ENEM E VESTIBULARES

$$\Phi = \frac{q_{env}}{\varepsilon_0}$$

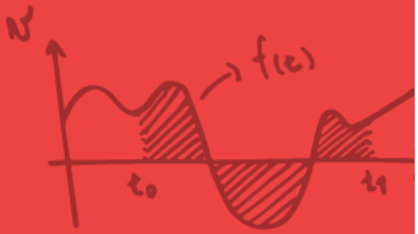
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$z = 3$

$y = 9 - 2z = 3$

$x = -4y - 2y = -12 - 6 = -18$

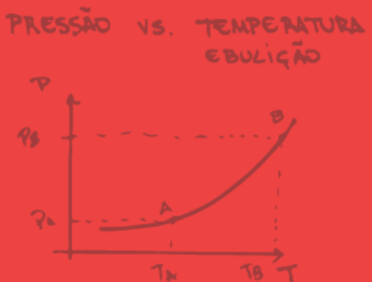
$(-18, 3, 3)$



meSalva!

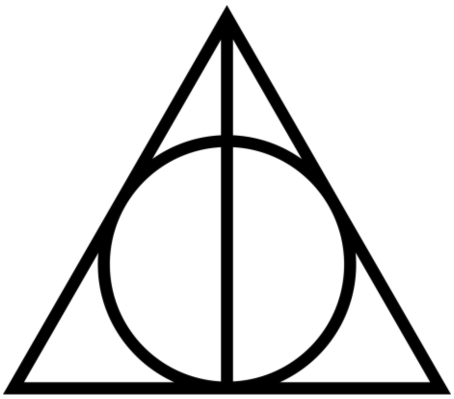
$f(x) = \text{sen}\, x$

$f(x) = \text{sen}(\omega x + \theta)$

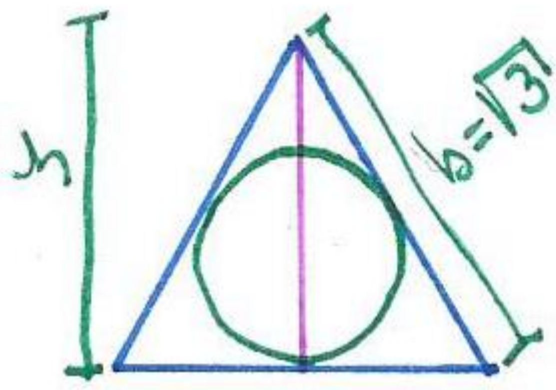


GEOMETRIA PLANA III - FIGURAS COMPOSTAS

Simpatizantes da série Harry Potter provavelmente reconheceram facilmente o símbolo das relíquias da morte ilustrado abaixo. Quem não sabe do que se trata enxergou apenas um círculo dentro de um triângulo cortado por uma reta bem ao centro.



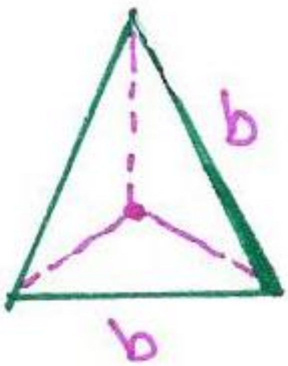
O que talvez seja algo alheio ao conhecimento de ambos os grupos é que existe um ramo da Matemática especializado em resolver problemas envolvendo relações entre formas geométricas, como polígonos regulares e circunferências. Se assumirmos que no símbolo das relíquias da morte temos um círculo inscrito em um triângulo equilátero de lado $\sqrt{3}$, como podemos saber qual é o raio do círculo?



Essa pergunta é facilmente respondida se soubermos relacionar as formas geométricas. Vamos estudar com detalhes essas relações a seguir, iniciando pelos polígonos regulares, que já abordamos na apostila de Geometria Plana I.

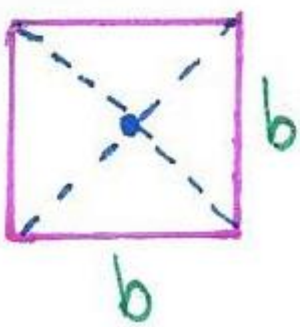
Polígonos regulares: São formas geométricas que possuem lados iguais e ângulos internos e externos iguais. Quando estudamos as áreas das formas geométricas vimos uma dessas formas mais especificamente, o hexágono, e expandimos esse polígono para outros, com vários lados, até chegarmos em um círculo. Vamos estudar quais são os mais usados e como é possível calcular suas áreas. Veja nas figuras abaixo que os nomes dos polígonos indicam o número de lados da forma geométrica.

Triângulo equilátero: Já sabemos que o triângulo equilátero tem todos os lados iguais e todos os ângulos internos e externos iguais e, apesar de não ser comum utilizarmos essa nomenclatura, ele também é um polígono regular. Relembre abaixo a forma e a equação para encontrar a área de triângulos desse tipo:



$$A_{triângulo} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$$

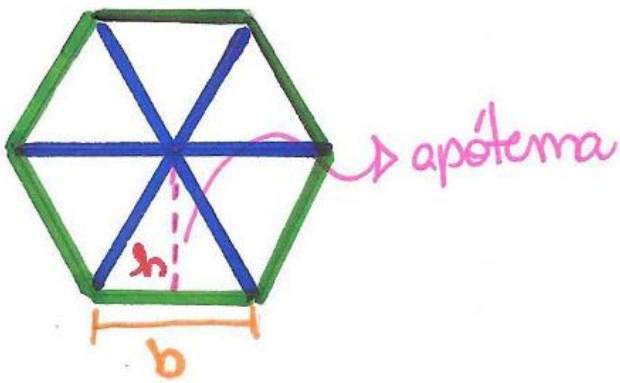
Quadrado: É caracterizado por ter quatro lados idênticos, todos formando ângulos de 90° entre si. A forma já é uma velha conhecida sua e a fórmula da



$$A_{quadrado} = b^2$$

área é bem simples, base x altura. Veja abaixo:

Hexágono: Essa forma geométrica possui 6 lados iguais e ângulos internos e externos idênticos. Perceba que podemos dividir o hexágono em 6 triângulos equiláteros, conforme é feito na figura abaixo. Isso significa que, para calcular a área do hexágono, podemos multiplicar a área do triângulo equilátero por 6, que é o número de triângulos que o compõem, conforme mostra a figura abaixo. Note que a altura do triângulo é chamada de apótema do hexágono e que o lado, que é igual à base (já que temos um triângulo equilátero), é chamado de raio. Perceba que o raio é maior do que o apótema. Veja a equação que fornece a área de um hexágono a partir da área do triângulo equilátero:



$$A_{hexágono} = 6.\left(\frac{b^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

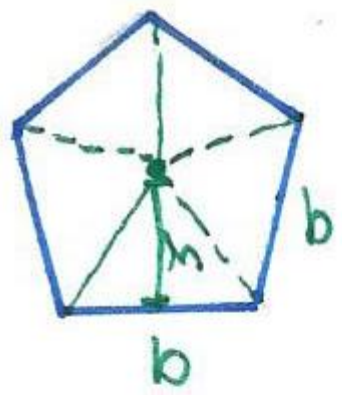
$$A_{hexágono} = 3.\frac{b^2\sqrt{3}}{2}$$

Também vimos em Geometria Plana I que podemos encontrar a área de polígonos regulares a partir do perímetro da forma estudada e o apótema:

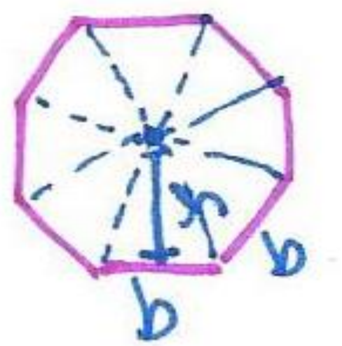
$$A_{\substack{polígono\\regular}} = n.\left(\frac{P.h}{2}\right)$$

Lembre que *h* é o apótema (em alguns livros ele é também chamado de a), P é o perímetro e n é o número de lados do polígono regular.

Pentágono: Essa forma possui 5 lados iguais (e você já sabe que sempre temos ângulos internos e externos iguais em polígonos regulares). Para calcular a área você utilizará a fórmula anterior, substituindo os valores do perímetro, do apótema e o número de lados.



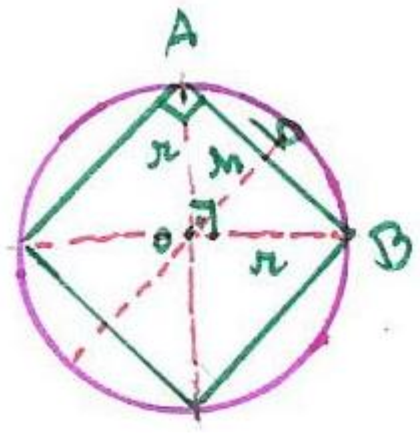
Octógono: Esse provavelmente você conhece dos torneios de artes marciais. O local onde a luta acontece tem o formato de um octógono, ou seja, tem 8 lados iguais. Veja um deles abaixo:



POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Agora que já estudamos os principais polígonos regulares, vamos relacionar suas medidas de apótema, lado e raio. Vamos iniciar analisando polígonos regulares inscritos na circunferência, ou seja, eles estarão dentro da circunferência. Veja as figuras que ilustram essas situações.

QUADRADO INSCRITO NA CIRCUNFERÊNCIA



Do triângulo formado pelos vértices AOB, aplicando Pitágoras, chegaremos a:

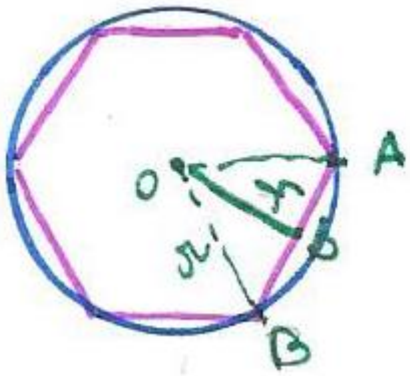
$$b^2 = r^2 + r^2$$
$$b^2 = 2r^2$$
$$b = r\sqrt{2}$$

Outra relação que enxergamos facilmente é que dois apótemas formam um lado (como é um quadrado, lembre-se que todos os lados são iguais). Por isso podemos reescrever da seguinte forma, substituindo o valor do lado por aquele que encontramos há pouco:

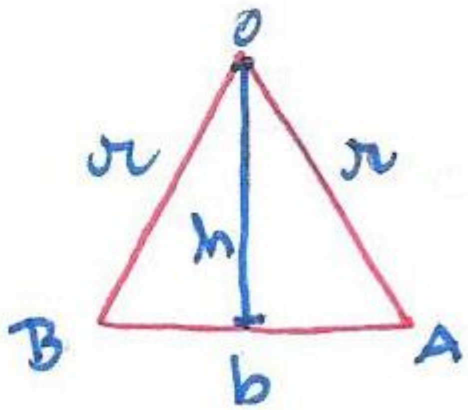
$$b = h + h$$
$$b = 2h$$
$$h = \frac{b}{2} \qquad como \ b = r\sqrt{2}$$
$$h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

E agora sabemos qual é a relação entre o apótema e o raio quando temos um quadrado inscrito.

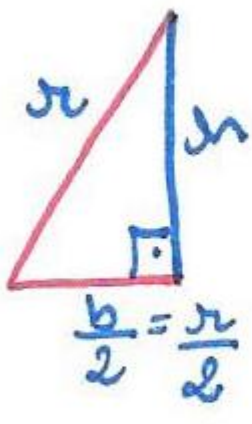
HEXÁGONO INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA



Lembre-se que o hexágono é composto por triângulos equiláteros. Além disso, podemos perceber pela figura que o lado desses triângulos é igual ao raio da circunferência. Veja abaixo um desses triângulos separadamente:



Podemos ainda analisar esse triângulo pela metade, fazendo com que ele se torne um triângulo retângulo. Veja:



A partir disso é possível aplicar Pitágoras novamente e obter:

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

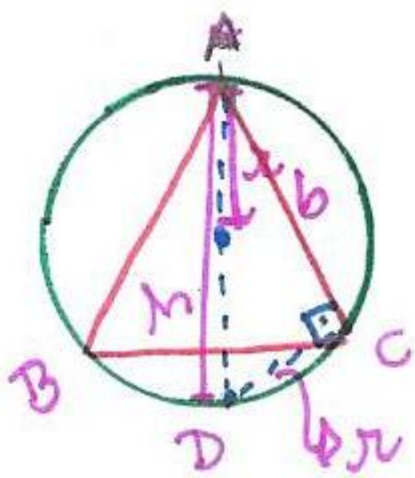
$$r^2 = h^2 + \frac{r^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3r^2}{4}$$

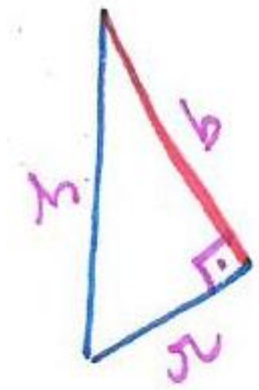
$$h = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

E novamente chegaremos a uma relação entre o apótema e o raio.

TRIÂNGULO INSCRITO EM UMA CIRCUNFERÊNCIA



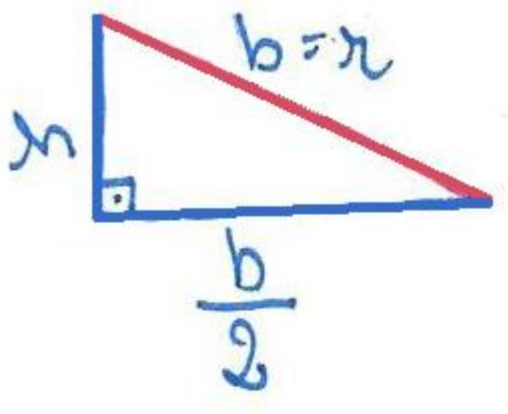
Traçando uma reta entre o ponto C e o ponto D teremos a medida do lado de um hexágono, que já sabemos ser igual ao raio da circunferência. Veja como fica o novo triângulo separadamente, com suas medidas:



Aplicando Pitágoras, chegaremos a uma relação entre o lado do triângulo maior e o raio da circunferência.

$$(2r)^2 = r^2 + b^2$$
$$4r^2 = r^2 + b^2$$
$$4r^2 - r^2 = b^2$$
$$b^2 = 3r^2$$
$$b = r\sqrt{3}$$

Outra relação que podemos fazer é entre o centro da circunferência, o ponto C e metade da base do triângulo maior, que ficará assim:



Aplicando Pitágoras, chegaremos a:

$$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2 \qquad \text{como } b = r\sqrt{3}$$

$$r^2 = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{r^2}{4}$$

$$h = \frac{r}{2}$$

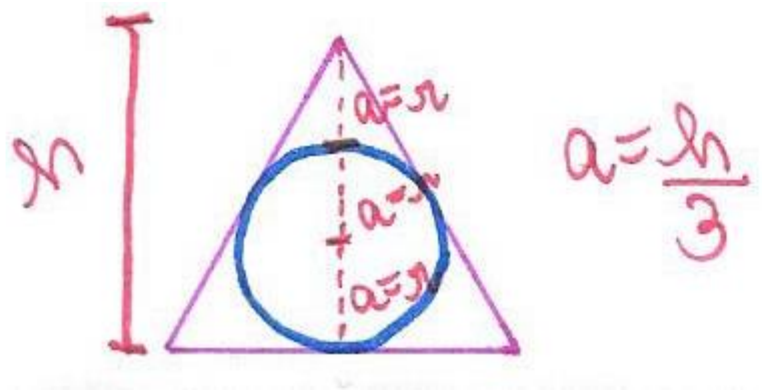
E agora sim teremos que o apótema é a metade do raio.

Perceba que há infinitas relações que você pode fazer utilizando os conceitos geométricos, é só ter um pouco de imaginação para encontrar a forma mais fácil de resolver seu problema!

POLÍGONOS REGULARES CIRCUNSCRITOS À CIRCUNFERÊNCIA

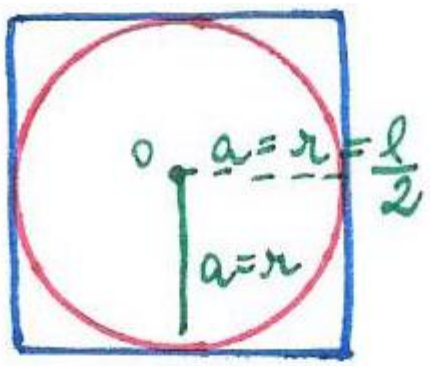
Quando temos essas formas circunscritas à circunferência significa que a circunferência está inserida nelas. A relação entre o raio e o apótema é bem mais simples nesses casos, já que eles coincidem. A partir de agora usaremos uma notação um pouco diferente. Tenha em mente que a altura do triângulo equilátero vale h, então, no caso de polígonos circunscritos à circunferência, chamaremos o apótema de a, já que ele não vai coincidir com a altura, ok? Veja os exemplos:

TRIÂNGULO CIRCUNSCRITO À CIRCUNFERÊNCIA

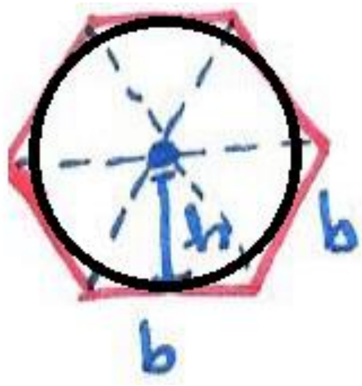


Veja que o raio da circunferência é igual ao apótema. Perceba que, se dividirmos a altura em três partes iguais, teremos 3 raios e, portanto, três apótemas.

QUADRADO CIRCUNSCRITO À CIRCUNFERÊNCIA



Nesse caso, além de o raio da circunferência ser igual ao apótema, veja que eles são iguais à metade do lado do quadrado.

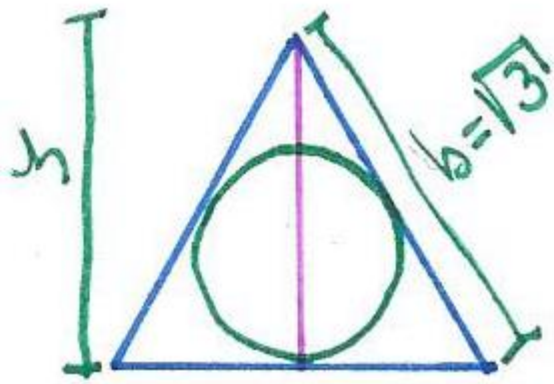


HEXÁGONO CIRCUNSCRITO À CIRCUNFERÊNCIA

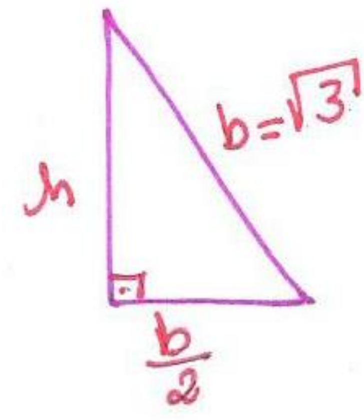
Como já vimos anteriormente, o apótema de um hexágono (h = a), que é igual ao raio da circunferência (r), pode ser calculado a partir da altura dos triângulos equiláteros que formam o hexágono.

$$a = h = \frac{b\sqrt{3}}{2} = r$$

Agora que já estudamos essas situações estamos aptos a resolver o problema proposto anteriormente, sobre o símbolo das relíquias da morte, que é um triângulo circunscrito à circunferência. Relembre a figura:



Como temos um triângulo equilátero, sabemos que todos os seus lados são iguais. Podemos resolver esse problema mais facilmente utilizando Pitágoras, mas para isso é necessário um triângulo retângulo. Assim, vamos dividir a figura bem ao meio. Veja:



$$b^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$b^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$h^2 = b^2 - \frac{b^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3b^2}{4}$$

$$h = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

Agora sim, aplicando $\sqrt{3}$ Pitágoras, teremos:

Como sabemos que o lado vale chegaremos ao valor da altura.

$$b = \sqrt{3}$$

$$h = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$h = \frac{3}{2}$$

Sabendo que o apótema, ou o raio, vale h/3, teremos que o raio do círculo será:

$$a = r = \frac{h}{3}$$

$$r = \frac{3/2}{3}$$

$$r = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{1}$$

$$r = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Então, o raio do círculo é 4,5. Foi possível encontrá-lo a partir do lado do triângulo em que o círculo está inserido. Portanto, lembre-se: a chave para a resolução desses problemas está nas relações que você pode fazer entre as figuras, ok?

EXERCÍCIOS

A Diagonal de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio 18cm é:

a) 18 cm

b) 9 cm

c) 27 cm

d) 36 cm

e) 4,5 cm

Alternativa correta: D

Um polígono regular de 4 lados está circunscrito em uma circunferência de raio 25cm. O valor do lado deste polígono, em cm é:

a) 12,5cm

b) 50cm

c) 25cm

d) 75cm

e) 100cm

Alternativa correta: B

Um hexágono está inscrito numa circunferência de diâmetro 68cm. O valor do lado deste hexágono é:

a) 68cm

b) 136cm

c) 34cm

d) 17cm

e) 86cm

Alternativa correta: C

A altura de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência é 27cm. Sendo assim, o raio desta circunferência é, em cm:

a) 18cm

b) 9cm

c) 13,5cm

d) 27cm

e) 10cm

Alternativa correta: A

Um quadrado de lado 48cm está circunscrito, sendo assim o valor do raio desta circunferência interna ao quadrado é:

a) 10cm

b) 4,8cm

c) 50cm

d) 48cm

e) 24cm

Alternativa correta: E

Num triângulo equilátero circunscrito, o raio da circunferência é 5cm. A altura deste triângulo equilátero é:

a) 5cm

b) 10cm

c) 2,5cm

d) 15cm

e) 12,5 cm

Alternativa correta: D

Duas circunferências estão classificadas como tangentes externas. Sabendo que o raio de uma delas é igual a 13cm e que o raio da outra vale 1cm, a distância entre os centros destas circunferências é, em cm:

a) 13 cm

b) 12 cm

c) 14 cm

d) 1 cm

e) 12 cm

Alternativa correta: C

Duas circunferências concêntricas possuem raios r_1 = 2,7cm e r_2 = 1,3cm. A distância entre os centros destas duas circunferências é:

a) 0cm

b) 1,3cm

c) 2,7cm

d) 4cm

e) 1,4cm

Alternativa correta: A

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2002.

PAIVA, Manoel. Matemática. São Paulo: Moderna, 2003.