Mathematik für Computer Science 2
SS 2025

Übungsaufgaben zu Thema 2
Matrizen und lineare Abbildungen 1

Aufgaben, die mit dem Symbol ☑ gekennzeichnet sind, können Sie für den nächsten Übungstermin „ankreuzen“. Damit erklären Sie, die Bearbeitung der Aufgabe an der Tafel präsentieren zu können.

Mit einem * gekennzeichnete Aufgaben betreffen weiterführende Themen oder sind ein bisschen schwierig. Sie sind nicht prüfungsrelevant.

Aufgabe 1

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ berechnen Sie:

(a) $3A + B$

(b) $A^T + B^T$

(c) $(A + B)^T$

(d) C sei eine 3×5-Matrix. Welche Dimension hat die Matrix C^T? Welche Dimension muss eine Matrix D haben, sodass $C + D$ definiert ist?

(e) Gibt es eine Matrix E, für die $E + E^T$ definiert ist? Welche Dimension hat so eine Matrix?

Aufgabe 2

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gilt $A \cdot B = B \cdot A$?

Aufgabe 3 ☑

Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie:

(a) A^2, $2AB$, B^2, $A^2 + 2AB + B^2$ und $(A + B)^2$.

(b) Wie kann man die (falsche) Formel $(C + D)^2 = C^2 + 2CD + D^2$ für quadratische Matrizen C und D richtigstellen?

Aufgabe 4

Gegeben seien die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bilden Sie alle möglichen Produkte aus je zwei dieser Matrizen. Dabei darf auch zweimal dieselbe Matrix vorkommen.

(b) Berechnen Sie $B \cdot B^T$, $B^T \cdot B$, $C \cdot C^T$ und $C^T \cdot C$.

(c) Kann man stets die Produkte $D \cdot D^T$ und $D^T \cdot D$ für eine beliebige $m \times n$-Matrix D bilden? Begründen Sie!

Aufgabe 5

Gegeben sind die Matrizen A und B:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.
Gilt dies allgemein für beliebige Matrizen A, B (setzen wir voraus, dass die Dimensionen von A und B so sind, dass das Produkt $A \cdot B$ definiert ist)?

Aufgabe 6

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 21 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

(a) Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(C)$.

(b) Verwenden Sie die unter (a) berechneten Determinanten um zu ermitteln, welche der inversen Matrizen A^{-1}, B^{-1} und C^{-1} existieren.

Aufgabe 7

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor (= die einspaltige Matrix) $\mathbf{b}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie mithilfe der Determinante von A, dass A invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A.

(c) Machen Sie die Probe, indem Sie $A^{-1}A = \mathbb{I}_2$ nachrechnen.

(d) Bestimmen Sie mithilfe von A^{-1} die Lösung $\mathbf{x}$ des Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Aufgabe 8

I. Erklären Sie, was man unter einer linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ versteht und wie so eine Abbildung mit Matrizen zusammenhängt. Begründen Sie weiters, warum für eine lineare Abbildung immer $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gelten muss.

II. Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) $f(x) = 5x + 3$

(b) $g(x_1, x_2) = x_1x_2 + 3$

(c) $g(x_1, x_2) = -(x_1, x_2)$

(d) $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$

(e) $r(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2x_3, x_3 - x_1)$

Aufgabe 9*

(a) Begründen Sie warum die Abbildung $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 3x_2, 2x_2 + 4x_3)$ linear ist und bestimmen Sie die zugehörige Matrix.

(b) Berechnen Sie $h(1, 1, 1)$ auf zwei Arten: (1) durch Einsetzen in die Abbildungsvorschrift und (2) mithilfe von Matrixmultiplikation.

(c) Die Abbildung f ist durch $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ gegeben. Begründen Sie warum f linear ist und geben Sie die zugehörige Matrix an.

(d) Existieren die Umkehrabbildungen der linearen Abbildungen h und f? Begründen Sie! Falls die Umkehrabbildungen exisitieren, geben Sie ihre Matrixdarstellungen an!

(e) Überprüfen Sie, ob die verketteten Abbildungen $f \circ h$ und $h \circ f$ existieren. Falls sie definiert sind, geben Sie ihre Matrixdarstellungen an.

Aufgabe 10

Gegeben seien die drei Transformationsmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Fertigen Sie jeweils eine Skizze an, die zeigt, wie die Vektoren der Standardbasis durch die linearen Abbildungen transformiert werden.

(b) Geben Sie eine geometrische Interpretation jeder dieser linearen Transformationen an.

Aufgabe 11

(a) Geben Sie die Matrix jener linearen Abbildung an, die jeden Vektor des $\mathbb{R}^2$ um den Faktor 3 in Richtung der x-Achse streckt und um den Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung der y-Achse staucht.

(b) Geben Sie die Matrix jener linearen Abbildung an, die jeden Vektor des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ im Uhrzeigersinn dreht.

(c) Geben Sie die Matrix jener linearen Abbildung an, die zuerst jeden Vektor des $\mathbb{R}^2$ um den Faktor 3 in Richtung der x-Achse streckt und um den Faktor $\frac{1}{2}$ in Richtung der y-Achse staucht und dann das Ergebnis um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ im Uhrzeigersinn dreht. Welche Matrix erhalten Sie, wenn sie zuerst drehen und dann stauchen/strecken?

(d) Die unter (c) beschriebene Transformation soll auf das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (1, 4), B = (2, 4)$ und $C = (2, 6)$ angewendet werden. Berechnen Sie die Eckpunkte des transformierten Dreiecks und fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 12

Sei $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$. Ist die Translation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{t}$ eine lineare Abbildung? Begründen Sie!

Aufgabe 13*

(a) Beschreiben Sie (geometrisch) eine lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die ihre eigene Inverse (und nicht die Identität) ist. Geben Sie deren Matrix an.

(b) Beschreiben Sie (geometrisch) eine lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. deren Matrix (ungleich der Identität!), für die gilt: $F \circ F = F$ bzw. für deren Matrix A gilt $A \cdot A = A$.

(c) Warum können Sie nicht für (a) und (b) dieselbe Matrix verwenden?

Aufgabe 14

Zeigen Sie mithilfe der Additionstheoreme

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta),$$

dass $R_\alpha \cdot R_\beta = R_\beta \cdot R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$ für beliebige Drehmatrizen R_α und R_β im $\mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 15

Zeigen Sie: Ist A die Matrix der linearen Abbildung f und B die Matrix der linearen Abbildung g, so ist die Matrix der linearen Abbildung $f \circ g$, sofern diese definiert ist, die Matrix $A \cdot B$.

Aufgabe 16

(a) Bestimmen Sie die Matrix der Drehung um $\alpha = \frac{\pi}{2}$ im $\mathbb{R}^2$ gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung.

(b) Das Quadrat ABCD mit $A = (1,1), B = (5,1), C = (5,5)$ und $D = (1,5)$ soll um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn um den Koordinatenursprung gedreht werden. Wie lauten die neuen Koordinaten der Eckpunkte?

Aufgabe 17

Geben Sie die Matrizen der linearen Abbildungen an, die

(a) jeden Vektor des $\mathbb{R}^3$ um den Faktor 3 streckt/staucht.

(b) jeden Vektor des $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ gegen den Uhrzeigersinn um die y-Achse dreht. (Hinweis: Rechte-Hand-Regel, Daumen zeigt in positive y-Richtung)

(c) jeden Vektor des $\mathbb{R}^3$ um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn um die x-Achse dreht. (Hinweis: Rechte-Hand-Regel, Daumen zeigt in positive x-Richtung)

(d) jeden Vektor des $\mathbb{R}^3$ um den Faktor 3 streckt, um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ gegen den Uhrzeigersinn um die y-Achse dreht und dann um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn um die x-Achse dreht. Welche Matrix erhalten Sie, wenn die beiden Drehungen in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt werden?