Mathematik für Computer Science 2
SS 2025

Übungsaufgaben zu Thema 1
Vektoren und Vektorräume

FH University of Applied Sciences TECHNIKUM WIEN

Aufgaben, die mit dem Symbol ☑ gekennzeichnet sind, können Sie für den nächsten Übungstermin „ankreuzen“. Damit erklären Sie, die Bearbeitung der Aufgabe an der Tafel präsentieren zu können.

Mit einem * gekennzeichnete Aufgaben betreffen weiterführende Themen oder sind ein bisschen schwierig. Sie sind nicht prüfungsrelevant.

Aufgabe 1

Gegeben sei der Vektor $\vec{a} = (4, 3)$.

(a) Wie kann man den Vektor $-2\vec{a}$ geometrisch aus dem Vektor $\vec{a}$ gewinnen? Beschreiben Sie in Worten und fertigen Sie eine kleine Skizze dazu an.

(b) Geben Sie jenen Vektor $\vec{b}$ an, der in die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ zeigt und Länge 8 hat.

(c) Mit welchem Skalar $k \in \mathbb{R}$ muss der Vektor $\vec{a}$ multipliziert werden, sodass man einen Vektor $\vec{c}$ erhält, der nur ein Drittel der Länge von $\vec{a}$ aufweist und in die entgegengesetzte Richtung zeigt?
Hinweis: Es muss also $\vec{c} = k\vec{a}$ gelten.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = (1, 0, -4, 2), \quad \vec{b} = (-1, 2, -7, 3), \quad \vec{c} = (3, 4, -2, 1).$$

(a) Was versteht man unter dem Begriff Linearkombination von m Vektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$? Geben Sie zwei Linearkombinationen von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ an.

(b) Berechnen Sie $6(\vec{b} + \vec{a}) - 2(3\vec{a} - \vec{c})$.

(c) Berechnen Sie die Linearkombination $\sum\limits_{k=1}^{4} (2k+1)\,\vec{e}_k$, wobei $\vec{e}_k$ die Vektoren der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ sind.

(d) Berechnen Sie: $\|\vec{a}\|$, $\left\|\vec{b}\right\|$, $\|\vec{a} - \vec{c}\|$

Aufgabe 3 ☑

Gegeben sind die Punkte $A = (1, 1)$ und $B = (4, 5)$.

(a) Definieren Sie, was ein Einheitsvektor ist. Geben Sie den zu $\overrightarrow{AB}$ gehörenden Einheitsvektor an, der dieselbe Richtung wie $\overrightarrow{AB}$ hat.

(b) Verlängern Sie die Strecke $\overline{AB}$ um 3 Längeneinheiten über B hinaus.

   i) Welche Koordinaten hat der Endpunkt C der neuen Strecke?

   ii) Fertigen Sie eine Skizze an.

   iii) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CB}$ parallel sind.

(c) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden an, die durch die Punkte A und B verläuft.
Untersuchen Sie, ob der Punkt $D = (-1, -3)$ auf der Geraden liegt.
Handelt es sich bei der Geraden um einen Teilraum des $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie! Falls nicht, geben Sie eine Parameterdarstellung der dazu parallelen Geraden an, die einen Teilraum bildet.

Aufgabe 4

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}_1 = (2, 1)$ und $\vec{a}_2 = (-2, 2)$ im $\mathbb{R}^2$.

(a) Untersuchen Sie, ob sich die Vektoren $\vec{b}_1 = (1, 5)$ und $b_2 = (1, -4)$ jeweils als Linearkombinationen von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ darstellen lassen. Falls ja, illustrieren Sie den Sachverhalt auch anhand einer Skizze.

(b) Was versteht man unter der linearen Hülle von m Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m \in \mathbb{R}^n$?
Welches geometrische Objekt stellt die lineare Hülle von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ dar (Punkt, Gerade, ganz $\mathbb{R}^2$)? Begründen Sie!

(c) Zeigen Sie, dass für zwei Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{LH}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \mathrm{LH}\{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 - \vec{u}_2\}$$

gilt.

Aufgabe 5

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Sind $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig oder linear unabhängig?
Stellen Sie gegebenenfalls einen dieser Vektoren als Linearkombination der anderen dar.

(b) Gegeben sei ein Vektor $\vec{d}$, der sich als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ schreiben lässt, für den es also passende Skalare $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\vec{d} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}$ gilt. Ist diese Darstellung eindeutig oder gibt es mehrere? Begründen Sie!

Aufgabe 6

(a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m$ in einem Vektorraum V. Was müssen die Vektoren erfüllen, sodass sie ein Erzeugendensystem von V bilden?

(b) Ist jede Basis ein Erzeugendensystem? Ist jedes Erzeugendensystem eine Basis? Begründen Sie!

(c) Bilden die Vektoren $(12, 12, 12)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ und $(0, 0, 3)$ ein Erzeugendensystem und/oder eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie!

Aufgabe 7

Sei V ein reeller Vektorraum.

(a) Definieren Sie den Begriff Teilraum (Untervektorraum).

(b) Die lineare Hülle der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ ist die Menge

$$\mathrm{LH}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} = \{k_1\vec{v}_1 + \cdots + k_n\vec{v}_n \mid k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{LH}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ ein Teilraum des Vektorraums V ist.

Aufgabe 8

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Dimension der linearen Hülle von $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ und $\vec{u}_3$, also $\dim(\mathrm{LH}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\})$, mit einer kurzen Begründung an.

(b) Welches geometrische Objekt stellt $\mathrm{LH}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ dar? Geben Sie zwei zugehörige Parameterdarstellungen an.

(c) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (10, 0, 8)$ und $\vec{b} = (2, -11, -1)$. Gilt $\vec{a} \in \mathrm{LH}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$? Gilt $\vec{b} \in \mathrm{LH}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$?

(d) Gegeben sind drei linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$. Jemand behauptet, dass dann $\mathrm{LH}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3$ gilt. Ist diese Behauptung wahr oder falsch? Begründen Sie!

Aufgabe 9

Gegeben seien die Mengen

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3 \right\}$$

und

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + y = 0 \right\}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob es sich bei U_1 bzw. U_2 um Teilräume des $\mathbb{R}^2$ handelt. Falls ja, geben Sie eine Basis und die Dimension des betreffenden Teilraums an.

(b) Skizzieren Sie die Mengen U_1 und U_2 und geben Sie jeweils zwei Parameterdarstellungen an.

(c) Es seien U_3 und U_4 zwei beliebige Teilräume des $\mathbb{R}^2$. Haben die beiden Mengen stets ein gemeinsames Element bzw. gemeinsame Elemente? Begründen Sie und geben Sie, falls es gemeinsame Elemente gibt, diese an.

Aufgabe 10

Gegeben zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Sind dann die Vektoren $\vec{a}+\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{b}$ auch linear unabhängig?

Aufgabe 11

Bilden die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{Z}_2^3$? Lässt sich $\vec{v} = (1,0,0)$ als Linearkombination dieser Vektoren schreiben? (Geben Sie diese Linearkombination gegebenenfalls an!)
Hinweis: $\mathbb{Z}_2^3 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 12*

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2. Sind die Polynome 1, $x+1$ und x^2+x linear unabhängig?

Aufgabe 13

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Gegeben sei der Vektor $\vec{a} = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Lässt sich $\vec{a}$ als Linearkombination von $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ schreiben? Begründen Sie! Falls ja: Geben Sie eine solche Linearkombination an. Ist diese Darstellung eindeutig oder gibt es mehrere?

Aufgabe 14

Ein Flughafentower befinde sich am Ort mit Koordinaten $(0, 0, 0)$. Die Flughafensicherung ortet ein Flugzeug um 12:01 Uhr in $(7, -20, 5)$ und um 12:02 Uhr in $(6, -16, 4.2)$ (alle Angaben in km). Um 12:02 langt im Tower ein SOS-Notruf ein: „Hydraulik ausgefallen, Leitwerke blockiert, Kurs nicht mehr änderbar, wird beibehalten, alles vorbereiten auf Crash-Landung".

(a) Bestimmen Sie die Gerade, welche den Kurs des Flugzeugs beschreibt. (Der Parameter t der Parameterdarstellung soll in diesem Fall für die von 12:01 Uhr weg gemessene Zeit in Minuten stehen.)

(b) Wieviele Meter über dem Boden befindet sich das Flugzeug um 12:04 Uhr?

(c) Wieviele Minuten nach dem SOS-Notruf wird das Flugzeug am Boden aufkommen?

(d) Wie lauten die Koordinaten des Aufprallpunktes und wie weit ist dieser vom Tower entfernt?

Aufgabe 15*

Gegeben seien drei Punkte $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$. Der (geometrische) Schwerpunkt des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks ΔABC ist durch

$$S = \frac{A + B + C}{3}$$

gegeben.
Zeigen Sie, dass dieser mit dem Schwerpunkt jenes Dreiecks, dessen Eckpunkte durch die Seitenmittelpunkte von ΔABC gebildet werden, übereinstimmt.
Hinweis: Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist durch

$$M_{AB} = \frac{A + B}{2}$$

gegeben. Leiten Sie die Formel her!

Bemerkung: Bei A ist gemeint: der Ortsvektor $\vec{0A}$ (analog für B und C), also jeder Punkt wird mit seinem Ortsvektor identifiziert.