FUNÇÕES II
EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ IXPN - Introdução a exponenciais
- ✓ EQXP - Equações exponenciais (redução de base)
- ✓ LOGT - Logaritmos
- ✓ PLOG - Propriedades dos logaritmos
- ✓ EQLG - Equações logarítmicas
- ✓ FEXP - Funções exponenciais
- ✓ FLOG - Funções logarítmicas
- ✓ EXLG - Exercícios de Exponenciais e Logaritmos
- ✓ INXP - Inequações logarítmicas e exponenciais

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	FUNÇÕES II - APÊNDICE
PROFESSORES	TAMARA SALVATORI, ARTHUR LOVATO

FUNÇÕES II - APÊNDICE

DEMONSTRAÇÕES DAS PROPRIEDADES LOGARÍTMICAS

Veja abaixo as demonstrações das propriedades que vimos na apostila de Funções II. Para as duas primeiras precisamos lembrar de uma consequência da definição:

$$\log_a a^n = n$$

LOGARITMO DO PRODUTO

Lembre que $a^x.a^y = a^{(x+y)}$.

A partir disso, acompanhe o logaritmo do produto:

$$\log_2(4.8) = \log_2(2^2.2^3) = \log_2 2^{(2+3)}.$$

Lembrando da consequência da definição, somamos os expoentes para ter a resposta: 2 + 3 = 5.

Agora veja a soma de logaritmos:

$$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 2^2 + \log_2 2^3$$

A partir da consequência da definição, teremos que 2 + 3 = 5.

Portanto, perceba que $\log_2(4.8) = \log_2 4 + \log_2 8$.

Assim, podemos generalizar para:

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

LOGARITMO DO QUOCIENTE

Lembre que $\frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}$.

A partir disso, acompanhe o logaritmo do quociente:

$$\log_2\left(\frac{16}{4}\right) = \log_2\left(\frac{2^4}{2^2}\right) = \log_2 2^{(4-2)}$$

Lembrando da consequência da definição, devemos resolver o expoente 4 - 2 = 2.

Agora veja a subtração de logaritmos:

$$\log_2 16 - \log_2 4 = \log_2 2^4 - \log_2 2^2$$

A partir da consequência da definição, teremos que 4 - 2 = 2.

Portanto, veja que $\log_2\left(\frac{16}{4}\right) = \log_2 16 - \log_2 4$.
Assim, generalizamos para:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

✓ **Caso particular:**

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a 1 - \log_a b$$

Lembrando de outra consequência da definição: $\log_a 1 = 0$, então:

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = 0 - \log_a b$$

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$$

LOGARITMO DE POTÊNCIA

Veja o logaritmo de potência igualado a x: $\log_a b^n = x$ e outro logaritmo igualado a y: $\log_a b = y$. Resolvendo, teremos que: ax = bn e ay = b. Perceba que bn = (ay)n, já que b = ay, então bn = ayn = ax. Se ayn = ax, então yn = x, ou x = yn. Lembre que $\log_a b^n = x$ e $\log_a b = y$, assim:

$$\log_a b^n = n.\log_a b$$

MUDANÇA DE BASE

A mudança de base é feita aplicando a seguinte fórmula: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. Vamos considerar que:

$$\log_a b = p$$
$$\log_c b = q$$
$$\log_c a = r$$

Resolvendo esses logaritmos, chegaremos em $a^p = b$, $c^q = b$ e $c^r = a$. Veja que $b = c^q = a^p$. Como $a = c^r$, se elevarmos ambos lados a *p*, chegaremos a $a^p = (c^r)^p = c^{rp}$. Então, se $c^q = c^{rp}$, então q = rp, ou p = q/r, que é o mesmo que:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.