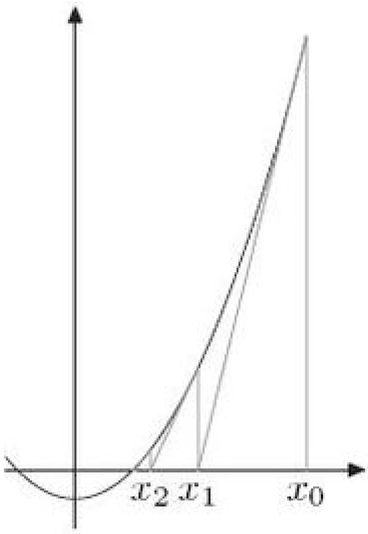
牛顿法

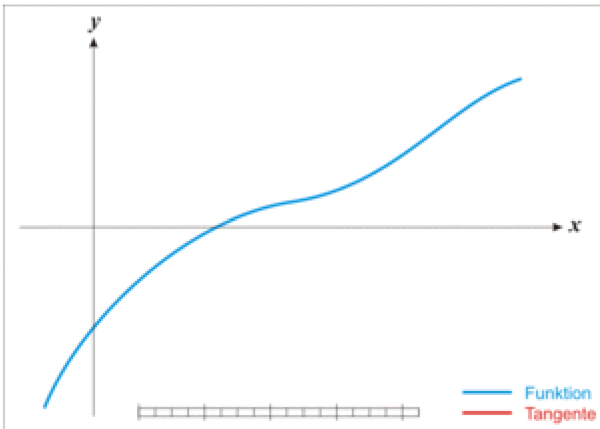


牛顿法（英语：Newton's method）又称为**牛顿-拉弗森方法**（英语：Newton-Raphson method），它是一种在实数域和复数域上近似求解方程的方法。方法使用函数$f(x)$的泰勒级数的前面几项来寻找方程$f(x)=0$的根。

起源

牛顿法最初由艾萨克·牛顿在《流数法》（*Method of Fluxions*，1671年完成，在牛顿去世后于1736年公开发表）中提出。约瑟夫·鲍易也曾于1690年在*Analysis Aequationum*中提出此方法。

方法说明



蓝线表示方程f而红线表示切线。可以看出x_{n+1}比x_n更靠近f所要求的根x。

首先，选择一个接近函数$f(x)$零点的x_0，计算相应的$f(x_0)$和切线斜率$f'(x_0)$（这里f'表示函数f的导数）。然后我们计算穿过点$(x_0, f(x_0))$并且斜率为$f'(x_0)$的直线和x轴的交点的x坐标，也就是求如下方程的解：

$$0=(x-x_0)\cdot f'(x_0)+f(x_0)$$

我们将新求得的点的x坐标命名为x_1，通常x_1会比x_0更接近方程$f(x)=0$的解。因此我们现在可以利用x_1开始下一轮迭代。迭代公式可化简为如下所示：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

已有证明牛顿迭代法的二次收敛[1]必须满足以下条件：

$f'(x)\neq 0$; 对于所有$x\in I$，其中I为区间$[\alpha-r, \alpha+r]$，且x_0在区间其中I内，即$r\geqslant |a-x_0|$的;

对于所有$x \in I$，$f''(x)$是连续的;
x_0足够接近根 α。

其它例子

第一个例子

求方程$\cos(x) - x^3 = 0$的根。令$f(x) = \cos(x) - x^3$，两边求导，得$f'(x) = -\sin(x) - 3x^2$。由于$-1 \le \cos(x) \le 1 (\forall x)$，则$-1 \le x^3 \le 1$，即$-1 \le x \le 1$，可知方程的根位于$0$和$1$之间。我们从$x_0 = 0.5$开始。

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 & = & x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} & = & 0.5 - \frac{\cos(0.5) - 0.5^3}{-\sin(0.5) - 3 \times 0.5^2} & = & 1.112141637097 \\
x_2 & = & x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} & = & \vdots & = & \underline{0.}909672693736 \\
x_3 & = & \vdots & = & \vdots & = & \underline{0.86}7263818209 \\
x_4 & = & \vdots & = & \vdots & = & \underline{0.86547}7135298 \\
x_5 & = & \vdots & = & \vdots & = & \underline{0.8654740331}11 \\
x_6 & = & \vdots & = & \vdots & = & \underline{0.865474033102}
\end{array}$$

第二个例子

牛顿法亦可发挥与泰勒展开式，对于函式展开的功能。

求a的m次方根。

$$x^m - a = 0$$

设$f(x) = x^m - a$，$f'(x) = mx^{m-1}$

而a的m次方根，亦是x的解，

以牛顿法来迭代：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^m - a}{mx_n^{m-1}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n}{m}(1 - ax_n^{-m})$$

（或 $x_{n+1}=x_n-\frac{1}{m}\left(x_n-a\frac{x_n}{x_n^m}\right)$）

应用

求解最值问题

主条目：应用于最优化的牛顿法

牛顿法也被用于求函数的极值。由于函数取极值的点处的导数值为零，故可用牛顿法求导函数的零点，其迭代式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

求拐点的公式以此类推

注解

1. https://cs.nyu.edu/overton/NumericalComputing/newton.pdf

外部链接

- JAVA：牛顿勘根法 （繁体中文）