ARITMÉTICA II

mesalva.com

MÓDULOS CONTEMPLADOS

- ✓ PNTA - Produtos notáveis e fatoração I
- ✓ PNTQ - Produtos notáveis e fatoração II
- ✓ RACZ - Racionalização
- ✓ EXPN - Expressões numéricas
- ✓ EAII - Exercícios de Aritmética II

CURSO	EXTENSIVO 2017
DISCIPLINA	MATEMÁTICA
CAPÍTULO	ARITMÉTICA II
PROFESSORES	ARTHUR LOVATO E TAMARA SALVATORI

ARITMÉTICA II

EXPRESSÕES NUMÉRICAS

Provavelmente você já recebeu desafios matemáticos de seus amigos. Alguns são puramente substituição, outros são do tipo “pega ratão” e alguns são basicamente matemática mesmo, como a resolução de uma expressão numérica. Veja um exemplo.

Qual é o resultado da expressão 4 + 3 x 2 - 1 x 3?

a) 39

b) -39

c) 7

d) -7

e) 0

É bastante comum que, por achar a expressão tão simples, quem está resolvendo erre. Isso porque alguns sinais têm “prioridade” em relação aos outros, mas nem sempre são os que aparecem antes quando lemos a expressão da esquerda para a direita. Então, para resolver expressões numéricas é necessário lembrar que as operações de multiplicação e de divisão devem ser resolvidas antes das de soma e de subtração. Veja a diferença de resultados fazendo na ordem certa e na ordem errada:

CERTO

$4 + 3 \times 2 - 1 \times 3$

$4 + 6 - 3$

$10 - 3$

7

ERRADO

$4 + 3 \times 2 - 1 \times 3$

$7 \times 2 - 1 \times 3$

$14 - 1 \times 3$

13×3

39

A diferença é enorme, certo? Então, sempre lembre de resolver antes multiplicação e divisão (tanto faz a ordem, utilize a que lhe convier) e depois soma e subtração (na ordem que for melhor pra você).

Em problemas mais complexos, quando temos várias expressões se “cruzando” é bastante comum que alguns símbolos sejam utilizados, como parênteses ( ), colchetes [ ] e chaves { }. A ordem é parênteses ficam dentro de colchetes que ficam dentro de chaves, ou seja, { [( )] }, e para resolver expressões que os contém também há uma ordem: sempre o que está “dentro” antes. Isso significa que sempre resolveremos o que está nos parênteses, depois o que está nos colchetes e por fim o que restou nas chaves. Mas fique atento! Você pode encontrar multiplicações e divisões dentro das chaves ou colchetes e não encontrar nos parênteses. O que resolver primeiro? A prioridade é antes símbolos e depois operações. Então, o que discutimos no exemplo anterior deve ser aplicado em cada um dos símbolos. Veja o exemplo:

$$\{4[3 \times 5 - 1 + (10 - 7)]\}$$
$$\{4[3 \times 5 - 1 + (3)]\}$$
$$\{4[3 \times 5 - 1 + 3]\}$$
$$\{4[15 - 1 + 3]\}$$
$$\{4[17]\}$$
$$\{4 \times 17\}$$
$$68$$

Para resolver as expressões numéricas basta ficar atento a essas ordens. Essa dica serve também para equações e qualquer outra forma de cálculo que você utilizar operações. Vamos discutir a seguir outras formas de simplificar expressões numéricas para chegarmos ao resultado o mais exato possível de forma simples.

(CONSULPLAN) Qual das expressões numéricas a seguir apresenta resultado correto?

a) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 84

b) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 264

c) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 34

d) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 64

e) 30 – 10 x 2 + 4 x 6 = 720

Alternativa correta: C
Módulo: EXPN – Expressões numéricas
Lista: EXPNEX – Exercícios de Fixação #1

(OBJETIVA) Dadas as três expressões numéricas abaixo, é CORRETO afirmar que:

(a) 2 + [(5 - 3) + 4] x 2 + 3

(b) 13 - [5 x (2 - 1) + 4 x 2]

(c) 6 + 4 x 2 x (5 - 1) - 7

a) b < a < c

b) a < b < c

c) c < a < b

d) c < b < a

Alternativa correta: A
Módulo: EXPN – Expressões numéricas
Lista: EXPNEX – Exercícios de Fixação #2

RACIONALIZAÇÃO

Cálculos manuais muitas vezes são inviáveis por demorarem muito tempo para serem realizados e por não fornecerem respostas com muita precisão. Às vezes, porém, não há como fugir deles. Você viu que, em várias situações, tivemos exemplos de como facilitar a vida de quem estava calculando, certo? A utilização da racionalização é mais uma forma de auxiliar a pessoa que está resolvendo um problema a ter mais facilidade e precisão em seus cálculos, já que essa operação é utilizada quando há uma raiz no denominador de uma fração.

São três os principais casos:

RAIZ QUADRADA

Devemos multiplicar a fração que apresenta raiz quadrada no denominador por uma fração com a mesma raiz quadrada no numerador e no denominador. Veja o exemplo:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{(\cancel{\sqrt{2}})^{\cancel{2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Perceba que, sempre que uma racionalização é realizada, a raiz desaparece do denominador, certo? A ideia é essa. Caso isso não ocorra, tem alguma coisa errada nas suas continhas.

RAIZ NÃO QUADRADA

Nesse caso, a fração que é multiplicada não é igual à raiz do primeiro denominador apenas por um detalhe, o expoente. Preste atenção nesse procedimento:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^{1}}}$$

$$3 - 1 = 2$$

Essa é a relação que sempre será utilizada nesses casos. Vamos aplicar esse expoente nas raízes da fração a ser multiplicada:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2^1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^1} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^1 \cdot 2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$1 + 2 = 3$$

Repare que é possível agrupar as raízes a partir da multiplicação daquelas com o mesmo índice. Nesse caso, dentro da raiz, temos bases iguais, então podemos somar seus expoentes. O restante é simplificação e, por fim, o resultado. Meio chatinho no começo, mas nada que seja impossível de fazer, né? Lembre-se de treinar isso aí!

SOMA OU SUBTRAÇÃO COM RAIZ

Bastante semelhante ao primeiro caso, mas dessa vez a multiplicação é pelo conjugado. O que é isso? Veja:

$$\frac{4}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{4(2-\sqrt{2})}{(2)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{8-4\sqrt{2}}{4-2} = \frac{8-4\sqrt{2}}{2}$$

sinais inversos

Note que a fração pela qual multiplicamos a original resulta em 1, e por isso não altera o resultado. Em seguida, basta continuar a resolução, mas atenção: não é possível realizar a subtração do numerador da última fração, certo? O resultado é dado dessa forma, a menos que você realize o cálculo da raiz de 2, multiplique por 4 e, aí sim, realize a subtração.

(FUVEST) O valor da expressão abaixo

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

é:

a) 2

b) 5

c) 1

d) 3

e) 4

Alternativa correta: E

Módulo: RACZ – Racionalização

Lista: RACZEX – Exercícios de Fixação #7

Racionalizando o denominador da fração

$$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

obtemos:

a) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{2} - \sqrt{2}$

e) $2 - \sqrt{2}$

Alternativa correta: B

Módulo: RACZ – Racionalização

Lista: RACZEX – Exercícios de Fixação #3

PRODUTOS NOTÁVEIS

Ao longo do nosso estudo vamos nos deparar com equações de 2° grau (ou 3°, 4° e assim por diante), e é bastante comum que encontremos expressões com a mesma "cara", termos fatorados colocando em evidência o que se repete. Por isso é importante sabermos realizar alguns procedimentos que facilitam a resolução de termos que envolvem soma ou subtração e expoentes maiores do que 1. A chave para resolver esses probleminhas é a aplicação de uma propriedade que se chama distributividade. Lembra desse nome? Vamos ver como aplicá-la! Para isso, considere a e b diferentes de zero.

FATORAÇÃO POR TERMO EM EVIDÊNCIA OU FATOR COMUM

Quando há termos que se repetem em algumas ou todas as parcelas de uma expressão é possível realizar a fatoração deles. Ou seja, transformar esses termos em termos menores que se multiplicam. Veja o exemplo:

$$2a^2 + 2ab$$

Veja que tanto o 2 quanto o a aparecem nos dois termos (fator comum). Então podemos reescrever a expressão colocando esses termos que mais aparecem em evidência, multiplicando o que resta para obter a expressão original:

$$2a^2 + 2ab = 2a(a + b)$$

Lembre que mesmo que façamos a fatoração o resultado da expressão será o mesmo. A única diferença é que às vezes é mais fácil entender ou resolver as expressões na forma fatorada.

Agora que já sabemos como realizar esse procedimento, podemos iniciar a discussão de produtos notáveis. Perceba que em todos os casos temos termos em evidência e vamos "abri-los" em polinômios que se multiplicam, ou seja, polinômios fatorados.

QUADRADO DA SOMA

Quando temos dois números, ou um número e uma variável, ou ainda duas variáveis somadas e elevadas ao quadrado. Veja abaixo:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Vamos nos ater aos termos fatorados e aplicar a distributiva, ou seja, multiplicaremos o primeiro termo do primeiro parênteses pelos dois termos do segundo; em seguida, faremos o mesmo procedimento com o segundo termo. Observe as setinhas, será mais fácil de entender:

$$(a+b).(a+b)$$

Esse método é carinhosamente chamado de “chuveirinho”. Agora veja o resultado dessa multiplicação. As cores dos termos correspondem às setas acima.

$$a.a + a.b + b.a + b.b$$

Perceba que a.b é o mesmo que b.a, então podemos reescrever dessa forma:

$$(a+b)^2 = a.a + 2.a.b + b.b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

É bastante comum que se ensine um macete para lembrar como chegar a esse resultado: o quadrado do primeiro, mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo. Não é difícil lembrar, mas, caso você tenha um “branco”, é bastante simples fazer a distributiva e chegar a esse resultado.

QUADRADO DA DIFERENÇA

O procedimento neste caso é exatamente o mesmo do anterior. Veja o resultado:

$$(a-b)^2 = a.a - a.b - b.a + b.b$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Perceba que o resultado é bastante semelhante ao anterior, com exceção do sinal de menos. Então, a frase do macete só mudaria nesse detalhe: o quadrado do primeiro, menos duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA

Apesar de também aplicarmos a distributiva, neste caso a "cara" da expressão muda um pouco. Antes tínhamos dois termos iguais sendo multiplicados (por isso eram elevados ao quadrado). Agora temos dois termos iguais, exceto pelo sinal, sendo multiplicados. Acompanhe:

$$(a + b)(a - b) = a.a - a.b + b.a - b.b$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 + 0 + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$$

O resultado dessa operação tem apenas dois termos! Isso acontece porque os outros dois termos se anularam.

CUBO DA SOMA

Apesar de parecer apavorante, é bastante simples, ainda mais agora que você já sabe o resultado do quadrado da soma. Veja como o cubo pode ser reescrito:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$$

Isso é possível porque, como você viu na apostila de Aritmética I, quando temos bases iguais sendo multiplicadas, os expoentes devem ser somados. Como você já sabe o resultado do termo ao quadrado, podemos reescrever da seguinte forma:

$$(a + b)^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$$

E agora é hora de aplicar a distributiva! Vai ficar um pouco maior, mas é só você se organizar para não se perder! Vamos utilizar as setas?

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

Isso resultará em:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+2ab+b^2)$$
$$(a+b)^3 = a.a^2 + a.2ab + a.b^2 + b.a^2 + b.2ab + b.b^2$$

Reagrupando os termos, chegaremos a:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

A chave para resolver esse tipo de operação é a organização. Então, fique atento e não economize na hora de escrever os termos, ok?

CUBO DA DIFERENÇA

O procedimento é o mesmo do anterior. Vamos primeiramente dividir os termos, substituir o termo ao quadrado pelo resultado que já sabemos e resolver o restante. Acompanhe:

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$$
$$(a-b)^3 = (a-b)(a^2-2ab+b^2)$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 2a^2b + ab^2 - ab^2 + 2ab^2 - b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Resultado bastante parecido com o anterior, exceto pelos sinais, percebe? Então, novamente, muita atenção com os sinais! Perceba ainda que os produtos notáveis são muito úteis tanto para expandir um termo, como fizemos, quanto para comprimi-los, já que você pode realizar o caminho inverso do que acabamos de fazer. Agora que você aprendeu todas essas “técnicas”, está preparado para o nível hard de resolução de problemas!

(PUC-RJ) Sabemos que $(\sqrt{1+c})(\sqrt{1-c})=1$. Assinale o valor de c.

a) 2

b) 1/2

c) 1

d) 0

e) 1/3

Alternativa correta: D
Módulo: PNTQ - Produtos notáveis e fatoração II
Lista: PNTQEX – Exercícios de Fixação #6

A forma simplificada da expressão $(x-y)^2 - (x+y)(x-y)$ é:

a) $-2xy$

b) $2xy$

c) $2x^2-2xy$

d) $2y^2-2xy$

e) $2y(y-x)$

Alternativa correta: D
Módulo: PNTQ - Produtos notáveis e fatoração II
Lista: PNTQEX – Exercícios de Fixação #8

A expressão $2xy - 4x + y - 2$ fatorada é:

a) $(2x + 1)(y + 2)$

b) $(2x + 1)(y - 2)$

c) $(2x + 1)(y + 2)$

d) $(2x - 1)(y - 2)$

e) $(2x + 1)(y - 1)$

Alternativa correta: B
Módulo: PNTA - Produtos notáveis e fatoração I
Lista: PNTAEX – Exercícios de Fixação #8

REFERÊNCIAS

BARRETO FILHO, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. Matemática: Aula por aula. São Paulo: FTD, 2000. 670 p.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contexto & Aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. Matemática: Ideias e desafios. São Paulo: Saraiva, 1996.

PAIVA, Manoel. Matemática. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003.