ÁLGEBRA II

MÓDULOS CONTEMPLADOS

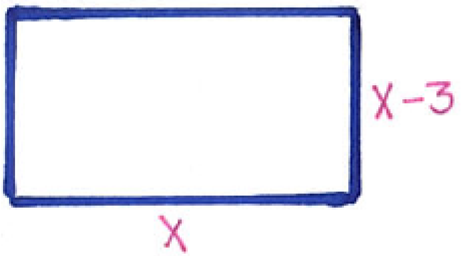
- ✓ EQSG - Equações de segundo grau
- ✓ EQGA - Outras Equações
- ✓ EXQC - Exercícios de equações
- ✓ SDDA - Sistemas 2x2 por substituição e adição
- ✓ EXSD - Exercícios de sistemas 2x2

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	ÁLGEBRA II
PROFESSORES	ARTHUR LOVATO, TAMARA SALVATORI

ÁLGEBRA II

EQUAÇÕES DE 2º GRAU COMPLETAS

Você foi encarregado de construir uma mesa retangular para o seu avô, que, segundo os cálculo dele, deve ter 10 m2. Ele te informou que um lado deve ter 3 metros a menos que o outro. Para saber exatamente o tamanho dos lados dessa mesa – e como você está sacando tudo de álgebra – você resolveu equacionar esse problema chamando um lado de x (já que você não sabe o tamanho), o outro de x - 3 (já que esse deve ser 3 metros menor do que o outro) e igualou o produto dos dois lados a 10, que é a área total dessa mesa. Isso porque você sabe que a multiplicação dos lados de um retângulo fornece a área dele. Veja como ficou:



E então você montou a equação:

$$(x)(x-3) = 10$$

Nos problemas que estudamos em Álgebra I, você simplesmente isolava o x e conseguia chegar ao resultado da equação, certo? Vamos tentar aplicar esse raciocínio nessa equação. Lembre de aplicar a distributiva entre os dois primeiros termos. Acompanhe abaixo:

$$(x)(x-3) = 10$$
$$x^2 - 3x = 10$$

Isolamos o x. E agora, como resolver o restante dessa equação? Veja que o expoente do primeiro x é 2 e que o do segundo x é 1 (que foi omitido). Então o maior grau dessa equação é 2, o que caracteriza uma Equação de 2º Grau. Vamos utilizar uma fórmula para resolver esse tipo de equação, mas antes é importante deixar nossa equação em um formato específico, igualando-a a zero. Para isso, vamos passar o 10 para o outro lado da igualdade. Lembre que, se fizer isso, o sinal deverá ser invertido. Veja:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

E podemos ainda reescrevê-la dessa forma, sem omitir o número que está multiplicando o primeiro termo:

$$1x^2 - 3x - 10 = 0$$

Esses números são chamados de coeficientes e cada um deles recebe um "nome". No caso do multiplicador do x2, o nome é a, no caso do multiplicador do x, é b; no caso do termo que não multiplica x, o termo independente, é c.

$$\underset{a}{\underset{\downarrow}{1}}x^2 \underset{b}{\underset{\downarrow}{-3}}x \underset{c}{\underset{\downarrow}{-10}} = 0$$

Sabendo isso, vamos "guardar" esse conhecimento e ver como resolver essa equação a partir da Fórmula de Bhaskara e a partir da Soma e Produto.

FÓRMULA DE BHASKARA

Como vimos na apostila de História da Matemática, os historiadores não atribuem a Akira Bhaskara a invenção da fórmula que leva seu nome. De qualquer forma, continuamos utilizando essa nomenclatura para nos referimos à fórmula abaixo, que é a equação utilizada para encontrar os valores de x que satisfazem a equação de 2º grau estudada a partir dos coeficientes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

O "mais ou menos" é colocado na frente da raiz porque devemos analisar o resultado dela de duas formas, já que, por exemplo, o resultado da raiz quadrada de 4 é 2, mas se estivermos analisando $x^2 = 4$ então o x pode ser tanto 2 quanto -2, percebe? Isso porque (-2)2 = 4 e (2)2 = 4 também, assim, nessa análise precisamos avaliar se o número que foi elevado ao quadrado foi positivo ou negativo e por isso representamos com um $\pm$ antes da raiz. Nada estranho para você até agora, né? O "triângulo" da raiz quadrada é uma letra grega chamada delta, que define o discriminante e é igual ao que consta abaixo:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

O discriminante é muito importante, já que ele diz quantas e como são as raízes da equação investigada. É interessante analisá-lo antes de sair aplicando a fórmula desesperadamente. Veja:

- ✓ Se $\Delta > 0$: A equação tem duas raízes reais e distintas.
- ✓ Se $\Delta = 0$: A equação tem apenas uma raiz real.
- ✓ Se $\Delta < 0$: A equação não possui raízes reais.

Depois dessa análise, vamos substituir o delta na equação anterior e teremos a fórmula de Bhaskara da forma usualmente apresentada:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Agora podemos substituir os valores dos coeficientes no delta, lembrando que, no nosso exemplo, são a = 1, b = -3 e c = -10. Acompanhe:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-3)^2 - 4.(1).(-10)$$
$$\Delta = 9 + 40$$
$$\Delta = 49$$

Como o resultado do discriminante é maior do que zero, já sabemos que essa equação terá duas raízes reais e distintas. Após essa análise, podemos substituir esse valor na fórmula de Bhaskara e encontrá-las:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(1)}$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{2}$$

Tá mas e a conta terminou aí? Esse é o valor de x? Não! Lembre que temos duas raízes, ou seja, dois valores para x que zeram a equação. Precisamos realizar as operações indicadas pelo sinal “mais ou menos”, mas vamos fazer isso separadamente: quando realizamos a soma no numerador, o resultado é chamado de x’ (lê-se x linha); quando subtraímos, é chamado de x’’ (lê-se x duas linhas). Veja:

$$x' = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Então, 5 e -2 são as raízes da equação x2 - 3x - 10 = 0 e a apresentação da solução é feita como S = {5, -2}. Vamos analisar se essas raízes que encontramos de fato zeram a equação? Basta substituir 5 e -2 no lugar do x, um de cada vez. Veja:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$x = 5$

$$(5^2) - 3(5) - 10 = 0$$
$$25 - 15 - 10 = 0$$
$$25 - 25 = 0$$

$x = -2$

$$(-2^2) - 3(2) - 10 = 0$$
$$4 + 6 - 10 = 0$$
$$10 - 10 = 0$$

Ótimo, 5 e -2 são raízes, mas como isso resolve o nosso problema original? Lembre que um lado da mesa valia x e o outro x - 3, então, como saber qual é o valor correto se temos duas raízes? Lembre que estamos buscando um valor de comprimento e uma medida desse tipo não pode ser negativa (ou você já viu alguém comprando -1,5 metros de barbante?). Portanto, a raíz -2 da equação não fará parte da nossa resposta. Então, apesar de as raízes da equação serem 5 e -2, a raiz que dá a resposta ao nosso problema é 5. Agora que sabemos disso, podemos substituir esse valor no problema em si, que era: um lado vale 3 metros a menos que o outro. Pela nossa figura, o lado maior vai valer 5 e o lado menor valerá 5 - 3 = 2. Lembrando que a área de um retângulo é calculada multiplicando base e altura (ou lados), então teremos que 5*2 = 10 m2. Exatamente o dado fornecido pelo seu avô, certo?

Então, lembre que sempre que queremos encontrar valores que satisfazem uma equação de 2º grau podemos utilizar a fórmula de Bhaskara. Vamos agora aprender outro método de resolução dessas equações.

SOMA E PRODUTO

Essa é uma técnica bem legal, mas tome cuidado ao aplicá-la, porque não é em todas as situações que ela funciona. É importante que a equação tenha todos os termos diferentes de zero (e depois você vai entender o porquê) e é interessante que a seja igual a 1. Isso não significa que você não possa aplicar soma e produto se a for diferente de 1, mas pode ficar um pouco mais chatinho de resolver, pois você terá que trabalhar com números decimais.

O método é o seguinte: existe uma relação entre os coeficientes da equação. A partir dela você encontrará valores que correspondem à soma das raízes e ao produto delas. Veja:

$$x' + x'' = Soma = \frac{-b}{a}$$

$$x' \,.\, x'' = Produto = \frac{c}{a}$$

Então, substituindo os valores do nosso problema, teremos:

$$x' + x'' = Soma = \frac{-(-3)}{1}$$

$$x' + x'' = Soma = 3$$

Ou seja, devemos obter 3 se somarmos as raízes. E o produto delas será:

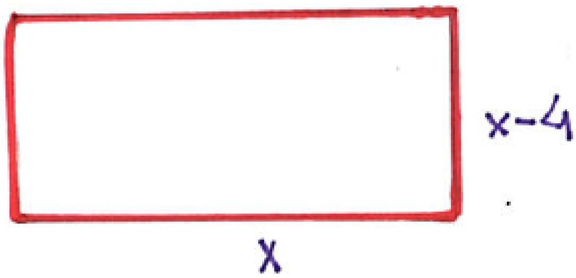
$$x' \,.\, x'' = Produto = \frac{-10}{1}$$

$$x' \,.\, x'' = Produto = -10$$

Agora basta que você faça exercícios mentais para saber quais são as raízes. Se a soma delas deve ser 3 e o produto -10, como calculamos antes, já sabemos que uma raiz é -2 e a outra é 5 – o que fecha exatamente com a Soma e o Produto, certo? Parece complicado no início, mas basta que você treine e logo estará resolvendo equações de 2º grau a partir desse método. Mas tome cuidado! Nem sempre é viável utilizar Soma e Produto (imagine uma raiz do tipo $2 + \sqrt{2}$). Se você estiver demorando mais de 30 segundos para conseguir o resultado passe para a Fórmula de Bhaskara, que também não é um bicho de sete cabeças, né?

EQUAÇÕES DE 2º GRAU INCOMPLETAS

O seu trabalho foi tão maravilhoso ao realizar a tarefa dada pelo seu avô que sua tia pediu que você fizesse uma mesa para as festas da família. Dessa vez os pré-requisitos são outros e um pouco menos específicos: um lado deve ser 4 metros menor do que o outro e a área total é 3 vezes o tamanho do maior lado. Novamente você utilizou seus conhecimentos geométricos e algébricos fazendo o desenho da mesa com as relações fornecidas. Então você fez o desenho e o lado maior, que você ainda não sabe o tamanho, foi chamado de x; o lado menor de x-4 e a área, que equivale à multiplicação desses lados, foi nomeada sendo 3.x. O esboço ficou assim:



E depois montou a equação:

$$(x).(x-4) = 3.x$$

Novamente você resolveu aplicar a técnica de isolar o x e, para isso, começou a manipular a equação. Ficou assim:

$$(x)(x-4) = 3x$$

$$x^2 - 4x = 3x$$

$$x^2 - 4x - 3x = 0$$

$$x^2 - 7x = 0$$

Olha aí uma outra equação de 2º grau! Mas você percebe que ela não é igual à anterior porque não temos o termo independente, certo? Essa é uma equação de 2º grau incompleta, que podemos resolver de duas formas. Uma como você já sabe, utilizando a fórmula de Bhaskara, mas a outra talvez seja mais rápida, que é a decomposição. Vamos ver as duas técnicas:

FÓRMULA DE BHASKARA

O primeiro passo aqui é identificar os coeficientes. Como já foi dito, a equação não possui termo independente, então o coeficiente c vale 0. Os outros estão mais fáceis de identificar, a = 1 e b = -7. Sabendo isso é possível utilizar a fórmula para encontrar as raízes. Acompanhe:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2-4(1)(0)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{7 \pm 7}{2} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{l} x' = \frac{7+7}{2} = \frac{14}{2} = 7 \\ x'' = \frac{7-7}{2} = 0 \end{array} \right.$$

A partir da fórmula de Bhaskara, vimos que as raízes são 7 e 0 ou S = {7, 0}, formalmente. Temos a questão da medida de uma mesa, que não pode ser negativa e nem zero, certo? Antes de analisarmos o problema a fundo, vamos aprender uma outra forma de encontrar as raízes de uma equação incompleta.

DECOMPOSIÇÃO

A equação que rege o nosso problema é:

$$x^2 - 7x = 0$$

E você viu em produtos notáveis como decompor uma equação desse tipo. Então, vamos colocar o x em evidência:

$$x^2 - 7x = 0$$
$$(x).(x-7) = 0$$

Perceba que temos dois termos sendo multiplicados. Podemos tratar esses dois termos como equações à parte e encontrar as raízes separadamente. Isso acontece porque sempre que multiplicamos alguma coisa por zero, teremos zero como resultado. Então, se um desses termos for zero conseguimos resolver o problema com mais tranquilidade. Veja:

$$x = 0$$

$$x - 7 = 0$$

Na primeira equação é bastante evidente qual é a raiz, já que x é igual a zero, certo? Já na segunda é necessário fazer uma rápida manipulação, passando o -7 para o outro lado da igualdade. Acompanhe:

$$x - 7 = 0$$
$$x = 7$$

Então, como a raiz da segunda equação é 7 e a da primeira é 0, encontramos os mesmos valores para quando abordamos o problema a partir da fórmula de Bhaskara.

Agora que vimos as duas formas de resolver esse tipo de equação de 2º grau incompleta, vamos analisar a resposta do nosso problema. Como já foi comentado, a raiz 0 é irrelevante, já que não se pode ter uma medida nula, senão um lado da mesa seria zero e assim não teríamos uma mesa, certo? Portanto, um dos lados da mesa (x) vale 7 e o outro (x - 4) vale 3, já que 7 - 4 = 3, certo? Relembrando que a sua tia disse que a área da mesa valia 3 vezes o maior lado da mesa, então teremos que 3.7 = 21 m2, que é exatamente o valor que vamos encontrar se multiplicarmos o tamanho do lado menor pelo lado maior (3.7 = 21), a área do retângulo.

Outra situação de equação de 2º grau incompleta pode acontecer se tivermos o termo independente, mas não o "companheiro" do x. Veja o exemplo abaixo:

$$x^2 - 4 = 0$$

Perceba que agora temos a = 1, b = 0 e c = -4, assim, essa equação de 2º grau é incompleta (já que "falta" um coeficiente) também. No caso específico dessa equação, é possível resolvê-la sem utilizar a fórmula de Bhaskara, apenas isolando o x e "tirando" a raiz. Consegue perceber isso? Veja:

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$\pm\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Lembre que tanto o 2 quanto o -2 ao quadrado dão 4 como resultado, por isso é importante deixar isso bem claro na resposta, ok?

Também é possível decompor essa equação para encontrar as raízes, exatamente como fizemos anteriormente. Se decompusermos essa equação, chegaremos ao que segue:

$$x^2 - 4 = (x + 2).(x - 2) = 0$$

Encarando essa decomposição como duas equações que multiplicadas resultam em zero, podemos igualar cada uma a zero separadamente para encontrar as raízes delas. Acompanhe:

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

$$x - 2 = 0$$
$$x = 2$$

Que são exatamente as mesmas raízes que encontramos com o outro método!

UFMT 2013 - Dada a equação do segundo grau x2 - 3x - 4 = 0, assinale a alternativa que apresenta, respectivamente, os valores de Δ e da soma das raízes dessa equação.

a) 25 e 3

b) 25 e 5

c) 36 e 2

d) 36 e 6

e) 36 e 4

Alternativa correta: A

Módulo: EQSG – Equações de segundo grau

Lista: EQSGEX – Exercícios de Fixação #2

A multiplicação das soluções da equação $x^2 + 4x = 0$ é:

a) 0

b) 2

c) -2

d) 4

e) -4

Alternativa correta: A

Módulo: EQSG – Equações de segundo grau

Lista: EQSGEX – Exercícios de Fixação #5

(Cesgranrio 95) A maior raiz da equação $-2x^2 + 3x + 5 = 0$ vale:

a) -1

b) 1

c) 2

d) 2,5

e) 19/4

Alternativa correta: D

Módulo: EQSG – Equações de segundo grau

Lista: EQSGEX – Exercícios de Fixação #1

A maior raíz da equação $x^2 - 8x = 0$ é

a) 8

b) -8

c) 0

d) 4

e) -2

Alternativa correta: A

Módulo: EQSG – Equações de segundo grau

Lista: EQSGEX – Exercícios de Fixação #8

EQUAÇÕES RACIONAIS E IRRACIONAIS

Iniciamos o nosso estudo de equações com as de 1º grau e agora vimos como são caracterizadas as equações de 2º grau e vários métodos de resolução. Até agora essas equações apresentaram as formas gerais ax + b = 0 (no caso das de 1º grau) ou ax2 + bx + c = 0 (no caso das de 2º grau). Como já estamos bem familiarizados com essas equações, podemos utilizá-las em situações mais complexas, como veremos a seguir.

EQUAÇÕES RACIONAIS

Equações racionais são frações caracterizadas por conterem uma ou mais variáveis no denominador. Para resolvê-las basta executarmos algumas técnicas que já conhecemos, como isolar o x ou aplicar a fórmula de Bhaskara, por exemplo. Veja a equação racional abaixo:

$$\frac{4 + x}{x - 1} = 2$$

Perceba que, para resolvê-la, ou seja, para encontrarmos o valor de x, podemos passar a equação que está no denominador para o outro lado da igualdade, multiplicando o 2. Acompanhe:

$$4 + x = 2(x - 1)$$

Você está mais familiarizado com esse formato, certo? Como é uma equação de 1º grau, basta realizar a multiplicação do lado direito da igualdade e isolar o x:

$$4 + x = 2x - 2$$
$$4 - 2 = 2x - x$$
$$2 = x$$

Simples, né? Agora vamos ver um exemplo um pouquinho mais complexo:

$$\frac{4}{x-1} + \frac{5}{x+2} = 3$$

Cuidado! Não caia na tentação de somar essas duas frações porque não pode, ok? Lembre que, quando temos soma de frações com denominadores diferentes, precisamos fazer o MMC entre eles. No nosso caso, esse MMC será simplesmente a multiplicação dos dois. Depois disso vamos dividir o resultado no novo MMC pelo denominador da primeira fração e multiplicar pelo numerador, em seguida faremos o mesmo com a segunda fração e, por fim, faremos o mesmo com o 3 (que no fim das contas acaba sendo 3/1, certo?). Fica mais fácil de entender visualizando o procedimento abaixo:

$$\frac{4(x+2)+5(x-1) \;=\; 3(x-1)(x+2)}{(x-1).(x+2)}$$

Como incluímos o termo que está do lado direito da igualdade, podemos cortar o denominador e ficaremos com uma grande equação que precisa ser manipulada:

$$4(x-2)+5(x-1) \;=\; 3(x-1)(x+2)$$
$$4x + 8 + 5x - 5 = 3(x^2 + 2x - x - 2)$$
$$9x + 3 = 3x^2 + 6x - 3x - 6$$
$$3x^2 + 3x - 6 - 9x - 3 = 0$$
$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

Essa equação é bastante familiar, certo? Agora veja que podemos dividir todos os termos por 3, para não precisarmos fazer cálculos com números tão grandes. Obteremos o seguinte:

$$\frac{3x^2 - 6x - 9 = 0}{3}$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Já que temos uma equação de 2º grau, vamos aplicar a fórmula de Bhaskara para encontrar as raízes. Como os coeficientes são a = 1, b = -2 e c = -3, vamos calcular o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$
$$\Delta = (-2)^2 - 4.(1).(-3)$$
$$\Delta = 4 + 12$$
$$\Delta = 16$$

Veja que o resultado do delta é maior do que zero e sabemos que essa equação tem duas raízes reais e distintas. Por isso, vamos aplicar a nossa querida Bhaskara para encontrá-las:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \rightsquigarrow \left[\begin{array}{l} x' = \frac{6}{2} = 3 \\ x'' = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Então, ao manipularmos aquela equação que não parecia ser de 2º grau, encontramos sua característica real e, em seguida, encontramos suas raízes, ou solução, S = {3, -1}.

EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Temos uma equação irracional quando há uma variável no radicando de uma raiz. Apesar de parecer extremamente assustador, não é tão difícil resolver uma equação dessa forma. Veja o exemplo:

$$\sqrt{5 + x} = 3$$

É bastante comum que utilizemos operações inversas para resolver equações, e nessa não é diferente. Lembre que a operação inversa da radiciação é a potenciação e vice-versa, portanto, se elevarmos essa raiz ao quadrado (já que temos uma raiz quadrada), ela será anulada. Isso só é possível se elevarmos o outro lado da equação ao quadrado também, do contrário a equação ficaria inconsistente. Depois basta isolar o x para encontrar seu valor. Veja:

$$(\sqrt{5+x})^2 = 3^2$$
$$5 + x = 9$$
$$x = 9 - 5$$
$$x = 4$$

Bem tranquilo, certo? Claro que você pode encontrar uma equação irracional mais complicada, mas a ideia é a mesma: utilizar operações inversas na resolução.

Quais os valores de x satisfazem a seguinte equação irracional:

$$x = \sqrt{6 - x}$$

a) -3 e 2

b) 2

c) -3

d) 1

e) 2 e 3

Alternativa correta: B

Módulo: EQGA – Outras equações

Lista: EQGAEX – Exercícios de Fixação #2

Quais valores de x satisfazem a seguinte equação:

$$\frac{x^2+1}{4} + \frac{1}{x^2} = \frac{3}{2}$$

a) -2, -1, 1 e 2

b) 1, 2, 3 e 4

c) -4, -2, 2 e 4

d) -2 e 2

e) 1 e -1

Alternativa correta: A

Módulo: EQGA – Outras equações

Lista: EQGAEX – Exercícios de Fixação #3

Identifique quais equações são equações racionais:

$$\text{I)}\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{2x}{5} + 3 = 0$$

$$\text{II)}\ \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2+4} = 0$$

$$\text{III)}\ \sqrt{x} + 2x + 3 = 1$$

$$\text{IV)}\ \frac{1}{x} = 4x + 5$$

a) I e II.

b) I, II e IV

c) II e IV

d) II e III

e) I, II, III e IV

Alternativa correta: C

Módulo: EQGA – Outras equações

Lista: EQGA08EX – Exercícios de Compreensão #1

Identifique quais equações são equações irracionais:

$$\text{I) } x^4 + 2x^2 - 5 = 0$$

$$\text{II) } \sqrt{4}\,x^2 + 1 - 4x = 0$$

$$\text{III) } \sqrt{x^2 + 4x} = 5x$$

$$\text{IV) } \sqrt{x + \sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = 2$$

a) I e II

b) II e III

c) III e IV

d) I e IV

e) II, III e IV

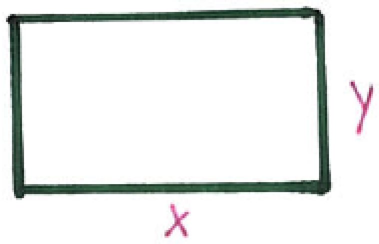
Alternativa correta: C

Módulo: EQGA – Outras equações

Lista: EQGA06EX – Exercícios de Compreensão #1

SISTEMAS 2 X 2 POR SUBSTITUIÇÃO E ADIÇÃO

Seus familiares continuam pedindo para que você construa mesas, mas agora as instruções fornecidas por eles são um pouco diferentes. Sua prima quer que você faça uma mesa e lhe disse que 9 é a soma entre o lado maior e o lado menor que ela deseja que o móvel tenha. Como você não entendeu, ela deu outra informação: a soma de três vezes o lado maior e quatro vezes lado menor é 31. Você conseguiu desvendar os demais enigmas feitos pelos seus parentes, mas esse está mais complicado. Para tentar organizar as ideias, você resolveu desenhar a mesa chamando um lado de x e o outro de y:



Em seguida, você organizou as instruções fornecidas pela sua prima no formato de equações. A primeira diz que 9 é a soma entre o lado menor e o lado maior, que pode ser reescrito como:

$$x + y = 9$$

A outra forma que sua prima encontrou de tentar te ajudar a compreender a medida da mesa foi dizendo que a soma de três vezes o lado maior com quatro vezes o lado menor era 31, que pode ser reescrito como:

$$3x + 4y = 31$$

Apesar de serem equações completamente diferentes, elas descrevem o mesmo problema, a relação entre x e y, ou os lados da mesa. Por isso, podemos vinculá-las para conseguir resolver esse problema. Essa associação que realizaremos com as duas equações é chamada de Sistema de Equações Lineares e pode conter várias equações e variáveis e nem sempre é possível resolvê-lo. No nosso caso será possível já que temos duas equações e duas variáveis (abordaremos mais profundamente esse tema na apostila de Sistemas Lineares), por isso teremos um sisteminha chamado de 2 x 2. Veja como são montados:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Coloca-se uma equação em cima da outra, de preferência com a mesma ordem de variáveis, para facilitar visualmente. Outro detalhe é que as equações ficam compreendidas em uma chave. Agora que já sabemos disso, como é que resolvemos? Vamos abordar diversas formas de resolução de sistemas lineares ao longo do nosso estudo da Matemática, mas, por enquanto, vamos nos ater a apenas duas: resolução de sistemas por adição e por substituição.

RESOLUÇÃO POR ADIÇÃO

Essa forma de resolver o problema é bem interessante, mas às vezes é necessário fazer adaptações para que ela funcione. O preceito aqui é conseguir excluir uma das variáveis para que seja possível encontrar a segunda. Perceba que, na nossa equação, teremos 4x + 5y = 40 se somarmos todos os termos e isso não vai nos ajudar em nada. Mas e se multiplicarmos a primeira equação por -3, você consegue notar que será possível anular o primeiro termo das duas equações? Veja como fica:

$$\begin{cases} x + y = 9 \quad (-3) \\ 3x + 4y = 31 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} -3x - 3y = -27 \\ 3x + 4y = 31 \end{cases}$$

Somando as duas equações, chegaremos a:

$$\begin{array}{r} -3x - 3y = -27 \\ 3x + 4y = 31 \\ \hline 0 + 1y = 4 \end{array}$$

Então, concluímos que y = 4, que definimos anteriormente que é o menor lado da mesa. Para sabermos o valor de x, o lado maior, basta substituir o valor de y em uma das das equações originais.

$$x + y = 9$$
$$x + 4 = 9$$
$$x = 9 - 4$$
$$x = 5$$

Então, o lado maior vale 5 e o lado menor 4.

RESOLUÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Esse método é baseado em substituir o valor de uma variável, dada por uma equação, na outra. Por exemplo, se isolarmos o x da primeira equação, chegaremos a um valor, composto pela variável y que, se substituído na segunda equação, fornecerá o valor de y. Veja o exemplo com o mesmo sistema anterior:

$$x + y = 9 \quad \rightsquigarrow \quad x = 9 - y$$

Substituindo o valor de x na segunda equação e fazendo as manipulações necessárias:

$$3x + 4y = 31$$
$$3(9 - y) + 4y = 31$$
$$27 - 3y + 4y = 31$$
$$27 + y = 31$$
$$y = 31 - 27 = 4$$

Chegaremos ao mesmo valor encontrado anteriormente para y, o lado menor, que vale 4. E o valor de x é facilmente encontrado se, a partir da equação em que o isolamos, substituirmos o valor de y:

$$x = 9 - y$$
$$x = 9 - 4$$
$$x = 5$$

E assim chegamos aos mesmos resultados que obtivemos anteriormente! Portanto, agora, para sistemas 2x2, você já conhece dois método de resolução, o da adição e o da substituição.

Uma fazenda possui x galinhas e y vacas. Um fazendeiro constatou que há um total de 35 cabeças e 100 patas de animais. Qual dos seguintes sistemas de equações que nos permite calcular quantas vacas e quantas galinhas há na fazenda?

a) $x + y = 35$
$4x + 2y = 100$

b) $x + y = 100$
$2x + 4y = 35$

c) $x + y = 100$
$4x + 2y = 35$

d) $x + y = 35$
$2x + 2y = 100$

e) $x + y = 35$
$2x + 4y = 100$

Alternativa correta: E

Módulo: SDDA – Sistemas 2x2 por substituição e adição

Lista: SDDA02EX – Exercícios de Compreensão #2

(UERJ) Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2 pessoas, num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas é:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

e) 8

Alternativa correta: B

Módulo: SDDA – Sistemas 2x2 por substituição e adição

Lista: SDDAEX – Exercícios de Fixação #8

(PUC). Certo dia, numa mesma casa de câmbio, Sassa trocou 40 dólares e 20 euros por R$ 225,00 e Lilli trocou 50 dólares e 40 euros por R$ 336,00. Nesse dia, 1 euro estava cotado em:

a) R$ 3,80

b) R$ 3,75

c) R$ 3,70

d) R$ 3,68

e) R$ 3,65

Alternativa correta: E

Módulo: SDDA – Sistemas 2x2 por substituição e adição

Lista: SDDAEX – Exercícios de Fixação #10

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.