ENEM E
VESTIBULARES

$$\Phi = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

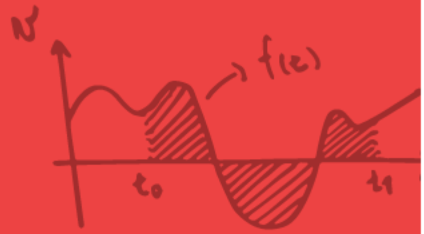
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$z = 3$

$y = 9 - 2z = 3$

$x = -4z - 2y = -12 - 6 = -18$

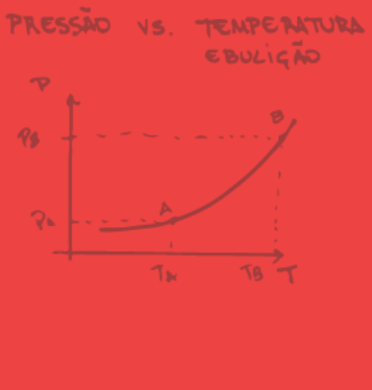
$(-18, 3, 3)$



meSalva!

$f(x) = \text{sen}\, x$

$f(x) = \text{sen}(\omega x + \theta)$



MATEMÁTICA FINANCEIRA

Essa área da Matemática provavelmente é a que mais você utiliza no dia-a-dia. Como o próprio nome sugere, esse nicho utiliza ferramentas matemáticas pra resolver problemas financeiros, desde o quanto o preço do pão aumentou de um ano para o outro até o impacto da venda de ações na bolsa de valores. Apesar de ser um assunto muito amplo, o cerne é o mesmo: o estudo de juros. Nessa apostila estudaremos como é possível calcular os juros que nos são impostos em diversas situações, como o rendimento de uma poupança ou o valor diferente entre uma compra a vista e uma a prazo. Você verá como é importante o estudo da Matemática Financeira na vida de qualquer indivíduo, mesmo aqueles que não estão interessados em prestar vestibular/ENEM.

JUROS SIMPLES E COMPOSTOS

Ao iniciar o Ensino Médio, seu foco, além do vestibular/ENEM, passou a ser a sua formatura. Por isso, desde os primeiros meses você começou a economizar a mesada no que fosse possível e em alguns meses conseguiu juntar R$ 2500,00. Para não correr o risco de gastar esse valor em outra atividade, você decide abrir uma poupança e o banco oferece uma taxa de juros de 2% ao mês, já que você pretende retirar o valor final só depois de 24 meses. Para fins de organização, você quer saber quanto dinheiro terá na conta ao final desse período, mas como saber isso?

O problema envolve transações financeiras e termos que você provavelmente já ouviu falar como poupança e juros, mas também faz menção a outras de forma indireta, o capital, que é o valor que você já guardou, e o montante, que é o valor passado algum tempo. Esse tema é bastante importante porque é facilmente aplicável na vida real. Hoje você está interessado em organizar sua festa de formatura, mas daqui a alguns anos provavelmente vai estar interessado em comprar um carro ou uma casa e vai ter que analisar o quanto vale a pena guardar todo o dinheiro, aplicar ou ainda fazer um financiamento e tudo isso gira em torno de taxa de juros. Vamos abordar o problema de duas formas, na primeira, aplicando juros simples e na segunda, juros compostos.

JUROS SIMPLES

Como você provavelmente está entendendo tudo sobre porcentagem, vai tratar de problemas de juros com mais naturalidade. Quando falamos em taxa de juros, estamos nos referindo a um fator que fará com que um determinado valor sofra um aumento num determinado período. Fazendo conexão com o problema que estamos estudando, teremos que a taxa de juros (representada por i), como já foi dito no próprio enunciado, é de 2% ao mês, e essa taxa será aplicada ao capital (c), que é o valor inicial que você havia juntado, os R$ 2500,00. Lembre que esse valor sofrerá aumento de 2% ao mês durante 24 meses (o tempo, representado por t). O valor do aumento desse capital é chamado de juros (j) e é dado basicamente pela multiplicação do capital, da taxa de juros e do tempo. É importante que você mantenha sempre as unidades de tempo iguais, como taxa de juros ao mês e tempo em meses também (ou taxa de juros ao ano e tempo em anos) para que não haja inconsistências nessas equações. Além disso, você precisa lembrar que valores em porcentagem como 2% é o mesmo que escrever 2/100, que é o que utilizaremos na equação. Veja:

juros = capital . taxa de juros . tempo

Podemos diminuir o tamanho da equação simplificando como:

$$j = c.i.t$$

Aplicando os valores do problema, teremos:

$$j = c.i.t$$
$$j = 2500.(2/100).24$$
$$j = 1200$$

Mas como é possível? Isso significa que o valor que você tinha, o seu capital, de R$ 2500,00 diminuiu para R$ 1200? Não! Esse é o valor que a taxa de juros fez com que o seu dinheiro rendesse, os juros! Então, o valor que você terá após 24 meses é R$ 2500 mais R$ 1200 que resulta em R$ 3700,00, também chamado de montante. Podemos expressar isso na forma:

montante = capital + juros

Ou, ainda:

$$M = c + j$$

Portanto, para a sua formatura, a partir do capital que você deixou na poupança por 24 meses, à taxa de 2% ao mês, você terá R$ 3700,00. Dá pra fazer uma festinha legal, né?

Agora vamos analisar todo esse problema graficamente. Perceba que a equação de juros simples caracteriza uma função linear (f(x) = a.x), já que os juros dependem do tempo. Veja como podemos reescrever a equação de juros simples:

$$j = c.i.t$$
$$j = 2500.0{,}02.t$$
$$j = 50.t$$

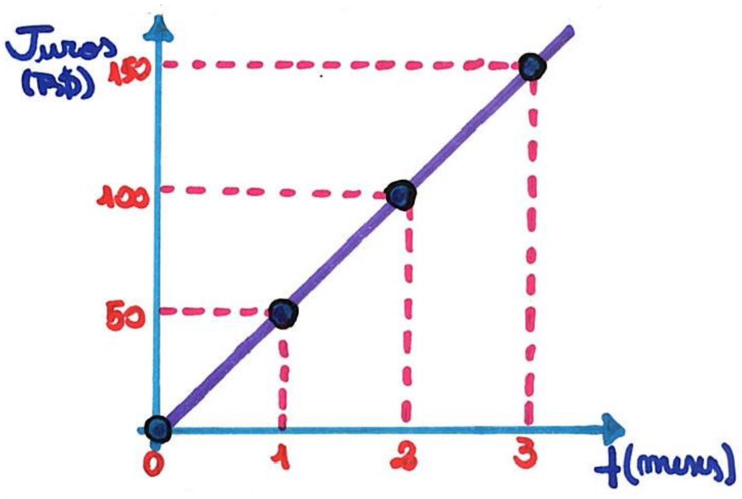
Ainda, é possível reescrever a última parte na forma em que estamos mais familiarizados a tratar funções:

$$j = f(t) = 50.t$$

Para que possamos ver qual é o gráfico dos juros simples em função do tempo, vamos criar uma tabela em que os valores de t são os meses que se passaram e a segunda coluna é o valor dos juros correspondente a esses meses. Para isso, basta substituir o tempo na equação acima. Veja:

t	j = f(t)
0	0
1	50
2	100
3	150

Claro que você pode colocar o valor de tempo que achar conveniente. Se quiser, pode fazer para os 24 meses! Agora podemos traçar um gráfico substituindo esses valores de juros pelo tempo:



Veja que o gráfico reitera que juros em função do tempo é uma relação linear, ou seja, temos realmente uma função linear, certo?

Continuando a análise do problema que estamos abordando, vamos construir outro gráfico, agora do montante em função do tempo. Perceba que podemos reescrever a equação do montante substituindo a equação dos juros que vimos anteriormente.

$$M = c + j$$
$$M = c + c.i.t$$
$$M = 2500 + 2500.(0,02).t$$
$$M = 2500 + 50.t$$

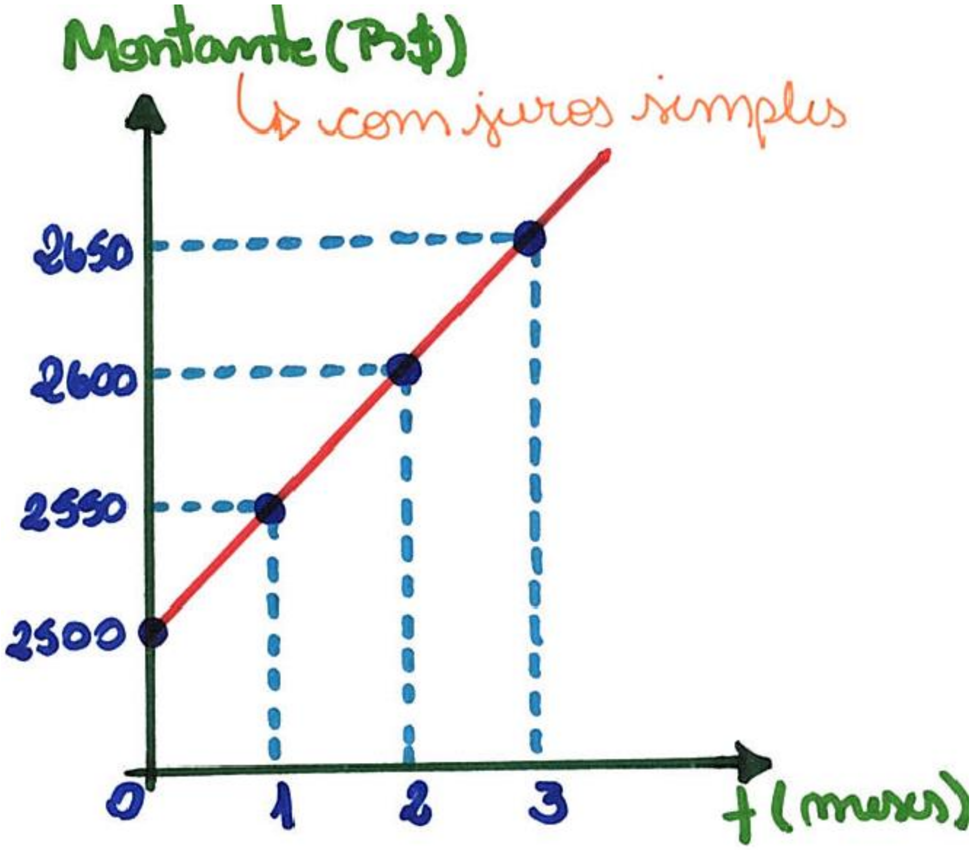
Note que chegamos a uma equação do montante em função do tempo, então também podemos reescrevê-la no formato que estamos acostumados a ver uma função:

$$M = g(t) = 2500 + 50.t$$

Veja que agora temos uma função do tipo f(x) = ax + b (acostume-se a fazer conexões trocando as "letrinhas" e a ordem dos fatores nas equações), que é uma função afim, lembra? Agora vamos montar outra tabela para construirmos o gráfico do montante em função do tempo. Lembre que basta substituir os valores do tempo na equação acima para sabermos o montante. Dê uma olhada:

t	$M = g(t)$
0	2500
1	2550
2	2600
3	2650

A partir dela podemos construir o gráfico do montante em função do tempo. Perceba que, como temos uma função afim, agora o gráfico não começa na origem, já que, mesmo que o tempo seja zero, teremos que o valor do montante é maior do que zero.



JUROS COMPOSTOS

Em geral, os problemas da vida real envolvem juros compostos, mas é importante você ter entendido os juros simples para darmos um passo maior agora. Os juros compostos devem ser entendidos como "juros sobre juros". Isso significa que no lugar de termos apenas um capital, ao final de cada mês (ou ano), teremos um novo capital, que já sofreu um aumento com a taxa de juros e que sofrerá novamente a cada um desses períodos. A forma de calcular pode ser a mesma, apesar de dar um pouco mais de trabalho. Vamos fazer o cálculo do problema anterior aplicando "juros sobre juros". Veja a tabela:

Tempo	Capital	Juros	Montante
1º mês	2500	50	2550
2º mês	2550	51	2601
3º mês	2601	52,02	2653,02
4º mês	2653,02	53,06	2706,08
5º mês	2706,08	54,12	2760,20
⋮	⋮	⋮	⋮
24º mês	3942,24	78,84	4021,09

Perceba que antes precisávamos apenas multiplicar a taxa de juros pelo tempo de aplicação e pelo capital e então tínhamos os juros gerados nesse período todo. No caso dos juros compostos esse processo é feito a cada mês, o que dá um trabalhão e resulta um montante maior do que nos juros simples ao final dos 24 meses! Felizmente esse processo pode ser acelerado a partir de uma equação:

$$M = C(1+i)^t$$

Vamos aplicar os valores fornecidos anteriormente, ou seja, capital de R$ 2500,00, juros compostos de 2% ao mês, por 24 meses, nessa equação:

$$M = 2500(1+0,02)^{24}$$
$$M = 2500(1,6084)$$
$$M = 4021,09$$

Você terá R$ 4021,09 ao final de 24 meses se a taxa de juros aplicada for composta! É o mesmo valor que encontramos realizando o método da tabela aplicando juros simples a cada mês, ou seja, juros sobre juros. Legal, né?

Podemos analisar graficamente qual é a relação entre montante e tempo quando aplicamos os juros compostos. Vamos reescrever a equação do montante em função do tempo utilizando os dados do problema que estamos analisando, perceba que teremos uma equação exponencial:

$$M = 2500.(1+0,02)^t$$
$$M = 2500.(1,02)^t$$

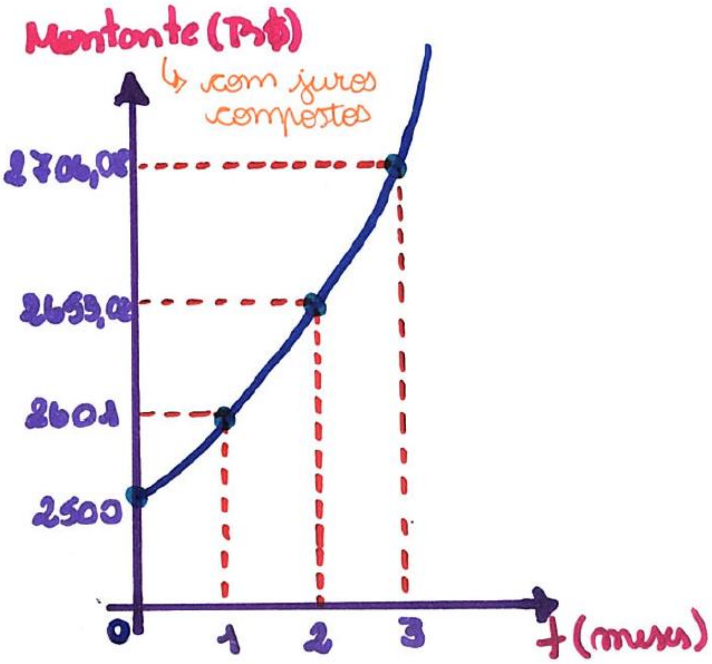
Veja que essa equação caracteriza uma função exponencial do tipo f(x) = a.bx. Podemos reescrevê-la nesse formato:

$$M = h(t) = 2500.(1,02)^t$$

E agora, para traçarmos o gráfico, vamos novamente fazer a tabelinha substituindo os valores do tempo na equação acima:

t	M=h(t)
0	2500
1	2601
2	2653,02
3	2706,08

Substituindo esses valores no gráfico teremos um crescimento exponencial do montante em função do tempo:



Perceba que o crescimento do montante em função do tempo ao aplicarmos juros simples é linear (apesar da função ser afim, ela também pode ser linear, certo?), mas quando aplicamos os juros compostos temos um crescimento exponencial. Portanto, os juros compostos atingem valores maiores do que os simples no mesmo período de tempo. Então, cuidado quando pedir dinheiro emprestado do banco, mas fique contente quando for aplicar em algo com uma boa taxa de juros, já que é essa modalidade que os bancos aplicam na prática.

INFLAÇÃO

Provavelmente você lembra que há 5 anos era possível comprar um refrigerante por um pouco menos de R$ 5,00 e que agora nem em sonho você consegue, né? Isso acontece com vários outros produtos que você consegue lembrar, certo? Esse aumento do preço dos produtos e de serviços acontece devido à inflação que é influenciada por diversos fatores econômicos que não vem ao caso abordarmos e é dada por valores em porcentagem. Por exemplo, no caso do refrigerante, se ele custava R$ 4,50 e sofreu uma inflação de 40%, atualmente ele custa quanto?

Esse cálculo é feito exatamente da mesma forma como os outros problemas que envolvem porcentagem, utilizando regra de três.

4,50 — 100%
x — 140%

Fazendo a multiplicação cruzada, teremos:

$$(x)(100) = (4{,}50)(140)$$
$$100x = 630$$
$$x = \frac{630}{100}$$
$$x = 6{,}3$$

Ou seja, com uma inflação de 40%, o preço do refrigerante 5 anos depois é de R$ 6,30.

Perceba que tivemos um aumento do preço, mas também é comum termos inflação negativa, também chamada de deflação. Isso acontece quando o preço dos produtos diminui. Por exemplo, você deve lembrar de um período em que o tomate ficou bastante famoso por estar custando R$ 9,00/kg. Atualmente, o preço gira em torno de R$ 6,00, ou até menos. Isso significa que, no caso do tomate, houve uma deflação, ou inflação negativa. Vamos calcular de quanto foi essa deflação:

9,00 — 100%
6,00 — x

Fazendo a multiplicação cruzada, chegaremos a:

$$(9{,}00)(x) = (6{,}00)(100)$$
$$9x = 600$$
$$x = \frac{600}{9}$$
$$x = 66{,}67$$

Esse é o valor da inflação negativa? Não! Lembre que nesses casos precisamos fazer o cálculo de 100 - 66,67 para saber o valor que realmente estamos procurando, no caso, 33,33%. Portanto, no caso do tomate, ele sofreu uma inflação negativa de 33,33%.

Perceba que a inflação que acarreta em aumento (ou diminuição) dos preços de produtos e/ou serviços, pode ser afetado por diversos fatores. Então, para que a economia seja mantida sob controle, é importante que a inflação também esteja estável. A falta de estabilidade pode acarretar em medidas econômicas tomadas pelo governo com a finalidade de evitar uma crise econômica.

EXERCÍCIOS

Augusto fez uma prova de matemática e acertou 16 das 20 questões da prova. Qual a taxa percentual de acertos?

a) 20%

b) 40%

c) 60%

d) 80%

e) 90%

Alternativa correta: D

Bruno é desatento e comprou uma televisão que custava R$800,00 em 5 prestações mensais sem prestar atenção na taxa de juros. Ao fazer as contas, percebeu que ao final do período, havia pago um total de 850 reais, qual foi a taxa de juros simples aplicada?

a) 1,25%

b) 1%

c) 1,75%

d) 2%

e) 1,5%

Alternativa correta: A

Ao fazer um investimento de R$30.000,00 por 8 meses com uma taxa de 12% ao ano em regime de juros compostos, qual é o valor resgatado ao final do período?

a) R$32.485,70

b) R$35.000,00

c) R$31.879,98

d) R$33.987,13

e) R$32.677,00

Alternativa correta: A

Nathan, Rafael e Gabriela investiram cada um, respectivamente R$2.000,00, R$3.000,00 e R$5.000,00 em um negócio que após um ano, foi vendido por R$15.000,00 reais. Quanto Rafael recebeu pela sua parte na venda?

a) R$4.500,00

b) R$7.500,00

c) R$3.000,00

d) R$2.500,00

e) R$5.000,00

Alternativa correta: A

Um trabalhador que ganha R$1.500,00 por semana solicitou um aumento de 20% ao seu patrão. Este aceitou o pedido do homem e disse que iria aumentar seu salário em 5% nessa semana e em mais 15% na outra semana. No final, quanto ficou o salário do trabalhador?

a) R$1.750,00

b) R$1.600,00

 |

c) R$1.520,00

d) R$1.781,25

e) R$1.811,25

Alternativa correta: E

Ao fazer uma aplicação de R$500 por 6 meses com uma taxa de 2% ao mês em regime de juros compostos, qual é o valor resgatado ao final do período?

a) R$515,79

b) R$529,56

c) R$542,99

d) R$550,23

e) R$563,08

Alternativa correta: E

Ao comprar um carro de R$20.000,00 um vendedor inexperiente deu ao cliente 15% de desconto, porém, o vendedor constatou que não poderia ter dado um desconto tão grande e teria que voltar ao valor original do veículo. Quanto por cento o vendedor teve de incluir sobre o valor com desconto para o veículo voltar ao valor inicial?

a) 15%

b) 13,2%

c) 17,6%

d) 19,7%

e) 25,3%

Alternativa correta: C

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

PAIVA, Manoel. Matemática. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003.

