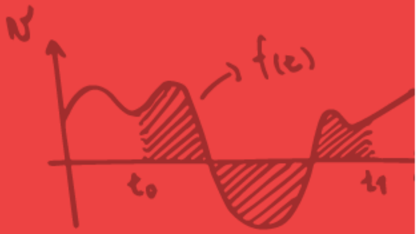
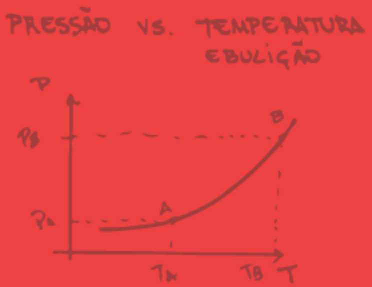
ENEM E
VESTIBULARES



meSalva!



MATRIZES E DETERMINANTES

Você provavelmente utiliza diversas redes sociais e comunicadores instantâneos como o WhatsApp. Você pode ter notado que nesse aplicativo, há algum tempo, aparece um aviso quando você inicia uma conversa: “Mensagens que você envia para esta conversa e chamadas agora são protegidas com criptografia de ponta a ponta. O que significa que elas não podem ser lidas ou ouvidas pelo WhatsApp ou por terceiros”. Quando a empresa implementou este serviço, ficamos sabendo que ele nos daria mais segurança, mas como isso funciona? Basicamente, quer dizer que quando você escreve e envia uma mensagem, ela é trancada com um cadeado e transformada numa espécie de código, o qual apenas o receptor dessa mensagem tem a chave para abri-la e poder decodificá-la, podendo então realizar a leitura. O processo de transformar a mensagem em código para que seja posteriormente decifrada é chamada de criptografia. Quando uma mensagem é criptografada, ninguém além do remetente e do destinatário, nem mesmo o WhatsApp, podem saber o seu conteúdo. Esse método é usado no mundo inteiro para os mais diversos objetivos. No tempo da 2ª Guerra Mundial, nazistas utilizavam criptografia para enviar mensagens garantindo que seu conteúdo, caso roubado, não fosse descoberto. Claro que naquela época as coisas não eram tão simples e rápidas como acontece no WhatsApp, mas funcionava!

Um dos métodos de criptografia utiliza matrizes para codificar e decodificar mensagens. Sabendo disso, um amigo seu resolveu enviar mensagens codificadas a todos os colegas. A que você recebeu continha o seguinte:

40 23 69 18 40 67 45 118 31 67

Acompanhada das instruções:

Para decodificar essa mensagem, utilize a chave $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e considere que as letras de A a Z assumem os valores de 1 a 26, conforme abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z
21	22	23	24	25	26

Note que é impossível simplesmente substituir letras nos números contidos na mensagem. É preciso utilizar a tal chave, que é o que chamamos de matriz. Para que você possa decodificar essa mensagem é necessário estudar como essas matrizes funcionam. Vamos lá?

MATRIZES

Veja as tabelas abaixo construídas em editores de planilhas no computador:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Filial 1					Filial 2			
2		Violão	Bateria	Flauta			Violão	Bateria	Flauta
3	Manhã	21	17	15		Manhã	23	14	17
4	Tarde	18	13	9		Tarde	17	16	8
5	Noite	11	9	3		Noite	18	10	5
6									
7									

Nesses editores, as filas verticais, conhecidas como colunas, são identificadas por letras maiúsculas e as filas horizontais, que conhecemos por linhas, são identificadas por números a partir de 1. A organização de dados numéricos em tabelas como essas é chamada de matriz. Vamos reescrevê-las entre parênteses ou colchetes focando apenas nos números contidos nelas e mantendo a ordem em que os dados se encontram nas tabelas. Veja:

$$\begin{bmatrix} 21 & 17 & 15 \\ 18 & 13 & 9 \\ 11 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 23 & 14 & 17 \\ 17 & 16 & 8 \\ 18 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

O que fizemos acima foi a construção de uma matriz. Normalmente denominamos matrizes com letras maiúsculas, então a primeira pode ser a matriz A e a segunda a matriz B. Note que essas matrizes têm 3 linhas e 3 colunas, portanto, podemos dizer que as matrizes são de “ordem” (basicamente significa “tamanho”) 3 x 3. Caso tivéssemos uma matriz com 2 linhas e com 3 colunas, diríamos que a ordem dessa matriz é 2 x 3. Assim, sempre que mencionamos o tamanho de uma matriz, a informação sobre o número de linhas vem antes do número de colunas. Veja exemplos de matrizes de outras ordens:

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}_{2x4}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 16 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 6 \end{bmatrix}_{1x4}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{1x3}$$

Outra informação importante é que cada um dos elementos (números das matrizes) tem um "nome" e às vezes, principalmente quando as matrizes são muito grandes, é necessário saber como identificá-los. Vamos utilizar como exemplo a matriz A que vimos há pouco. Cada elemento é chamado de "a" e recebe um número subscrito para identificar sua posição na matriz. O primeiro número se refere à linha e o segundo à coluna. Então, no caso da nossa matriz A, o elemento 18 encontra-se na posição a_{21} (lê-se a dois um), ou seja, na segunda linha e na primeira coluna. O elemento 15 está na posição a_{13} (a um três), ou seja, na primeira linha e na terceira coluna. Veja como fica a representação das posições em uma matriz 3x3 a partir do nosso exemplo:

$$\begin{bmatrix} 21 & 17 & 15 \\ 18 & 13 & 9 \\ 11 & 9 & 3 \end{bmatrix}_{3x3} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}$$

Agora que sabemos como nomear as posições, podemos generalizar para matrizes maiores. Veja como fica uma matriz com m linhas e n colunas:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Também podemos abreviar da seguinte forma:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

ou

$$A = (a_{ij})$$
$$i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$$
$$j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

Sabendo tudo isso, podemos representar qualquer matriz, ok? Vamos continuar aprofundando nosso estudo.

CLASSIFICAÇÃO

Você já notou que existem infinitas possibilidades para se montar uma matriz. As configurações mais comuns são as seguintes:

- ✓ **Quadrada**: essa modalidade de matriz é caracterizada por ter o mesmo número de linhas e de colunas, ou seja, m = n. Por isso, a notação formal para a ordem desse tipo de matriz é n x n, que podemos chamar de matriz quadrada de ordem n. Veja exemplos:

Ordem 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}_{m=n=2}$$

Ordem 3

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}_{m=n=3}$$

Ordem 4

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & 7 & -4 \\ -9 & -1 & -7 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{m=n=4}$$

- ✓ **Identidade**: é também uma matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os demais iguais a zero. Por diagonal principal entendemos a diagonal composta pelos elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... , a_{mm}, ou seja, os elementos em que i (número da linha) e j (número da coluna) são iguais. Veja os exemplos:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

- ✓ **Triangular**: é novamente uma matriz quadrada, mas nesse caso os elementos acima OU abaixo da diagonal principal são nulos. Veja abaixo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Triang. diag. principal

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Triang

diagonal principal

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Assim como realizamos operações com números, podemos realizar operações com matrizes. Vamos ver exemplos de como isso funciona:

- ✓ **Adição e Subtração**: Para realizar essas operações é necessário realizar a adição ou a subtração elemento a elemento. Vamos utilizar as matrizes A e B que vimos lá no início da apostila como exemplo:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 21 & 17 & 15 \\ 18 & 13 & 9 \\ 11 & 9 & 3 \end{bmatrix}} + \underset{B}{\begin{bmatrix} 23 & 14 & 17 \\ 17 & 16 & 8 \\ 18 & 10 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 21+23 & 17+14 & 15+17 \\ 18+17 & 13+16 & 9+8 \\ 11+18 & 9+10 & 3+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 44 & 31 & 32 \\ 35 & 29 & 17 \\ 29 & 19 & 8 \end{bmatrix} = A + B$$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 21 & 17 & 15 \\ 18 & 13 & 9 \\ 11 & 9 & 3 \end{bmatrix}} - \underset{B}{\begin{bmatrix} 23 & 14 & 17 \\ 17 & 16 & 8 \\ 18 & 10 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 21-23 & 17-14 & 15-17 \\ 18-17 & 13-16 & 9-8 \\ 11-18 & 9-10 & 3-5 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ -7 & -1 & -2 \end{bmatrix} = A - B$$

Note que tanto na adição quanto na subtração você obterá uma nova matriz como resultado da operação realizada.

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO DE MATRIZES

Suponha que as matrizes A, B e C têm a mesma ordem (ou seja, mesmo tamanho vertical e horizontal):

- Propriedade associativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

- Propriedade comutativa

$$A + B = B + A$$

- Elemento neutro

$$A + 0 = A$$

0 representa a matriz nula de mesma ordem.

- Elemento oposto

$$A + (-A) = 0$$

✓ **Multiplicação**: Podemos realizar a multiplicação de matrizes de duas formas, multiplicando uma matriz por um número real ou multiplicando a matriz por outra matriz. Para esse último procedimento a ordem das matrizes envolvidas é essencial. Veremos exemplos a seguir.

- **Por número real**: a multiplicação de um número real por uma matriz é realizada multiplicando elemento a elemento por esse número. Veja:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.(2) & 3.(-4) & 3.(1) \\ 3.(1) & 3.(0) & 3.(5) \\ 3.(1) & 3.(1) & 3.(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 3 \\ 3 & 0 & 15 \\ -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}.(2) & \frac{1}{2}.(-4) & \frac{1}{2}.(1) \\ \frac{1}{2}.(1) & \frac{1}{2}.(0) & \frac{1}{2}.(5) \\ \frac{1}{2}.(-1) & \frac{1}{2}.(1) & \frac{1}{2}.(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Note que não temos a operação de "divisão de matrizes por número real" justamente porque, ao realizarmos a multiplicação por um número fracionário, estamos realizando uma divisão.

- **Por matriz**: para realizar essa operação (C x D) é necessário que o número de colunas da matriz C seja igual ao número de linhas da matriz D. Além disso, a matriz resultante dessa multiplicação será definida pelo número de linhas de C e de colunas de D. Parece difícil, mas genericamente isso pode ser escrito da seguinte forma:

$$C_{m \times n} \cdot D_{n \times p} = E_{m \times p}$$

Vamos ver um exemplo para entender melhor:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

2 x 1 (nova matriz)

Ok! A primeira parte está certa! Agora precisamos realizar a multiplicação. Para isso você vai somar as multiplicações dos elementos da primeira linha da matriz C com os elementos da coluna da matriz D. O valor dessa soma será o primeiro elemento da matriz CxD. Em seguida, você vai somar as multiplicações dos elementos da segunda linha da matriz C com os elementos da coluna da matriz D. Esse valor será o segundo elemento da matriz CxD, que já vimos ser de ordem 2 x 1. Parece difícil de novo, né? Mas acompanhe o exemplo:

$$C \times D = \begin{bmatrix} \_ \\ \_ \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$C \times D = \begin{bmatrix} (2.3)+(-4.5)+(1.6) \\ (-1.3)+(1.5)+(2.6) \end{bmatrix}$$

$$C \times D = \begin{bmatrix} 6 - 20 + 6 \\ -3 + 5 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 14 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

Para não errar a multiplicação de matrizes é interessante tomar alguns cuidados. O primeiro é avaliar se a multiplicação é possível analisando o número de linhas e de colunas de cada matriz. O segundo é que, a partir da análise anterior, você tem como saber a ordem da matriz que resultará dessa multiplicação, então, desenhe uma matriz “fantasma”, em que você apenas preencherá os valores, como foi o primeiro passo da multiplicação acima. Assim fica mais fácil de acertar a posição do elemento que você está calculando!

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

- **1ª propriedade: associativa**

  Sejam as matrizes A_{mxn}, B_{nxp} e C_{pxr}, temos (A.B).C = A.(B.C).

- **2ª propriedade: distributiva à esquerda**

  Sejam as matrizes A_{mxn}, B_{nxp} e C_{nxp}, temos A.(B+C) = A.B + A.C

- **3ª propriedade: distributiva à direita**

  Sejam as matrizes A_{mxn}, B_{nxp} e C_{nxp}, temos (A+B).C = A.C + B.C

- **4ª propriedade: elemento neutro**

  Sejam as matrizes A_{mxn} e as matrizes identidade I_m e I_n, temos $I_m.A = A$ e $A.I_n = A$.

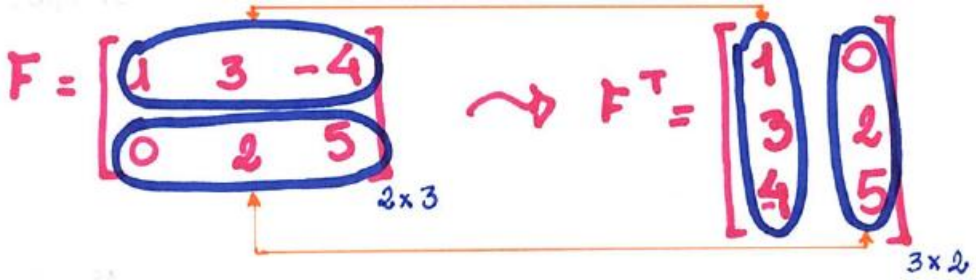
- **5ª propriedade**

  Sejam as matrizes A_{mxn} e B_{nxp} e o número k pertence aos Reais, temos $(k.A).B = A.(k.B) = k.(A.B)$

- **6ª propriedade**

  Sejam as matrizes A_{mxn} e B_{nxp}, temos $(A.B)^t = B^t.A^t$.

✓ **Transposta**: às vezes temos a necessidade de manipular a matriz sem trocar necessariamente sua essência e para isso utilizamos esse artifício. Uma matriz transposta é obtida quando transformamos as linhas de uma matriz original em colunas de uma nova matriz, agora chamada de transposta.



MATRIZ INVERSA

Quando estudamos Aritmética, vimos que uma das operações possíveis de se realizar com números reais era a inversão. Para isso, invertíamos o numerador e o denominador. Então, caso nosso objetivo fosse inverter o número 2/3, bastava escrever 3/2 e teríamos o número inverso. No caso das matrizes também é possível realizar uma operação para obter a matriz inversa. Basta que a matriz em questão (A, por exemplo) seja quadrada e que exista uma outra matriz quadrada (B) que, quando multiplicada pela primeira, resulte em uma matriz identidade (I).

Caso essa igualdade seja verdadeira, a matriz B é a inversa da matriz A. Matematicamente, é necessário o seguinte:

$$A.B = I_n$$

Queremos obter a inversa da matriz abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para encontrá-la, precisamos arbitrar uma matriz B de mesma ordem. Vamos supor que B é composta por 4 variáveis:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Lembrando que a matriz identidade de ordem 2 é essa:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora podemos multiplicar A e B e igualar a matriz que obteremos à identidade. Assim, conseguiremos encontrar os valores que compõem B, que é a matriz inversa. Acompanhe:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}_{2x2}} = \underset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x2}}$$

Relembre a regra de multiplicação de matrizes. Faremos as operações da primeira linha de A com as colunas B e depois da segunda linha de A com as colunas de B.

$$\begin{bmatrix} (1).(a)+(3).(c) & (1).(b)+(3).(d) \\ (1).(a)+(2).(c) & (1).(b)+(2).(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+3c & b+3d \\ a+2c & b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos igualar os elementos da matriz A.B com os da matriz identidade formando dois sistemas. Veja:

$$\begin{cases} a+3c=1 \\ a+2c=0 \end{cases} \; (1) \qquad \begin{cases} b+3d=0 \\ b+2d=1 \end{cases} \; (2)$$

Agora você terá que lembrar como é feita a resolução desses sistemas. Um dos métodos é o da adição. Vamos resolver esses dois sistemas separadamente, iniciando pelo primeiro. Multiplicando a segunda linha por -1 conseguiremos encontrar o valor de c.

$$(1) \begin{cases} a+3c=1 \\ a+2c=0 \; (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{a}+3c=1 \\ \cancel{-a}-2c=0 \end{cases}$$

$$1c=1$$

$$c=1$$

Agora é possível substituir esse valor na primeira linha e encontrar o valor de a.

$$a + 3c = 1$$
$$a + 3(1) = 1$$
$$a + 3 = 1$$
$$a = 1 - 3$$
$$\boxed{a = -2}$$

Voltando ao sistema 2, vamos novamente multiplicar a segunda linha por -1 e encontraremos o valor de d.

$$2 \begin{cases} b + 3d = 0 \\ b + 2d = 1 \;(-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{b} + 3d = 0 \\ -\cancel{b} - 2d = -1 \end{cases}$$
$$1d = -1$$
$$d = -1$$

Substituindo esse valor na primeira linha, obteremos o valor de b.

$$b + 3d = 0$$
$$b + 3(-1) = 0$$
$$b - 3 = 0$$
$$\boxed{b = 3}$$

Ótimo! Agora que já temos todos esses valores, basta substituí-los na matriz B. Acompanhe:

$$A^{-1} = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

E então essa é a matriz inversa de A. Mas para termos certeza de que a A.B = I, vamos terminar essa conta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2+3 & 3-3 \\ -2+2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então tá certo! A igualdade procede, B é realmente a inversa de A!

DETERMINANTES

Toda matriz quadrada pode ser associada a um número, que chamamos de determinante. Quando a matriz é de ordem 1, ou seja, tem apenas uma linha e uma coluna e consequentemente apenas um elemento, o determinante é o próprio elemento. Quando temos ordens 2 e 3, utilizamos outro artifício para identificar o determinante das matrizes: diferença entre a multiplicação dos elementos da diagonal principal e a diagonal secundária. Vamos ver exemplos:

- ✓ **Matriz quadrada de ordem 1**: o determinante é o próprio elemento da matriz.

$$M = [2]_{1 \times 1} \qquad \det(M) = 2$$

- ✓ **Matriz quadrada de ordem 2**: o determinante é calculado a partir da multiplicação os elementos da diagonal principal menos a multiplicação dos elementos da diagonal secundária. Veja:

$$N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

diagonal principal

$$\det(N) = (a_{11} \cdot a_{22}) - (a_{12} \cdot a_{21})$$

Vamos entender melhor a partir de um exemplo. Veja a matriz de ordem 2 abaixo:

$$N = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Trace as diagonais para que você não confunda as linhas e as colunas. Pode parecer irrelevante agora, mas em matrizes maiores esse procedimento é essencial.

$$N = \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

diag. sec.

diag. princ.

Agora aplique a equação dos determinantes que vimos anteriormente. Note que não é necessário gravar mais uma equação se você entender que precisa fazer a diferença entre as diagonais, ok? Veja como fica o cálculo:

$$\det(N) = [(-3)(5)] - [(9)(-2)]$$
$$\det(N) = [(-3)(5)] - [(9)(-2)]$$
$$\det(N) = (-15) - (-18)$$
$$\det(N) = -15 + 18$$
$$\det(N) = 3$$

Então, o valor associado a essa matriz é 3, ou seja, o determinante dessa matriz é 3!

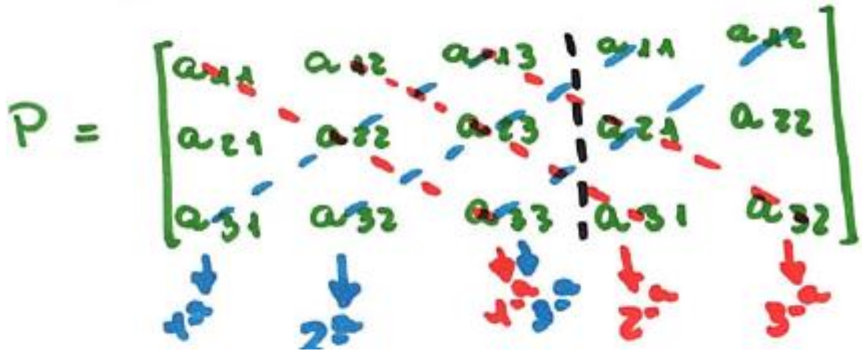
✓ **Matriz quadrada de ordem 3**: para calcular o determinante dessas matrizes precisaremos aprender um artifício matemático chamado de Regra de Sarrus. Vamos entendê-la a partir de um exemplo. Veja a matriz genérica abaixo:

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Agora vamos repetir as duas primeiras colunas dessa matriz à direita dela (faremos uma linha pontilhada para delimitar a matriz original). Veja:

$$P=\left[\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right]$$

Em seguida, traçaremos três diagonais à direita (envolvendo os elementos a_{11}, a_{12} e a_{13}) e três à esquerda (envolvendo os elementos a_{13}, a_{11} e a_{12}). Acompanhe:



O próximo passo é calcular o determinante. É necessário multiplicar os elementos de cada diagonal e depois somar esses valores. Mas tome cuidado, não vá somar as diagonais à direita com as da esquerda! Lembra de quando calculamos o determinante de uma matriz quadrada, que fizemos a diferença entre as diagonais principal e secundária? Aqui é a mesma coisa! Vamos calcular os elementos em vermelho e deles subtrair os elementos em azul. Como é muita informação, é interessante utilizar parênteses/colchetes/chaves para ajudar a não se perder em sinais, ok? A formulinha para esse cálculo é essa:

$$\det(P)=\Big\{\Big[\underbrace{(a_{11}.a_{22}.a_{33})}_{1^a\ diag.}+\underbrace{(a_{12}.a_{23}.a_{31})}_{2^a\ diag.}+\underbrace{(a_{13}.a_{21}.a_{32})}_{3^a\ diag.}\Big]-$$
$$\Big[\underbrace{(a_{13}.a_{22}.a_{31})}_{1^a\ diag.}+\underbrace{(a_{11}.a_{23}.a_{32})}_{2^a\ diag.}+\underbrace{(a_{12}.a_{21}.a_{33})}_{3^a\ diag.}\Big]\Big\}$$

Tá, mas precisa decorar essa fórmula gigantesca? Claro que não! Basta que você trace as diagonais e lembre de multiplicar os elementos e somar as diagonais. Vamos fazer um exemplo para entender melhor tudo isso. Veja a matriz de ordem 3 abaixo:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Agora vamos repetir as duas primeiras colunas ao final da matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Traçando as diagonais à direita e à esquerda, chegaremos a:

$$Q = \left[\begin{array}{ccc:cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

Feito tudo isso, podemos iniciar os cálculos. Lembre que é a soma das diagonais à direita menos a soma das diagonais à esquerda. Não esqueça que os elementos de cada diagonal são multiplicados. Veja o que teremos:

$$\det(Q) = \{[(0)(-1)(5) + (1)(0)(2) + (2)(4)(3)] - [(2)(-1)(2) + (0)(0)(3) + (1)(4)(5)]\}$$

$$\det(Q) = [0 + 0 + 24] - [-4 + 0 + 20]$$

$$\det(Q) = 24 - 16 = 8$$

Então, o determinante de Q é 8.

Perceba que o cálculo dos determinantes é bem simples, mas é necessário ter muita atenção para não confundir os elementos das diagonais e principalmente os sinais.

✓ **Matriz quadrada de ordem maior que 3**: para calcular esse tipo de determinante é necessário utilizar um artifício matemático chamado de Teorema de Laplace. Para isso, precisamos seguir alguns passos:

1. Escolha uma linha ou coluna da matriz que você está estudando;
2. Multiplique cada elemento da linha (ou coluna) pelo seu respectivo cofator;
3. Pelo Teorema de Laplace, o determinante da matriz será a soma dos produtos os elementos da linha (ou coluna) pelos cofatores.

Tá, tudo isso parece bem estranho, né? A melhor forma de entender é fazendo um exemplo utilizando ordens menores, porque ele funciona para todos os casos de matrizes quadradas. Vamos utilizar um exemplo de uma matriz de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora vamos escolher, arbitrariamente, uma linha ou coluna. Nesse caso, optei pela segunda linha da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Em seguida, precisamos multiplicar cada elemento da linha que escolhemos pelo seu cofator. Mas o que é isso? O cofator é calculado a partir da equação abaixo:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Parece difícil, né? Mas não é. É só trabalhoso e exige bastante atenção. Vamos fazer esse cálculo para cada um dos elementos da linha que escolhemos, iniciando pelo elemento a_{21}, que é o número 2.

- Cofator do elemento a_{21}:

$$a_{21} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21}$$

D_{21} é o determinante da matriz excluindo a coluna e a linha que contém a_{21}. Fica assim:

$$D_{21} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 15 - 12 = 3$$

Calculando o determinante dessa matriz, chegaremos a 1. Substituindo todos os valores na equação acima, teremos o seguinte:

$$A_{21} = (-1)^{3} \cdot D_{21}$$
$$A_{21} = (-1).(3)$$
$$A_{21} = -3$$

Esse é o valor do cofator do elemento a21. Multiplicando esse elemento pelo seu cofator, teremos: 2.(-3) = -6

Vamos guardar essa informação e calcular o cofator do segundo elemento da linha que escolhemos.

- Cofator do elemento a_{22}:

$$a_{22} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22}$$

D_{22} é o determinante da matriz excluindo a coluna e a linha que contém a_{22}. Fica assim:

$$D_{22} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_{22} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 9 - 6 = 3$$

Calculando o determinante dessa matriz, chegaremos a 3. Substituindo todos os valores na equação, conforme fizemos anteriormente, teremos:

$$A_{22} = (-1)^{4} \cdot D_{22}$$
$$A_{22} = (+1) \cdot (3)$$
$$A_{22} = 3$$

Então, 3 é cofator do elemento a_{22}. Multiplicando esse elemento pelo seu cofator, teremos: 1.3 = 3. Por fim, vamos realizar o mesmo procedimento para o terceiro elemento da linha escolhida.

- Cofator do elemento a_{23}:

$$a_{23} \Rightarrow A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23}$$

D_{23} é o determinante da matriz excluindo a coluna e a linha que contém a_{23}. Fica assim:

$$D_{23} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D_{23} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 6 - 5 = 1$$

Calculando o determinante dessa matriz, chegaremos a 1. Substituindo todos os valores na equação, teremos:

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot D_{23}$$

$$A_{23} = (-1).(1) = -1$$

Portanto, -1 é o cofator do elemento a_{23}. Multiplicando esse elemento pelo seu cofator, teremos: 1.(-1) = -1.

Certo, mas o teorema diz que o determinante da matriz original é o somatório das multiplicações dos elementos pelos cofatores. Assim, o valor do determinante da matriz será:

$$\det(A) = -6 + 3 - 1 = -4$$

Bem trabalhoso encontrar esse determinante, né? Por isso, caso você queira encontrar determinantes de ordem 3, é melhor utilizar o método anterior, né? Deixe o que acabamos de ver para quando for realmente necessário, como em matrizes de ordem 4 ou maiores, porque é bem fácil se perder nos sinais.

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Você viu que alguns determinantes podem dar um certo trabalho para calcular, né? Mas nem sempre é necessário fazer toooodos os passos que nós vimos para saber qual é o determinante de uma matriz. Vamos estudar as propriedades dos determinantes para facilitar o entendimento e poupar tempo (esses dois fatores são essenciais numa prova):

✓ 1ª propriedade

O determinantes de uma matriz quadrada é igual ao determinante de sua matriz transposta.
Exemplo:

$$S = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow S^T = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(S) = [(-4)(2)] - [(1)(7)] \rightarrow \det(S^T) = [(-4)(2)] - [(7)(1)]$$

$$\det(S) = -8 - 7 = -15 \qquad \det(S^T) = -8 - 7 = -15$$

✓ 2^a propriedade

Caso haja, numa matriz quadrada, uma coluna ou uma linha de zeros, o determinante será zero.

Exemplo:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(R) = (0)(2) - (1)(0)$$

$$\det(R) = 0 - 0 = 0$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\det(T) = (0)(-10) - (3)(0)$$

$$\det(T) = 0 - 0 = 0$$

✓ 3^a propriedade

Se trocarmos a posição de duas linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada de ordem 2 ou maior, o determinante da nova matriz será o oposto da matriz original.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = [(2)(3)] - [(1)(-4)]$$
$$\det(A) = 6 + 4 = 10$$

$$\det(B) = [(1)(-4) - (2)(3)]$$
$$\det(B) = -4 - 6 = -10$$

opostos

✓ 4ª propriedade

Se duas linhas (ou colunas) de uma matriz quadrada de ordem 2 ou maior forem iguais, o determinante é zero.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (1)(2) - (1)(2)$$
$$\det(A) = 2 - 2 = 0$$

ou

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(B) = (3)(4) - (4)(3)$$

$$\det(B) = 12 - 12 = 0$$

✓ 5ª propriedade

Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada por um número real, seu determinante também ficará multiplicado por esse número.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1^a \text{ linha} \times 2} B = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (2)(1) - (3)(8) = 22 \qquad \underbrace{\qquad \det(B) = (4)(1) - (3)(16) = 44}_{\det(B) \text{ é } 2 \cdot \det(A)}$$

✓ 6ª propriedade

Se os elementos correspondentes de duas linhas ou de duas colunas de uma matriz de ordem 2 ou maior forem proporcionais, o determinante é zero.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = (1)(6) - (2)(3) = 0$$

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6$$

✓ 7ª propriedade:

No caso de uma matriz triangular, o determinante dessa matriz será igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad det(A) = (6)(4) - (0)(1) = 24$$

diag. princ. $\rightarrow 6 \times 4 = 24$

✓ 8ª propriedade:

Multiplicando todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz de ordem 2 (ou maior) por um número e adicionando o resultado obtido aos elementos correspondentes de outra linha ou coluna, obteremos uma segunda matriz, tal que os determinantes das duas matrizes serão iguais.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad det(A) = (1)(7) - (-3)(5) = 22$$

→ Multiplicando a 1ª coluna por 2, somando o resultado à 2ª coluna e substituindo esse resultado na própria 2ª coluna, teremos a matriz B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$$

$$det(B) = (1)(17) - (-1)(5) = 22$$

$$det(A) = det(B)$$

✓ 9ª propriedade:

Se duas matrizes quadradas têm a mesma ordem, o determinante do produto dessas matrizes é igual ao produto dos determinantes de cada uma delas. Essa propriedade é chamada de Teorema de Binet.

Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad A.B=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix} \quad \det(A.B)=-4+6=2$$

$$\det(A.B)=\det(A).\det(B) \qquad \det(A)=6-5=1$$

$$2=2 \qquad \det(B)=0+2=2$$

$$\det(A).\det(B)=2$$

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Agora que já sabemos tudo sobre matrizes, somos capazes de resolver o problema inicial que foi apresentado lá no início da apostila sobre a mensagem criptografada. Só para lembrar, seu amigo te enviou o seguinte:

40 23 69 18 40 67 45 118 31 67

Para decodificar essa mensagem, utilize a chave $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ e considere que as letras de A a Z assumem os valores de 1 a 26, conforme abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z
21	22	23	24	25	26

Vamos entender como é o processo de criptografia para podermos entender como faremos para decodificar a mensagem.

No caso de mensagem criptografada com matrizes, considerando que cada letra corresponde a um número, podemos seguir os passos abaixo:

1. Substituir as letras das palavras da mensagem por números que correspondem à elas (seguindo a tabela de letras e número de a a z e de 1 a 26);
2. Transformar esses números em uma matriz;
3. Criar uma matriz que servirá como chave para decifrar a mensagem;
4. Multiplicar a matriz-chave pela matriz da mensagem (note que isso só será possível se o número de colunas da matriz-chave for igual ao número de linhas da matriz da mensagem) para obter uma nova matriz, agora criptografada. Por exemplo, se chamamos a matriz-chave de A e a matriz-mensagem de M, a nova matriz pode ser chamada de C. Assim, a operação que fizemos foi C = A.M.

Note que, no nosso caso, nós sabemos o C (que é a mensagem criptografada) e a chave, que chamamos de A. Então, nosso objetivo é chegar ao M, que é a mensagem decodificada. Portanto, para decifrar a mensagem, basta fazer o inverso, ou seja, multiplicar a matriz criptografada pelo inverso da chave. Assim, a operação para decodificar uma mensagem é $M = A^{-1}.C$.

Ok! Então, vamos lá! Primeiramente, vamos transformar aqueles números em uma matriz. Como sabemos que a matriz-chave é 2x2, precisamos tomar cuidado com o tamanho da matriz que vamos criar. É necessário que ela tenha duas linhas para conseguirmos realizar a multiplicação. Então, vamos transformar os números em uma matriz com duas linhas. Veja:

40 23 69 18 40 67 45 118 31 67

$$C = \begin{bmatrix} 40 & 23 & 69 & 18 & 40 \\ 67 & 45 & 118 & 31 & 67 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é inverter a matriz-chave (A), já que nosso objetivo é decodificar a mensagem. Lembra como fazer isso? Vamos supor uma outra matriz de mesma ordem e igualar o produto delas a uma matriz identidade, ou seja, A.B = I. Acompanhe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = I$$

Fazendo a multiplicação, teremos:

$$\begin{bmatrix} 3a + 1c & 3b + 1d \\ 5a + 2c & 5b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Criando sistemas para poder encontrar o valor das variáveis:

$$① \begin{cases} 3a + 1c = 1 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \qquad ② \begin{cases} 3b + 1d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas separadamente:

$$① \begin{cases} 3a + 1c = 1 \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a + 1c = 1 \; (-2) \\ 5a + 2c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} -6a - \cancel{2c} = -2 \\ 5a + \cancel{2c} = 0 \\ \hline -1a = -2 \\ \boxed{a = 2} \end{array}$$

$$3a + 1c = 1$$
$$3(2) + 1c = 1$$
$$6 + 1c = 1$$
$$\boxed{c = -5}$$

$$② \begin{cases} 3b + 1d = 0 \\ 5b + 2d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3b + 1d = 0 \; (-2) \\ 5b + 2d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{r} -6b - \cancel{2d} = 0 \\ 5b + \cancel{2d} = 1 \\ \hline -1b = 1 \\ \boxed{b = -1} \end{array}$$

$$3b + 1d = 0$$
$$3(-1) + 1d = 0$$
$$-3 + d = 0$$
$$\boxed{d = 3}$$

Beleza! Agora que sabemos os valores das variáveis, é só substituir em B, que é a matriz inversa de A:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

Ótimo! Podemos finalmente resolver nosso problema. Bora substituir na equação M = A^{-1}.C:

$$M = A^{-1} . C$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2} . \begin{bmatrix} 40 & 23 & 69 & 18 & 40 \\ 67 & 45 & 118 & 31 & 67 \end{bmatrix}_{2\times5}$$

Fazendo essa multiplicação, teremos:

$$M = \begin{bmatrix} 80-67 & 46-45 & 138-118 & 36-31 & 80-67 \\ -200+201 & -115+135 & -345+354 & -90+93 & -200+201 \end{bmatrix}$$

Beleza! Agora podemos reorganizar todos esses dados lado a lado para, então, substituir as letras que correspondem a cada número:

$$M = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 20 & 5 & 13 \\ 1 & 20 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Olha que legal! Na mensagem tão misteriosa que seu amigo enviou estava escrito apenas matemática! Pode parecer pouca coisa, mas você viu o trabalho que teve para conseguir decifrá-la? Imagina se fosse uma mensagem maior, quantos cálculos você teria que fazer? Ainda bem que os computadores estão aqui para facilitar nossa vida, né? Eles estão cada vez mais rápidos e conseguem calcular facilmente esse tipo de criptografia.

EXERCÍCIOS

1. Qual a ordem das matrizes abaixo, respectivamente?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) 2x3 ; 3x3 ; 1x1
b) 2x2 ; 2x3 ; 2x1
c) 3x3 ; 3x1 ; 2x3
d) 3x3 ; 2x2 ; 1x1
e) 2x2 ; 2x3 ; 1x2

Alternativa correta: E

2. Determine a, b, c, d:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

a) a=3 ; b=2 ; c=-1 ; d=6

b) a=-4 ; b=11 ; c=1 ; d=5

c) a=2 ; b=3 ; c=9 ; d=-6

d) a=4 ; b=1 ; c=11 ; d=4

e) a=5 ; b=5 ; c=1 ; d=-1

Alternativa correta: D

3. Qual é o determinante da matriz abaixo?

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

a) 19

b) 20

c) 21

d) 22

e) 23

Alternativa correta: E

4. Sobre matrizes transpostas, selecione a alternativa correta:

a) se uma matriz A é multiplicada por sua transposta, tem-se como resultado uma matriz identidade

b) uma matriz A subtraída pela sua transposta resulta em uma matriz nula

c) uma matriz transposta é apenas uma matriz na qual os elementos de uma n-ésima linha são trocados por uma nésimo coluna, como se a matriz se refletisse em relação à diagonal principal

d) matriz transposta é o mesmo que uma matriz inversa

e) a matriz transposta de uma matriz identidade resulta em uma matriz nula

Alternativa correta: C

5. Calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) 3

b) 8

c) 11

d) 17

e) 30

Alternativa correta: C

6. Sobre determinantes é correto afirmar que:

a) o determinante só pode ser calculado para matrizes 2x2 ou 3x3

b) sistemas lineares com determinantes nulos são sistemas possíveis determinados

c) o determinante de uma matriz pode ser calculado independente do número de linhas e colunas

d) um sistema linear com determinante não nulo é um sistema possível determinado

e) todo sistema linear com determinante nulo é impossível de ser resolvido.

Alternativa correta: D

7. Calcule o(s) valor(es) possível(eis) para que o determinante da matriz A seja nulo

$$A = \begin{pmatrix} x & (x-2) \\ x & 3 \end{pmatrix}$$

a) x = 0

b) x= 1 e x = 3

c) x = 1

d) x = 2 e x = 5

e) x = 0 e x = 5

Alternativa correta: E

8. (PUC – RS) O elemento c22 da matriz C = AB, onde:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é:

a) 0

b) 6

c) 2

d) 11

e) 22

Alternativa correta: D

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.