ENEM E
VESTIBULARES

$$\Phi = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

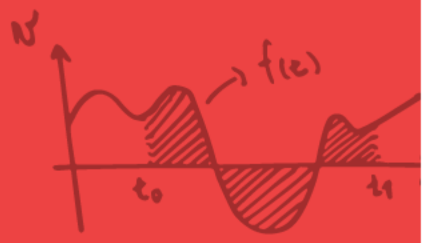
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$z = 3$

$y = 9 - 2z = 3$

$x = -4z - 2y = -12 - 6 = -18$

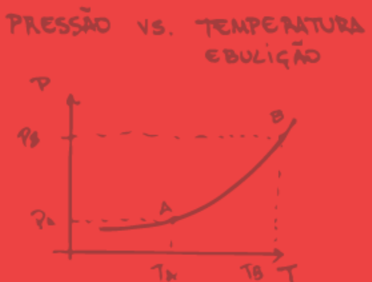
$(-18, 3, 3)$



meSalva!

$f(x) = \text{sen } x$

$f(x) = \text{sen}(\omega x + \theta)$



SISTEMAS LINEARES

Na apostila de Álgebra II nós aprendemos a identificar e manipular equações de 2º grau completas e incompletas, racionais e irracionais e, por fim, a resolver sistemas 2x2 por adição e por substituição. Portanto, você já tem uma base sobre o assunto que será tratado nesta apostila de Sistemas Lineares. Para nos aprofundarmos nesse assunto, vamos, inicialmente, relembrar o que são sistemas lineares e o que já foi estudado sobre eles. Caso você ache necessário, leia novamente a última seção da apostila de Álgebra II.

SISTEMAS LINEARES 2 X 2

Sistemas **lineares** são compostos por equações **lineares**, assim como sistemas **não-lineares** são compostos por sistemas **não-lineares**. Tá, mas o que isso quer dizer? Que, primeiramente, você precisa identificar se a equação que está no sistema é ou não linear. Lembre que uma equação de segundo grau, por exemplo, é **não-linear**, já que o grau dela é 2 ($ax^2 + bx + c = 0$), ou seja, há incógnitas se multiplicando. Em uma equação linear não há termos em que as incógnitas se multiplicam. Por exemplo, não teremos termos xy, x^2, xyz, y^3 etc. Uma equação linear é sempre do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b,$$

em que os "*a's*" são os coeficientes (números reais), os "*x's*" são incógnitas (x, y, z, w, u, v, ...) e o b é o termo independente (número real) que não é acompanhado de incógnita.

Veja abaixo exemplos de equações lineares e não-lineares:

EQUAÇÕES LINEARES	EQUAÇÕES NÃO-LINEARES
$3x - 2y = 7$	$-2x^2 + 3y = 1$
$-x + y - z = 0$	$xy - 10z = -2$
$2x + y + z = 7$	$2x^3 + xz = 4$

Note que os elementos da primeira coluna não apresentam multiplicação de incógnitas, caracterizando equações lineares, enquanto que na segunda coluna há multiplicação de incógnitas, caracterizando equações não-lineares. A partir disso, você é capaz de analisar se um sistema é linear.

Vamos voltar ao problema que tínhamos na apostila de Álgebra II sobre as medidas de uma mesa que você deveria construir. Lá nós montamos o seguinte sistema, a partir de informações que você coletou:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Note que as duas equações do sistema são lineares, ou seja, há apenas uma incógnita para cada termo (com exceção do termo independente que não tem incógnita mesmo). Para resolvermos esse sistema, nós utilizamos dois métodos, o de adição e o de substituição. Vamos relembrar cada um deles:

ADIÇÃO

Nesse caso, a ideia é excluir uma das variáveis para conseguir encontrar a outra. Então, se multiplicarmos a primeira equação por -3 será possível anular o primeiro termo das duas equações. Acompanhe:

$$\begin{cases} x + y = 9 \; (-3) \\ 3x + 4y = 31 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} -3x - 3y = -27 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Somando as duas equações, chegaremos a:

$$\begin{array}{r}
-3x - 3y = -27 \\
3x + 4y = 31 \\
\hline
0 + 1y = 4
\end{array}$$

Então, concluímos que y = 4. Para sabermos o valor de x basta substituir o valor de y em uma das das equações originais.

$$\begin{gathered}
x + y = 9 \\
x + 4 = 9 \\
x = 9 - 4 \\
x = 5
\end{gathered}$$

Quando resolvemos este problema na outra apostila, nós definimos que x seria o lado maior da mesa e y, o lado menor. Por isso, a mesa terá lados 5 e 4, respectivamente, e a solução do sistema é formalmente dada por S = (5, 4).

SUBSTITUIÇÃO

Esse método é baseado em substituir o valor de uma variável, dada por uma equação, na outra. Por exemplo, se isolarmos o x da primeira equação, chegaremos a um valor, composto pela variável y que, se substituído na segunda equação, fornecerá o valor de y. Veja o exemplo com o mesmo sistema anterior:

$$x + y = 9 \quad \rightsquigarrow \quad x = 9 - y$$

Substituindo o valor de x na segunda equação e resolvendo:

$$\begin{gathered}
3x + 4y = 31 \\
3(9 - y) + 4y = 31 \\
27 - 3y + 4y = 31 \\
27 + y = 31 \\
y = 31 - 27 = 4
\end{gathered}$$

Chegaremos ao mesmo valor encontrado anteriormente para y, o lado menor, que vale 4. E o valor de x é facilmente encontrado se, a partir da equação em que o isolamos, substituirmos o valor de y:

$$x = 9 - y$$
$$x = 9 - 4$$
$$x = 5$$

Que também é o mesmo valor de x que encontramos anteriormente. E nem poderia ser diferente, né? São métodos diferentes, mas a resposta deve ser a mesma nos dois.

Agora que relembramos a resolução de sistemas 2 x 2, podemos dar um passo a mais no nosso aprendizado e entender as diversas outras formas de resolver sistemas com ordens maiores. Vamos lá!

SISTEMAS 3 X 3 (OU MAIOR) POR SUBSTITUIÇÃO E ADIÇÃO

Anteriormente, o nosso problema envolvia apenas duas variáveis, que eram os lados de uma mesa. Mas sistemas lineares podem ser de ordens maiores, com mais equações, mais incógnitas e etc. Aqui vamos aprender como é possível resolver sistemas de ordem 3, mas com as técnicas que serão abordadas você pode resolver sistemas de outras ordens, é só ter disposição! Vamos ao novo problema:

Um estudante de Matemática foi a uma papelaria e comprou **x** lápis, **y** borrachas e **z** canetas. Ele resolveu fazer uma brincadeira com seus colegas e pediu que, a partir de um sistema que ele montou, os estudantes calculassem quantas unidades de cada item ele comprou. O sistema que ele criou foi o seguinte:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Os colegas aceitaram o desafio. Um deles preferiu resolver o sistema por adição e o outro, por substituição. Os procedimentos que eles seguiram são basicamente os que utilizamos na resolução do nosso sistema 2x2 e estão explicados abaixo:

ADIÇÃO

Apesar dessa resolução ser por adição, o primeiro procedimento é de substituição. Isso porque é necessário criar um novo sistema, com apenas duas equações, para resolver este problema. Então, primeiramente, isola-se uma das variáveis. O estudante optou por isolar o z da primeira equação, chegando a:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 & \to z = 8 - 2x - y \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Em seguida substitui-se o “valor” do z acima nas duas outras equações do sistema. Na segunda:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 & \to z = 8 - 2x - y \\ x + y + 4z = 15 & \to x + y + 4(8 - 2x - y) = 15 \\ 3y + 2z = 9 & \quad x + y + 32 - 8x - 4y = 15 \\ & \quad \boxed{-7x - 3y = -17} \end{cases}$$

E na terceira

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \rightarrow z = 8 - 2x - y \\ x + y + 4z = 15 \rightarrow x + y + 4(8 - 2x - y) = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$x + y + 32 - 8x - 4y = 15$$

$$\boxed{-7x - 3y = -17}$$

$$3y + 2(8 - 2x - y) = 9$$

$$3y + 16 - 4x - 2y = 9$$

$$\boxed{y - 4x = -7}$$

Veja que chegamos a duas novas equações que contêm apenas duas incógnitas, x e y. Podemos montar um novo sistema com essas equações e encontrar os valores delas:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$

Agora sim, resolvendo o sistema por adição, podemos multiplicar a segunda equação por 3 para poder obter um resultado que possibilite anular uma das variáveis, nesse caso, o y, e assim conseguimos encontrar o x. Acompanhe:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -7x - \cancel{3y} = -17 \\ -12x + \cancel{3y} = -21 \\ \hline 19x = 38 \end{array}$$

$$\boxed{x = \frac{38}{19} = 2}$$

Agora basta substituir o valor de x em uma das equações acima para encontrar o valor de y. O estudante optou por substituir na segunda equação:

$$
\begin{aligned}
y - 4x &= -7 \\
y - 4(2) &= -7 \\
y - 8 &= -7 \\
y &= -7 + 8 \\
\boxed{y = 1}
\end{aligned}
$$

Sabendo os valores de x e y, basta substituir esses valores em uma das equações do sistema original para encontrar o z. Fazendo esse procedimento na terceira equação do sistema original:

$$
\begin{aligned}
3y + 2z &= 9 \\
3(1) + 2z &= 9 \\
3 + 2z &= 9 \\
2z &= 9 - 3 \\
\boxed{z = \frac{6}{2} = 3}
\end{aligned}
$$

Pronto! O estudante que resolveu o sistema por adição encontrou x = 2, y = 1 e z = 3, então, o colega dele, que propôs o desafio, comprou 2 lápis, 1 borracha e 3 canetas.

SUBSTITUIÇÃO

Faremos o mesmo procedimento inicial do método anterior, isolando uma variável do sistema e substituindo-a nas outras equações:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

$$2x + y + z = 8 \rightarrow z = 8 - 2x - y$$

$$x + y + 4z = 15 \rightarrow x + y + 4(8 - 2x - y) = 15$$

$$x + y + 32 - 8x - 4y = 15$$

$$\boxed{-7x - 3y = -17}$$

$$3y + 2z = 9 \;\Downarrow$$

$$3y + 2(8 - 2x - y) = 9$$

$$3y + 16 - 4x - 2y = 9$$

$$\boxed{y - 4x = -7}$$

Assim como antes, com essas equações, formamos um novo sistema igual ao do método anterior:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$

Até agora tudo como antes, né? A diferença começa aqui: esse estudante optou por resolver o sistema por substituição, então isolou uma das variáveis, no caso o y da segunda equação, nesse novo sistema e substituiu o “valor” dele na primeira equação, possibilitando encontrar o valor de x. Ficou assim:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = -7 + 4x$$

Sabendo o valor de x, basta substituí-lo na primeira equação desse segundo sistema para encontrar o y:

$$\begin{cases} -7x - 3y = -17 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = -7 + 4x$$

$$-7x - 3y = -17 \rightarrow -7x - 3(-7 + 4x) = -17$$

$$-7x + 21 - 12x = -17$$

$$-19x = -17 - 21$$

$$-19x = -38$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$-7x - 3y = -17$$

$$-7(2) - 3y = -17$$

$$-14 - 3y = -17$$

$$-3y = -3$$

$$\boxed{y = 1}$$

E agora, com o valor de y é possível encontrar o valor de z substituindo o que já sabemos na terceira equação do sistema original:

$$3y + 2z = 9$$
$$3(1) + 2z = 9$$
$$3 + 2z = 9$$
$$\boxed{z = 3}$$

Finalmente o estudante chegou ao resultado de que x = 2, y = 1 e z = 3, ou seja, o seu colega comprou 2 lápis, 1 borracha e 3 canetas. Exatamente o mesmo resultado que o outro estudante encontrou pelo método da adição.

Você viu que resolver sistemas 3 x 3 por adição e por substituição exige bastante atenção para realizar as manipulações matemáticas com as incógnitas, certo? Mas existem métodos que facilitam um pouco a resolução de sistemas lineares utilizando matrizes, o escalonamento e a Regra de Cramer. Vamos abordá-los a seguir.

ESCALONAMENTO

Quando um sistema tem a mesma solução do outro, podemos dizer que eles são sistemas equivalentes, por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x - y = -4 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -4x - 4y = -16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x + \cancel{y} = 1 \\ -x - \cancel{y} = -4 \\ \hline \boxed{x = -3} \end{array}$$

$$\therefore$$

$$-x - y = -4$$
$$-(-3) - y = -4$$
$$-y = -4 - 3$$
$$\boxed{y = 7}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \quad (4) \\ -4x - 4y = -16 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 8x + \cancel{4y} = 4 \\ -4x - \cancel{4y} = -16 \\ \hline 4x = -12 \end{array}$$

$$x = -\frac{12}{4}$$
$$\boxed{x = -3}$$

$$\therefore \quad 2x + y = 1$$
$$2(-3) + y = 1$$
$$y = 1 + 6$$
$$\boxed{y = 7}$$

Note que a segunda equação do segundo sistema é 4 vezes a segunda equação do primeiro sistema. Outra observação importante é que a ordem das equações do sistema não importa, teríamos chegado ao mesmo resultado se o sistema estivesse montado da seguinte forma:

$$\begin{cases} -x - y = -4 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x - 4y = -16 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

O método do escalonamento pretende facilitar a resolução de sistemas transformando um sistema mais complexo num mais fácil de ser resolvido, fazendo com que o número de incógnitas vá aumentando de baixo para cima nas equações. Difícil de entender? Veja o exemplo abaixo de sistemas não escalonados e de sistemas escalonados:

NÃO ESCALONADOS

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3y - 2z = 8 \\ y + 5z = 37 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{3 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 8 \\ 3y - 2z = 6 \\ -2y - 3z = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{3 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \end{array}$$

ESCALONADOS

$$\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 2y + z = 7 \\ 4z = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{3 incógs.} \\ \text{2 incógs.} \\ \text{1 incóg.} \end{array}$$

$$\begin{cases} y - z + t - m = 11 \\ 3z - 2t + m = -13 \\ t - 5m = 23 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{4 incs.} \\ \text{3 incs.} \\ \text{2 incs.} \end{array}$$

Mas antes de aplicar o método do escalonamento no sistema linear, precisamos entender como o transformamos em uma matriz.

MATRIZ DE UM SISTEMA LINEAR

Para saber qual é a forma matricial de um sistema linear é necessário relembrar que o sistema é formado por coeficientes, por incógnitas e por termos independentes. Vamos tomar como exemplo o sistema 3 x 3 que utilizamos para descobrir o número de itens que um estudante comprou na papelaria. O sistema era:

$$S = \begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Podemos construir uma matriz com os coeficientes das incógnitas, colocando todos os coeficientes do x na primeira coluna, do y na segunda e do z na terceira. Perceba que não temos x na terceira equação e, portanto, seu coeficiente é zero (0x). Ela ficaria assim:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de Coeficientes}$$

Podemos também construir matrizes coluna com as incógnitas e com os termos independentes separadamente:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de Incógnitas}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz de Termos Indep.}$$

Note que se fizermos AX = B chegaremos ao mesmo sistema que transformamos em matriz.

Para aplicar o método do escalonamento, utilizaremos uma matriz com os coeficientes e com os termos independentes que chamamos de matriz completa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz Completa}$$

ESCALONAMENTO

Agora que já sabemos como transformar um sistema linear em uma matriz podemos aplicar o método do escalonamento. Lembre que esse método pretende chegar a um sistema equivalente ao original em que o número de incógnitas vá aumentando uma a uma de baixo para cima. No caso do sistema que estamos analisando, temos o seguinte:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 & \text{3 incs.} \\ x + y + 4z = 15 & \text{3 incs.} \\ 3y + 2z = 9 & \text{2 incs.} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Veja que na última linha temos duas incógnitas e na segunda e na terceira linhas temos 3 incógnitas, o nosso objetivo é chegar em algo assim:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \text{3 incs.} \\ b_2y + c_2z = d_2 & \text{2 incs.} \\ c_3z = d_3 & \text{1 inc.} \end{cases} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}}_{\text{Sistema Escalonado}}$$

Um sistema em que na terceira equação temos uma incógnita; na segunda, duas; e na terceira, 3 incógnitas. Para isso, vamos aplicar operações matemáticas nas linhas da matriz completa do sistema linear. Então, vamos comparar as matrizes para saber qual será o primeiro passo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

Veja que o último termo na primeira coluna já é zero, então não precisamos nos preocupar com ele.

Vamos chamar cada linha de L_1, L_2 e L_3, de cima para baixo:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Agora precisamos zerar os outros valores, como o segundo termo dessa mesma coluna, o 1. Para isso, note que se multiplicarmos a primeira linha por 1/2 e subtrairmos a linha 2 desse resultado, conseguiremos zerar o primeiro termo da segunda linha, ou seja, $L_2 - L_1.(1/2)$. Acompanhe:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow L_2 : L_2 - \left(\frac{1}{2}\right) L_1$$

zerar

$$[1 \; 1 \; 4 \; 15] - \frac{1}{2}[2 \; 1 \; 1 \; 8]$$

$$[1 \; 1 \; 4 \; 15] - [1 \; 1/2 \; 1/2 \; 4]$$

$$L_2 : [0 \; 1/2 \; 7/2 \; 11]$$

Agora a nossa matriz está assim:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é zerar o terceiro elemento da segunda coluna, o 3. Veja que, para isso, podemos subtrair a segunda linha vezes seis da terceira linha, ou seja, $L_3 = L_3 - 6.L_2$. Veja abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 11 \\ 0 & 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow L_3 : L_3 - 6.L_2$$

zerar

$$[0 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 9] - 6.[0 \;\; 1/2 \;\; 7/2 \;\; 11]$$

$$[0 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 9] - [0 \;\; 3 \;\; 21 \;\; 66]$$

$$L_3 : [0 \;\; 0 \;\; -19 \;\; -57]$$

Ótimo! Atingimos nosso objetivo! Conseguimos zerar os dois últimos termos da primeira coluna e o último da segunda e, por isso, o nosso sistema ficou com uma incógnita na terceira linha, duas na segunda e três na primeira.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 11 \\ 0 & 0 & -19 & -57 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1y + 1z = 8 \\ \frac{1y}{2} + \frac{7z}{2} = 11 \\ -19z = -57 \end{cases} \begin{matrix} \text{3 incógnitas} \\ \text{2 incógnitas} \\ \text{1 incógnita} \end{matrix}$$

Escalonado

Agora fica mais fácil de resolver o sistema, né? Perceba que o "z" está quase "pronto" na terceira equação. Basta isolá-lo para encontrar seu valor:

$$-19z = -57$$

$$z = \frac{57}{19}$$

$$\boxed{z = 3}$$

Tendo o valor de z, podemos substituir seu valor na segunda equação e encontrar o valor de y:

$$\frac{y}{2} + \frac{7z}{2} = 11$$
$$y + 7z = 11.2$$
$$y + 7(3) = 22$$
$$y = 22 - 21$$
$$\boxed{y = 1}$$

Agora, para encontrar o x, basta substituir os valores das incógnitas anteriores na primeira equação:

$$2x + y + z = 8$$
$$2x + 1 + 3 = 8$$
$$2x = 8 - 4$$
$$x = \frac{4}{2}$$
$$\boxed{x = 2}$$

Pronto! Chegamos ao mesmo resultado dos métodos anteriores, ou seja, o estudante comprou 2 lápis (x), 1 borracha (y) e 3 canetas (z).

REGRA DE CRAMER

Além da adição, da substituição e do escalonamento há um quarto método interessante de ser estudado, a Regra de Cramer. Para aplicar essa regra é necessário relembrar mais conceitos sobre matrizes, como o cálculo do determinante de uma matriz. A grande peculiaridade da regra de Cramer é que ela pode ser aplicada apenas em sistemas em que o número de incógnitas é igual ao número de equações.

Para encontrar a solução de um sistema utilizando este método, é necessário calcular, primeiramente, o determinante da matriz de coeficientes e, em seguida, calcular o determinantes de outra matriz que terá todas as suas colunas (uma de cada vez) substituídas pela matriz de termos independentes. Então, para encontrar o valor de x é necessário substituir a coluna correspondente a essa incógnita na matriz de coeficientes pela matriz de termos independentes e assim sucessivamente. Veja as equações que permitem a resolução de um sistema a partir desse método:

$$x = \frac{Dx}{D} \quad y = \frac{Dy}{D} \quad z = \frac{Dz}{D} \quad \dots \quad n = \frac{Dn}{D}$$

Vamos relembrar a matriz de coeficientes e a matriz de termos independentes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \vdots \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Em que D é o determinante da matriz de coeficientes, Dx é o determinante da matriz com a primeira coluna substituída pela matriz de termos independentes, Dy é o determinante da matriz com a segunda coluna substituída pela matriz de termos independentes, Dz é o determinante da matriz com a coluna de z substituída pela matriz de termos independentes e Dn é o determinante da matriz com a coluna de n substituída pela matriz de termos independentes.

Vamos construir essas matrizes e calcular os determinantes para encontrar cada uma das incógnitas, mas primeiro vamos calcular o determinante da matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Para calcular o determinante vamos copiar à direita as duas primeiras colunas.

$$\left[\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}$$

Calculando o determinante, teremos que D é:

$$D = [(4+0+3)-(0+24+2)]$$
$$D = 7-26 = -19$$

Ótimo! Agora vamos calcular o determinante associado a cada incógnita, começando pelo x:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante:

$$Dx = \left[\begin{matrix} 8 & 1 & 1 \\ 15 & 1 & 4 \\ 9 & 3 & 2 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 8 & 1 \\ 15 & 1 \\ 9 & 3 \end{matrix}$$

$$Dx = [(16+36+45)-(9+96+30)]$$
$$Dx = 97-135 = -38$$

Então, x vale:

$$\frac{Dx}{D} = \frac{-38}{-19} = \boxed{2 = x}$$

Para calcular o determinante associado ao y, devemos substituir a matriz de termos independentes na linha y da matriz original:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ x \quad y \quad z \end{array} \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 1 & 15 & 4 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Duplicando as colunas e calculando o determinante:

$$D_y = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 8 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 15 & 4 & 1 & 15 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 9 \end{array}\right]$$

$$D_y = [(60+0+9)-(0+72+16)]$$
$$D_y = 69 - 88 = -19$$

Então, segundo a Regra de Cramer, y vale:

$$D_y = \frac{-19}{-19} = \boxed{1 = y}$$

Por fim, vamos calcular o determinante associado ao z:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ x \quad y \quad z \end{array} \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 15 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Duplicando as colunas e resolvendo o determinante, teremos:

$$D_z = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 15 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$D_z = [(18+0+24) - (0+90+9)]$$
$$D_z = 42 - 99 = -57$$

Calculando o z:

$$D_z = \frac{-57}{-19} = \boxed{3 = z}$$

Então, encontramos x = 2, y = 1 e z = 3, ou seja, o mesmo resultado dos outros 3 métodos anteriores.

Agora que você tem todo esse arsenal de métodos, basta escolher o mais adequado para o sistema que você precisa resolver.

TIPOS DE SOLUÇÃO (DISCUSSÃO E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA)

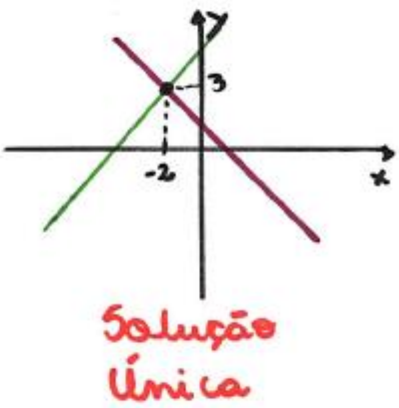
Você acabou de aprender como resolver sistemas de diversas formas diferentes, mas será que todos eles são resolvíveis? Antes de você sair quebrando a cabeça e utilizar 300 métodos diferentes para encontrar a solução de um sistema, é importante que você saiba analisá-lo para saber se realmente vale a pena tentar resolvê-lo e também saber avaliar se a resposta que você encontrou é coerente. Veja o diagrama abaixo:

Então, o sistema pode ser possível de ser resolvido e ele pode ter apenas uma solução ou várias soluções, ou pode ser impossível de ser resolvido. Vamos analisar graficamente sistemas de cada um desses três tipos.

- ✓ Sistema Possível e Determinado (SPD): o sistema tem solução e ela é única.

  Em um sistema linear desse tipo, as retas que descrevem cada uma das equações se cruzam em um ponto. Veja o exemplo abaixo:

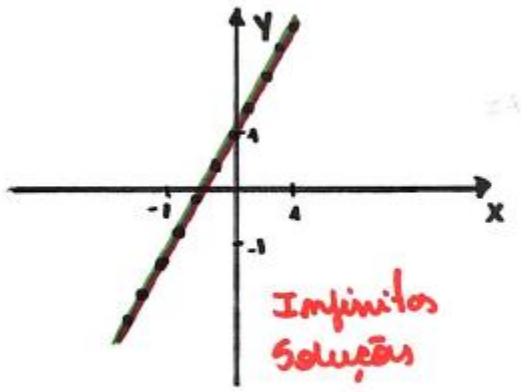
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 2y = -12 \end{cases}$$



- ✓ **Sistema Possível e Indeterminado (SPI): o sistema tem infinitas soluções.**

As retas que descrevem as equações desse tipo de sistema são coincidentes, ou seja, se encontram em todos os pontos e, por isso, têm infinitas soluções. Veja o exemplo do sistema abaixo e o gráfico correspondente às retas das equações:

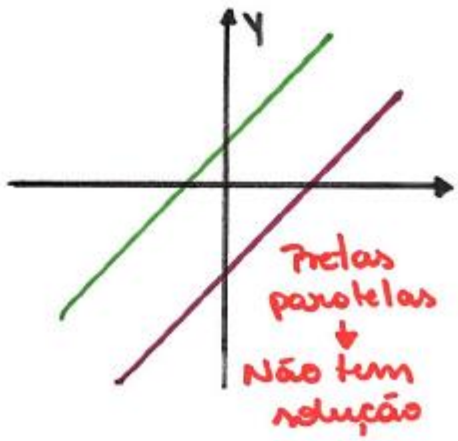
$$\begin{cases} 2x - y = -1 \\ 6x - 3y = -3 \end{cases}$$



- ✓ **Sistema Impossível (SI): o sistema não tem solução.**

Nesse caso, as retas que correspondem às equações são paralelas, ou seja, nunca se encontrarão e, portanto, o sistema não tem solução.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = -1 \end{cases}$$



Sabendo de tudo isso, antes de começar a resolver um sistema, analise as equações. Depois você pode escolher seu método preferido para, no caso de haver solução, encontrá-la. Bons estudos!

EXERCÍCIOS

1. Num aquário há 8 peixes, entre pequenos e grandes. Se os pequenos fossem mais um, seria o dobro dos grandes. Quantos são os pequenos? E os grandes?

   Fonte: http://brasilescola.uol.com.br/matematica/resolucao-problemas-com-sistemas-equacoes.htm

2. Descubra quais são os dois números em que o dobro do maior somado com o triplo do menor dá 16, e o maior deles somado com quíntuplo do menor dá 1.

   http://brasilescola.uol.com.br/matematica/resolucao-problemas-com-sistemas-equacoes.htm

3. Em uma praça há 18 crianças andando de bicicleta ou de skate. No total, há 50 rodas girando pela praça. Quantas crianças andam de bicicleta e quantas andam de skate?

   Fonte: http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-resolucao-problemas-com-sistemas-equacoes.htm#questao-1

4. Utilizando a Regra de Cramer, determine o valor da incógnita y no seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x+3y+3z=18 \\ 3x+2y+5z=23 \\ 5x+4y+2z=27 \end{cases}$$

   Fonte: http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm

5. (Fuvest–SP) Carlos e sua irmã Andreia foram com seu cachorro Bidu à farmácia de seu avô. Lá encontraram uma velha balança com defeito, que só indicava corretamente pesos superiores a 60 kg. Assim, eles se pesaram dois a dois e obtiveram as seguintes marcas:

   Carlos e o cão pesam juntos 87 kg;

   Carlos e Andreia pesam 123 kg;

   Andreia e Bidu pesam 66 kg.

   Determine o peso de cada uma deles:

   Fonte: http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm

6. (Vunesp – SP) Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1.400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada

sócio pagou metade desse valor, determine o número de sócios e não sócios que compareceram ao show.

Fonte: http://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-regra-cramer.htm

7. Se o sistema de equações a seguir,

$$\begin{cases} x + y + 4z & = & 2 \\ x + 2y + 7z & = & 3 \\ 3x + y + az & = & b \end{cases}$$

é impossível, então os valores de a e b são tais que:

a) $a = 6$ e $b \neq 4$.

b) $a \neq 6$ e $b \neq 4$.

c) $a \neq 6$ e $b = 4$.

d) $a = 6$ e $b = 4$.

e) a é arbitrário e $b \neq 4$.

Fonte: http://www.exerciciosresolvidos.net/matematica/equacoes/sistemas-lineares/tag

8. Sendo m e n $\in \mathbb{R}$, considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + y - z & = & 0 \\ x - 3y + z & = & 1 \\ -2y + z & = & m \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x - y & = & 0 \\ x + 2y - z & = & 0 \\ 2x - ny + 3z & = & 0 \end{cases}$$

Se ambos permitem infinitas soluções reais qual é o valor de m e n?

Fonte:
http://www.exerciciosresolvidos.net/matematica/equacoes/sistemas-lineares/tag

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.