$$|z_1| = \sqrt{3^2+2^2}$$
$$|z_1| = \sqrt{9+4}$$
$$|z_1| = \sqrt{13}$$

Vamos calcular um outro módulo, o de z_2:

$$z_2 = 3 - 3i$$

A representação geométrica desse número complexo é:



Veja que conseguimos traçar um triângulo e aplicar o teorema de Pitágoras para encontrar o módulo desse número:

$$|z_2| = \sqrt{3^2 + (-3)^2}$$
$$|z_2| = \sqrt{9+9}$$
$$|z_2| = \sqrt{18}$$

Perceba que podemos fatorar o número que está dentro da raiz para obter um resultado mais simpático:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 \cdot 3^2 \end{array}$$

Substituindo o valor que obtivemos acima na equação anterior, teremos o seguinte:

$$|z_2| = \sqrt{2 \cdot 3^2}$$
$$|z_2| = 3\sqrt{2}$$

Taí, esse é o número de z_2, ou, simplesmente, $|z_2|$.

Generalizando, o módulo de um número complexo é dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Vamos ver algumas as propriedades de módulos de números complexos:

- $|z| \geq 0$
- $|z_1 . z_2| = |z_1|.|z_2|$
- $|z|^n = |z^n|$, para todo n se $z \neq 0$ ou $n > 0$ se $z = 0$
- $z.\bar{z} = |z|^2$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, com $z_2 \neq 0$

DIVISÃO

Para realizar a divisão entre dois números complexos, é necessário multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Parece grego? Então olha o que isso significa matematicamente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}}$$

Apesar de parecer um bicho de sete cabeças, basta que você aplique os conhecimentos aprendidos até aqui para conseguir resolver uma divisão dessas. Veja o exemplo:

$$z_1 = 1 + 4i \qquad z_2 = 3 - 5i \qquad \bar{z}_2 = 3 + 5i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(1+4i)}{(3-5i)} \cdot \frac{(3+5i)}{(3+5i)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 5i + 12i + 20i^2}{9 + 15i - 15i - 25i^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 17i - 20}{9 + 25}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-17 + 17i}{34}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 + 1i}{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Agora que já sabemos tudo isso, vamos recapitular a equação de segundo grau que tentamos resolver anteriormente, aquela em que chegamos ao resultado abaixo:

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

Para encontrarmos as raízes da equação, basta terminarmos essa divisão (não esqueça do sinal de mais/menos):

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{4+2i}{2} = 2+i \\ x'' = \dfrac{4-2i}{2} = 2-i \end{cases}$$

Então, as raízes da equação $x^2 - 4x + 5 = 0$ são 2 + i e 2 - 1, duas raízes imaginárias.

POTENCIAÇÃO

Agora vamos nos ater à potenciação, envolvendo apenas a unidade imaginária. Até então a utilizamos como $i^2 = -1$ e como $i^1 = i$, mas e se tivéssemos i^{11}, que valor essa unidade assumiria? Para resolver isso, utilizamos as mesmas propriedades de potenciação de números reais. Vamos analisar as potências de 0 a 3 da unidade imaginária:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

Assim como fizemos para calcular i^3, vamos utilizar as potências anteriores para resolver potências acima de 3. Acompanhe:

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -(i^2) = -(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^8 = i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$$

$$i^9 = i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^{10} = i^9 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^{11} = i^{10} \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

Pronto! Encontramos o valor de i^{11}. Mas e se eu quisesse saber o resultado de i^{32}, eu teria que fazer todo esse procedimento até chegar no i^{32}? Não! Note que há um padrão. Perceba que os quatro primeiros resultados são 1, i, -1, -i e depois, a partir de i4, eles começam a se repetir de 4 em 4. Por isso, existe um método para facilitar o cálculo das potências de i. Ele consiste em dividir o expoente de i por 4, e considerar como a potência de i o resto dessa divisão. Veja os exemplos:

$$i^{11} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline -8 & 2 \\ 3 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

$$\therefore \quad i^{11} = i^{3} = -i$$

$$i^{32} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 32 & 4 \\ \hline -32 & 8 \\ 0 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

$$\therefore \quad i^{32} = i^{0} = 1$$

$$i^{45} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 45 & 4 \\ \hline -4 & 11 \\ 05 & \\ -4 & \\ 1 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

$$\therefore \quad i^{45} = i^{1} = i$$

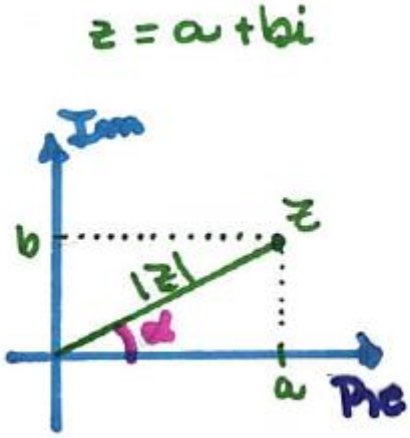
$$i^{98} \Rightarrow \begin{array}{r|l} 98 & 4 \\ \hline -8 & 24 \\ 18 & \\ -16 & \\ 2 \rightarrow \text{resto} & \end{array}$$

$$\therefore \quad i^{98} = i^{2} = -1$$

Assim fica bem mais fácil realizar a potenciação, não é?

FORMA TRIGONOMÉTRICA E OPERAÇÕES MATEMÁTICAS

Nós já aprendemos várias coisinhas sobre os números complexos, mas sempre podemos aumentar o nosso conhecimento, certo? Por isso, vamos voltar um pouquinho e aprofundar o nosso conhecimento sobre o módulo de um número complexo. O que mais podemos tirar dele? Lembre que o módulo é a distância do número complexo (o ponto dele) até a origem. Agora perceba que essa distância é uma linha que faz um ângulo com o eixo real. Veja o exemplo:



Esse ângulo αé também chamado de argumento de z_1, ou, ainda, de fase, e é um número entre 0 e 2π que satisfaz as seguintes condições:

$$\sin\alpha = \frac{b}{|z|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$$

Essas equações permitem que calculemos o ângulo, mas se isolarmos a e b e substituirmos os valores na forma algébrica (z = a + bi), teremos a forma trigonométrica (também chamada de forma polar) dos números complexos. Acompanhe o passo a passo.

Isolando a e b:

$$\cos\alpha = \frac{a}{|z|} \rightarrow a = |z|.\cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{|z|} \rightarrow b = |z|.\operatorname{sen}\alpha$$

Substituindo na forma algébrica:

$$z = a + bi$$

$$z = |z|.\cos\alpha + |z|.\operatorname{sen}\alpha.i$$

Podemos colocar |z| em evidência. Reorganizando os termos, teremos:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$$

Eis a forma trigonométrica do número complexo! Então, se temos a informação sobre o ângulo que o módulo do número complexo faz com o eixo real, podemos encontrar qual é esse número. Agora que temos uma nova forma de representar números complexos, vamos aprender algumas operações envolvendo elas.

MULTIPLICAÇÃO

Vamos tomar como exemplo dois números complexos na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|.(\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1)$$
$$z_2 = |z_2|.(\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$$

A multiplicação é realizada separadamente: os módulos se mutiplicam e aplica-se a distributiva na parte trigonométrica:

$$z_1.z_2 = \underline{|z_1|}.(\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1).\underline{|z_2|}(\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$$

Reorganizando essa multiplicação teremos o seguinte:

$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|.(\cos\alpha_1.\cos\alpha_2 + i\cos\alpha_1.\text{sen}\,\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_1.\cos\alpha_2 + i^2\text{sen}\,\alpha_1\alpha_2)$$
$$z_1.z_2 = |z_1||z_2|.\Big[\underbrace{(\cos\alpha_1.\cos\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_1.\text{sen}\,\alpha_2)}_{\cos(\alpha_1+\alpha_2)} + i\,\underbrace{(\text{sen}\,\alpha_1.\cos\alpha_2 + \text{sen}\,\alpha_2\cos\alpha_1)}_{\text{sen}(\alpha_1+\alpha_2)}\Big]$$

Agora precisamos relembrar de algumas relações trigonométricas sobre soma de ângulos. Veja:

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2) = \cos\alpha_1.\cos\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_1.\text{sen}\,\alpha_2$$
$$\text{sen}(\alpha_1+\alpha_2) = \text{sen}\,\alpha_1.\cos\alpha_2 + \text{sen}\,\alpha_2.\cos\alpha_1$$

Então, a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica é realizada fazendo:

$$z_1 . z_2 = |z_1|.|z_2|[(\cos(\alpha_1+\alpha_2)) + i(\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2))]$$

Vamos ver um exemplo multiplicando os números:

$$z_1 = 5(\cos 30° + i\operatorname{sen} 30°) \qquad z_2 = 2(\cos 15° + i\operatorname{sen} 15°)$$

Aplicando na fórmula da multiplicação, teremos o seguinte:

$$z_1 . z_2 = |z_1||z_2| . \cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$z_1 . z_2 = (5.2) . \cos(30°+15°) + i\operatorname{sen}(30°+15°)$$
$$z_1 . z_2 = 10 . (\cos 45° + i\operatorname{sen} 45°)$$

POTENCIAÇÃO

Discutimos, na apostila de Aritmética I, que a potenciação é basicamente uma sequência de multiplicações. Então, para calcular a potenciação de um número complexo, podemos estender a fórmula da multiplicação para várias multiplicações (que chamaremos de n), veja:

$$z_1 . z_2 . z_3 \dots z_n = |z_1||z_2||z_3|\dots|z_n| . (\cos(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n)) + i(\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n))$$

Se $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_n$, a multiplicação fica assim:

$$z.z.z\dots z = |z||z||z|\dots|z| . (\cos(\alpha+\alpha+\alpha+\dots+\alpha)) + i(\operatorname{sen}(\alpha+\alpha+\alpha+\dots+\alpha))$$

E então podemos reescrevê-la dessa forma:

$$z^n = |z|^n . [\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)] \rightarrow 1^{a} \text{ equação de Moivre}$$

Essa fórmula para calcular a potenciação de números complexos é também chamada de **1ª equação De Moivre**.

Vamos calcular a quinta potência do número complexo abaixo utilizando a equação que acabamos de aprender:

$$Z = 3 . \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Substituindo na 1ª equação De Moivre, chegaremos ao resultado:

$$z^5 = 3^5 . \left[\cos\left(\frac{5.\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5.\pi}{4}\right)\right]$$

$$z^5 = 243 . \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

DIVISÃO

A divisão de números complexos na forma trigonométrica é bastante parecida com a da forma algébrica, com a diferença de que o módulo do denominador não acompanha o conjugado na multiplicação do numerador e do denominador. Vamos ver isso de pertinho com os números complexos abaixo:

$$z_1 = |z_1|.(\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1)$$

$$z_2 = |z_2|.(\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)$$

Fazendo a divisão teremos o seguinte:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\alpha_1 + i\,\text{sen}\,\alpha_1)}{|z_2|(\cos\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_2)} \cdot \frac{(\cos\alpha_2 - i\,\text{sen}\,\alpha_2)}{(\cos\alpha_2 - i\,\text{sen}\,\alpha_2)}$$

Note que não reescrevemos o $|z_2|$ na segunda fração.

Aplicando a distributiva nos termos trigonométricos chegaremos a:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\cos\alpha_1.\cos\alpha_2 - i\cos\alpha_1.\text{sen}\,\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_1.\cos\alpha_2 - i^2\text{sen}\,\alpha_1.\text{sen}\,\alpha_2}{\cos^2\alpha_2 - (i\,\text{sen}\,\alpha_2)^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\cos\alpha_1.\cos\alpha_2 - i\cos\alpha_1\,\text{sen}\,\alpha_2 + i\,\text{sen}\,\alpha_1.\cos\alpha_2 + (\text{sen}\,\alpha_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_2)}{\cos^2\alpha_2 + \text{sen}^2\alpha_2}$$

Lembrando de mais uma relação trigonométrica, teremos o seguinte:

$$\cos^2\alpha_2 + \text{sen}^2\alpha_2 = 1$$

Como o denominador será zero:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \text{sen}\,\alpha_1\, \text{sen}\,\alpha_2 + i\,(\text{sen}\,\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 - \text{sen}\,\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1)$$

Utilizando outras relações trigonométricas, chegaremos finalmente à fórmula para divisão de números complexos na forma trigonométrica:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\,\text{sen}\,(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Vejamos um exemplo com os números complexos abaixo:

$$z_1 = 20\,(\cos 120^\circ + i\,\text{sen}\,120^\circ)$$
$$z_2 = 4\,(\cos 30^\circ + i\,\text{sen}\,30^\circ)$$

Aplicando a fórmula que acabamos de deduzir, chegaremos a:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{20}{4} \cdot [\cos(120 - 30) + i\,\text{sen}\,(120 - 30)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 5 \cdot (\cos 90^\circ + \text{sen}\,90^\circ)$$

RADICIAÇÃO

Para entender como calcular a raiz de um número complexo, vamos fazer uma generalização e calcular a raiz enésima (n) do número complexo abaixo:

$$z = |z|.(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) \rightarrow \sqrt[n]{|z|.(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)} \quad n \geq 2$$

Podemos dizer que calcular essa raiz consiste em determinar o número complexo w, em que wn = z (já que o nosso objetivo é fazer $\sqrt[n]{z}$), então $w^n = z$ é:

$$w^n = |z|.(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

Podemos supor que w é:

$$w = |w|.\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta$$

E, portanto, substituindo isso em $w^n = z$, teremos o seguinte:

$$(|w|.\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)^n = |z|(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

Sabemos, pela 1ª Lei de Moivre (dá uma olhadinha nela de novo), que:

$$(|w|\cdot\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)^n = |w|^n\cdot[\cos(n\beta) + i\,\text{sen}(n\beta)]$$

Então, substituindo esse resultado na igualdade anterior chegaremos a:

$$|w|^n\cdot(\cos(n\beta) + i\,\text{sen}(n\beta)) = |z|\cdot(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

Agora vamos ter que resgatar alguns conhecimentos: i) números complexos iguais têm módulos iguais; ii) números complexos iguais têm argumentos (ângulos) iguais. Isso implica em:

i) $|w|^n = |z|$, então $|w| = \sqrt[n]{|z|}$

ii) $n\beta = \alpha + 2k\pi$, então $\beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Assim, teremos que:

$$W_k = \sqrt[n]{|z|}\cdot\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

↳ 2ª equação de Moivre

Em que n assume valores acima ou iguais a 2 e k pertence aos inteiros, ou seja, w_k é a k-ésima raiz n-ésima.

Vamos ver um exemplo para entender como encontrar as raízes cúbicas do número complexo abaixo:

$$z = 8\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

Aplicando a 2ª equação de Moivre, teremos o seguinte:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\,.\,\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$$

$$w_3 = \sqrt[3]{8}\,.\left[\cos\left(\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_3 = 2\,.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + k.\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Como temos n = 3 (raiz cúbica), teremos k = 0, 1 e 2 (três raízes, portanto). Substituindo esses valores de k na equação acima, teremos:

✓ Para k = 0:

$$w_0 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 0.\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 0.\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_0 = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$w_0 = 2(0 + i\cdot 1)$$

$$w_0 = 2i$$

✓ Para k = 1:

$$w_1 = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 1\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 1\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$w_1 = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]$$

$$w_1 = -\sqrt{3} - i$$

✓ Para k = 2:

$$w_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

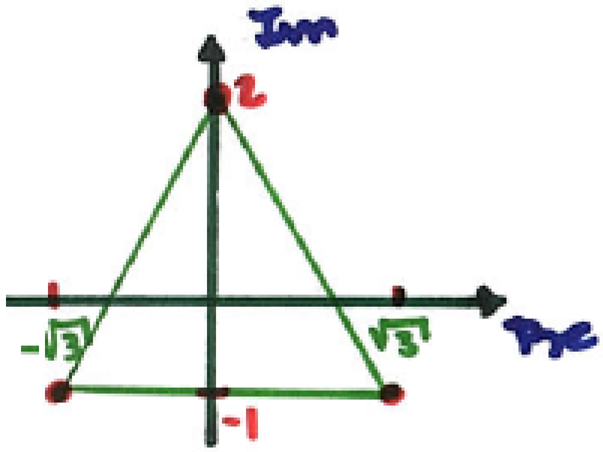
$$w_2 = 2\cdot\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]$$

$$w_2 = \sqrt{3} - i$$

Então, as raízes cúbicas desse número são:

$2i \; ; \; -\sqrt{3} - i \; ; \; \sqrt{3} - i$

Vamos ver a representação geométrica desses pontos no plano de Argand-Gauss:



Perceba que se ligarmos esses pontos, teremos um triângulo equilátero. Assim, as raízes desse número complexo são os vértices desse triângulo, isso acontece porque para qualquer n > 2, teremos um polígono fechado com n vértices.

EXERCÍCIOS

1. Dado o número complexo z=3+4i, qual das alternativas melhor descreve o módulo e argumento de z?

a) $|z|=25 \;,\; \theta=\arctan(\frac{3}{4})$

b) $|z|=7\ ,\ \theta=\arctan(\frac{4}{3})$

c) $|z|=5\ ,\ \theta=\arctan(\frac{3}{4})$

d) $|z|=5\ ,\ \theta=\arctan(\frac{4}{3})$

e) $|z|=25\ ,\ \theta=\arctan(\frac{4}{3})$

Alternativa correta: D

2. Quais das afirmações sobre números complexos estão corretas?

I - A soma de um número complexo com seu conjugado é um número complexo.

II - Um número imaginário multiplicado pelo seu conjugado é um número imaginário.

III - A soma de dois números imaginários é necessariamente um número imaginário.

a) Apenas I

b) Apenas II

c) Apenas III

d) I e II

e) II e III

Alternativa correta: A

3. Quanto vale o módulo de

$i^2 + i^{-1} + i^4 - i$

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Alternativa correta: E

4. (FUVEST) Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ qual é o menor valor do inteiro n >1 para o qual zn é um número real?

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

Alternativa correta: C

5. (UNITAU) O módulo de z=1/(i36) é:

a) 3

b) 1

c) 2

d) 1/36

e) 36

Alternativa correta: B

6. (Cesgranrio) O lugar geométrico das imagens dos complexos z, tais que z_2 é real, é:

a) um par de retas paralelas.

b) um par de retas concorrentes.

c) uma reta.

d) uma circunferência.

e) uma parábola.

Alternativa correta: B

7. (UNESP) Se z = (2 + i).(1 + i).i, então o conjugado de z, será dado por

a) -3-i

b) 1 - 3i

c) 3 - i

d) - 3 + i

e) 3 + i

Alternativa correta: A

8. Marque a alternativa que contém a parte real e imaginária, respectivamente, do número complexo z dado pela expressão abaixo:

$$z = \frac{32 - 256i}{96}$$

a) $\frac{1}{3}$ e $\frac{8}{3}$

b) $\frac{32}{96}$ e $\frac{256}{96}$

c) $\frac{8}{3}$ e $-\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{3}$ e $-\frac{8}{3}$

e) $\frac{1}{3}$ e $-\frac{8}{5}$

Alternativa correta: D

9. Marque a alternativa que contém a soma dos números reais a e b, que são incógnitas na equação abaixo:

$$a + bi - 1 + 6i = \frac{12 + 21i}{3}$$

a) 5

b) 1

c) 6

d) 4

e) 0

Alternativa correta: C

10. Qual o argumento do número complexo z, dado pela expressão abaixo?

$$z = \frac{3 + \sqrt{27}\,i}{i \cdot \left(\sqrt{3} + i\right)}$$

a) $\frac{-\pi}{3}$

b) $\frac{-\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{3}$

d) $\dfrac{-\pi}{4}$

e) $\dfrac{\pi}{2}$

Alternativa correta: A

11. A soma dos complexos $z_1=1-3i$ e $z_2=4(\cos(30^o)+i\text{sen}(30^o))$ vale:

a) $(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2})-i$

b) $(1-2\sqrt{3})-i$

c) $(1+2\sqrt{3})-i$

d) $(\dfrac{3}{2}) - i(3-2\sqrt{3})$

e) $(1+2\sqrt{3}) + i\dfrac{5}{2}$

Alternativa correta: C

Determine a soma das partes imaginárias dos números complexos abaixo:

$$z = (1+9i)\cdot\frac{1}{3}$$

$$w = \left(\frac{3}{5}i+5\right)\cdot 5$$

$$x = 6i$$

a) 12

b) 5

c) 16

d) 1

e) 10

Alternativa correta: A

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.