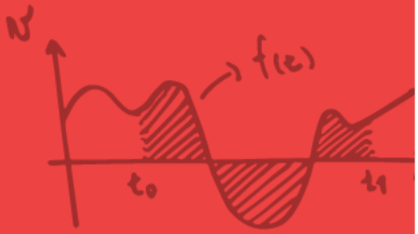
ENEM E
VESTIBULARES

# meSalva!





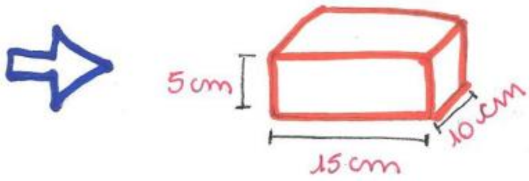
mesalva.com

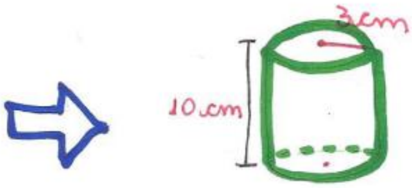
# GEOMETRIA ESPACIAL

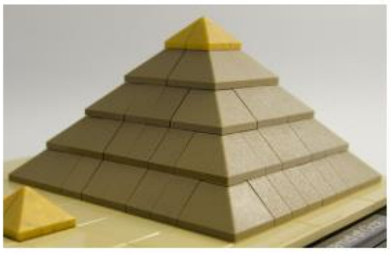
Sua prima está fazendo uma faxina no quarto dela e decidiu que não quer mais expor alguns de seus objetos, mas também não quer jogá-los fora. Por isso, pediu sua ajuda para encontrar uma caixa em que todos eles coubessem. Veja quais são os objetos abaixo:

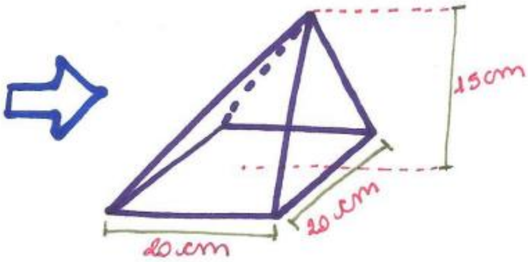
Como você não quer sair pela cidade comprando caixas de diferentes tamanhos e fazendo testes para ver se os objetos cabem, resolve propor a ela que vocês calculem quanto espaço cada um deles ocupa. O grande problema é que você, por enquanto, só estudou problemas envolvendo objetos planos, e que, portanto, possuíam apenas duas dimensões, ou seja, não tinham profundidade, mas largura e altura e dessa forma você conseguia calcular a área deles. Para saber o espaço que os objetos da sua prima ocupam dentro de uma caixa é necessário saber qual é o volume deles, ou seja, deve-se levar em consideração a largura, a altura e a profundidade desses objetos. Para resolver esse problema precisaremos relembrar um pouco os conceitos que estudamos em Geometria Plana e iniciar o estudo da Geometria Espacial, que estuda o espaço que as figuras ocupam e por isso o nome espacial.

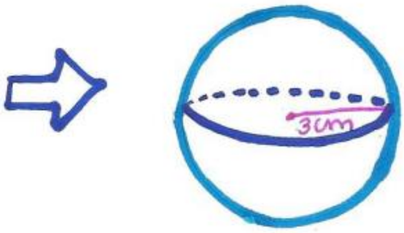
Para resolver esse inconveniente podemos fazer um paralelo entre os objetos que sua prima deseja guardar e algumas formas geométricas em três dimensões (que a partir de agora chamaremos de sólidos) que normalmente estudamos na Geometria Espacial. Veja que podemos realizar aproximações como: o livro é quase um prisma retangular ou um paralelepípedo, a caneca parece com um cilindro, a pirâmide, bem, essa nem precisamos aproximar e você entenderá daqui a pouco o porquê, o chapéu de duende é basicamente um cone e o globo de neve é uma esfera. Essas aproximações são muito frequentes no meio científico. Em geral, são desenvolvidos recursos simplificados (que são chamados de modelos matemáticos) para estudar fenômenos mais complexos e assim facilitar o seu entendimento. Voltando ao nosso problema, observe os objetos de sua prima e as semelhanças com os sólidos abaixo:


5cm
15cm
10cm


3cm
10cm




15cm
20cm
20cm

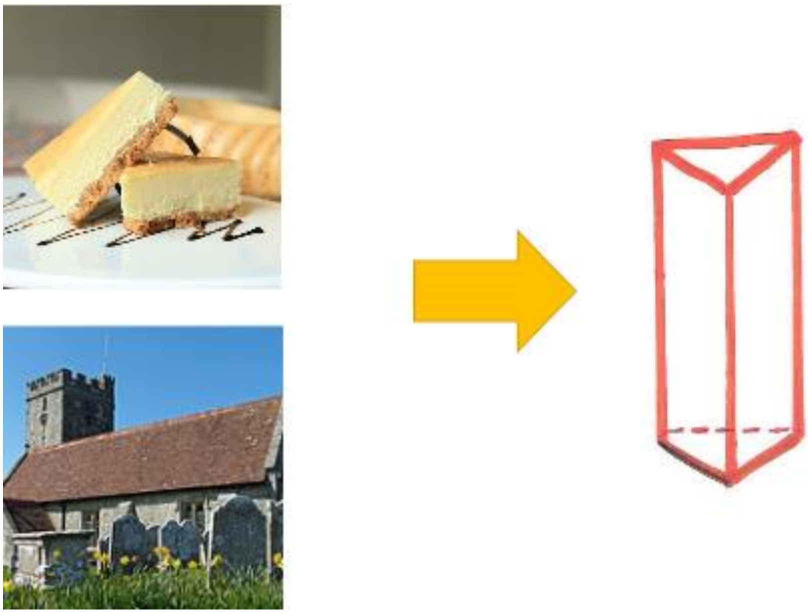

3cm


20cm
3cm

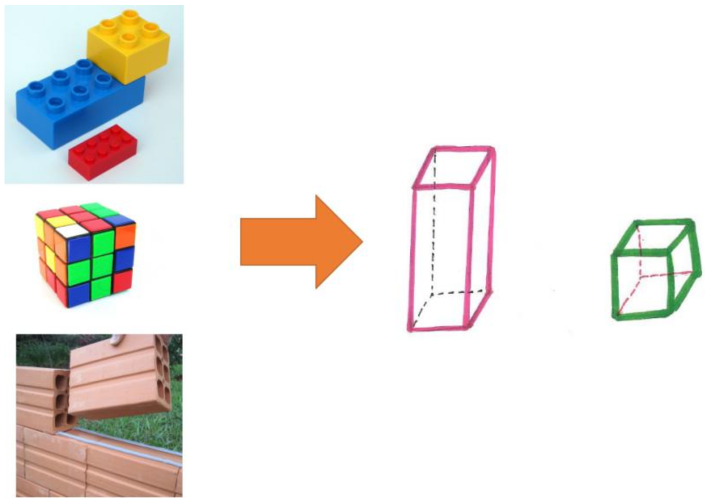
A Geometria Espacial fornece subsídios para que possamos realizar o cálculo do volume de sólidos. Os mais comuns são os prismas, as pirâmides, os cones e as esferas e, muitas vezes, a mistura deles. Vamos estudar cada um a partir de agora para que possamos descobrir o espaço que eles ocupam e para que você possa comprar a caixa do tamanho certo.

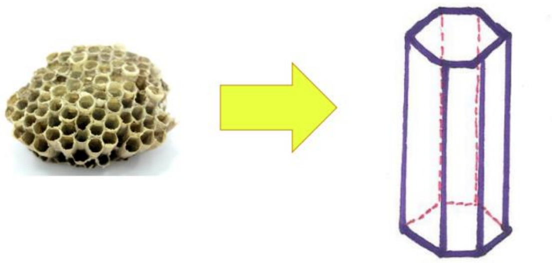
## PRISMAS

O telhado de casas, as colméias, os pedaços de torta, o cubo mágico, as peças de montar e os tijolos possuem uma característica em comum, todas são descritas pelo mesmo sólido, com características um pouco diferentes: os prismas. Eles podem ser prismas triangulares, retangulares, quadrados, pentagonais, hexagonais ou qualquer outro polígono que já estudamos. Isso acontece porque os prismas possuem como bases polígonos regulares (ou irregulares[1]), que são ligados por linhas retas, formando uma lateral retangular (paralelogramo). Ou seja, um prisma triangular possui bases compostas por triângulos, assim como um prisma hexagonal possui bases compostas por hexágonos e assim por diante. Veja os exemplos:

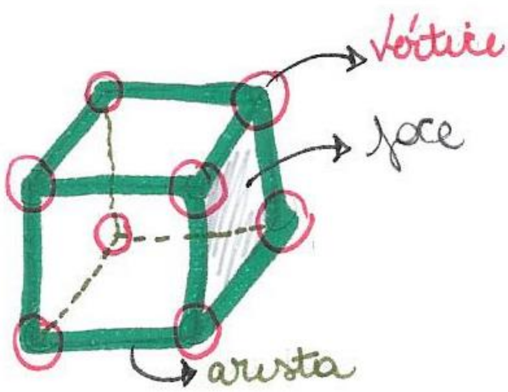


[1] Você poderá se deparar com prismas oblíquos, mas entendendo os primas regulares apresentados nessa apostila você consegue tirar de letra problemas envolvendo outros tipos desses sólidos.



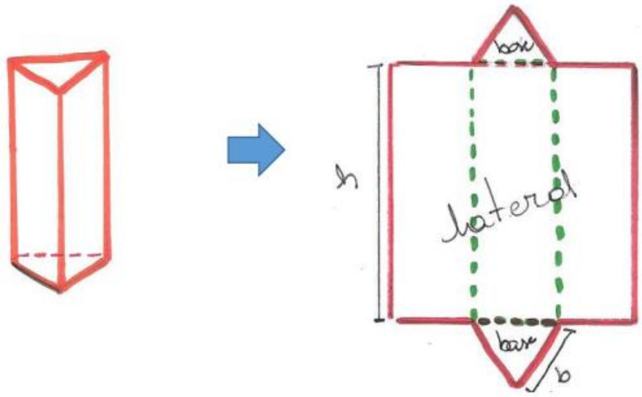


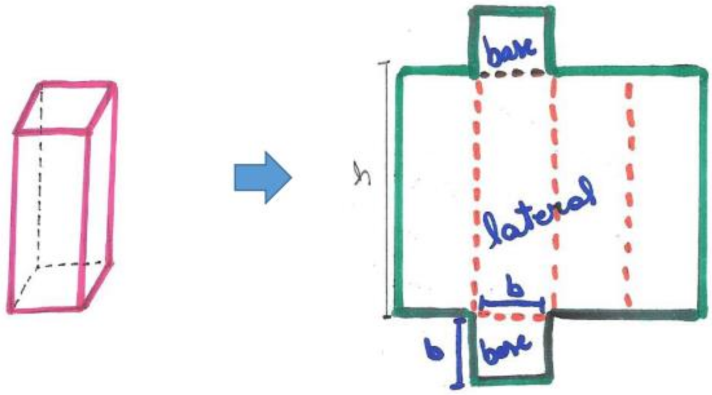
As bases dos prismas são ligadas por linhas retas que denominamos arestas e a junção delas formam vértices (uma “ponta”). Cada lado (ou base) dos sólidos é chamada de face. Essa nomenclatura é aplicada tanto em prismas quanto em outros tipos de sólidos e é importante que você tenha familiaridade com ela. Veja um exemplo:

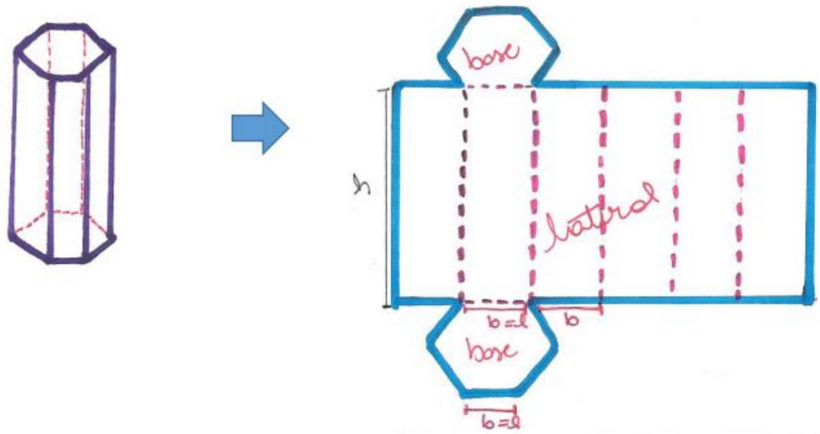


As arestas estão marcadas pela cor verde, os vértices estão circulados e as faces são as partes planas, que formam o sólido.

Antes de aprendermos a calcular o volume desses sólidos, vamos analisar a área dele, que é calculada a partir da área de cada uma das faces dessa figura. Para isso, realizamos um procedimento chamado de planificação. Note que, a área dos sólidos se refere à superfície dele, que planificada (vem de plano, ou seja, duas dimensões) fica mais fácil entender e calcular. Provavelmente você já trabalhou com a planificação de um sólido na infância, afinal, quem nunca recebeu um jogo que necessitasse a montagem de um dado, tendo que recortá-lo, dobrá-lo e colá-lo? Lembra disso? Pois agora você fará o caminho contrário. Você já tem o dado montado, agora precisa desmontá-lo. Veja como ficam alguns prismas planificados:




Perceba que as linhas pontilhadas demonstram as dobras que você desfez. Além disso, note que o número de arestas da base corresponde ao número de faces laterais. Por isso, quando temos um prisma triangular, que tem 3 arestas na base, temos também três laterais. Veja como essa informação procede contando as arestas e faces laterais dos outros prismas.

Depois dessa análise podemos realizar o cálculo da área dessas superfícies. Aqui a premissa é de que a área total é a soma da área das bases (lembre que são duas e por isso multiplicamos por 2) e a área lateral dos sólidos. Assim, a área de um prisma será sempre:

$$A_{Total} = 2.A_{base} + A_{lateral}$$

Perceba que nós já sabemos como calcular a área de triângulos, quadrados, retângulos, hexágonos, etc. Então, basta organizarmos essas informações. Veja:

## ÁREA PRISMA TRIANGULAR

Vamos assumir que o triângulo que forma as bases desse prisma é equilátero, mas poderia ser qualquer um, ok? Veja:

$$A_{base} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

A lateral é formada por três retângulos, então faremos a área do retângulo multiplicada por 3:

$$A_{lateral} = (b.h).3$$

Portanto, a área total será a soma dessas duas equações, multiplicando a área da base por 2, como já havia sido explicado, e realizando algumas manipulações matemáticas, chegaremos a:

$$A_{total} = (2.A_{base}) + (A_{lateral})$$

$$A_{total} = \left[2.\left(\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right)\right] + (3.b.h)$$

## ÁREA PRISMA QUADRADO

Nesses prisma as bases são quadrados e a lateral são quatro retângulos. Relembre as áreas desses polígonos abaixo:

$$A_{base} = b^2$$

$$A_{lateral} = (b.h).4$$

Portanto, a área total desse prisma será:

$$A_{total} = 2.b^2 + 4.b.h$$

## ÁREA PRISMA HEXAGONAL

Como temos bases hexagonais, a lateral será formada por seis retângulos. Então as áreas da base e da lateral serão definidas por:

$$A_{base} = \frac{3.b^2.\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{lateral} = b.h.6$$

E a total será, depois de algumas manipulações:

$$A_{total} = 2.\left(\frac{3.b^2.\sqrt{3}}{2}\right) + 6.b.h$$

$$A_{total} = 3.b^2.\sqrt{3} + 6.b.h$$

Abordamos apenas as áreas dos prismas mais comuns, mas sabendo que a área total é a soma de duas vezes a área da base com a área lateral você resolve qualquer problema que envolva outros tipos.

Visto tudo isso, agora podemos nos ater ao volume desses mesmos sólidos que dedicamos um tempo a mais. Lembre que já vimos que o volume leva em consideração as três dimensões: a altura, a largura e a profundidade do sólido, certo? Ótimo! Então, para sabermos qual é o volume de um sólido basta que façamos a área da base multiplicada pela sua altura. Consegue perceber como isso faz sentido? A base é composta por largura e profundidade e a altura, então, ao multiplicá-las consideramos duas dimensões, que compõe a área da base.

Quando multiplicamos essa área com a altura, estamos finalmente considerando as três dimensões, e portanto encontramos o volume do sólido, ou seja, o espaço que ele ocupa! Assim, o volume de um prisma é dado por **V = Ab.h**. Vamos analisar as equações de volume para cada um dos sólidos acima:

## VOLUME PRISMA TRIANGULAR

A área da base desse prisma é simplesmente a área de um triângulo equilátero, assim, multiplicando a altura teremos o seguinte a equação:

$$V = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.h$$

## VOLUME PRISMA QUADRADO

A área do quadrado é a multiplicação dos lados, que são iguais. Quando multiplicação a altura e a área da base chegamos em:

$$V = b^2.h$$

Agora veja que caso a altura tivesse a mesma medida do lado, ou seja, se tivéssemos um cubo, o volume seria:

$$V = b^3$$

## VOLUME PRISMA HEXAGONAL

A área da base desse prisma é apenas a área de um hexágono, então, ao multiplicarmos a altura a ela teremos:

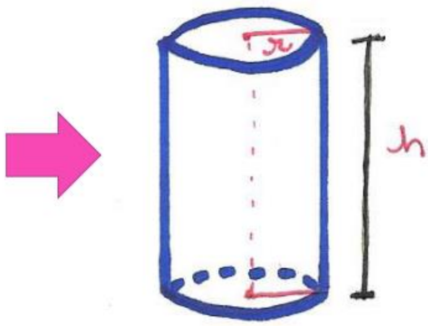
$$V = \frac{3.b^2\sqrt{3}}{2}.h$$

Assim como no cálculo da área dos prismas, sabendo a área da forma geométrica da base base dele e sua altura você consegue descobrir qual é o volume dele sem precisar necessariamente de uma fórmula. Basta que você lembre que precisa multiplicar as três dimensões. Isso nem sempre é uma tarefa fácil, como veremos ao longo dessa apostila.

## CILINDRO

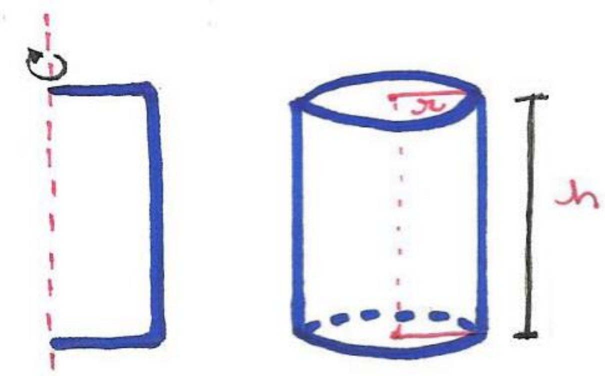
Perceba que o formato de alguns tipos de bolo, de latas de alumínio, de tanques de combustível pode se parecer bastante, certo? Veja as figuras abaixo.



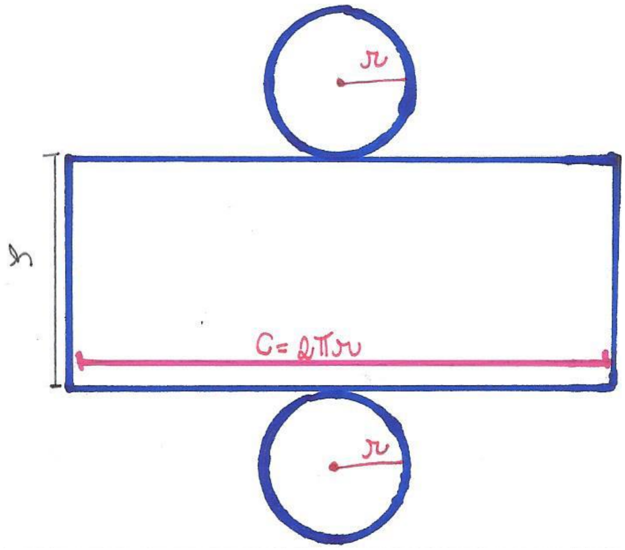




Com as devidas aproximações, esses objetos têm a forma de cilindros, que se parecem muito com os prismas a não ser pela falta de “dobraduras” nas laterais.

Faça um tubo com uma folha de papel, cubra as pontas (bases) com círculos e você terá um cilindro. A forma matemática de apresentar um cilindro é dizendo que ele é um sólido de revolução, mas o que isso quer dizer? Isso significa que se você girar por $360^{o}$ um retângulo, você obterá um cilindro. Veja a ilustração:




Vamos planificar esse sólido para que possamos calcular sua área. Perceba que as bases serão círculos e a lateral será um grande retângulo, que agora não é dividido (dobrado). Antes, nos prismas, sabíamos que a quantidade de arestas da base nos fornecia o número de retângulos da lateral, agora, como o círculo não possui arestas, veja que o comprimento da lateral tem o mesmo tamanho do perímetro da circunferência. Confira a imagem abaixo:




Agora que temos o sólido planificado podemos realizar o cálculo da área dele. A premissa de que a área total é a soma de duas vezes a área da base com a área lateral continua valendo.

Lembre da área de um círculo para calcular a área da base:

$$A_{base} = \pi r^2$$

Como já vimos, a lateral é composta por um grande retângulo, assim, para saber sua área, basta fazer lado multiplicado pela altura. Como um lado é igual ao perímetro da circunferência, teremos:

$$A_{lateral} = 2\pi r.h$$

E assim, realizando uma pequena manipulação, chegaremos à área total de um cilindro:

$$A_{total} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$A_{total} = 2\pi r(r+h)$$

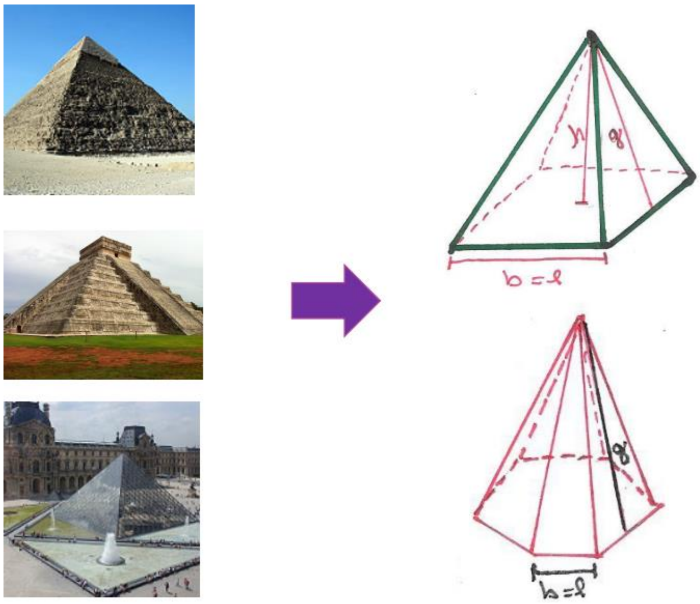
E o volume do cilindro, assim como no caso dos prismas, é calculado multiplicando a área da base pela altura do cilindro. Então, teremos que o volume é:

$$V = A_b.h$$
$$V = \pi.r^2.h$$

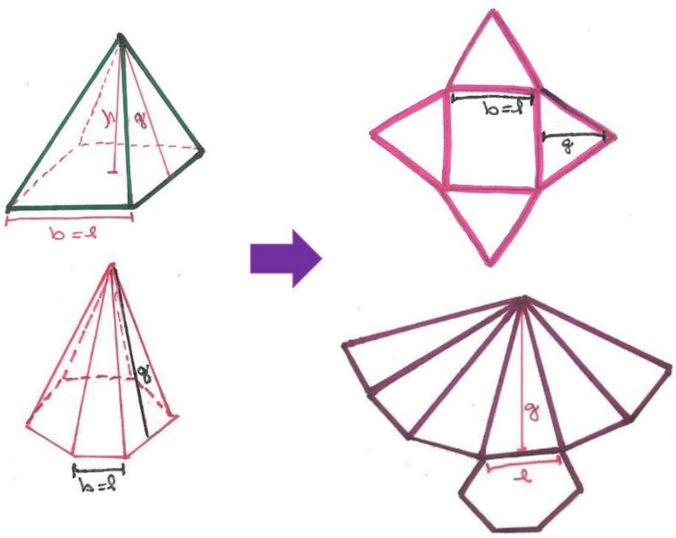
Bem menos complicado do que os milhares de casos possíveis de prismas, né?

## PIRÂMIDE

Você conhece esse sólido a partir das construções milenares tanto dos egípcios quanto dos maias, astecas ou outras antigas civilizações, certo? Essas construções fantásticas são parecidas com os prismas com uma grande diferença, no lugar de duas bases, as laterais das pirâmides são interligadas em um único ponto, um vértice e apenas uma base. Isso muda bastante a característica do sólido, que como laterais terá triângulos, no lugar dos retângulos que vimos anteriormente, porém, assim como nos prismas, a base pode ser composta por qualquer polígono regular. Veja as figuras de pirâmides com bases quadrada e hexagonal:




Você pode planificar os sólidos da forma como preferir, vamos fazer isso de duas formas no caso das pirâmides. Veja:




Perceba que novamente temos que o número de arestas da base fornece no número de lados da pirâmide, que são basicamente triângulos. Note ainda que a altura dos triângulos que formam a lateral é chamada de g (geratriz), que podemos encontrar se aplicarmos o Teorema de Pitágoras (se tivermos a informação do quanto vale a base do triângulo e o lado dele). A área dessas pirâmides é dada fazendo a soma da área da base com a área lateral.Vamos analisar essas duas.

## PIRÂMIDE COM BASE QUADRADA

A área da base dessa pirâmide você sabe calcular, né? A área lateral, como você pode perceber pelo desenho planificado é 4 vezes a área do triângulo. Assim teremos o seguinte:

$$A_{base} = l^2$$

$$A_{lateral} = \left(\frac{g.l}{2}\right).4$$

$$A_{lateral} = 2gl$$

E a área total será:

$$V = A_b.h$$

$$V = \pi.r^2.h$$

## PIRÂMIDE COM BASE HEXAGONAL

Novamente a área dessa base você já sabe calcular, basta lembrar da área do hexágono. E a área da lateral, que são 6 triângulos, basta multiplicar a área de um deles por 6. Veja como fica as áreas da base e da lateral:

$$A_{base} = \frac{3.l^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{lateral} = \left(\frac{l.g}{2}\right).6$$

$$A_{lateral} = 3lg$$

Então, a área total será:

$$A_{total} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} + 3lg$$

Agora que já sabemos a área das pirâmides, podemos abordar como é calculado o volume delas, que é descrito por um terço do volume de um prisma. A prova dessa premissa está no Apêndice dessa apostila, caso você queira analisar. Veja como fica o volume do prisma:

$$V_{pirâmide} = \frac{V_{prisma}}{3}$$

Caso a base da pirâmide seja quadrada, teremos:

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base}.h}{3}$$

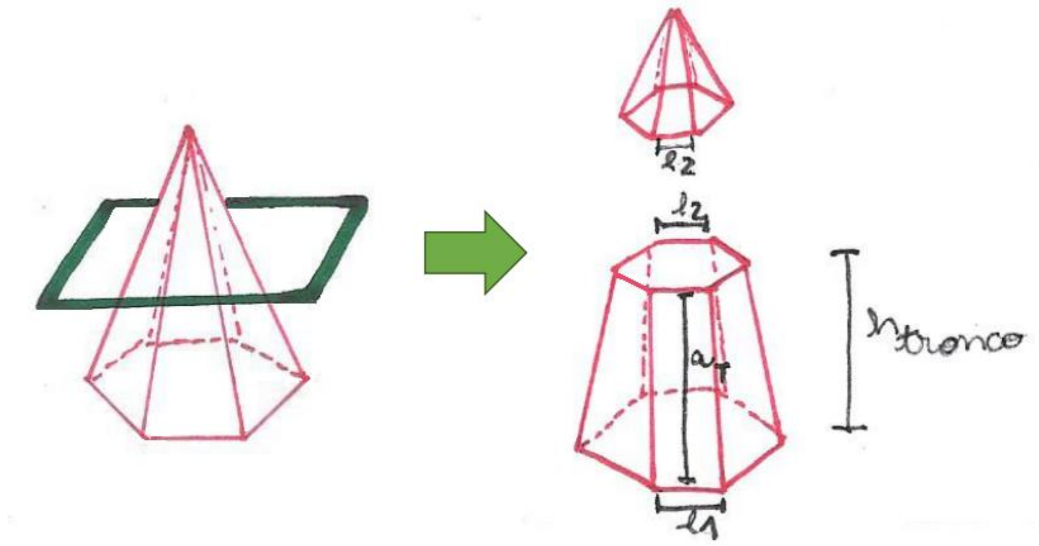
$$V_{pirâmide} = \frac{l^2.h}{3}$$

Se a base for outro polígono, basta substituir a área dele na equação anterior.

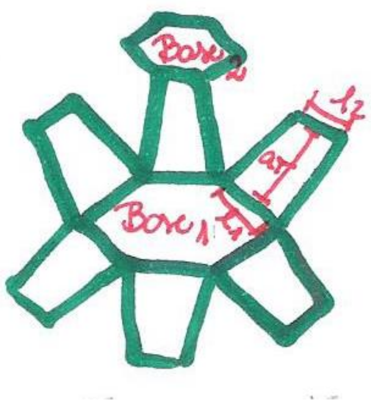
Existe uma relação que diz que "duas pirâmides com a mesma altura e com áreas das bases iguais têm o mesmo volume", que é chamado de princípio de Cavalieri. Vamos utilizá-lo mais tarde, por enquanto, deixe-o guardada na cabeça.

## TRONCO DE PIRÂMIDE

Quando "cortamos" uma pirâmide na horizontal obtemos uma pequena pirâmide, no topo, e na base o que chamamos de tronco de pirâmide. Veja abaixo:




Vamos planificar o tronco para poder calcular sua área. Veja:




Perceba que, diferentemente do prisma, apesar de termos duas bases, elas são de tamanhos diferentes (embora sejam formadas pelo mesmo tipo de polígono).

Note que a lateral do tronco é formada por 6 trapézios cuja área é calculada abaixo.

$$A_{lateral} = \left(\frac{l_1+l_2}{2}.a\right).6$$

Lembre que como uma base é menor do que a outra, as áreas desses dois hexágonos serão diferentes, por isso precisamos calculá-las separadamente. Veja na figura acima que o lado da base menor é l1 e o lado da base maior é l2.

$$A_{base_1} = \frac{3.l_1^2.\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{base_2} = \frac{3.l_2^2.\sqrt{3}}{2}$$

Então, a área total do tronco será:

$$A_{total} = 6.A_{lateral} + A_{base_1} + A_{base_2}$$

$$A_{total} = 6.\left(\frac{l_1+l_2}{2}.a\right) + \left(\frac{3l_1^2\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{3l_2^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

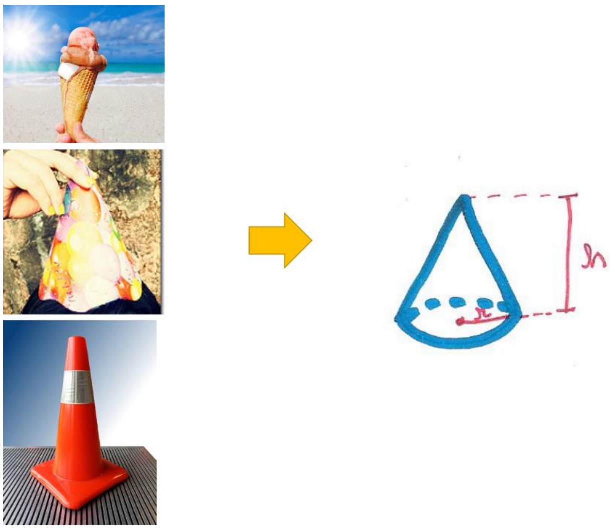
E o volume do tronco é calculado a partir da diferença entre o volume da pirâmide original e o da pirâmide pequena (a que sobrou quando cortamos a maior). Se preferir, veja a dedução no Apêndice. O resultado é:

$$V_{tronco} = \frac{h_{tronco}}{3}.(\sqrt{A_b.A_B} + A_b + A_B)$$

Veja que *b* se refere à base menor e o *B* se refere à base maior.

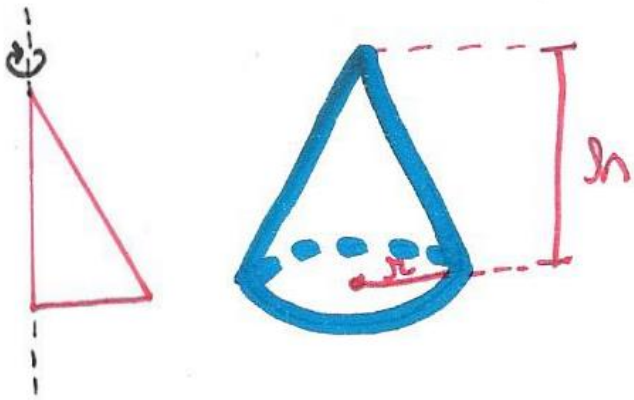
## CONE

Você provavelmente consegue notar as semelhanças do formato entre chapeuzinho de festa infantil, cone e trânsito e casquinha de sorvete, certo?

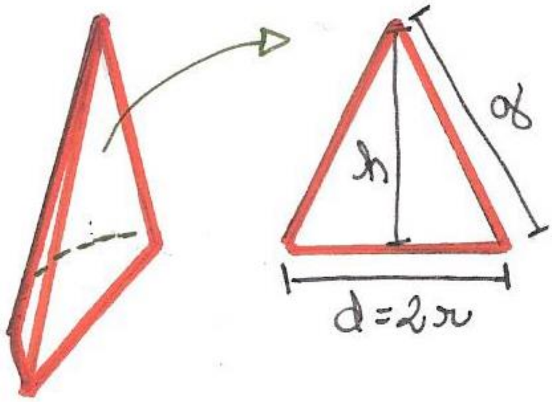



Os três objetos tem alguma semelhança com as pirâmides, com a diferença de que a base não é um polígono regular, mas uma circunferência, que faz com que não haja "dobradura" na lateral do sólido, denominado cone.

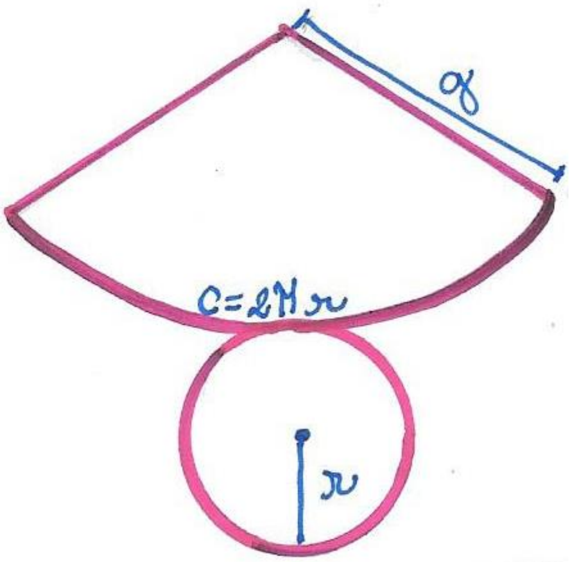
Assim como o cilindro, o cone também é chamado de sólido de revolução, isso porque se girarmos 360º um triângulo retângulo chegaremos a um cone. Veja a ilustração:




Veja que se "cortarmos" o cone na vertical, bem ao centro, teremos que a parte interior descreve um triângulo, que tem a altura do cone e a base que equivale ao diâmetro da circunferência que compõe a base do cone original. Veja a imagem:




Vamos guardar essas informações e vamos iniciar o estudo da área do cone, mas antes, sempre buscando facilidades de compreensão, vamos planificar o sólido. Se você já montou os chapeuzinhos de festa infantil provavelmente não terá dificuldade alguma nessa etapa. A base do cone sabemos facilmente que é uma circunferência, já que giramos o triângulo 360$^o$ para formar o sólido e a lateral será algo que em Trigonometria chamamos de arco de circunferência. Acompanhe:

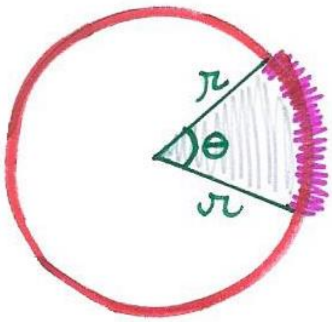



Veja que *g* é a lateral do arco (chamada de geratriz), que veremos ser uma espécie de raio de uma grande circunferência da qual saiu esse arco.

Perceba que o cálculo da área do cone não é trivial, apesar de sabermos a área da circunferência, não discutimos como calcular a área de uma forma geométrica como a da lateral do cone. Por isso, é necessário abordar primeiramente a área do setor circular.

## ÁREA DO SETOR CIRCULAR

Já relembramos o que é um arco de circunferência (um pequeno pedaço de uma circunferência), certo? Pois a área do setor circular é a área definida por esse arco. Veja a figura abaixo para entender melhor.




O arco é o que está em vermelho e a área definida por esse arco (que chamada de área do setor circular) é a parte sombreada.

Sabendo que a área da circunferência é Pi.r$^2$ e que ela equivale a 360$^o$, faremos a seguinte regra de três para encontrar a área do setor:

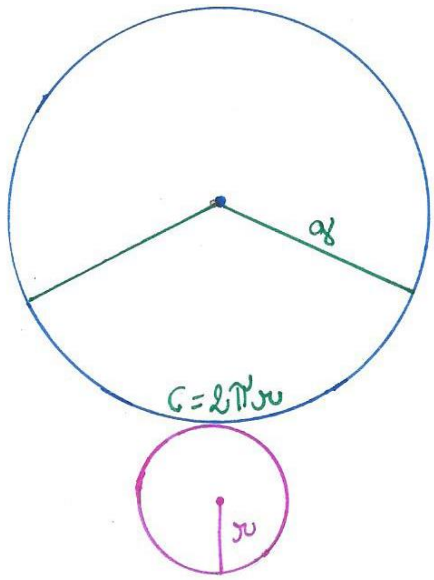
| Ângulo (graus) | | Área (cm²/m²/Km²) |
|---|---|---|
| 360 | $\rightarrow$ | $\pi r^2$ |
| $\theta$ | $\rightarrow$ | $A_s$ |

$$360.A_s = \theta\pi r^2$$

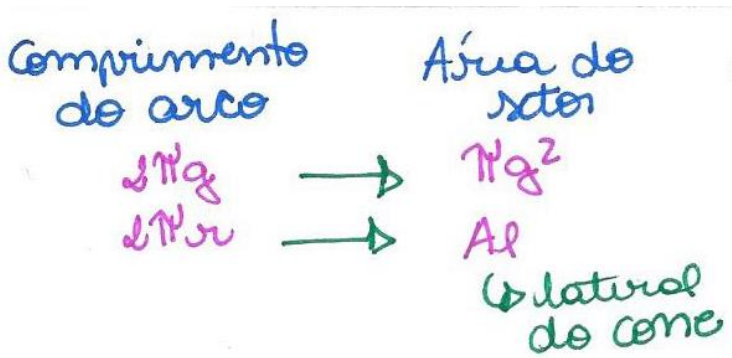
$$A_s = \frac{\theta\pi r^2}{360}$$

$$A_s = \frac{\theta\pi r^2}{360}$$

Sabendo disso, vamos transpor esse conhecimento ao nosso problema. Podemos completar o arco que tínhamos como lateral do cone como uma circunferência, certo? Veja a imagem:




E assim fazer a regra de três, utilizando o g como o raio dessa circunferência:




Então, a área da lateral do cone é dada por:

$$2\pi g A_{lateral} = 2\pi^2 r g^2$$
$$A_{lateral} = \frac{2\pi^2 r g^2}{2\pi g}$$
$$A_{lateral} = \pi r g$$

Sabendo que a área da base é a área da circunferência, teremos que a área total do cone é:

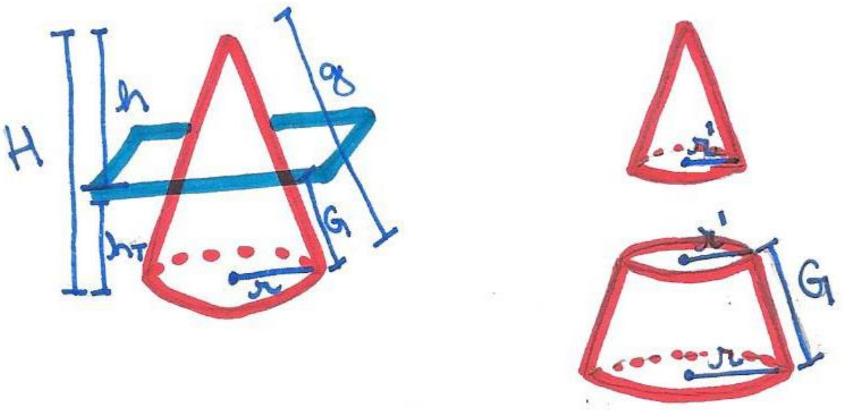
$$A_{total} = \pi r^2 + \pi r g$$
$$A_{total} = \pi r(g+r)$$

Quanto ao volume do cone, devemos retomar o princípio de Cavalieri. Lembre que esse princípio diz basicamente que desde que as alturas e as áreas sejam iguais, não importando a forma da base. Então, o cálculo do volume de um cone é feito como o de uma pirâmide: a partir de um terço do volume do prisma. Veja:

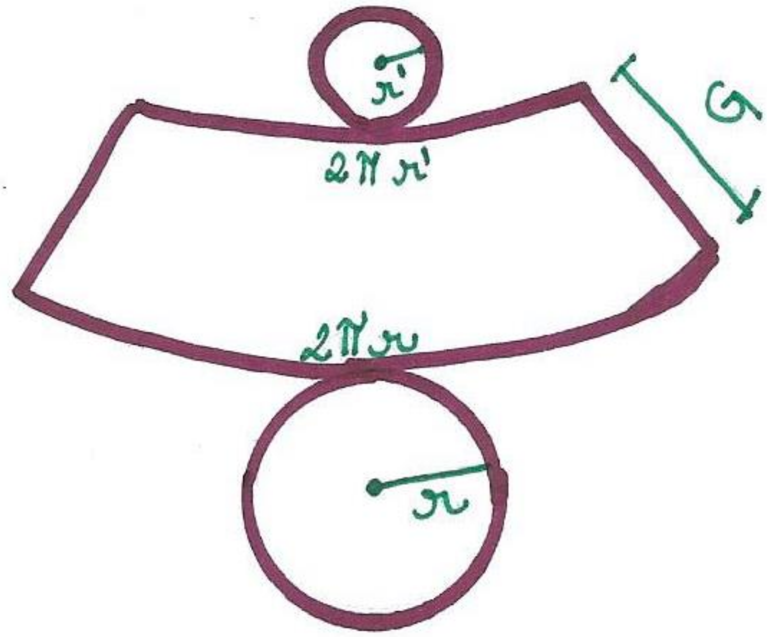
$$V_{cone} = \frac{A_b.h}{3}$$
$$V_{cone} = \frac{\pi r^2.h}{3}$$

**TRONCO DE CONE**

Se cortarmos o cone na horizontal, assim como na pirâmide, teremos um pequeno cone e um tronco de cone. Veja a figura:




Perceba que temos duas bases circulares, porém de raios diferentes. Ao planificarmos esse sólido teremos o seguinte:




A área das bases você já sabe calcular, basta fazê-lo separadamente, já que terá uma circunferência de raio r e outra de raio r'.

$$A_B = \pi 2^2 \qquad A_b = \pi r'^2$$

Já o cálculo da área lateral é realizado a partir da diferença entre as áreas do cone original e do pequeno, depois de cortado. Veja que chamamos a geratriz do tronco de G e portanto g - G fornece a geratriz do cone menor. Acompanhe o desenvolvimento da fórmula da área lateral:

$$A_{lateral_{original}} = \pi r g \qquad A_{lateral_{pequeno}} = \pi r'(g-G)$$

$$A_{lateral_{tronco}} = A_{lateral_{original}} - A_{lateral_{pequeno}}$$
$$A_{lateral_{tronco}} = \pi r g - \pi r'(g-G)$$
$$A_{lateral_{tronco}} = \pi G.(r+r')$$

Então, a área total do tronco do cone é:

$$A_{total} = A_{lateral_{tronco}} + A_B + A_b$$
$$A_{total} = \pi G(r+r') + \pi 2^2 + \pi r'^2$$

O volume do tronco do cone é encontrado da mesma forma, fazendo a diferença entre o cone original e o menor. Assim, teremos:

$$V_{troco} = V_{original} - V_{pequeno}$$

$$V_{troco} = \frac{\pi r^2 h}{3} - \frac{\pi r'^2 h}{3}$$

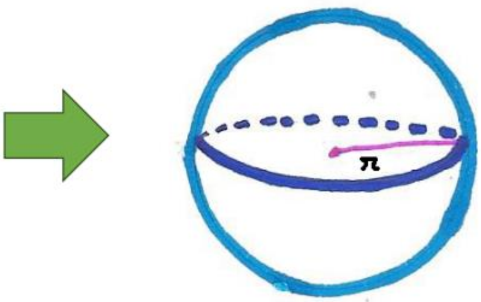
$$V_{troco} = \frac{\pi}{3}(r^2 H - r'^2 h)$$

Sabemos que H - hT = h, então podemos reorganizar a equação acima e obteremos:

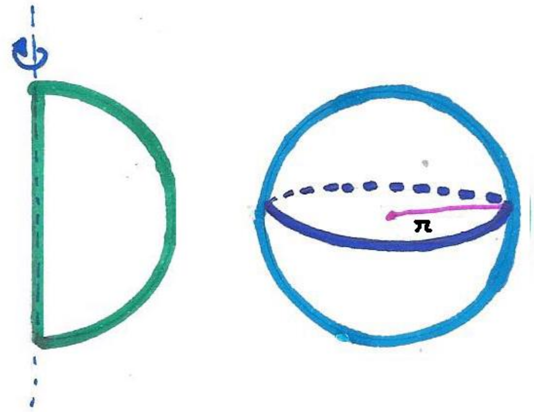
$$V_{troco} = \frac{\pi h_{tronco}}{3}(r^2 + r'.r + r'^2)$$

**ESFERA**

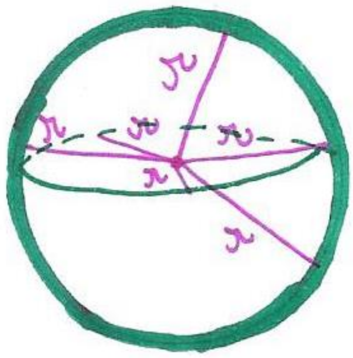
Esse talvez seja o sólido com que você tem maior familiaridade desde a infância, já que ele descreve as bolas de vôlei, basquete, futebol, entre outras. Globos de neve ou globos estudantis também são exemplo bastante fiéis de esferas.



Assim como o cone e o cilindro, a esfera é um sólido de revolução. Se girarmos uma meia circunferência por $360^o$ obteremos uma esfera. Veja:




Perceba que a esfera é um corpo redondo em que a distância do seu centro até o seu limite é sempre o valor do seu raio. Confira na imagem:




A área de uma esfera é calculada utilizando a seguinte equação:

$$A = 4\pi r^2$$

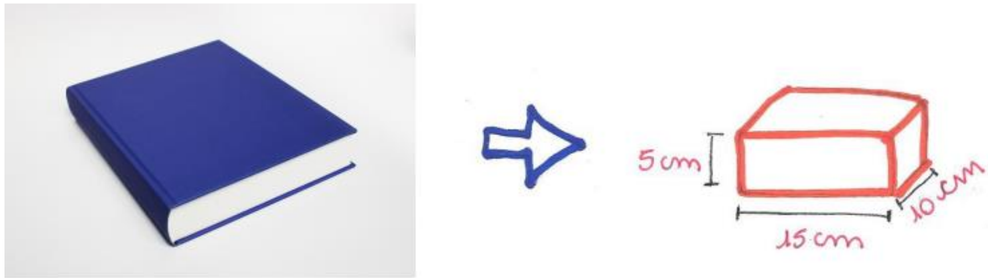
Já o seu volume é calculado a partir do Princípio de Cavalieri e considera o volume do cilindro no cálculo.

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Caso você tenha interesse no desenvolvimento dessas duas últimas equações, confira o **Apêndice** dessa apostila.

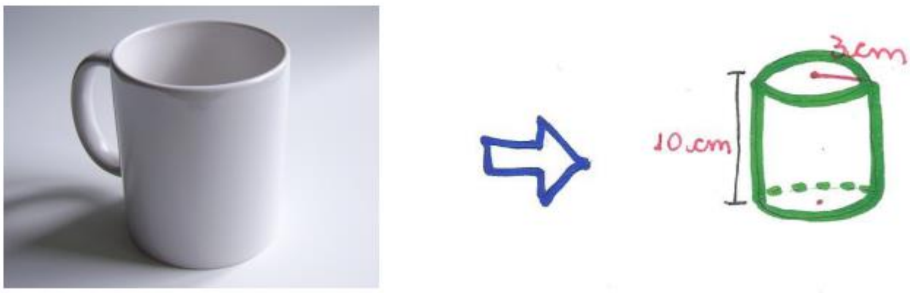
Ótimo! O estudo foi longo, porém necessário para podermos calcular o volume de todos os objetos que sua prima quer guardar. Você, com uma régua, fez medidas desses sólidos, para que conseguisse fazer as melhores aproximações. Então, vamos calcular os volume dos objetos na ordem em que os apresentamos na primeira imagem, lá na apresentação do problema.

- ✓ Volume do livro – prisma retangular



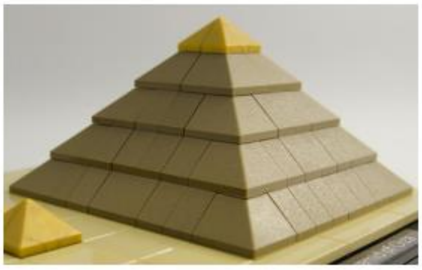

$$V = A_b.h$$
$$V = a.b.h$$
$$V = 15.10.5$$
$$V = 750 \ \ cm^3$$

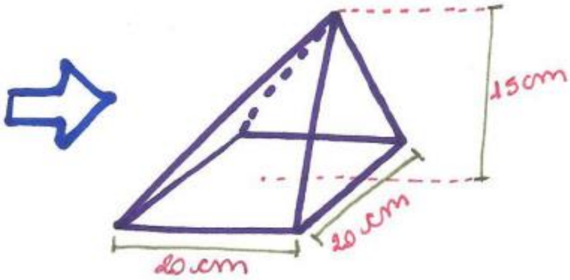
- ✓ Volume da caneca – cilindro




$$V = A_b.h$$
$$V = \pi r^2.h$$
$$V = \pi 3^2.10$$
$$V = 282{,}6 \ \ cm^2$$

- ✓ Volume da pirâmide – pirâmide






$$V = \frac{A_b . h}{3}$$

$$V = \frac{b^2 . h}{3}$$

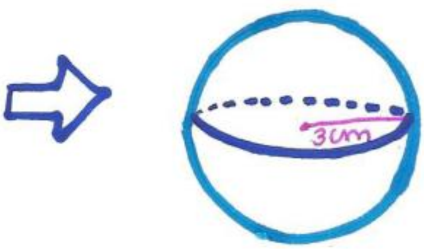
$$V = \frac{20^2 . 15}{3}$$

$$V = 2000 \ cm^3$$

- ✓ Volume do chapéu de duende - cone

$$V = \frac{A_b.h}{3}$$
$$V = \frac{\pi r^2.h}{3}$$
$$V = \frac{\pi 3^2.20}{3}$$
$$V = 188{,}4 \ cm^3$$

✓ Volume do globo de neve

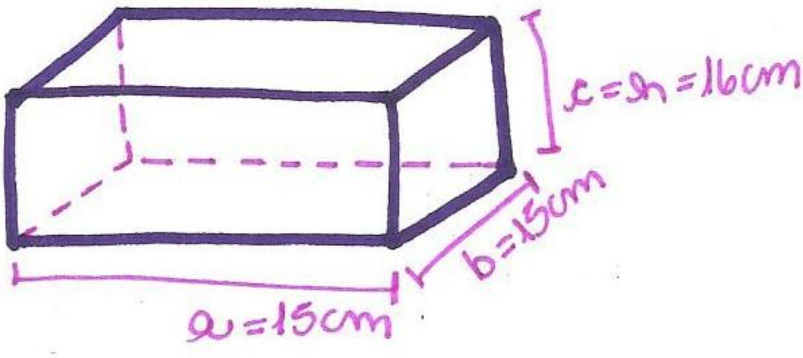



$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$
$$V = \frac{4\pi 3^3}{3}$$
$$V = 113{,}04 \ cm^3$$

Ótimo! Agora, somando cada um desses volume teremos um volume total de:

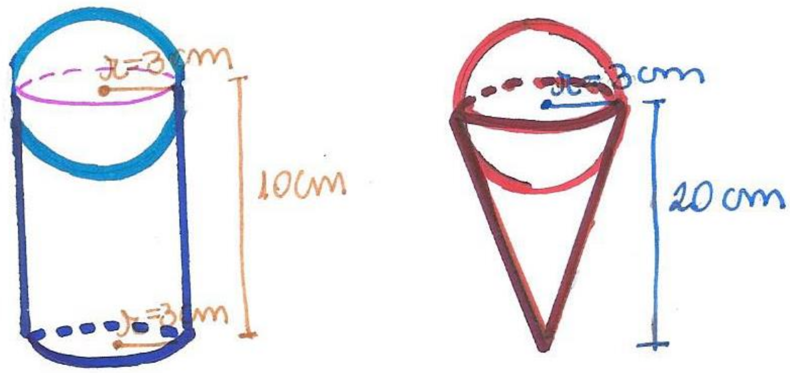
$$750cm^3 + 282{,}6cm^3 + 2000cm^3 + 188{,}4cm^3 + 113{,}04cm^3 = 3.334{,}04cm^3$$

Portanto, a caixa em que sua prima vai guardar esses objetos deve ser um pouco maior do que isso, já que não levamos em consideração alguns detalhes, como, por exemplo, a alça da caneca. Supondo que a caixa tem 15 cm de largura e de profundidade e 16cm de altura, o volume dela é:




$$V = a.b.c$$
$$V = 15.15.16$$
$$V = 3600 \ cm^2$$

Por fim, perceba que podemos fazer “montagens” entre esses objetos, que são chamadas de sólidos compostos. Perceba que o raio do globo de neve é igual ao raio do chapéu e da caneca, então poderíamos colocá-la dentro de um ou de outro. Veja como ficaria:




Perceba que a esfera fica metade para dentro tanto do cilindro quanto do cone, portanto, ao calcularmos o volume desse novo sólido, não devemos considerar essa parte da esfera, só o que está do lado de fora e o cone e o cilindro inteiros. Veja:

$$V_{total} = \frac{V_E}{2} + V_{cilindro}$$

$$V_{total} = \frac{113{,}04}{2} + 282{,}6$$

$$V_{total} = 339{,}12$$

$$V_{total} = \frac{V_E}{2} + V_{cone}$$

$$V_{total} = \frac{113{,}04}{2} + 188{,}4$$

$$V_{total} = 244{,}92$$

Há diversas possibilidades de combinações entre figuras em três dimensões e para resolver problemas que envolvem sólidos compostos você precisa usar a imaginação e fazer o máximo de relações que você conseguir.

## EXERCÍCIOS

1. (Fuvest) O número de faces triangulares de uma pirâmide é 11. Pode-se, então, afirmar que esta pirâmide possui:

a) 33 vértices e 22 arestas

b) 12 vértices e 11 arestas

c) 22 vértices e 11 arestas

d) 11 vértices e 22 arestas

e) 12 vértices e 22 arestas.

Alternativa correta: E

2. (Unirio) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:

a) 35

b) 34

c) 33

d) 32

e) 31

Alternativa correta: D

3. (Fuvest) A uma caixa d'água de forma cúbica com 1 metro de lado, está acoplado um cano cilíndrico com 4cm de diâmetro e 50m de comprimento. Num certo instante, a caixa está cheia de água e o cano vazio. Solta-se a água pelo cano até que fique cheio. Qual o valor aproximado da altura da água na caixa no instante em que o cano ficou cheio?

a) 90 cm

b) 92 cm

c) 94 cm

d) 96 cm

e) 98 cm.

Alternativa correta: C

4. (Fuvest-SP) Dois blocos de alumínio, em forma de cubo, com arestas medindo 10 cm e 6 cm, são levados juntos à fusão e em seguida o alumínio líquido é moldado como um paralelepípedo reto de arestas 8 cm, 8 cm e x cm. O valor de x é:

a) 16 cm

b) 17 cm

c) 18 cm

d) 19 cm

e) 20 cm

Alternativa correta: D

5. O Volume de um cone que possui área da base 6cm$^2$ e altura 2 cm é:

a) 8 cm$^3$

b) 4 cm$^3$

c) 12 cm$^3$

d) 3 cm$^3$

e) 36 cm$^3$

Alternativa correta: B

6. Uma pirâmide quadrangular possui área da base igual a 60 cm$^2$. Qual o volume desta pirâmide sabendo que a altura é de 10 cm?

a) 600cm$^3$

b) 1.200cm$^3$

c) 300cm$^3$

d) 200cm$^3$

e) 100cm$^3$

Alternativa correta: D

7. Qual a área da superfície de uma esfera de raio 1 cm ?

a) 6,28 cm$^2$

b) 12,56 cm$^2$

c) 15,70 $cm^2$

d) 18,84 $cm^2$

e) 31,4 $cm^2$

Alternativa correta: B

8. O volume de uma esfera de raio 1m é:

a) 1 $m^3$

b) 2,52$m^3$

c) 3,46 $m^3$

d) 3,98 $m^3$

e) 4,18 $m^3$

Alternativa correta: E

9. (Ufrj - adaptada) Um cubo de aresta 10 cm tem os quatro vértices A, B, C e D de uma de suas faces, F, sobre a superfície de uma esfera S de raio r. Sabendo que a face oposta a F é tangente à esfera S no ponto P, o raio r é:

a) 5,5

b) 6

c) 6,5

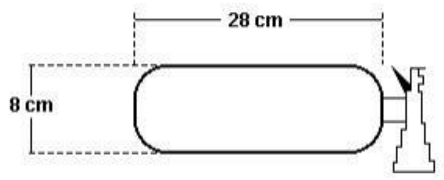
d) 7

e) 7,5

Alternativa correta: E

10. (Cesgranrio) Os extintores de incêndio vendidos para automóveis têm a forma de uma cápsula cilíndrica com extremidades hemisféricas, conforme indica a figura. Eles são feitos de ferro e contêm cerca de 1 litro de $CO_2$, sob pressão

de 2,8 atmosferas na temperatura de 21°C. A fórmula do volume da esfera é $4\pi R^3/3$.
Considere, para efeito de cálculo, $\pi$ =3, e que o CO, se comporte como um gás ideal.




O volume de ferro utilizado na confecção da cápsula, em $cm^3$, é de, aproximadamente:

a) 108

b) 216

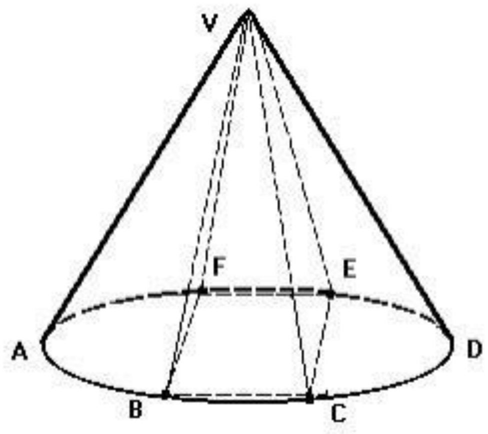
c) 288

d) 312

e) 356

Alternativa correta: B

11.(Ufmg) Observe a figura.



Nessa figura, a base da pirâmide VBCEF é um quadrado inscrito no círculo da base do cone de vértice V. A razão entre o volume do cone e o volume da pirâmide, nesta ordem, é:

a) π /4

b) π /2

c) π

d) 2 π

e) 2 π /3

Alternativa correta: B

(UNICAMP)Considere um cilindro circular reto. Se o raio da base for reduzido pela metade e a altura for duplicada, o volume do cilindro:

a) é reduzido em 50%.

b) aumenta em 50%.

c) permanece o mesmo

d) é reduzido em 25%.

Alternativa correta: A

13. (MACKENZIE – SP)Qual é o volume de um tronco de pirâmide regular quadrangular, sabendo que os lados das bases medem 10 cm e 4 cm e a altura , 4cm?

a) 205 $cm^3$

b) 206 $cm^3$

c) 207 $cm^3$

d) 208 $cm^3$

e) 209 $cm^3$

Alternativa correta: D

14. (Ufscar) Se a soma das medidas de todas as arestas de um cubo é 60cm, então o volume desse cubo, em centímetros cúbicos, é:

a) 125.

b) 100.

c) 75.

d) 60.

e) 25

Alternativa correta: A

15. (UFRN) Como parte da decoração de sua sala de trabalho, José colocou sobre uma mesa um aquário de acrílico em forma de paralelepípedo retângulo, com dimensões medindo 20cm x 30cm x 40cm. Com o aquário apoiado sobre a face de dimensões 40cm x 20cm, o nível da água ficou a 25cm de altura. Se o aquário fosse apoiado sobre a face de dimensões 20cm x 30cm, a altura da água, mantendo-se o mesmo volume, seria de, aproximadamente:

a) 16cm.

b) 17cm.

c) 33cm.

d) 35cm.

Alternativa correta: C

## REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.