Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Finančna matematika

# Razbitje grafa z odstranjevanjem vozlišč in povezav

Kratek opis projekta

Avtorici: Admira Abdić, Tia Krofel
Ljubljana, november 2021

# 1 Problem

V projektni nalogi si bova podrobneje ogledali problem razbitja grafa z odstranjevanjem vozlišč in povezav. Za vhodni podatek bova vzeli usmerjen povezan graf s podanima vozliščema $s$ in $t$. Naloga projekta je nato pokazati, kako lahko izhodiščni graf razbijemo na več komponent, če smemo odstraniti največ eno vozlišče ter najmanjše možno število povezav. Poleg formulacije problema s pomočjo celoštevilskega linearnega programiranja si bova pri reševanju pomagali še z algoritmi za reševanje problema največjega pretoka, ki jih načeloma uporabljamo pri reševanju problemov najmanjšega prereza.

# 2 Teoretično ozadje

Naj bo $G = (V, E)$ graf, kjer $V = V(G)$ predstavlja množico vozlišč, $E = E(G)$ pa množico povezav grafa $G$.

Najprej si oglejmo različne načine razbitja posameznega grafa.

Množica $S \subseteq V(G)$ je *točkovni prerez* na grafu G, če ima graf $G - S$ več komponent kot $G$. *Povezanost po točkah* grafa $G$ je enaka minimalni moči množice $S$, za katero je $G - S$ nepovezan (ali ima le eno točko). Graf je $k$-povezan po točkah, če je njegova povezanost po točkah vsaj $k$.

Množico $F \subseteq E(G)$ pa imenujemo *razdelitvena množica povezav* na grafu $G$, če ima graf $G - F$ več komponent kot $G$. *Povezanost po povezavah* grafa $G$ je enaka minimalni moči množice $F$, za katero je $G - F$ nepovezan. Graf je $k$-povezan po povezavah, če je njegova povezanost po povezavah vsaj $k$.

Ker naju bo zanimalo tudi, kako lahko dan problem rešiva s pomočjo algoritmov za reševanje problema največjega pretoka, definiramo še slednjega.

**Problem največjega pretoka**: Naj bo $G = (V, E)$ usmerjen graf, $s \in V$ (izvor) in $t \in V$ (ponor) dani odlikovani vozlišči, število $c_{ij} \geq 0$ pa naj za vsako povezavo $(i, j) \in E$ predstavlja prepustnost povezave $(i, j)$. Prepustnost lahko na vse pare razširimo na sledeč način:

$$c(i,j) = \begin{cases} c_{ij}, & \text{če } (i,j) \in E, \\ 0, & \text{če } (i,j) \notin E. \end{cases}$$

Urejeno četverko $(G, s, t, c)$ imenujemo *(pretočno) omrežje.* Na podlagi teh podatkov nato iščemo največji pretok $f$ v pretočnem omrežju $(G, s, t, c)$.

Pri **problemu najmanjšega prereza** imamo prav tako podano pretočno omrežje $(G, s, t, c)$ in iščemo prerez z najmanjšo prepustnostjo.

Za reševanju danega problema bova implementirali *algoritem Forda in Fulkersona* za reševanje problema največjega pretoka in najmanjšega prereza, ki za vhodni podatek vzame pretočno omrežje $(G, s, t, c)$, kot rezultat pa vrne tako največji pretok $f$ kot tudi najmanjši prerez $(A, B)$.

# 3 Načrt dela

Zgoraj opisan problem bova najprej prevedli na celoštevilski linearni program, nato pa za implementacijo algoritma uporabili programski jezik *Python*.

Za posamezen graf bo algoritem najprej preveril, ali je slučajno možno prekiniti povezavo med $s$ in $t$ že z odstranitvijo enega samega vozlišča. V tem primeru bo problem rešen in najmanjša množica povezav, ki jih moramo odstraniti, bo prazna.

V nasprotnem primeru bo za vsako vozlišče $u$ (izvzemši izvor $s$ in ponor $t$) preveril, kakšen je najmanjši prerez, ki ga vrne algoritem Forda in Fulkersona, če mu podamo pretočno omrežje $(G - u, s, t, c)$, ki ga iz grafa $G - u$ dobimo tako, da za vsako povezavo določimo prepustnost 1, saj nam bo v tem primeru algoritem kot največji pretok (in obenem velikost najmanjšega prereza) vrnil kar število povezav, ki jih bomo morali odstraniti za željeno razbitje.

Nato bo odstranil tisto vozlišče $u$, za katerega bo za razbitje grafa $G - u$ potrebno odstraniti najmanjše število povezav. Le-te bo tudi (zopet na podlagi rezultata Ford in Fulkersonovega algoritma) odstranil in poleg odstranjenega vozlišča kot rezultat vrnil tudi razdelitveno množico povezav na grafu $G - u$.

Na koncu pa bova za preizkus opisanega algoritma v Pythonu generirali še nekaj usmerjenih grafov.