Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Finančna matematika

Razbitje grafa z odstranjevanjem vozlišč in povezav

Projekt pri predmetu Finančni praktikum

Avtorici: Admira Abdić, Tia Krofel
Ljubljana, 6. december 2021

1 Uvod

1.1 Opis problema

V projektni nalogi si bomo podrobneje ogledali problem razbitja grafa z odstranjevanjem vozlišč in povezav. Za vhodni podatek bomo vzeli neusmerjen graf s podanima vozliščema s in t. Naloga projekta je nato pokazati, kako lahko izhodiščni graf razbijemo na več komponent, če smemo odstraniti največ eno vozlišče ter najmanjše možno število povezav, ob tem pa morata vozlišči s in t ležati v nepovezanih komponentah.

1.2 Pristop k reševanju

Najprej smo problem formulirali s pomočjo celoštevilskega linearnega programa, nato pa s pomočjo implementiranih algoritmov za reševanje problema največjega pretoka in najmanjšega prereza v programskem jeziku Python napisali še program, ki razbije podan graf na več komponent, tako da se podani vozlišči s in t ne nahajata v isti komponenti. Na koncu smo generirali še nekaj neusmerjenih grafov različnih velikosti in na njih preizkusili delovanje našega programa.

2 Celoštevilski linearni program

Oglejmo si najprej, kako bi podan problem formulirali s celoštevilskim linearnim programom.

Izhajamo iz podanega neusmerjenega enostavnega grafa $G = (V, E)$ in uvedemo tri nove spremenljivke:

$$x_v = \begin{cases} 1; & \text{v razbitem grafu vozlišče } v \text{ leži v isti komponenti kot vozlišče } s, \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$y_v = \begin{cases} 1; & \text{vozlišče } v \text{ odstranimo iz grafa } G, \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

$$z_{uv} = \begin{cases} 1; & \text{povezavo } uv \text{ odstranimo iz grafa } G, \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Pri tem si vrednosti spremenljivke x_v ogledamo za vsa vozlišča v grafu G, torej $\forall v \in V(G)$, vrednosti y_v za vsa vozlišča izvzemši s in t, torej $\forall v \in V(G) \setminus \{s, t\}$, ki ju iz grafa G ne želimo odstraniti, saj problem v tem primeru ne bi imel smisla, kajti vedno bi lahko odstranili bodisi vozlišče s bodisi vozlišče t in s tem dosegli nepovezanost med s in t.

Vrednosti z_{uv} opazujemo pri vseh povezavah grafa G, torej za $\forall uv \in E(G)$, a ker gre za neusmerjen graf, moramo preveriti povezanost v obeh smereh, kar pomeni, da za $\forall uv \in E(G)$ v množico povezav dodamo še vu. Spodnjemu celoštevilskemu linearnemu programu torej podamo bodisi usmerjen graf bodisi neusmerjen graf z razširjeno množico povezav, tj. $G' = (V, E')$, kjer E' za vsako povezavo $uv \in E$ vsebuje še vu.

Iščemo

$$\min \sum_{uv \in E} z_{ij}$$

pri pogojih:

$$\sum_{v \in V} y_v \leq 1$$

$$\forall uv \in E : x_u - x_v \leq z_{uv} + y_v$$

$$x_s - x_t = 1$$

$$\forall v \in V : y_v \in \{0, 1\}$$

$$\forall v \in V : x_v \in \{0, 1\}$$

$$\forall uv \in E : z_{uv} \in \{0, 1\}, z_{vu} \in \{0, 1\}$$

Osrednji cilj programa je dobiti razbitje grafa $G = (V, E)$ z odstranitvijo največ enega vozlišča $v \in V$ in najmanjšega možnega števila povezav $(u, v) \in E$, tako da v razbitem grafu podani vozlišči $s \in V$ in $t \in V$ ne bosta več povezani.

Pri tem smo upoštevali še druge pogoje. Pogoj $\forall uv \in E : x_u - x_v \leq z_{u,v} + y_v$ zagotovi, da v primeru, ko je v prvotnem povezanem grafu obstajala povezava med vozliščema u in v, sedaj pa je vozlišče u leži v isti komponenti kot vozlišče s, medtem ko vozlišče v z s ni povezano, smo morali odstraniti bodisi povezavo med njima bodisi vozlišče v.

Končno mora biti izpolnjen še pogoj $x_s - x_t = 1$, ki predstavlja nepovezanost vozlišča t z vozliščem s v razbitem grafu.

3 Problem največjega pretoka in najmanjšega prereza

3.1 Teoretično ozadje

Naj bo $G = (V, E)$ graf, kjer $V = V(G)$ predstavlja množico vozlišč, $E = E(G)$ pa množico povezav grafa G.

Najprej si oglejmo različne načine razbitja posameznega grafa.

Množica $S \subseteq V(G)$ je *točkovni prerez* na grafu G, če ima graf $G - S$ več komponent kot G. *Povezanost po točkah* grafa G je enaka minimalni moči množice S, za katero je $G - S$ nepovezan (ali ima le eno točko). Graf je k-povezan po točkah, če je njegova povezanost po točkah vsaj k.

Množico $F \subseteq E(G)$ pa imenujemo *razdelitvena množica povezav* na grafu G, če ima graf $G - F$ več komponent kot G. *Povezanost po povezavah* grafa G je enaka minimalni moči množice F, za katero je $G - F$ nepovezan. Graf je k-povezan po povezavah, če je njegova povezanost po povezavah vsaj k.

Ker nas bo zanimalo tudi, kako lahko dan problem rešimo s pomočjo algoritmov za reševanje problema največjega pretoka, definiramo še slednjega.

Problem največjega pretoka: Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf, $s \in V$ (izvor) in $t \in V$ (ponor) dani odlikovani vozlišči, število $c_{ij} \geq 0$ pa naj za vsako povezavo $(i, j) \in E$ predstavlja prepustnost povezave (i, j). Prepustnost lahko na vse pare razširimo na sledeč način:

$$c(i,j) = \begin{cases} c_{ij}, & \text{če } (i,j) \in E, \\ 0, & \text{če } (i,j) \notin E. \end{cases}$$

Urejeno četverko (G, s, t, c) imenujemo *(pretočno) omrežje*. Na podlagi teh podatkov nato iščemo največji pretok f v pretočnem omrežju (G, s, t, c).

Za preslikavo $f : V \times V \to \mathbb{R}$ velja, da je pretok v omrežju (G, s, t, c), če zadošča naslednjim pogojem:

1. $f(i, j) \geq c(i, j)$ za vse $i, j \in V$ (ustreznost pretoka),

2. $f(i,j) = -f(i,j)$ za vse $i,j \in V$ (antisimetričnost pretoka),

3. $\sum_{i \in V} f(i,j) = 0$ za vse $i,j \in V \setminus s,t$ (Kirchhoffovi zakoni).

Število $f(A,B) = \sum_{i \in V} f(i,j)$ potem imenujemo velikost pretoka f.

Pri **problemu najmanjšega prereza** imamo prav tako podano pretočno omrežje (G,s,t,c) in iščemo prerez z najmanjšo prepustnostjo.

Ob tem kot prerez omrežja (G,s,t,c) razumemo par množic $A, B \subseteq V$, kjer je: $A \cup B = V$, $A \cap B = \emptyset$ in $s \in A, t \in B$.

In končno si oglejmo še **Ford-Fulkersonov izrek, KID**:
Za vsak pretok f v omrežju (G,s,t,c) so naslednje tri trditve enakovredne:

1. f je največji pretok v (G,s,t,c),

2. v (G,s,t,c) ni povečujočih poti za f,

3. v (G,s,t,c) obstaja prerez (A,B), tako da je $|f| = c(A,B)$.

3.2 Uporaba algoritmov za reševanje našega problema

Na podlagi zgornje teorije si sedaj poglejmo, kako si lahko z implementiranimi algoritmi za iskanje največjega pretoka in najmanjšega prereza pomagamo pri reševanju našega problema.

Znotraj programskega okolja Python bomo uporabili knjižnico *NetworkX*, ki je namenjena analizi kompleksnih omrežij in ima že implementirane funkcije za iskanje največjega pretoka in najmanjšega prereza v omrežju. Na koncu bomo za prikaz naših generiranih grafov uporabili še knjižnico *mathplotlib*, pri samem generiranju grafov pa si bomo pomagali s funkcijami iz knjižnice *random*.

S predpostavko, da bomo našemu programu podali neusmerjen graf $G = (V,E)$, bo naš algoritem na začetku preko funkcije *G.to_directed()* za vsako $uv \in E$ povezavo v množico E dodal še povezavo vu in nov graf obravnaval kot usmerjenega.

Nato bomo preverili, če vozlišči s in t v podanem grafu slučajno nista povezani - v tem primeru lahko zaključimo, saj smo dosegli naš cilj.

Nato si bo ogledal, ali je slučajno možno prekiniti povezavo med s in t že z odstranitvijo enega samega vozlišča (ki ni ne s ne t). V tem primeru bo problem rešen in po tem, ko bomo odstranili vozlišče, nam ne bo treba odstraniti nobene dodatne povezave.

Če pa želјeno razbitje grafa ne bo mogoče z odstranitvijo enega samega vozlišča, si bomo ogledali, kakšen je največji pretok v pretočnem omrežju, ki ga iz podanega grafa (transformiranega v usmerjenega) dobimo tako, da za vsako povezavo določimo še pretočnost, tj. *capacity*. Mi bomo to storili na generiranih grafih že na začetku, in sicer bo pretočnost vsake izmed naših povezav enaka 1, s čimer si že na začetku zagotovimo, da je največji pretok na tem omrežju enak najmanjšemu številu povezav, ki jih moramo odstraniti za to, da prekinemo povezanost med s in t.

Dobljen največji pretok v celotnem grafu bomo primerjali z največjimi pretoki podgrafov, ki jih bomo dobili tako, da bomo naenkrat iz podanega grafa odstranili po eno vozlišče. Ker si želimo odstraniti najmanjše možno število povezav, bomo med njimi poiskali tistega, ki ima najmanjšo vrednost največjega pretoka.

Nato bomo prvotni neusmerjeni graf, vozlišči s in t ter vozlišče (oziroma vozlišča), ki se ga najbolj splača odstraniti, poslali funkciji *razbij*, ki bo poskrbela za ustrezno razbitje grafa z odstranitvijo najmanjšega možnega števila povezav, potem pa bo naš algoritem narisal še razbit graf.

3.3 Preizkus algoritma

Na koncu s pomočjo matrik generirajmo še nekaj grafov. V naši matriki bo enica na mestu $[i][j]$ pomenila, da sta vozlišči i in j v grafu povezani, ničla pa, da nista.

Ker generiramo neusmerjene grafe, bodo matrike simetrične, in ker ne želimo, da bi naši grafi vsebovali zanke, zadošča, da s pomočjo knjižnice *random* naključno z ničlami in enicami zapolnimo le tisti del matrike, ki se nahaja strogo nad diagonalo. Če funkciji *matrika_povezav* ne podamo nobenega argumenta, bo imela pet vrstic in pet stolpcev, drugače pa lahko njeno velikost določimo sami.

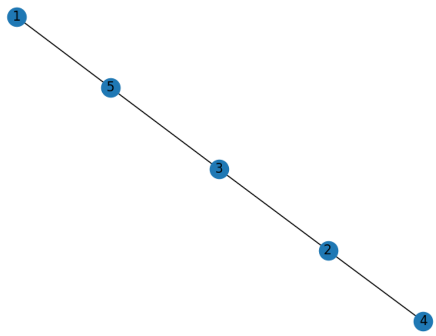
Nato s funkcijo *matrika_v_neusmerjen_graf(matrika)* generiramo neusmerjen graf, ki ima povezave med tistimi vozlišči, kjer se v matriki nahaja enica (ker vozlišča označimo s številkami, to pomeni, da če $v1 < v2$, potem sta $v1$ in $v2$ povezani, če bo v matriki na mestu, ki ustreza vrstici $v1$ in stolpcu $v2$, enica).

Zatem si zopet pomagamo s knjižnico *random* in izmed vozlišč v našem generiranem grafu naključno izberemo s in t. Takšen graf nato narišemo, potem pa ga pošljemo v zgoraj opisan algoritem skupaj z izbranima vozliščema s in t.

3.4 Rezultati

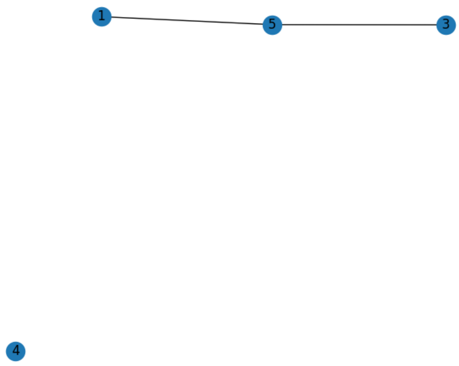
Če poženemo *algoritem.py*, kjer je zapisana tudi vsa zgoraj opisana koda, dobimo na primer naslednji rezultat (slike se nam odpirajo v dodatnem oknu in šele po ogledu ter zaprtju prikaza posameznega grafa se bo izpisovanje v terminalu nadaljevalo):

Slika 1: Prvi poskus, prvotni graf



V terminalu nam program sporoči, da gre tukaj za neusmerjen graf, z množico vozlišč $V = \{1, 5, 2, 3, 4\}$ in množico povezav $E = \{(1, 5), (5, 3), (2, 3), (2, 4)\}$. Za izbrani vozlišči sta naključno izbrani $s = 4$ in $t = 3$. Prav tako nam program pove, da je podan graf je brez odstranjenih vozlišč glede na povezanost med s in t 1-povezan po povezavah.

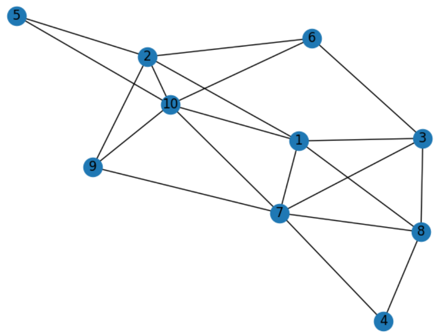
Slika 2: Prvi poskus, razbit graf



Nato nam algoritem v terminal izpiše, da je prvotni graf lahko uspešno razbit z odstranitvijo vozlišča 2 in ohranjenimi vsemi povezavami, torej vrne neusmerjen graf z vozlišči $V' = \{1, 5, 3, 4\}$ in povezavami $E' = \{(1, 5), (5, 3)\}$.

Oglejmo si še primer programa, ki mu za velikost matrike podamo 10:

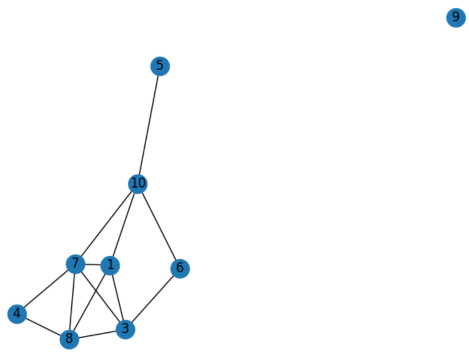
Slika 3: Drugi poskus, prvotni graf



V terminalu nam program sporoči, da gre tukaj za neusmerjen graf, z množico vozlišč $V = \{1, 2, 3, 7, 8, 10, 5, 6, 9, 4\}$ in množico povezav $E = \{$(1, 2), (1, 3), (1, 7), (1, 8), (1, 10), (2, 5), (2, 6), (2, 9), (2, 10), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (7, 4), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 4), (10, 5), (10, 6), (10, 9)$\}$. Za izbrani vozlišči sta naključno izbrani $s = 9$ in $t = 3$. Prav tako nam program pove, da je podan graf je brez odstranjenih vozlišč glede na povezanost med s in t 3-povezan po povezavah.

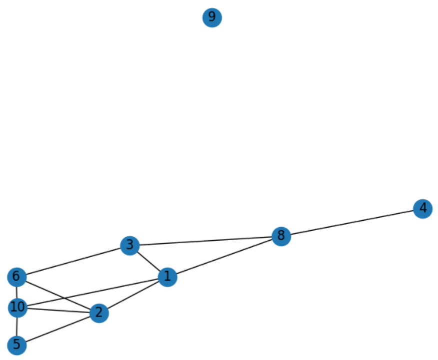
Nato ugotovi, da razbitje tega grafa z odstranitvijo le enega vozlišča ni mogoče in da je najmanjse stevilo povezav, ki jih moramo odstraniti, 2, do tega pa lahko pridemo na vec različnih načinov, in sicer z odstranitvijo enega izmed vozlišč $2, 7$ ali 10.

Slika 4: Drugi poskus, razbit graf z odstranjenim vozliščem 2



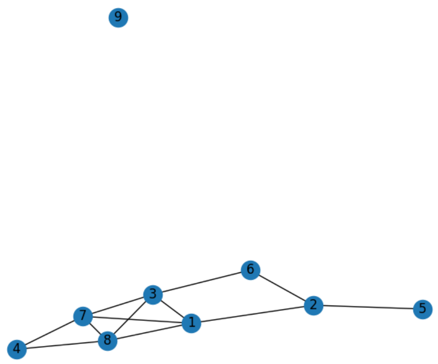
Če odstranimo vozlišče 2, je graf, ki ga sedaj razbijamo, glede na s in t 2-povezan po povezavah in zato odstranimo še povezavi $(9, 7)$ in $(9, 10)$ ter dobimo razbit neusmerjen graf z vozlišči $V' = \{1, 3, 7, 8, 10, 5, 6, 9, 4\}$ in povezavami E' = {(1, 3), (1, 7), (1, 8), (1, 10), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (7, 4), (7, 8), (7, 10), (8, 4), (10, 5), (10, 6)}.

Slika 5: Drugi poskus, razbit graf z odstranjenim vozliščem 7



Če odstranimo vozlišče 7, je graf, ki ga sedaj razbijamo, glede na s in t 2-povezan po povezavah in zato odstranimo še povezavi $(9, 2)$ in $(9, 10)$ ter dobimo razbit neusmerjen graf z vozlišči $V' = \{1, 2, 3, 8, 10, 5, 6, 9, 4\}$ in povezavami E' = {(1, 2), (1, 3), (1, 8), (1, 10), (2, 5), (2, 6), (2, 10), (3, 6), (3, 8), (8, 4), (10, 5), (10, 6)}.

Slika 6: Drugi poskus, razbit graf z odstranjenim vozliščem 10



Če odstranimo vozlišče 10, je graf, ki ga sedaj razbijamo, glede na s in t 2-povezan po povezavah in zato odstranimo še povezavi $(9, 2)$ in $(9, 7)$ ter dobimo razbit neusmerjen graf z vozlišči $V' = \{1, 2, 3, 7, 8, 5, 6, 9, 4\}$ in povezavami E' = {(1, 2), (1, 3), (1, 7), (1, 8), (2, 5), (2, 6), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (7, 4), (7, 8), (8, 4)}.

3.5 Opažanje

Po večkratnem eksperimentiranju s spreminjanjem velikosti matrike in ponavljanjem poskusa ob isti velikosti matrike lahko ugotovimo, da je ob večanju matrik (in s tem tudi števila vozlišč v grafih) vedno manj možnosti, da bo razbitje grafa možno že z odstranitvijo enega samega vozlišča, imeli pa bomo vedno več različnih opcij, katero vozlišče naj odstranimo, da bomo morali zatem odstraniti najmanjše možno število povezav, ki bo pri vseh teh vozliščih enako.

4 Viri

- M. Petkovšek, Material pri predmetu Optimizacijske strukture, 2020.
- Dokumentacija knjižnice NetworkX, dostopna na naslovu: `https://networkx.org/documentation/stable/index.html`, dostopano dne 27. 11. 2021.