Cálculo I

Tiago Lima

28 de outubro de 2022

Sumário

1 Revisão de Funções Reais **2**
1.1 Funções de uma Variável Real 2
1.2 Função Composta e Função Inversa 2
1.2.1 Função Composta 2
1.2.2 Função Insaversa 3
1.3 Transforação de Funções 3
1.4 Função Polinomial 3
1.5 Funções Exponencias 4
1.5.1 Propriedades 5
1.6 Funções Logarítmica 5
1.6.1 Propriedades 6

Capítulo 1

Revisão de Funções Reais

1.1 Funções de uma Variável Real

Entende-se por uma função f a terna

$$(A, B, a \mapsto b) \tag{1.1}$$

em que A e B são dois conjuntos e $a \mapsto b$ uma regra que permite associar a *cada elemento* a de A a *um único elemento* b de B. O conjunto A é denomidado *domínio de* f e é indicado por D_f, assim $A = D_f$. O conjunto B é denomidado *contradomínio de* f e é indicado por CD_f, assim $B = CD_f$. O único elemento b de B associado ao elemento a de A é indicado por $f(a)$.

Uma função de domínio A e contradomínio B é usualmente indicada por $f : A \to B$. Se A (domnínio) e B (contradomínio) são subconjuntos de $\mathbb{R}$, então f é uma *função de uma variável real a valores reais* tal que $f : A \to B$.

Seja $f : A \to B$ uma função, seu gráfico será dado pelo conjunto de pares ordenados

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}; \tag{1.2}$$

assim o gráfico de f é um subconjunto do conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$ de números reais. Além disso, o gráfico de f pode então se pensado como o lugar geométrico descrito pelo ponto $(x, f(x))$ quando x percorre o domínio de f.

É usual representar uma função f de uma variável real a valores reais e com domínio A, simplesmente por

$$y = f(x), x \in A.$$

Neste caso, x é a *variável independente* e y a *variável dependente*, ou simplesmente dizer que y é função de x.

1.2 Função Composta e Função Inversa

1.2.1 Função Composta

Uma função é dita **composta** ou **função de função** quando é obtida substituindo-se a variável independente por uma função

$$f \circ g(x) = f(g(x)).$$

Obs.:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

1.2.2 Função Insaversa

Dada uma função $f : A \to B$, se f é **bijetora**, então define-se a função inversa f^{-1} como sendo a função de $B \to A$, tal que $f^{-1}(y) = x$. Os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz do primeiro quadrante.

1.3 Transforação de Funções

Dada uma função conhecide $f(x)$, define-se a função

$$g(x) = B + Af(ax + b).$$

1.4 Função Polinomial

A função é dita **polinomial** se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1 + a_0, \tag{1.3}$$

em que $a_0 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$, onde denomina-se função polinomial de grau n ($n \in \mathbb{N}$).

A função polinomial pode ser decomposta em fatores e esses fatores estarão associados com a raíz desse polinômio, podendo ser reescrita como

$$p(k) = k(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n),$$

onde r_n são as n raízes do polinômio.

Alguns casos particulares:

Função Constante: $f(x) = a_0$

Função Linear ou afim: $f(x) = a_1 x + a_0$

Função Quadrática: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Função Cúbica: $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Função Constante

Uma função $y = f(x)$, $x \in A$, dada por $f(x) = k$, k constante, denomina-se *função constante.*

Função Linear

A função linear é dada por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada por

$$f(x) = a_1 x + a_0 \tag{1.4}$$

e tem o gráfico representado na figura abaixo, onde a_0 é o **coeficiente linear** da função, a_1 é o **coeficiente angular** definida por

$$\tan\theta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = a_1.$$

Aula 3: Funções Reais Elementares – Parte 2

15 SET 2022

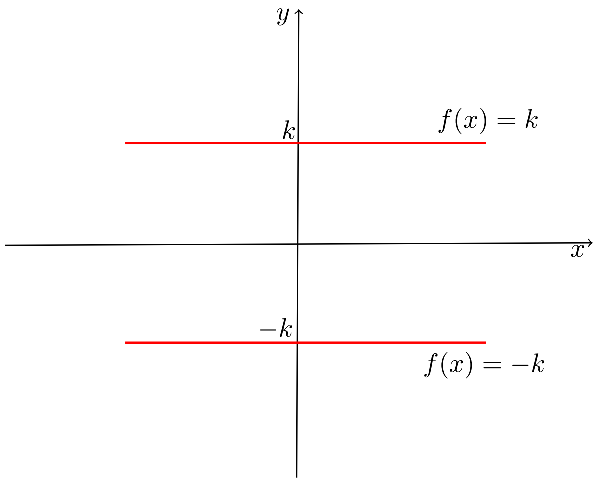

Figura 1.1: Função Constante

1.5 Funções Exponencias

A função é dita **exponencial** de base "a" quando apresenta a seguinte equação:

$$f(x) = ka^x, k \in \mathbb{R}^*.$$

Onde a base não pode ser qualquer número, tem que ser $a > 1$ e $a \neq 1$. Se $a = 1$ torna-se uma função constante, pois 1 elevado a qualquer x é sempre 1. O domínio dessa função é $\mathbb{R}$, a imagem é $\mathbb{R}_+^*$.

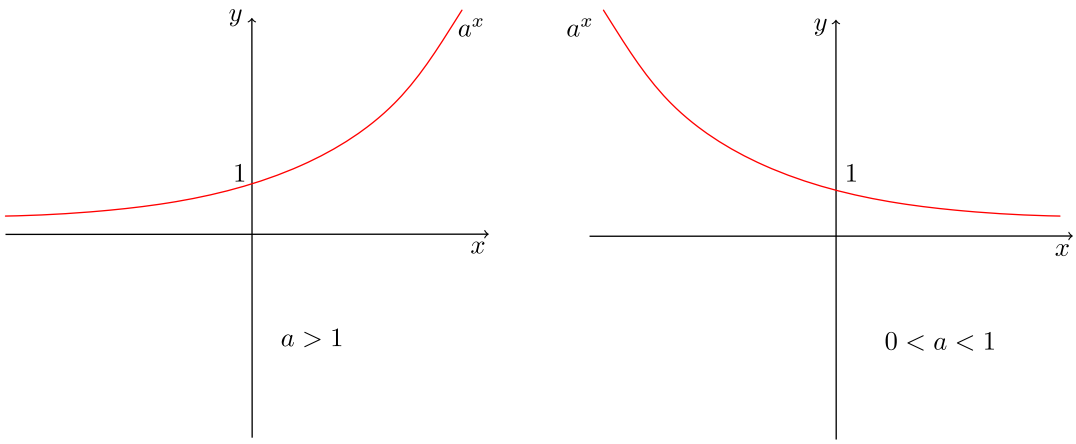

Figura 1.2: Gráfico da função exponencial

$a > 1$**:** $a^m \leq a^n \Leftrightarrow m \leq n$

$0 < a < 1$**:** $a^m \leq a^n \Leftrightarrow m \geq n$

1.5.1 Propriedades

$$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

1.6 Funções Logarítmica

A função é dita **logarítmica** de base "a" quando apresenta a seguinte equação:

$$f(x) = k \log_a(x), k \in \mathbb{R}^*.$$

A base é $a > 0$ e $a \neq 1$. Só existe logaritmo de número positivo, ou seja, $a > 0$. Portanto o domínio é $\mathbb{R}_+^*$ e a imagem é todo $\mathbb{R}$.

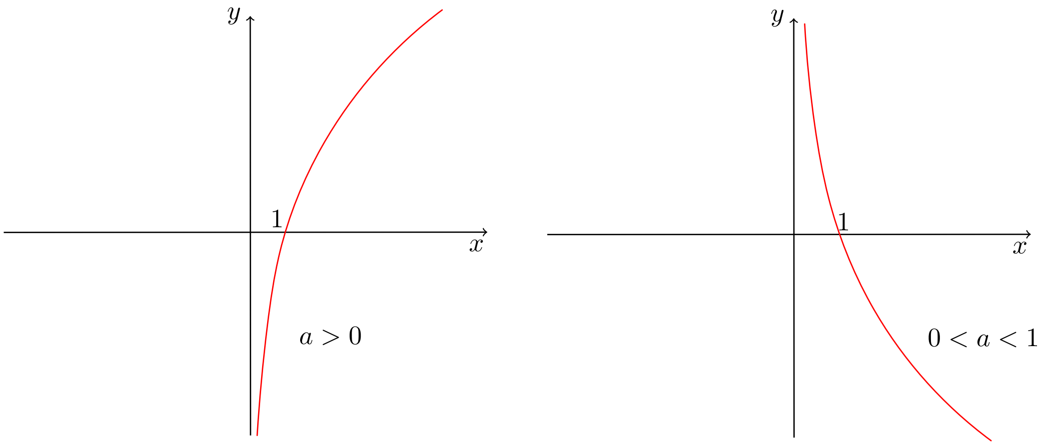

Figura 1.3: Gráfico da função logarítmica

A função logarítmica e a função exponencial são **função inversas** e terão simetria em relação a bissetriz do primeiro e terceiro quadrante, observe o gráfico 1.4.

Função Crescente $a > 1$: $\log_a(m) \leq \log_a(n) \Leftrightarrow m \leq n$

Função Decrescente $0 < a < 1$: $\log_a(m) \leq \log_a(n) \Leftrightarrow m \geq n$

Um fato a ser notado é quando se tem um log na base 10. Quando isso ocorre, não se faz necessário escrever a base, assumindo a forma:

$$\log x,$$

porém quando tem-se o logaritmo na base neperiano, ou seja, sua base é o e o logaritmo é escrito como

$$\ln x.$$

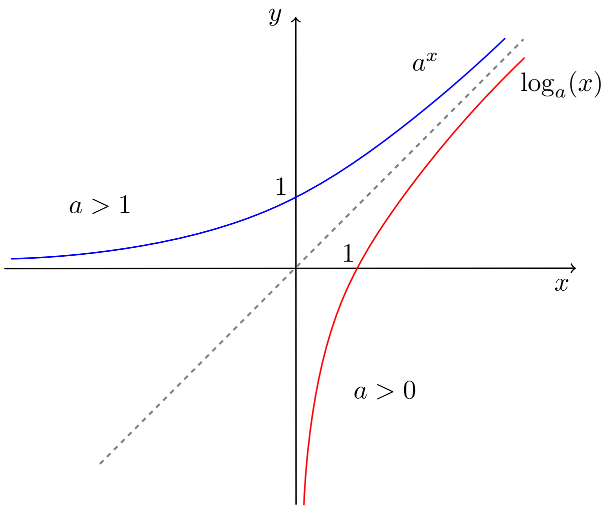

Figura 1.4: Simetria em relação a bissetriz do primeiro e terceiro quadrante das funções exponenciais e logarítmicas.

1.6.1 Propriedades

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\log_a(m) = \log_a(n) \Leftrightarrow m = n$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(b^k) = k \log_a(b)$$

$$\log_{a^p}(b) = \frac{1}{p} \log_a(b)$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$