ENEM E VESTIBULARES

$$\Phi = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

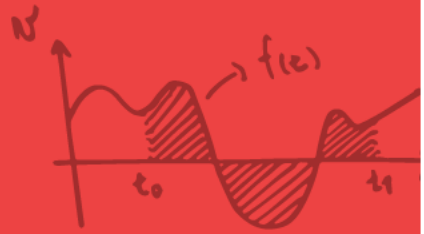
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$z = 3$ //

$y = 9 - 2z = 3$ //

$x = -4z - 2y = -12 - 6 = -18$ //

$(-18, 3, 3)$

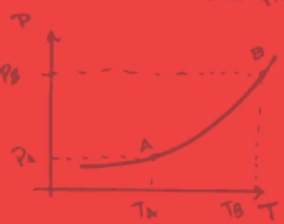


meSalva!

$f(x) = \text{sen } x$

$f(x) = \text{sen}(\omega x + \theta)$

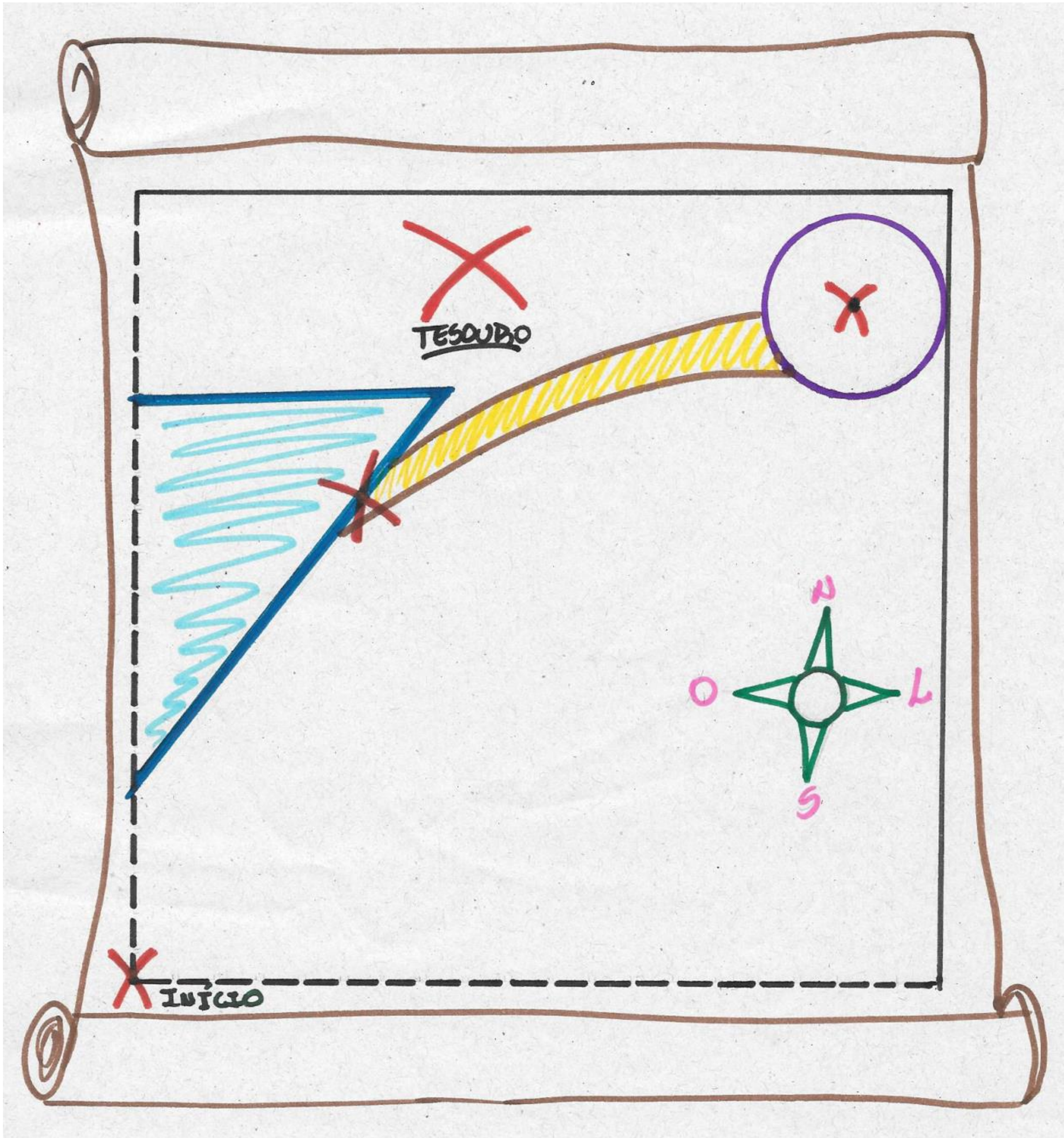
PRESSÃO VS. TEMPERATURA EBULIÇÃO



DIVISOR DE ÁGUAS INTERFLÚVIO

GEOMETRIA ANALÍTICA

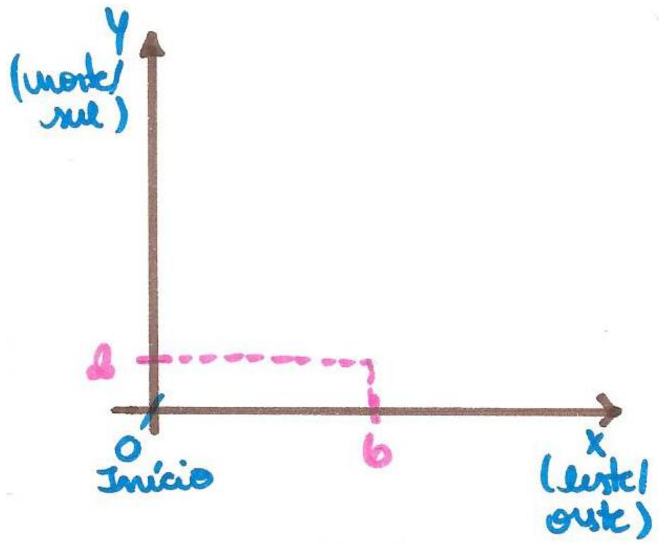
Sua professora de matemática resolveu inovar e criou uma caça ao tesouro para ensinar os conteúdos relacionados à Geometria Analítica. Para isso, ela desenvolveu mapas baseados em áreas de um parque e levou toda a turma para lá. Depois de todos os alunos serem divididos em pequenos grupos, ela entregou um mapa para cada um. O do seu grupo foi o seguinte:



Ao entregar o mapa, a professora indicou para cada grupo qual seria seu ponto de partida, local em que seria encontrada a primeira pista e explicou que cada traço do mapa corresponderia a um passo. Além disso, todas as pistas deveriam ser anotadas no mapa, que em princípio continha apenas anotações essenciais sobre o local.

PISTA 1: Andem 2 passos a norte e 6 a leste para encontrar a próxima pista.

Perceba que os passos indicados pelos traços podem ser entendidos como unidades no plano cartesiano, então note que os passos dados à leste (ou oeste) são correspondentes a unidades do eixo x, assim como passos dados à norte ou sul são correspondentes a unidades do eixo y. Portanto, para encontrar a próxima pista é necessário encontrar o ponto P(6, 2), que indica 6 unidades no eixo x e 2 no eixo y. Veja a imagem abaixo.

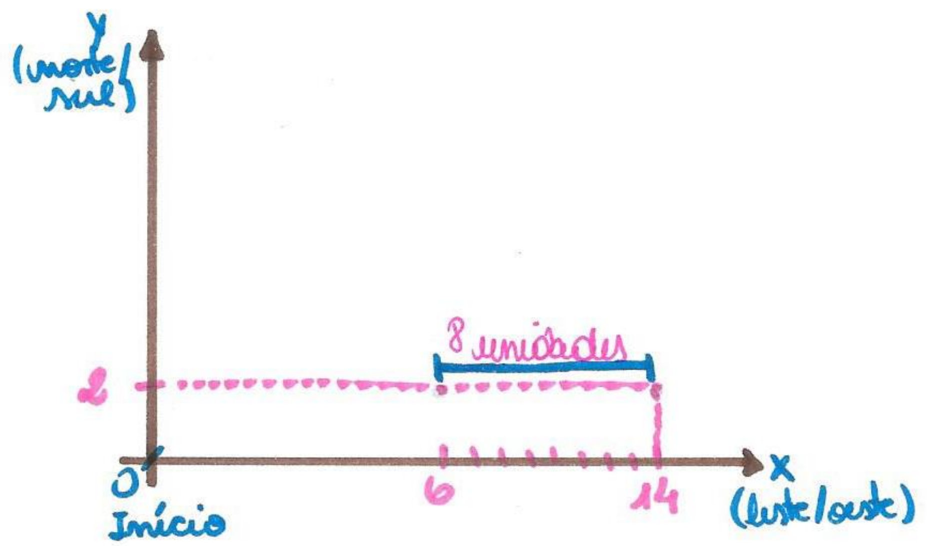


Ao chegar nesse local, vocês encontraram uma pessoa com a seguinte pista:

PISTA 2: Ótimo! Vocês acabaram de relembrar como localizar pontos em um plano cartesiano. Esse conhecimento será muito útil em todas as etapas dessa jornada! Continuem seguindo as instruções!

Para liberar a passagem para a próxima pista vocês precisam responder à seguinte pergunta: Se a próxima pista está 2 passos a norte e 14 passos a leste do ponto inicial, qual é a distância entre o local da 3ª pista e o da 2ª?

Para responder à essa pergunta é necessário entender conceitos sobre a distância entre dois pontos, consegue perceber? Vamos utilizar novamente os conceitos de localização no plano cartesiano para marcar os locais das pistas no mapa. O primeiro ponto é o que já sabemos, $P_1(6, 2)$ e o segundo é o fornecido pela pista, P_2 $(14, 2)$. Lembre que essas unidades são contadas a partir da origem (ou ponto inicial). Veja como fica:



Agora que já se sabe a localização exata de ambos os pontos é possível saber qual é a distância entre eles. Para isso, basta contar quantos passos (ou unidades) há entre um ponto e outro, ou fazer a subtração entre eles: 14 - 6 = 8 passos (unidades). Então, a distância entre os pontos referidos é 8 passos. Como um dos seus colegas teve dúvidas, ele resolveu contar as unidades no mapa e encontrou o mesmo resultado.

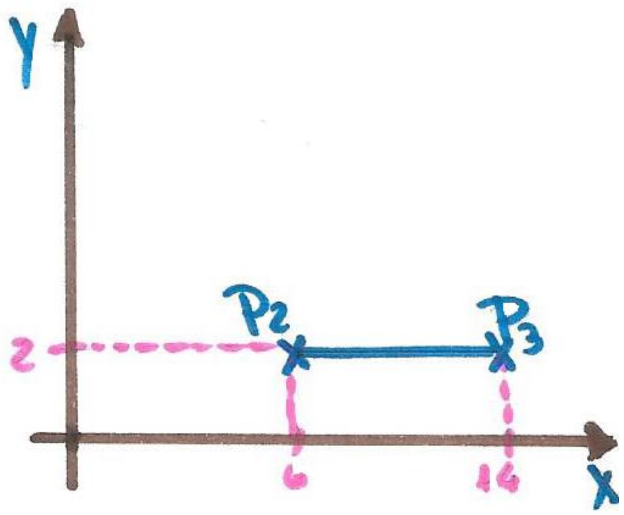
Ao saber disso, você e seu grupo disseram a resposta correta e tiveram a passagem liberada para a próxima pista, que estava, como vocês já haviam calculado, 8 passos a leste do lugar em que vocês estavam.

Chegando no local da terceira pista, vocês encontraram o seguinte:

 |

PISTA 3: Parabéns por terem resolvido com êxito o exercício sobre a distância entre dois pontos! Agora vamos nos aprofundar um pouco mais na Geometria Analítica. Notem que vocês percorreram uma linha reta até aqui. Para encontrar a próxima pista é necessário encontrar o ponto médio deste trajeto e andar 7 passos a norte a partir do resultado que vocês encontrarem.

Para resolver o novo enigma seu grupo mais uma vez recorreu ao plano cartesiano. Vocês traçaram uma linha reta entre os pontos que haviam marcado no mapa anteriormente conforme a figura abaixo:



Saber o ponto médio de um segmento de reta exige que seja feita a média entre os pontos inicial (P_1) e final (P_2) desse segmento. Veja:

$$x_M = \frac{x_i - x_f}{2}$$

$$y_M = \frac{y_i - y_f}{2}$$

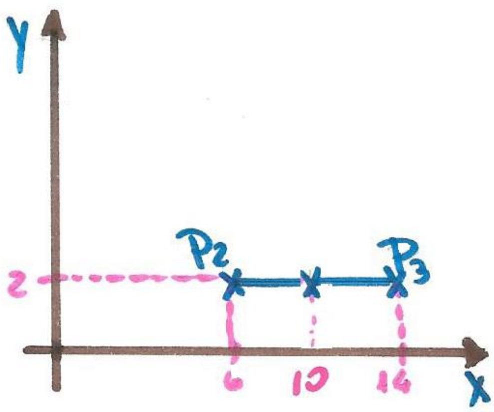
Como sabemos que os pontos são $P_1(6, 2)$ e $P_2(14, 2)$, basta substituirmos os pontos nas equações acima. Vamos estipular que P_1 é o ponto inicial e então x_i é 6 e y_i é 2, portanto, P2 é o ponto final e x_f vale 14 e y_f vale 2. Veja como fica:

$$P_1(6,\ 2)\ \ e\ \ P_2(14,\ 2)$$

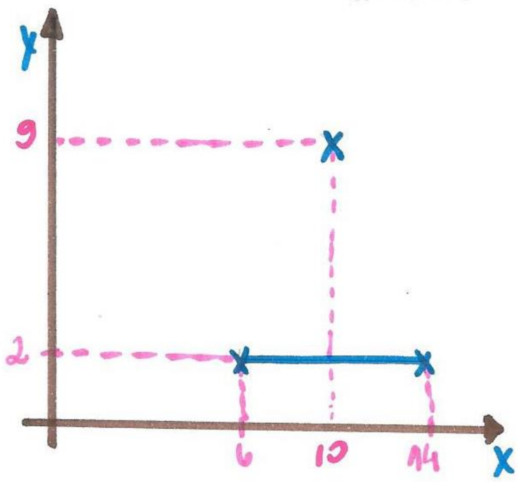
$$x_M = \frac{x_i + x_f}{2} = \frac{6 + 14}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$y_M = \frac{y_i + y_f}{2} = \frac{2 + 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Portanto, o ponto médio do segmento de reta percorrido pelo grupo é $P_M(10, 2)$. Veja no plano cartesiano:



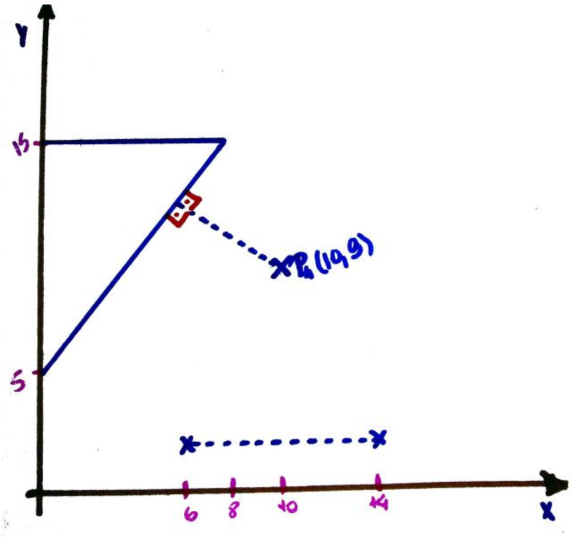
Mas saber o ponto médio do segmento de reta não é o suficiente para encontrar a próxima pista. Lembrem que ao encontrá-lo vocês devem caminhar 7 passos a norte a partir dele. Portanto, a próxima pista, no plano cartesiano, será encontrada no ponto $P_4(10, 9)$. Veja abaixo a localização no mapa:



Ao chegar lá, seu grupo encontrou a nova pista.

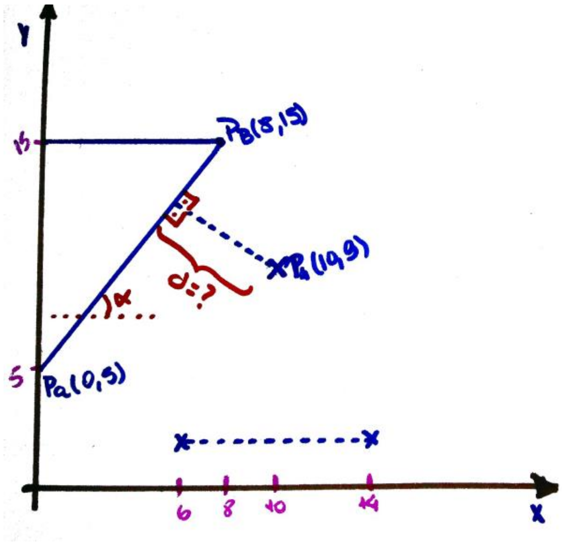
PISTA 4: Muito bem! Agora vocês devem seguir em linha reta até a borda da piscina. É essencial que o caminho seja perpendicular à borda. Ao chegarem lá vocês receberão novas instruções.

A forma mais segura de saber qual caminho seguir é traçando uma linha reta que faça um ângulo de 90^o com a borda no próprio mapa. Ao fazer isso, bastou segui-la para ganhar novas instruções. Veja como fica esse caminho, do ponto P(10,9) até a borda da piscina:



PISTA 5: Como vocês seguiram à risca o caminho solicitado chegaram a uma projeção do ponto anterior nesse segmento de reta (borda da piscina). Sabendo os pontos das extremidades da piscina (consulte o mapa), qual foi a distância que vocês percorreram para chegar até aqui?

Agora ficou um pouquinho mais complicado, mas a Geometria Analítica vai te ajudar a resolver esse probleminha. É pedido, basicamente, a distância entre o ponto P(10, 9), que vocês estavam, e a borda da piscina (uma reta), ou seja, a distância entre um ponto e uma reta. Para resolver isso, primeiramente, é necessário saber que a partir de dois pontos de um segmento de reta é possível saber a inclinação dela, chamada de coeficiente angular. Veja a representação da distância percorrida (d) entre o ponto P4 e a borda da piscina e a representação da inclinação (ângulo α) da borda da piscina em relação ao eixo x.



Veja como calcular o coeficiente angular da reta:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$m = \tan \alpha$$

Sabendo que os pontos fornecidos no mapa são $P_a(0, 5)$ e $P_b(8, 15)$ podemos substituir os valores na equação acima para saber o valor do coeficiente angular.

Fazendo o arco tangente é possível descobrir o ângulo que essa reta faz com o eixo x. No caso, arctan de 1,25 é 51,25^{o} aproximadamente.

Ótimo, sabendo o valor da inclinação dessa reta e um ponto dela é possível saber qual é a equação geral dessa reta. Veja:

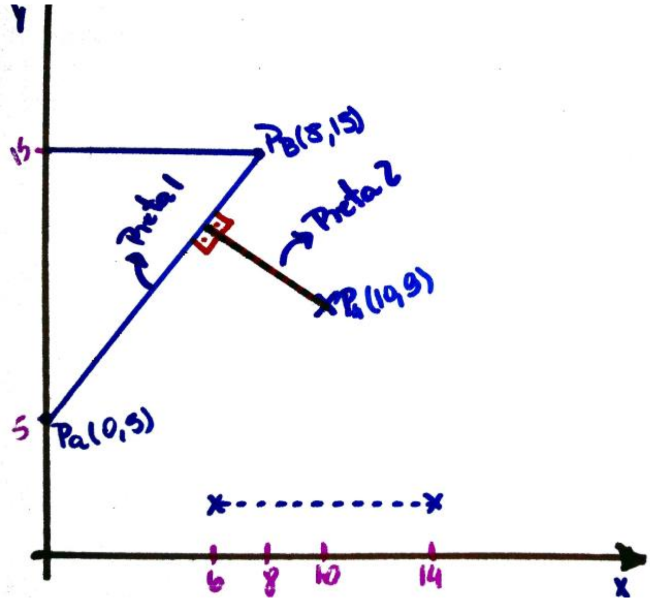
$$y - y_o = m.(x - x_o)$$

Lembrando que m é o coeficiente angular da reta e x_0 e y_0 é um ponto da reta. Como sabemos dois pontos, podemos escolher entre um deles. Vamos ficar com o P(0, 5). Então, substituindo os valores na equação anterior, teremos:

$$P_A(0,\ 5)$$

$$y - y_o = m.(x - x_o)$$
$$y - 5 = 1{,}25.(x - 0)$$
$$y - 5 = 1{,}25x$$
$$y - 1{,}25x - 5 = 0$$

Note que você e seus colegas percorreram um trajeto em linha reta até a borda da piscina. Então, podemos entender esse trajeto como um segmento de reta (Reta 2) que inicia no ponto em que vocês estavam $P_4(10,\ 9)$ e segue perpendicularmente à reta que corresponde a borda da piscina (Reta 1).



Então, uma das formas de saber a distância entre o ponto P4 e a reta é justamente comparando as equações das duas retas. Para isso, como já sabemos a equação de uma delas, é necessário saber a da outra. Lembre que para encontrarmos a equação da primeira reta, nós antes calculamos o coeficiente angular dela a partir de dois pontos. O grande problema é que agora, nesse novo segmento de reta, sabemos apenas um ponto. Felizmente nós temos outra forma de encontrá-lo: quando duas retas são perpencidulares, o coeficiente de uma é o inverso negativo da segunda. Veja:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Então, se chamarmos o coeficiente angular da primeira reta m_1, o da segunda será m_2, e por isso, substituindo o valor de m_1 na equação acima, teremos:

$$m_1 = 1{,}25$$

$$\therefore$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

$$m_2 = -\frac{1}{1{,}25}$$

$$m_2 = -0{,}8$$

Ótimo! Agora podemos saber qual é a equação da segunda reta a partir do ponto P_4 (10, 9):

$$P(10, \ 9)$$

$$y - y_o = m(x - x_o)$$

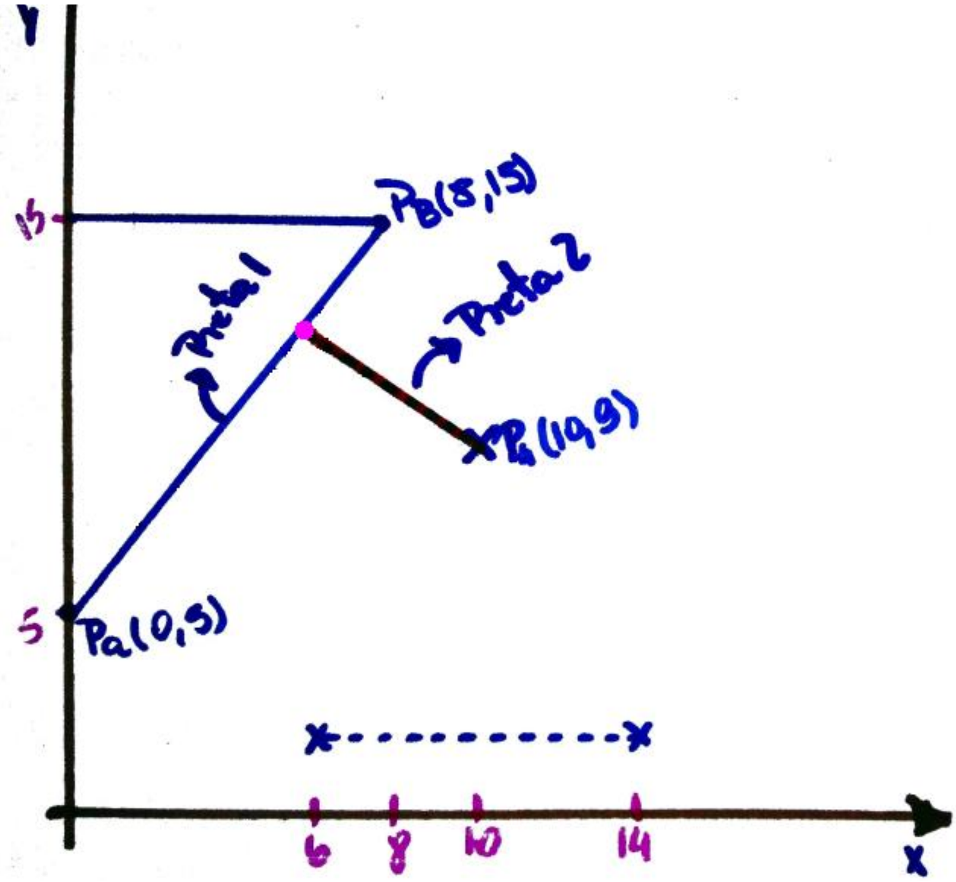
$$y - 9 = -0{,}8(x - 10)$$

$$y - 9 = -0{,}8x + 8$$

$$y - 9 + 0{,}8x - 8 = 0$$

$$y + 0{,}8x - 17 = 0$$

Note que as duas retas se cruzam em um ponto, justamente aquele que é a projeção do ponto P_4 (veja o pontinho rosa na imagem abaixo).



Então, para descobri-lo, basta montar um sistema de duas variáveis e encontrar x e y. Acompanhe:

$$\begin{cases} y - 1{,}25x - 5 = 0 \\ y + 0{,}8x - 17 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y - 1{,}25x - 5 = 0 \\ y + 0{,}8x - 17 = 0 \ (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1{,}25x - 5 = 0 \\ -y - 0{,}8x + 17 = 0 \end{cases}$$

$$-2{,}05x + 12 = 0$$

$$-x = \frac{-12}{2{,}05}$$

$$x = 5{,}85$$

$$y - 1{,}25x - 5 = 0$$
$$y - 1{,}25(5{,}85) - 5$$
$$y = 12{,}31$$

$$\begin{matrix} x = 5{,}85 \simeq 6 \\ y = 12{,}31 \simeq 12 \end{matrix} \dashrightarrow P(6,\ 12)$$

Para facilitar, vamos arredondar para $P_5(6, 12)$.

Mas essa não é a resposta desse enigma! A pergunta era sobre a distância entre o ponto e a reta. Para esse cálculo nós temos uma equação:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Nesse caso, vamos chamar P_4 de P_b e P_5 de P_a (como tudo está ao quadrado, a ordem não importa). Substituindo os pontos na equação acima, teremos o seguinte:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$d = \sqrt{(10 - 6)^2 + (9 - 12)^2}$$
$$d = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$$
$$d = \sqrt{25}$$
$$d = 5$$

Então, a distância entre o ponto P_4 e a reta da borda da piscina é de 5 passos!

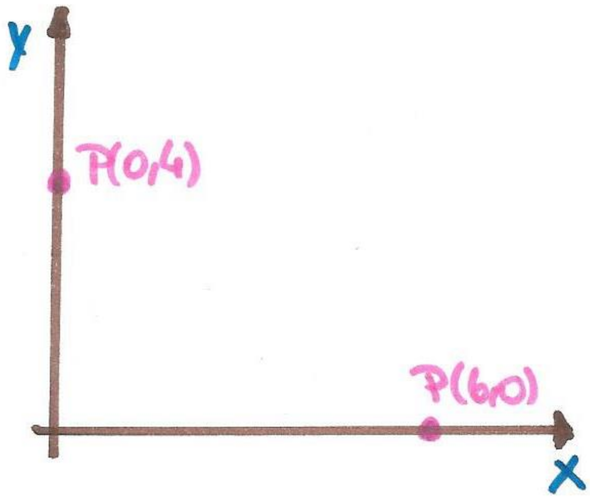
Antes de continuar, apenas por curiosidade, perceba que se tivermos uma equação qualquer que descreve um segmento de reta é possível traçarmos ela sem dificuldades. Para exemplificar isso, vamos analisar a equação $2x + 3y - 12 = 0$. Para traçarmos a reta que corresponde a ela é necessário encontrar apenas dois pontos distintos, para isso, faremos uma vez x =0 e outra vez y = 0. Veja:

$$2x + 3y - 12 = 0$$

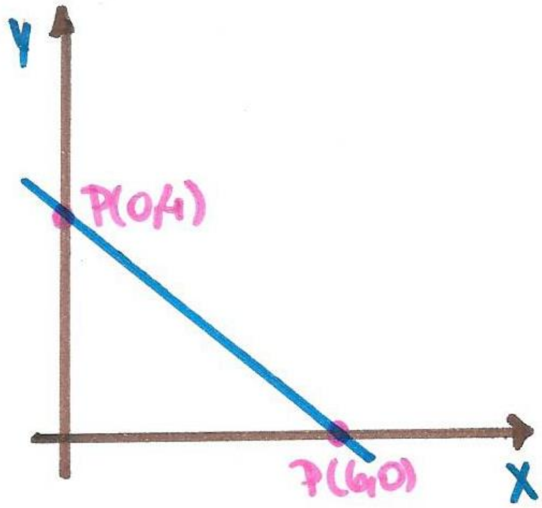
$$x = 0 \dashrightarrow 2(0) + 3y - 12 = 0$$
$$3y - 12 = 0 \qquad P(0, 4)$$
$$y = \frac{12}{3} = 4$$

$$y = 0 \dashrightarrow 2x + 3(0) - 12 = 0$$
$$2x - 12 = 0 \qquad P(6, 0)$$
$$x = \frac{12}{2} = 6$$

Perceba que um dos pontos toca diretamente o eixo x e outro o eixo y. Vamos marcá-los em um plano cartesiano à parte do mapa:



Agora basta ligarmos um ponto ao outro, lembrando que essa reta continua além dos pontos.



Voltando à nossa caça ao tesouro...

PISTA 5 - CONTINUAÇÃO: Parabéns por terem conseguido a resposta certa! Deu um trabalhão, mas valeu a pena! Agora siga pelo caminho indicado pela estradinha de tijolos para encontrar a próxima pista.

Ao seguir a quinta pista, vocês encontraram o seguinte:

PISTA 6: Vocês estão no centro de um quiosque cuja forma é regida pela equação:

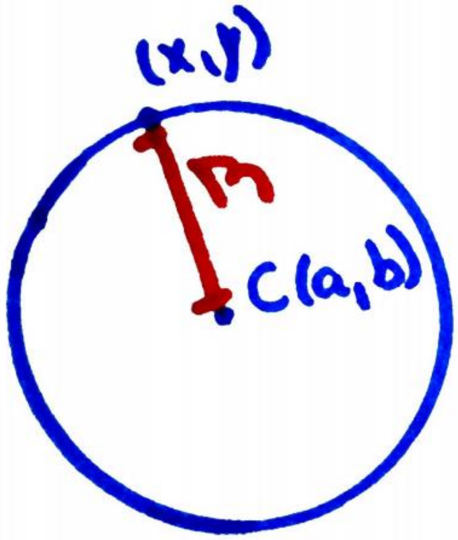
$$x^2 + y^2 - 36x - 34y + 604 = 0$$

Para conseguir a próxima e última pista, diga qual é o ponto central do quiosque e a distância entre este ponto e a borda do quiosque.

A geometria analítica além de se preocupar em compreender o comportamento de pontos e retas, fornece subsídios para o estudo de circunferências, exatamente o formato do quiosque. Uma equação no formato $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 + R^2 = 0$ (equação normal) descreve uma circunferência, cujo R é o valor de seu raio e os coeficientes a e b correspondem aos valores do centro da circunferência. Portanto, reconhecer uma circunferência é muito importante! Outra forma de representar essa equação é a reduzida, em que é possível identificar os coeficientes e consequentemente o ponto central da circunferência mais facilmente. Veja a equação reduzida:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Note que $(x - a)^2 + (y - b)^2$ é a distância entre um ponto (x, y), que está na borda da circunferência, e o centro dela (a, b), e, portanto, essa distância será sempre o raio ao quadrado (R^2) da circunferência. Veja uma representação disso abaixo:



Agora perceba que a equação fornecida pela pista é bastante semelhante à equação normal da circunferência, certo? Vamos colocá-las em coluna para visualizarmos melhor as semelhanças:

$$x^2 + y^2 - 36x - 34y + 604 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

Note que, por comparação, é possível encontrar os coeficientes a e b e, sabendo eles, o raio. Acompanhe:

Comparando os termos que envolvem o coeficiente a e o x, teremos:

$$-36x = -2ax$$
$$-36 = -2a$$
$$a = 18$$

Agora comparando os termos que envolvem o coeficiente b e o y:

$$-34y = -2by$$
$$-34 = -2b$$
$$b = 17$$

Então, já sabemos que o centro da circunferência vale C(16,17). Agora podemos encontrar o raio dela, a partir desses valores. Por isso, vamos comparar os termos que envolvem os coeficientes e o raio sem acompanhamento de x ou y:

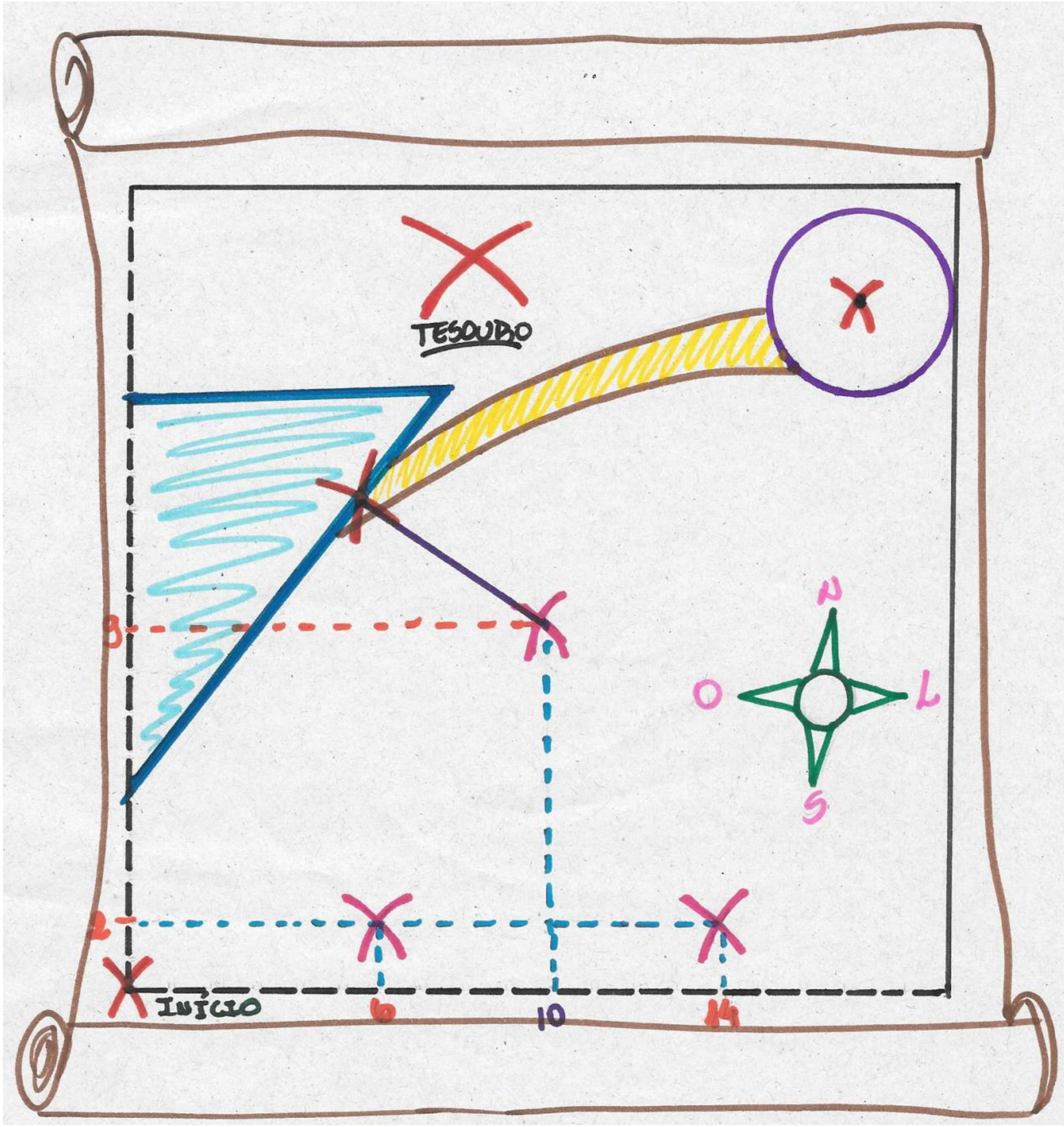
$$a = 18 \qquad b = 17$$

$$a^2 + b^2 - R^2 = 604$$
$$18^2 + 17^2 - R^2 = 604$$
$$324 + 289 - R^2 = 604$$
$$R^2 = 604 - 324 - 289$$
$$R^2 = 9$$
$$R^2 = \sqrt{9}$$
$$R = 3$$

Ótimo! Então o raio da circunferência, ou a distância entre o centro e a borda do quiosque, vale 9!

PISTA 6 - CONTINUAÇÃO: Parabéns! Vocês conseguiram acertar o último enigma! Deem 8 passos a oeste para encontrar o tesouro!

Por fim, o mapa do seu grupo ficou assim:



Ao chegarem no local do tesouro vocês encontraram sua professora que pediu o mapa em que vocês fizeram anotações para analisar posteriormente e juntamente com um chocolatinho cada um, entregou a seguinte mensagem.

TESOURO: Parabéns, querido aluno! Vocês passaram por uma saga matemática fantástica e o conhecimento que desenvolveram até aqui é o seu maior tesouro! Até a próxima aventura!

Confere aí um resuminho que pode te ajudar a resolver os exercícios de Geometria Analítica:

RESUMO
GEOMETRIA ANALÍTICA

Ponto Médio de Segmento de Reta	$x_M = \frac{x_i - x_f}{2}$; $y_M = \frac{y_i - y_f}{2}$
Coeficiente angular da reta	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow m = \tan \alpha$
Equação Geral da reta	$y - y_0 = m(x - x_0)$
Distância entre ponto e reta	$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Equação normal da circunferência	$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 + R^2 = 0$
Equação reduzida da circunferência	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

EXERCÍCIOS

Calcule a distância entre os pontos (7,2) e (-1,8).

a) 8

b) 6

c) 10

d) 12

e) 7

Alternativa correta: C

Dada a reta y = 3x+10, indique quais alternativas são verdadeiras.

I - A reta cruza o eixo y em (10,0)

II - O coeficiente ângular da reta vale 3.

III - A reta cruza o eixo x em (10/3,0)

a) Apenas I

b) Apenas II.

c) II e III.

d) I e II.

e) I, II e III.

Alternativa correta: B

(UFMG) A reta y=3x+a tem apenas um ponto em comum com a parábola y=x2+x+2. Qual o valor de a?

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

Alternativa correta: A

(ITA) Os pontos (0,0); (b,2b) e (5b,0) são vértices de um retângulo. Qual a coordenada do outro vértice?

a) (-b,-b)

b) (2b,b)

c) (4b,-2b)

d) (3b,-2b)

e) (2b,-2b)

Alternativa correta: C

Considere as seguintes retas e as afirmações a seguir.

$$y = 2x - 1$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

I - As retas nunca se cruzam.

II - As retas se encontram em um único ponto de abscissa positiva.

III - As retas são perpendiculares.

Quais estão corretas?

a) Apenas I

b) Apenas II

c) Apenas III

d) II e III

e) I, II e III

Alternativa correta: D

Uma circunferência no plano cartesiano apresenta raio 1 e centro em (2,-1). Qual das alternativas abaixo melhor representa sua equação?

a) $(x+2)^2+(y-1)^2=1$

b) $(x-2)^2-(y+1)^2=1$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

d) $x^2+y^2=1$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

Alternativa correta: C

As retas $x = 3$, $y = 2$ e $y = -(3/4)x + (21/2)$ formam um triângulo no primeiro quadrante cuja área aproximada é

a) 18
b) 26
c) 30
d) 36
e) 42

Alternativa correta: B

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.