ENEM E VESTIBULARES

$$\Phi = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

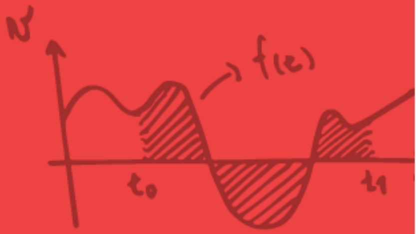
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$z = 3$

$y = 9 - 2z = 3$

$x = -4z - 2y = -12 - 6 = -18$

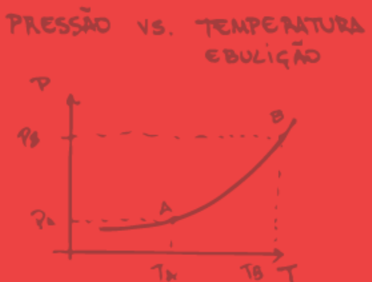
$(-18, 3, 3)$



meSalva!

$f(x) = \text{sen } x$

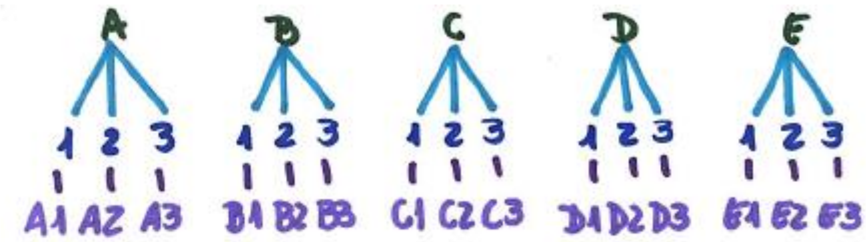
$f(x) = \text{sen}(\omega x + \theta)$



ANÁLISE COMBINATÓRIA

Depois de muita dedicação e estudo, você conseguiu atingir o objetivo de entrar na universidade e agora precisa ir até lá para finalmente fazer sua matrícula. Como ela fica um pouco longe da sua casa, você precisará tomar dois ônibus: um da sua casa até o terminal central da cidade e outro do terminal até a universidade. Felizmente você tem 5 opções de linhas para o primeiro trajeto e 3 opções para o segundo. Quantas opções você terá para chegar até a universidade?

Para podermos solucionar esse problema vamos iniciar o nosso estudo de Análise Combinatória, que busca resolver problemas relacionados a diferentes agrupamentos de elementos. Vamos dividir os trajetos de casa até o terminal em A, B, C, D e E e os trajetos do terminal até a universidade em 1, 2 e 3. Então, se você pegar em casa a linha A, terá as opções 1, 2 e 3 para ir até a universidade. Caso opte pela linha B, também terá as 3 opções para o segundo trajeto. O mesmo acontecerá para as outras linhas, então, podemos montar um diagrama para visualizar melhor suas opções. Veja:



Note que, se contarmos cada uma dessas possibilidades, teremos 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15 ou 5.3 = 15. Assim, quando temos etapas (no nosso caso, os trajetos) sucessivas e independentes, aplicamos o ***Princípio Fundamental da Contagem (PFC)*** para sabermos quais são as possibilidades de agrupamento dos elementos que estamos estudando, isto é, multiplicamos o número de possibilidades da primeira etapa pelo número de possibilidades das outras etapas. Formalmente podemos escrever:

Eventos de duas etapas sucessivas e independentes $= \underbrace{m}_{\text{possib. 1ª etapa}} \cdot \underbrace{n}_{\text{possib. 2ª etapa}} =$ nº de possibilidades

Veja um outro exemplo de aplicação direta do PFC: No seu primeiro dia na universidade você conheceu um lugar que frequentará quase diariamente por muito tempo, o restaurante universitário, carinhosamente chamado de RU. Lá você tem 3 tipos de salada, 4 tipos de pratos quentes e 2 tipos de frutas. Quantas possibilidades de montar seu prato você tem?

Para começar, vamos chamar as opções de salada de S_1, S_2 e S_3, as opções de pratos quentes de P_1, P_2, P_3 e P_4 e as opções de frutas de F_1 e F_2. Agora precisamos montar nosso diagrama para podermos visualizar melhor as possibilidades:

Para saber quantas possibilidades de fazer seu prato você tem, você pode contar a última coluna do diagrama ou aplicar o PFC que propõe, basicamente, que as possibilidades sejam multiplicadas. Assim, aplicando o PFC, teremos 3.4.2 = 24 possibilidades de montar seu prato.

Agora que você está dominando o PFC, está calculando todas as possibilidades de agrupamentos que pode. A sua última ideia foi calcular quantos agrupamentos diferentes é possível fazer com as letras da palavra “curso”, algo que também podemos chamar de anagramas diferentes dessa palavra. Para isso vamos fazer um diagrama um pouco diferente. Veja abaixo:

Cada um desses espaços equivale a uma letra. Perceba que, para o primeiro lugar, temos 5 possibilidades de letras. Considerando que obrigatoriamente esse lugar será ocupado por uma letra, o próximo espaço terá apenas quatro possibilidades de letras, assim como o terceiro espaço, que terá três possibilidades e o quarto lugar, que terá duas possibilidades, e por fim sobrará uma letra que ocupará o quinto e último espaço. Vamos escrever o número de opções para cada um desses espaços do diagrama.

$\underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1}$

Então, pelo PFC, para sabermos quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra curso, basta multiplicarmos cada uma das possibilidades do diagrama que construímos acima. Assim: 5.4.3.2.1 = 120 possibilidades.

Esse processo em que iniciamos a multiplicação de um número pelo seu antecessor até chegar no número 1 é denominado **fatorial** de um número e é indicado pelo símbolo "!". Assim, o fatorial de 5 ou 5 fatorial é indicado por 5!, que é 5.4.3.2.1.

Formalmente podemos escrever que, se temos n elementos distintos (no nosso caso, 5 letras diferentes), o número de agrupamentos ordenados que podemos formar com eles é dado por:

Possibilidades = n.(n-1).(n-2) ... 2.1

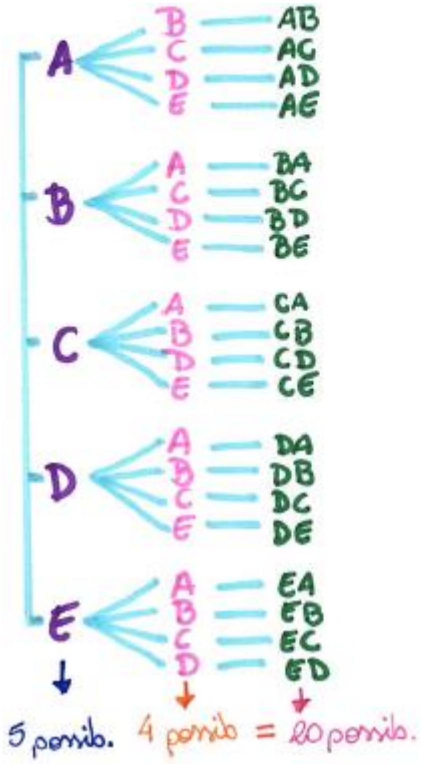
Então, no nosso caso como n = 5, teremos:

Possibilidades = 5.(5 - 1).(5 - 2) ... 2.1

Possibilidades = 5.(4).(3).2.1

Possibilidades = 120

Sua universidade oferece bolsa de estudos de 100% da mensalidade para o primeiro colocado no processo seletivo e 50% para o segundo colocado. Você ficou sabendo que os cinco primeiros colocados foram cinco colegas seus: Angela, Bianca, César, Diana e Eduardo, que também estudaram no Me Salva!, e ficou curioso para saber quantos são os cenários possíveis para os dois primeiros lugares. Para realizar esse cálculo, você montou o diagrama abaixo chamando seus colegas pelas iniciais de seus nomes: A, B, C, D e E.



Pelo PFC, conseguimos facilmente calcular (mesmo sem o diagrama) quantos são os cenários possíveis para a contemplação das bolsas. Aqui é *muito* importante notar que o cenário AB e *diferente* do cenário BA, já que o primeiro indica que A ganhou bolsa integral e B bolsa parcial, e o segundo que B ganhou bolsa integral e A parcial. Assim como BC é diferente de CB, ou CD é diferente de DC, portanto, a ordem nesse caso importa. Então, o cálculo de possibilidades de agrupamentos em que estamos preocupados com a ordem dos elementos é chamado de **arranjo simples**.

Formalmente dizemos que arranjo simples são os agrupamentos *ordenados* de *n* elementos tomados *p* a *p* (considerando *p* sempre menos do que n). Então, no caso que estudamos, o número de elementos n é o número de alunos, 5, tomados *p* a *p*, ou ainda, tomados 2 a 2. Assim, o arranjo é indicado por $A_{n,p}$ ou A_n^p e, no caso do nosso problema, temos $A_{5,2}$ ou A_2^5 .

Note que, para a primeira posição (o primeiro lugar), temos *n* opções (5 opções); para a segunda posição, temos n -1 opções; para a terceira posição teríamos n - 2 opções e, para a p-ésima posição, teríamos n - (p - 1) opções. Veja a tabela abaixo para entender melhor como é formada a equação do **Arranjo Simples**:

1ª posição → n possibilidades
2ª posição → $n-1$ possibilidades
↳ já que uma foi escolhida anteriormente
3ª posição → $n-2$ possibilidades
↳ já que duas foram escolhidas anteriormente
p-ésima posição → $n-(p-1)$ possibilidades
↳ já que p-1 já foram escolhidos anteriormente
ou
$n-p+1$ possibilidades

Como o PFC propõe que essas possibilidades sejam multiplicadas para sabermos o número total de arranjos, teremos:

$$A_{n,1} = n$$
$$A_{n,2} = n(n-1)$$
$$A_{n,3} = n(n-1)(n-2)$$
$$A_{n,p} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}_{p \text{ fatores}}$$

Veja que os fatores estão diminuindo um a um, então podemos reescrevê-los em forma de fatorial. Veja o caso do nosso exemplo: temos 5 elementos tomados 2 a 2, então, pelo PFC, temos que o arranjo é $A_{5,2}$.

Podemos multiplicar $\frac{3!}{3!}$ (que resulta em 1), que fica:

$$A_{5,2} = 5.4.\frac{3!}{3!}$$

Abrindo o fatorial do denominador e transformando em outro fatorial, teremos o seguinte:

$$A_{5,2} = \frac{5.4.3.2.1}{3!}$$

$$A_{5,2} = \frac{5!}{3!}$$

Outra forma de escrever esse resultado é:

$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

Note que podemos generalizar a equação acima na forma:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Então, sabendo o número de elementos n e o agrupamento de p a p, é possível calcular o arranjo sem necessidade de construir um diagrama.

Existe um caso particular do Arranjo Simples denominado Permutação Simples. Ele acontece quando o número de elementos n é igual ao agrupamento p que se quer formar, ou seja, n = p. Por isso, teremos o seguinte:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad n = p$$

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!}$$

$$A_{n,n} = \frac{n!}{0!}$$

$$A_{n,n} = \frac{n!}{1}$$

Parece estranho o fatorial de zero ser 1, certo? Veja o motivo disso analisando n! abaixo:

$$n.(n-1)! = n!$$

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

Se substituirmos n = 1, teremos:

$$(1-1)! = \frac{1!}{1}$$

$$0! = \frac{1!}{1}$$

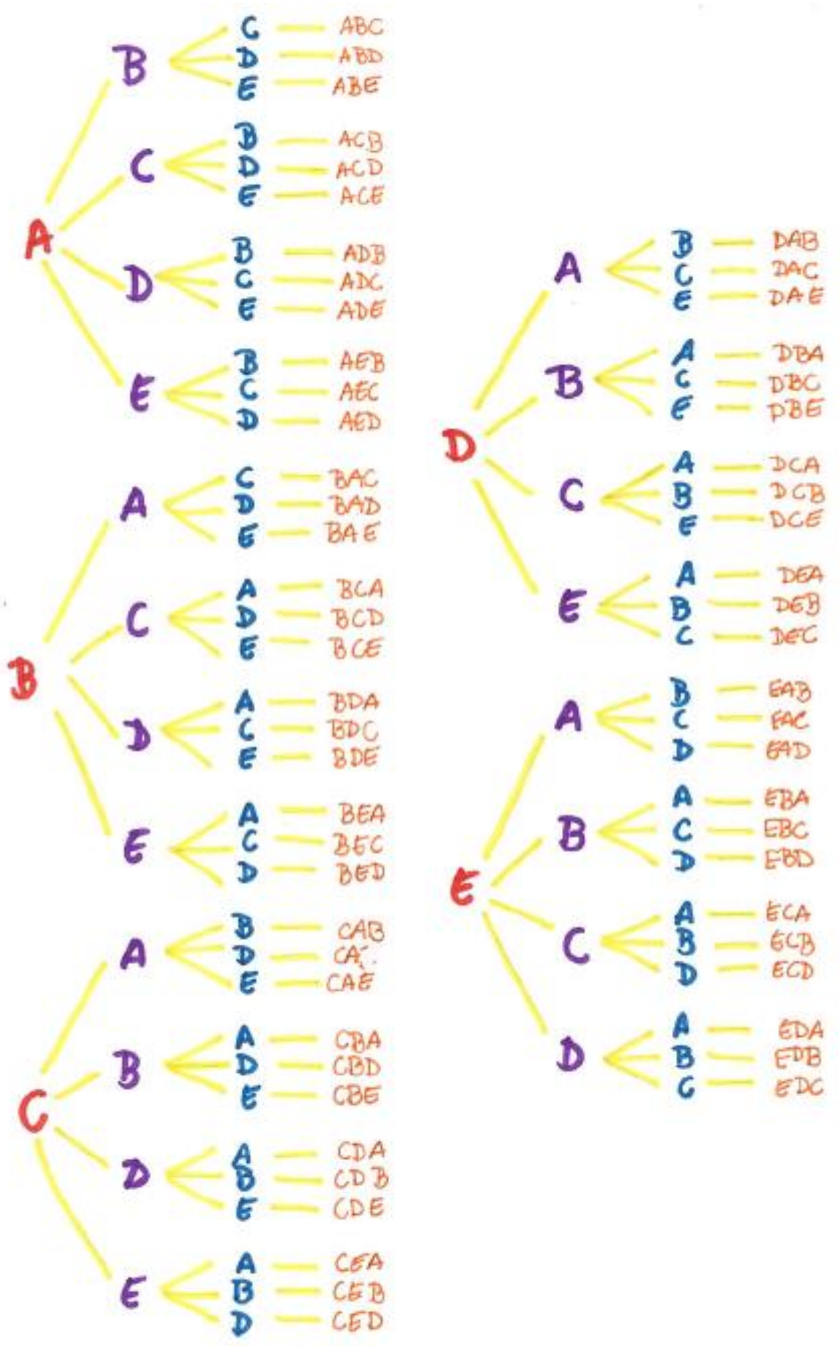
$$0! = 1$$

Aí está a prova de que o fatorial de zero é 1. Legal, né?

Continuando o raciocínio anterior, temos que $A_{n,n}$ é também chamado de P_n. Então, a Permutação Simples é todo o arranjo de n elementos distintos tomados n a n. Portanto, $P_n = n!$.

Agora vamos entender um novo conceito. Os mesmos alunos que ocuparam os primeiros cinco lugares no processo seletivo da universidade foram convidados para uma atividade do Me Salva! em que precisam formar um trio. Quantas são as possibilidades dessa formação?

Nossa análise sempre é iniciada por um diagrama que busca explanar a situação atacada. Veja:



Se utilizássemos apenas o PFC, como fizemos nas vezes anteriores, teríamos que o número de possibilidades é 5.4.3 = 60, mas note que não interessa se o agrupamento é ABC ou CBA, o trio será o mesmo. Um processo de agrupamento desse tipo, em que a ordem não importa, é chamado de **Combinação**. No caso desse exemplo, estamos calculando a combinação de 5 elementos tomados 3 a 3, ou seja, $C_{5,3}$.

Note que, caso a ordem importasse, o 1º caso, ABC, poderia ter as seguintes configurações:

$\{a, b, c\}$
$\{a, c, b\}$
$\{b, c, a\}$
$\{b, a, c\}$
$\{c, a, b\}$
$\{c, b, a\}$

Note que quando **bagunçamos** os elementos dentro do grupo, na verdade estamos fazendo **permutações**. Nesse caso encontramos 6 arranjos diferentes, como você pode ver ali em cima. O mesmo acontecerá para ADB, BDA ou DAB, por exemplo. Então, o número de arranjos de 5 elementos tomados 3 a 3 é 6 vezes o número de combinação de 5 elementos tomados 3 a 3. Muita informação? Então, vamos ver matematicamente.

$$A_{5,3} = 6.C_{5,3}$$

Podemos reescrever o número 6 como $P_3 = 3.2.1 = 6$ ou $P_3 = 3!$ e substituir na equação anterior:

$$A_{5,3} = P_3.C_{5,3}$$

Reorganizando e substituindo, chegaremos a:

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{P_3}$$

$$C_{5,3} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!}$$

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(2)!}$$

$$C_{5,3} = \frac{5.4.3!}{3!(2)}$$

$$C_{5,3} = 10$$

Assim, temos 10 possibilidade de combinação. Generalizando a combinação de *n* elementos *p* a *p*:

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Perceba que o Princípio Fundamental da Contagem foi o que nos permitiu deduzir todas essas particularidades da Análise Combinatória. Para que não haja dúvidas e para facilitar seu estudo, veja o esquema abaixo:

ESQUEMA DE ESTUDOS

Princípio Fundamental da Contagem

$$\text{Possib.} = \underbrace{m}_{\text{possib. 1ª etapa}} \cdot \underbrace{n}_{\text{possib. 2ª etapa}}$$

Arranjo Simples (ordem importa)

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutação Simples (caso particular arranjo)

$$A_{n,n} = P_n = n!$$

Combinação (ordem não importa)

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Você pode corroborar os resultados dos exercícios que vai fazer utilizando o site *Seeing Theory*. Confira o link nas Referências.

EXERCÍCIOS

1. (FGV) Deseja-se criar uma senha para os usuários de um sistema, começando por três letras escolhidas entre as cinco A, B, C, D e E seguidas de quatro algarismos escolhidos entre 0, 2, 4, 6 e 8. Se entre as letras puder haver repetição, mas se os algarismos forem todos distintos, o número total de senhas possíveis é:

a) 78125

b) 7200

c) 15000

d) 6420

e) 50

Alternativa correta: C

2. (Mackenzie) Os números pares com 4 algarismos distintos, que podemos obter com os elementos do conjunto 0; 3; 4; 5; 6; 7; 8, são em número de:

a) 63
b) 420
c) 5.(62)
d) 5.(43)
e) 380

Alternativa correta: B

3. (UEMG) Uma secretária possui 6 camisas, 4 saias e 3 pares de sapatos. O número de maneiras distintas com que a secretária poderá se arrumar usando 1 camisa, 1 saia e 1 par de sapatos corresponde a:

a) 13
b) 126
c) 72
d) 54
e) -

Alternativa correta: C

4. (UFF-RJ) O produto de 20.18.16.14....6.4.2 é equivalente a:

a) 20!/2
b) 2.20!
c) 20!/210
d) 210.10!
e) 20!/10!

Alternativa correta: D

5. (Puc-RS) Se (n-1)!/(n+1)!-n!=1/81, então n é igual a:

a) 13
b) 11
c) 9
d) 8
e) 6

Alternativa correta: C

6. (UFOP) – Minas Gerais No meio da “invasão tecnológica” que toma conta de nossas vidas, dona Antônia esqueceu sua senha bancária justamente na hora de efetuar um saque. Ela lembra que a senha é formada por quatro algarismos distintos, sendo o primeiro 5 e o algarismo 6 aparece em alguma outra posição. Qual é o número máximo de tentativas que o banco deveria permitir para que dona Antônia consiga realizar o saque?

a) 132,00
b) 148,00
c) 154,00
d) 168,00
e) 184,00

Alternativa correta: D

7. (OSEC-SP) Uma faculdade mantém 8 cursos diferentes. No vestibular, os candidatos podem fazer opção por 3 cursos, determinando-os por ordem de preferência. Então, o número de posível de formas de optar é:

a) 6.720

b) 336

c) 520

d) 120

e) 56

Alternativa correta: B

8. (Uel) São dados 12 pontos num plano, 3 a 3 não colineares. O número de retas distintas determinadas por esses pontos é

a) 66

b) 78

c) 83

d) 95

e) 131

Alternativa correta: A

9. (UFSCAR) Calcule o número de anagramas da palavra CLARA em que as letras AR parecem juntas nesta ordem.

a) 6

b) 18

c) 24

d) 36

e) 38

Alternativa correta: C

10. FUVEST – Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas dez músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as prováveis seqüências dessas músicas serão necessários aproximadamente:

a) 10 dias
b) 1 século
c) 10 anos
d) 100 séculos
e) 10 séculos

Alternativa correta: D

11. (Unesp) Quatro amigos, Pedro, Luísa, João e Rita, vão ao cinema, sentando-se em lugares consecutivos na mesma fila. O número de maneiras que os quatro podem ficar dispostos de forma que Pedro e Luísa fiquem sempre juntos e João e Rita fiquem sempre juntos é

a) 2
b) 4
c) 8
d) 16
e) 24

Alternativa correta: C

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

RIBEIRO, Jackson. Matemática: Ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, 2010.

Seeing Theory. Disponível em: <http://students.brown.edu/seeing-theory/> Acesso em 28.02.2017.