SEQUÊNCIAS

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ SEQS - Sequências e séries
- ✓ PATA - Progressão Aritmética - PA
- ✓ PGEO - Progressão Geométrica - PG I
- ✓ PGSA - Progressão Geométrica - PG II
- ✓ EXSQ - Exercícios de Sequências

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	SEQUÊNCIAS - APÊNDICE
PROFESSORES	TAMARA SALVATORI, ARTHUR LOVATO

SEQUÊNCIAS – APÊNDICE

EQUAÇÃO DA SOMA DE UMA PG

A soma de todos os termos de uma PG finita pode ser realizada somando termo a termo, como abaixo:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Mas dependendo do número de termos esse cálculo não é viável. Além de demorar muito tempo, é bastante provável que você vá cometer algum descuido no meio do caminho. Por isso, vamos fazer o passo-a-passo para encontrar essa soma da forma mais simples possível. Lembre que podemos escrever cada termo apenas em função do primeiro termo e da razão:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1.q \\ a_3 &= a_1.q^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1.q^{n-1} \end{aligned}$$

Vamos substituir esses termos na primeira equação:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \dots + a_1.q^{n-1} \quad (1)$$

Lembre que se realizarmos a mesma operação em ambos lados de uma equação ela não perde a igualdade, certo? Vamos fazer isso multiplicando a razão antes e depois do sinal de igual. Teremos o seguinte:

$$q.S_n = q.(a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \dots + a_1.q^{n-1})$$

$$q.S_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \dots + a_1.q^n$$

Como essa equação é equivalente à (1), podemos subtraí-las e cortar os termos iguais. Acompanhe:

$$
\begin{array}{rcl}
S_n & = & a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-1} \\
- \quad q.S_n & = & a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \ldots + a_1.q^n \\
\hline
S_n - q.S_n & = & a_1 - a_1.q^n
\end{array}
$$

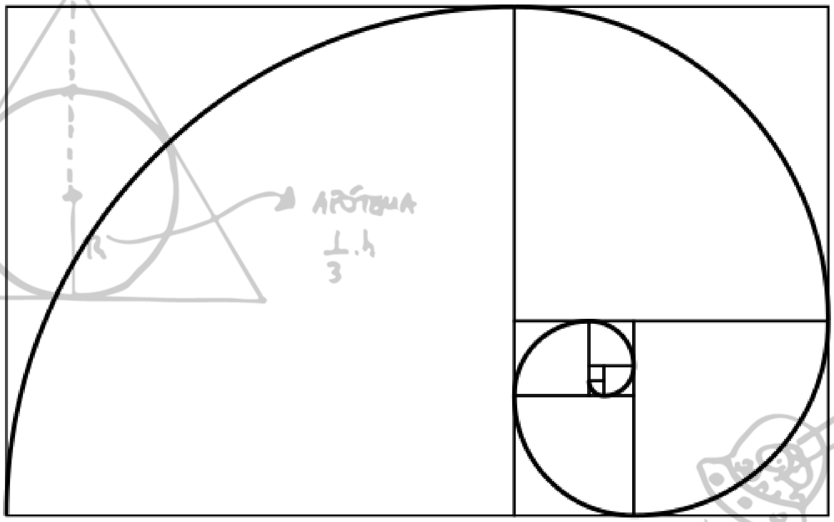
Por fim, podemos colocar Sn e a1 em evidência e reorganizar os termos, então chegaremos a:

$$
\begin{aligned}
S_n - q.S_n &= a_1 - a_1.q^n \\
S_n.(1-q) &= a_1.(1-q^n) \\
S_n &= \frac{a_1.(1-q^n)}{(1-q)}
\end{aligned}
$$

Eis a equação da soma de uma PG finita!

FIBONACCI

Uma sequência bastante famosa é a sequência de Fibonacci (filho de Bonacci), matemático italiano também conhecido como Leonardo de Pisa. Nessa sequência cada termo é formado pela soma dos dois anteriores, iniciando com zero e um: (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...). Dispondo esses números na forma geométrica, encontraremos um espiral que apresenta uma proporção (1,618). Veja abaixo essa representação:



A proporção existente entre os termos da sequência de Fibonacci é denominada “proporção áurea”. Quanto maiores forem os termos da sequência, a divisão entre eles mais se aproximará de 1,618. Essa proporção é facilmente encontrada na natureza, por exemplo, na cauda de um camaleão, que, quando contraída, é uma das mais perfeitas representações da sequência de Fibonacci, assim como a concha de um caramujo. Veja a semelhanças:

O TRIGO E O XADREZ

Reza a lenda que um rei achou tão maravilhoso o jogo de xadrez que ofereceu um presente ao seu criador, algo que ele poderia escolher. O criador pediu ao rei que lhe desse um grão de trigo para o primeiro quadrado do xadrez, dois para o segundo, quatro para o terceiro, 8 para o quarto e assim por diante. Ou seja, a cada casa do xadrez, o valor anterior deveria ser dobrado. O rei achou uma barbada a recompensa escolhida pelo criador, mas o que ele não estava sabendo era o valor total dessa soma.

Você já deve ter percebido que o pedido representa uma PG de razão 2, certo? Ok! O xadrez possui 64 casas (ou quadradinhos). Então, podemos calcular a soma dessa PG para sabermos quantos grãos de trigo o rei deve dar ao seu súdito. Vamos substituir os valores na equação que deduzimos anteriormente:

$$S_n = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_{64} = \frac{1.(1-2^{64})}{1-2}$$

$$S_{64} = \frac{1.(1-2^{64})}{1-2}$$

$$S_{64} = 1{,}844^{19}$$

Os matemáticos do rei chegaram ao mesmo resultado e concluíram, que, além de o rei dar todo o trigo que lhe pertencia ao criador do jogo, seria necessário semear trigo por muitos séculos para conseguir pagar essa dívida. Esperto esse cara, hein?