CONJUNTOS

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ CNJU - Introdução e operações básicas
- ✓ VENN - Diagrama de Venn
- ✓ EXCN - Exercícios de conjuntos

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	CONJUNTOS
PROFESSORES	ARTHUR LOVATO, TAMARA SALVATORI

CONJUNTOS

O Me Salva! perguntou a alguns estudantes para qual curso eles iriam prestar vestibular/ENEM. Em um primeiro grupo, composto por 40 estudantes, 15 estavam interessados em Psicologia, 10 estavam em dúvida entre Psicologia e Medicina e o restante optou por Medicina. No segundo grupo, 21 estudantes gostaria de cursar Biologia, 15 Física e 25 Psicologia; além disso, 5 estavam em dúvida entre Biologia e Física, 7 entre Biologia e Psicologia, 2 entre Física e Psicologia e 3 ainda não haviam decidido se cursariam Biologia, Física ou Psicologia. Por fim, no último grupo, composto por 15 estudantes, 7 se interessavam por Matemática, 4 por Filosofia, 1 por Química e Filosofia, 2 por Matemática e Filosofia e 4 por Matemática e Química. O restante gostaria de cursar Química e nenhum estava interessado nos três cursos ao mesmo tempo. Como podemos saber quantos estudantes ao todo foram consultados e quantos alunos gostariam de cursar Medicina e Química?

Perceba que há muita informação entre esses três grupos de estudantes e vários cursos diferentes. Para podermos responder à pergunta é preciso organizar toda essa confusão. Para isso podemos utilizar um conceito bem interessante da Matemática, o de conjuntos. Um conjunto é composto por elementos semelhantes que podem ser de qualquer natureza, apesar de os numerais serem os mais comuns. Mesmo assim, nada impede que utilizemos, por exemplo, conjuntos compostos por objetos, por letras, por dias da semana ou até, no nosso caso, cursos de graduação. Vamos fazer grupos que indicam os cursos indicados pelos estudantes. Esses grupos formarão conjuntos que são descritos, em geral, por uma letra e com os seus elementos entre chaves. Veja:

O primeiro grupo de estudantes mencionou os cursos de Psicologia e Medicina. Então o conjunto será:

A = {psicologia, medicina}

A letra que nomeia o conjunto é arbitrária. Não se preocupe com isso, ok? Os cursos são os elementos do conjunto.

O segundo grupo citou os cursos de Biologia, Física e Psicologia, então veja o conjunto:

B = {biologia, física, psicologia}

E o último grupo indicou os cursos de Matemática, Química e Filosofia. O conjunto será:

C = {matemática, química, filosofia}

É essencial, antes de partirmos para a resolução do nosso problema, que façamos uma análise de como as operações matemáticas funcionam quando estamos tratando de conjuntos. Para isso, além dos conjuntos A, B e C que definimos anteriormente, vamos analisar os conjuntos D, E e F, que são: D = {1, 2, 3, 4, 5}, E = {4, 5, 6, 7, 8}, F = {6, 7} e G = {5}.

UNIÃO

Essa operação é baseada em unir os elementos de um conjunto com os de outro (ou outros) em um novo conjunto. Utilizamos um sinal parecido com um grande U para indicar essa operação. Veja os exemplos:

No caso de elementos compostos por cursos de graduação:

A U C = {psicologia, medicina} U {matemática, química, filosofia}

A U C = {psicologia, medicina, matemática, química, filosofia}

No caso de elementos compostos por numerais:

$$D \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6, 7\}$$

$$D \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Perceba que é quase uma soma de conjuntos, mas nesse caso a nomenclatura é *união*.

INTERSEÇÃO

Esse termo é provavelmente o que você mais vai ler/ouvir quando trabalha com conjuntos. Ele é representado matematicamente por um símbolo que se parece com um U invertido, ou com uma ferradura, ∩. Quando fazemos a intersecção entre dois ou mais conjuntos significa que teremos um terceiro conjunto que contém apenas os elementos iguais dos conjuntos envolvidos. Veja os exemplos:

$$A \cap B = \{\text{psicologia, medicina}\} \cap \{\text{biologia, física, psicologia}\}$$

$$A \cap B = \{\text{psicologia}\}$$

Perceba que havia apenas um elemento em comum entre os dois conjuntos, mas pode haver mais de um ou, ainda, nenhum! Veja como isso pode ser representado:

$$A \cap C = \{\text{psicologia, medicina}\} \cap \{\text{matemática, química, filosofia}\}$$

$$A \cap C = \varnothing$$

O conjunto que resulta de uma intersecção em que os conjuntos envolvidos não apresentam elementos iguais é um conjunto vazio, representado pelo símbolo ∅ .

Veja agora um exemplo com numerais:

$$D \cap E = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$D \cap E = \{4, 5\}$$

Perceba que dessa vez há dois elementos repetidos nos conjuntos e, por isso, nessa intersecção, teremos como resultado um conjunto com esses dois elementos.

Além disso, a intersecção possui algumas propriedades que, como você já sabe, visam facilitar alguns procedimentos que a envolvem. Veja::

A intersecção de um conjunto por ele mesmo é o próprio conjunto, veja:

$$A \cap A = A$$

{psicologia, medicina} ∩ {psicologia, medicina} = {psicologia, medicina}

Faz sentido, já que todos os elementos serão repetidos, né?

Propriedade comutativa é válida para conjuntos em intersecção também, ou seja:

$$A \cap B = B \cap A$$

$A \cap B$ = {psicologia, medicina} ∩ {biologia, física, psicologia} = {psicologia}

$B \cap A$ = {biologia, física, psicologia} ∩ {psicologia, medicina} = {psicologia}

Desde que os elementos sejam repetidos nos conjuntos envolvidos, não importa a ordem dessa operação.

Propriedade associativa em conjuntos em intersecção também é válida:

$$D \cap (E \cap G) = (D \cap E) \cap G$$

Vamos analisar um lado da igualdade por vez. Veja o primeiro:

$$D \cap (E \cap G) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap (\{4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{5\})$$

$$D \cap (E \cap G) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{5\}$$

$$D \cap (E \cap G) = \{5\}$$

Agora o segundo:

$$(D \cap E) \cap G = (\{1, 2, 3, \underline{4}, \underline{5}\} \cap \{\underline{4}, \underline{5}, 6, 7, 8\}) \cap \{5\}$$
$$(D \cap E) \cap G = \{4, \underline{5}\} \cap \{\underline{5}\}$$
$$(D \cap E) \cap G = \{5\}$$

Como esperado, chegamos ao mesmo resultado, então guarde essa informação de propriedade associativa para resolver os problemas de conjuntos mais rapidamente.

DIFERENÇA

Nesse caso a ordem dos conjuntos importa, ou seja, A - B é diferente de B - A. Isso porque no primeiro caso, por exemplo, excluiremos de A os elementos que estão repetidos em B. Veja os exemplos utilizando os mesmos conjuntos do caso anterior:

$$A - B = \{\underline{\text{psicologia}}, \text{medicina}\} - \{\text{biologia}, \text{física}, \underline{\text{psicologia}}\}$$
$$A - B = \{\text{medicina}\}$$

Agora veja o que acontece quando invertemos a diferença:

$$B - A = \{\text{biologia}, \text{física}, \underline{\text{psicologia}}\} - \{\underline{\text{psicologia}}, \text{medicina}\}$$
$$B - A = \{\text{biologia}, \text{física}\}$$

Perceba que o resultado é completamente diferente do anterior, então, tome muito cuidado com essa ordem, ok?

Agora vamos ver o caso em que antes encontramos um conjunto vazio como resultado da intersecção quando fazemos uma diferença:

$$A - C = \{\text{psicologia, medicina}\} - \{\text{matemática, químico, filosofia}\}$$

$$A - C = \emptyset$$

$$A - C = \emptyset = A \cap C$$

Também temos como resultado um conjunto vazio, já que nenhum elemento de A se repete em C, assim como na intersecção.

Veja agora o exemplo numérico:

$$D - E = \{1, 2, 3, \underline{4}, \underline{5}\} - \{\underline{4}, \underline{5}, 6, 7, 8\}$$

$$D - E = \{1, 2, 3\}$$

E se fosse E– D?

$$E - D = \{\underline{4}, \underline{5}, 6, 7, 8\} - \{1, 2, 3, \underline{4}, \underline{5}\}$$

$$E - D = \{6, 7, 8\}$$

CONJUNTO COMPLEMENTAR

Essa operação é uma particularidade da diferença e faz sentido quando um conjunto está contido em outro, ou seja, todos os seus elementos se repetem no outro conjunto. Então, quando temos um conjunto contido (o símbolo que indica essa relação é parecido com um grande ⊂) em outro, obteremos um conjunto complementar ao fazermos a diferença entre eles. Veja o exemplo:

$E = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ e $F = \{6, 7\}$. Perceba que todo o conjunto F se repete em E, então podemos dizer que E contém F, que, matematicamente, é escrito como $E \subset F$, ou, ainda, que F está contido em E, $F \supset E$. Se fizermos a diferença entre E e F, obteremos:

$E - F = \{4, 5, 8\}$, que são os elementos que faltam para F ser igual a E, ou seja, são os elementos complementares de F em relação a E, de maneira que o conjunto complementar de F em E é essa diferença. Matematicamente isso é descrito assim: $C_F E = \{4, 5, 8\}$.

DIAGRAMA DE VENN

Já conhecemos a nomenclatura e as operações realizadas com conjuntos, mas, para podermos resolver os problemas propostos, precisaremos utilizar um recurso chamado **diagrama de Venn** para iniciar a resolução dos nossos problemas. Lembre que as questões eram: quantos alunos foram consultados ao todo? Quantos estudantes estavam interessados apenas em Medicina e apenas em Química?

Lembre também que, a partir das informações sobre os cursos, nós criamos três grupos, então vamos analisar um por vez. Sobre a primeira questão, nós sabemos quantos alunos foram entrevistados no primeiro e no terceiro grupos, mas não sabemos quantos temos no segundo. Já a segunda questão pergunta sobre informações do primeiro e do terceiro grupo, que estão faltando. Vamos iniciar nossa análise utilizando o segundo grupo para responder quantos estudantes foram perguntados.

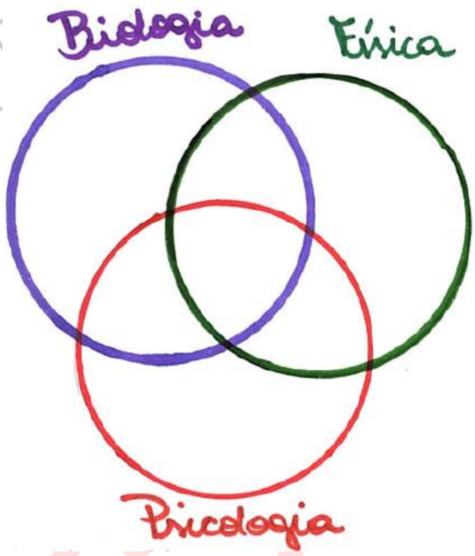
GRUPO 2

Alunos interessados em Biologia, Física e Psicologia.

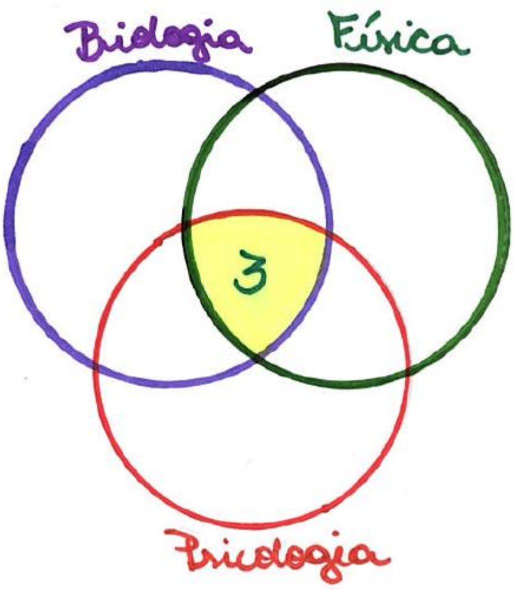
Sabemos que 21 estudantes gostariam de cursar Biologia, 15 Física, 25 Psicologia e que, além disso, 5 estavam em dúvida entre Biologia e Física, 7 entre Biologia e Psicologia, 2 entre Física e Psicologia e 3 ainda não haviam decidido se cursariam Biologia, Física ou Psicologia.

Temos três cursos, então, para montarmos um diagrama de Venn, faremos 3 círculos e os nomearemos com os títulos dos cursos. Segundo o enunciado, há estudantes que estão em dúvida entre dois ou três cursos.

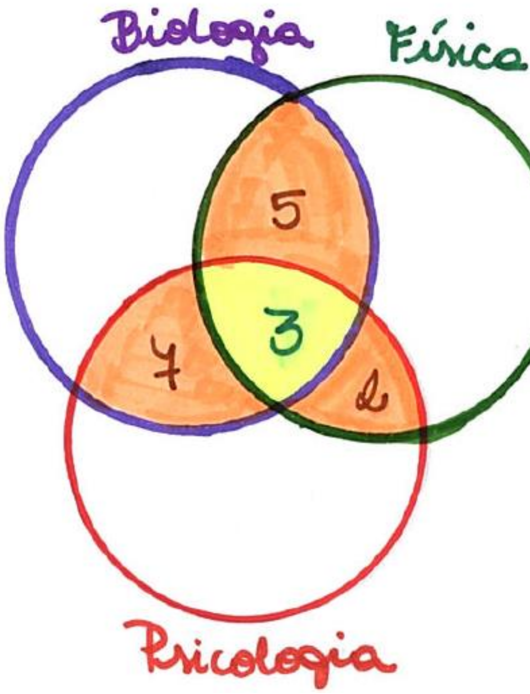
Quando estamos tratando de conjuntos, isso descreve uma intersecção, que, no diagrama, é representada por uma sobreposição dos círculos. Veja como fica:



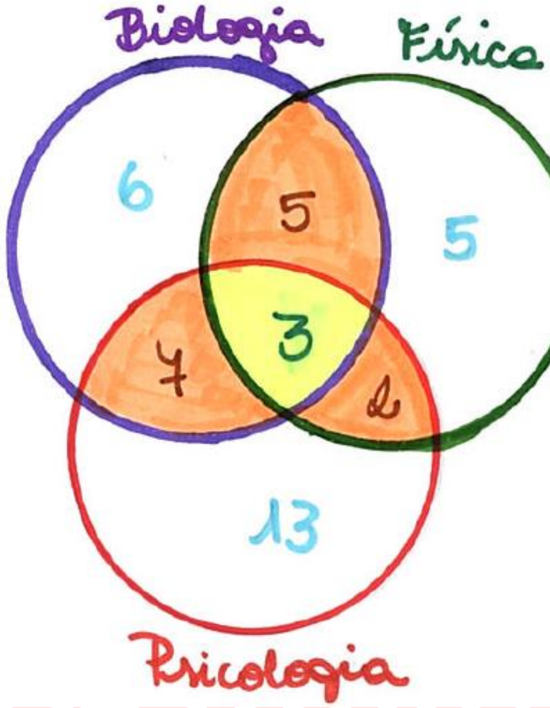
O próximo passo é preencher os espaços dos círculos com os números de estudantes que escolheram tais cursos. Atenção: sempre iniciaremos o preenchimento a partir das intersecções e você logo entenderá o porquê. Sabemos que 3 alunos estavam em dúvida entre os cursos de Psicologia, Física e Biologia, então vamos escrever o número 3 no "centro" dos círculos, ou seja, na intersecção entre os três círculos.



Também há estudantes em dúvida entre dois cursos: 5 estavam em dúvida entre Biologia e Física, 7 entre Biologia e Psicologia e 2 entre Física e Psicologia. No nosso diagrama basta preencher as intersecções entre os dois círculos correspondentes ao número deles. Veja:



Agora só falta preencher os espaços que não fazem intersecção, mas é preciso muita atenção. Não basta preenchê-los com os números do enunciado em que 21 estudantes gostariam de cursar Biologia, 15 Física e 25 Psicologia. É preciso descontar o que já foi escrito no diagrama, pois, entre esses estudantes que escolheram esses cursos, há os que estão indecisos. Então, vamos olhar um círculo do nosso diagrama por vez. No caso de Biologia, 5 + 3 + 7 = 15 estudantes já estão sendo contados, por isso devemos fazer 21 - 15 = 6 e, portanto, teremos que apenas 6 estudantes estão interessados somente em Biologia. Agora faremos o mesmo com os outros círculos: em Física já temos 5 + 3 + 2 = 10, e o enunciado nos informa que temos 15 alunos interessados em Física, então, 15 - 10 = 5; assim, apenas 5 deles estão interessados *apenas* em Física. Já na Psicologia temos 7 + 3 + 2 = 12 estudantes interessados no curso, mas apenas 25 - 12 = 13 interessados exclusivamente nesse curso. Agora vamos preencher nosso diagrama com essas informações:



Por fim, para sabermos quantos alunos foram entrevistados nesse grupo, vamos somar todos os números do diagrama. Assim, teremos:

$$6 + 5 + 7 + 3 + 5 + 2 + 13 = 41$$

Perceba que, se tivéssemos apenas somado os números que o enunciado forneceu, teríamos muitos estudantes a mais, pois estaríamos contando alguns duas ou três vezes; por isso, fazer o diagrama deixa bem mais fácil perceber esses detalhes e mais difícil de errar.

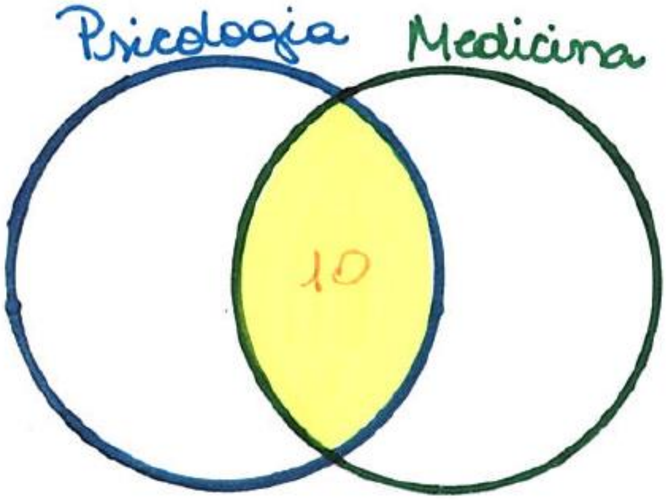
Então, se são 41 alunos nesse grupo, 40 no primeiro e 15 no último, o número de alunos entrevistados foi 41 + 40 + 15 = **96 alunos**.

Beleza! Nosso primeiro problema foi resolvido, agora vamos aos outros, iniciando pelo primeiro grupo, que envolve apenas dois elementos e de um deles não sabemos o número de interessados.

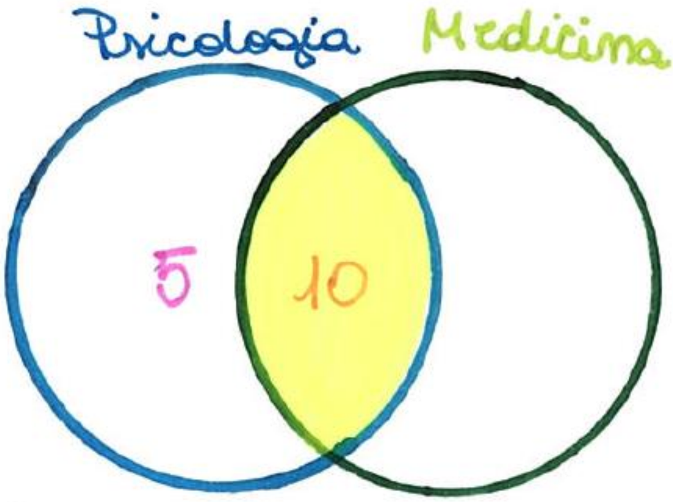
GRUPO 1

Composto por 40 estudantes, 15 estavam interessados em Psicologia, 10 estavam em dúvida entre Psicologia e Medicina e o restante optou por Medicina. Quantos são os estudantes que querem exclusivamente cursar Medicina? Vamos montar o Diagrama de Venn para descobrir!

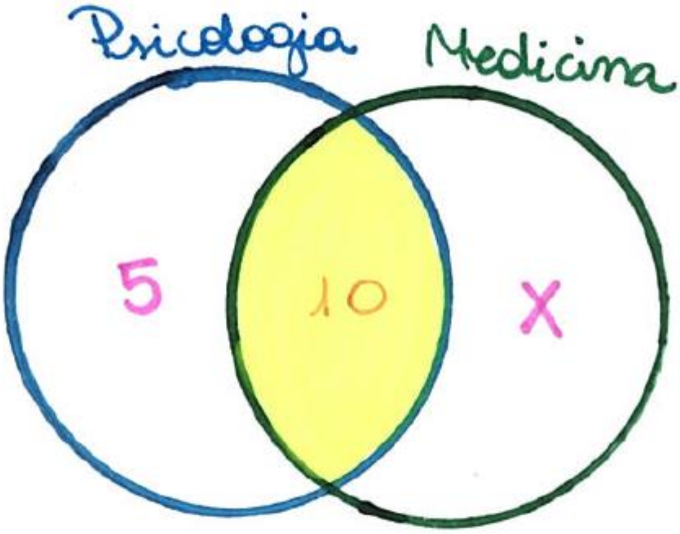
Como temos dois cursos, dessa vez teremos apenas dois círculos. Veja que há estudantes que estão em dúvida e indicaram os dois cursos, por isso teremos uma intersecção entre eles. Lembre que sempre iniciamos o preenchimento do diagrama a partir das informações da intersecção, ok? Então, vamos montar o diagrama e preencher a intersecção com o número 10, que é o número de estudantes em dúvida:



Sabemos que o número de estudantes que expressou interesse por Psicologia é 15, mas lembre que, ao preenchermos o diagrama, precisamos descontar o valor contido na intersecção. Portanto, no lugar de apenas Psicologia teremos 15 - 10 = 5 estudantes:



O nosso problema está perguntando o número de estudantes com interesse exclusivo em Medicina, então, como não sabemos que número é esse, vamos substituí-lo por um x.



Lembre que antes o procedimento foi somar todos os valores contidos no diagrama para podermos saber o número de estudantes daquele grupo. Agora faremos algo muito parecido, só que somaremos os números e a incógnita (o “x”) e igualaremos ao número de estudantes deste grupo, que, como mencionado anteriormente, é 40. Então, teremos o seguinte:

$$5 + 10 + x = 40$$

Para podermos saber o valor de x e, assim, o número de estudantes que escolheu cursar Medicina, é necessário isolá-lo. Ficará assim:

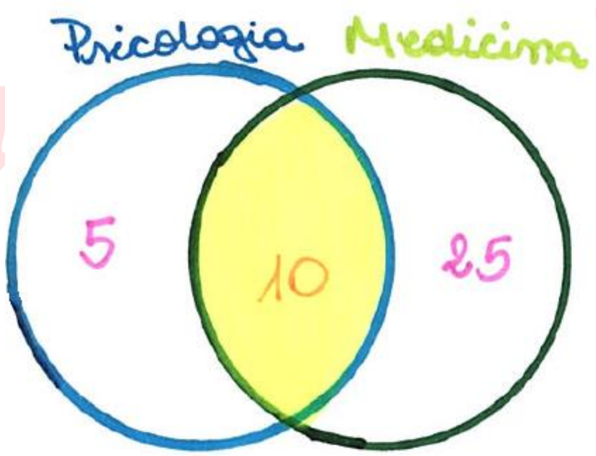
$$5 + 10 + x = 40$$

$$15 + x = 40$$

$$x = 40 - 15$$

$$x = 25$$

Portanto, 25 estudantes optaram exclusivamente pelo curso de Medicina. Se você preencher esse número no diagrama, chegará no seguinte:



E por fim:

$$5 + 10 + 25 = 40$$

$$40 = 40$$

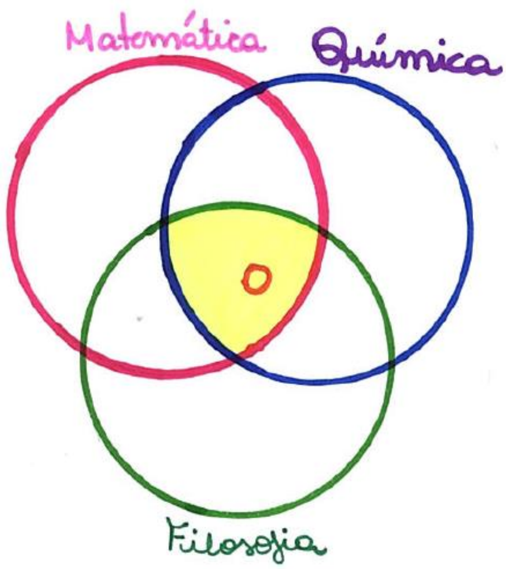
Logo, o procedimento realizado é verdadeiro!

Agora falta apenas um problema a ser resolvido, o que envolve os estudantes do terceiro grupo. O procedimento será o mesmo que realizamos no problema anterior, mas é necessário mais atenção, já que teremos um elemento a mais envolvido.

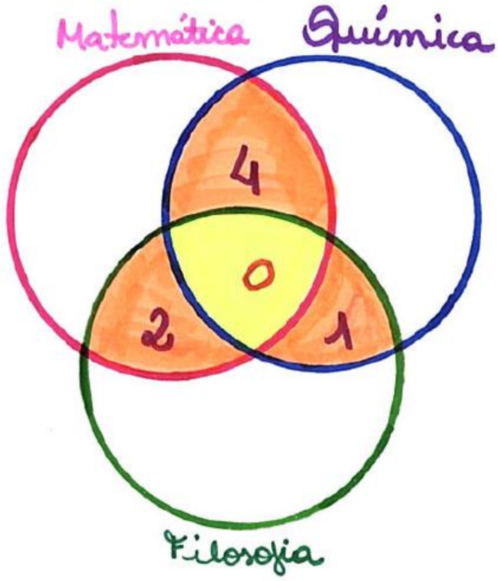
GRUPO 3

Grupo composto por 15 alunos, 7 estudantes se interessaram por Matemática, 4 por Filosofia, 1 por Química e Filosofia, 2 por Matemática e Filosofia e 4 por Matemática e Química. O restante gostaria de cursar Química e nenhum estava interessado nos três cursos. Quantos estudantes estavam interessados exclusivamente Química?

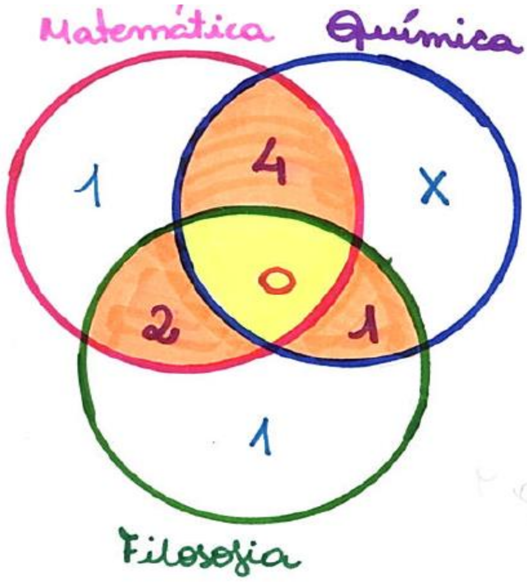
Como temos três cursos, teremos três círculos no Diagrama de Venn. Perceba que na intersecção entre os três há um conjunto vazio, já que nenhum aluno ficou em dúvida entre os três cursos. Então, construindo o diagrama e preenchendo a intersecção entre os três, teremos:



O segundo “nível” de intersecções é aquele que ocorreu apenas entre dois cursos. Então, vamos preencher o número 4 entre Matemática e Química, o número 2 entre Matemática e Filosofia, o número 1 entre Química e Filosofia:



Por fim, vamos preencher os espaços que restam, mas lembre que devemos levar em consideração o que já foi preenchido. Então, no círculo do curso de Matemática há 2 + 4 = 6 alunos. O enunciado diz que eram 7 alunos interessados. Por isso, faremos 7 - 6 = 1, e esse é o número que será preenchido, já que apenas um estudante estava interessado exclusivamente em Matemática. O mesmo será feito com o curso de Filosofia, em que já há 2 + 1 = 3 alunos. Como eram 4 interessados, teremos que 4 - 3 = 1, assim somente um estudante queria cursar apenas Filosofia. No caso do curso de Química nós colocaremos um x no espaço em branco.



Para sabermos o número de estudantes que optou por esse curso devemos somar todos os números do diagrama e igualar ao número de estudantes entrevistados nesse grupo, que nós sabemos ser 15:

$$1 + 2 + 4 + 0 + 1 + 1 + x = 15$$

Resolvendo, teremos:

$$9 + x = 15$$

$$x = 15 - 9$$

$$x = \mathbf{6}$$

Então, 6 estudantes estavam interessados em cursar exclusivamente Química.

O Diagrama de Venn é um recurso bastante utilizado e bem interessante. Isso porque ele proporciona uma organização das informações a partir da análise visual. A grande chave para conseguir resolver problemas que envolvem conjuntos a partir do Diagrama de Venn é começar pelas informações das intersecções. Você consegue resolver muito facilmente problemas que aparentemente são bem complicados ao aplicar os procedimentos que acabamos de analisar.

Resolva as questões:

(FATEC) Sejam a e b números irracionais. Dada as afirmações:

I) a.b é um número irracional.

II) a + b é um número irracional.

III) a - b pode ser um número racional.

Podemos concluir que:

a) as três são falsas.

b) as três são verdadeiras.

c) somente I e III são verdadeiras.

d) somente I é verdadeira.

e) somente I e II são falsas.

Alternativa correta: E

Módulo: CNUM – Conjuntos Numéricos

Lista: CNUMEX – Exercícios de Fixação #1

(UFRGS) Se x = 0,949494... e y = 0,060606..., então x + y é igual a

a) 1,01

b) 1,11

c) 10/9

d) 100/99

e) 110/9

Alternativa correta: D

Módulo: CNUM – Conjuntos Numéricos

Lista: CNUMEX – Exercícios de Fixação #2

(UFV) Considere as afirmações a seguir:

(I) O número 2 é primo.

(II) A soma de dois números ímpares é sempre par.

(III) Todo número primo multiplicado por 2 é par.

(IV) Todo número par é racional.

(V) Um número racional pode ser inteiro.

Atribuindo V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas, assinale a sequência CORRETA:

a) V, V, V, V, V

b) V, F, V, V, V

c) V, F, V, V, F

d) F, F, V, V, V

e) V, F, V, F, F

Alternativa correta: A

Módulo: CNUM – Conjuntos Numéricos

Lista: CNUMEX – Exercícios de Fixação #3

(UEL) Observe os seguintes números.

I. 2,212121...

II. 3,212223...

III. 5π

IV. 3,1416

V. -4

Assinale a alternativa que identifica os números irracionais.

a) I e II

b) I e IV

c) II e III

d) II e V

e) III e V

Alternativa correta: C

Módulo: CNUM – Conjuntos Numéricos

Lista: CNUMEX – Exercícios de Fixação #4

(UFF) Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), “Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem.” Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

c) entre os números reais 3 e 4 existe apenas um número irracional.

d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.

e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

Alternativa correta: D

Módulo: CNUM – Conjuntos Numéricos

Lista: CNUMEX – Exercícios de Fixação #5

REFERÊNCIAS

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.