



北京大学

本科生毕业论文

题目： 黑洞的阴影
——黑洞和 JMN-1 裸奇点吸积盘
图像比较

姓 名： 王竞先
学 号： 1700011338
院 系： 物理学院
专 业： 物理学
指导教师： 陈斌

二〇二一年 六 月

版权声明

任何收存和保管本论文各种版本的单位和个人，未经本论文作者同意，不得将本论文转借他人，亦不得随意复制、抄录、拍照或以其他方式传播。否则，引起有碍作者著作权之问题，将可能承担法律责任。

摘要

本文提出了一种通过正反向两次追踪光线来物理正确的渲染球对称稳态时空结构附近吸积盘图像的方法。相较于之前的直接反向光线追踪算法,该算法要求在给定度规和观察者位置后进行一次初始化计算,而初始化后生成图像的速度很快,可以达到秒级的渲染速度。论文详细解释了其中的数学物理原理和计算手段,并用文中所述算法对史瓦西黑洞和 JMN-1 裸奇点附近的吸积盘图像进行了渲染和分析。其中黑洞的吸积盘图像有很明显的圆形阴影,而 JMN-1 裸奇点附近的吸积盘图像在无光子球时不存在圆形阴影,但可能因吸积盘的分裂而出现环带状阴影。

关键词: 黑洞, 裸奇点, 吸积盘, 渲染, 阴影

目录

摘要.....	i
目录.....	ii
第一章 引言.....	1
第一节 黑洞、裸奇点和吸积盘.....	1
第二节 广义相对论渲染器.....	2
第三节 文章结构.....	3
第二章 吸积盘渲染器.....	4
第一节 光线追踪.....	5
第二节 频移和光强.....	7
第一小节 多普勒效应.....	8
第二小节 前灯效应.....	8
第三小节 引力透镜效应.....	10
第三节 吸积盘的渲染.....	12
第三章 史瓦西黑洞和 JMN-1 裸奇点的渲染	17
第一节 史瓦西黑洞模型.....	18
第二节 JMN-1 裸奇点模型	19
第三节 渲染和比较.....	21
第四章 总结和讨论.....	28
参考文献.....	30
致谢.....	33

第一章 引言

第一节 黑洞、裸奇点和吸积盘

众所周知，大量物质在引力作用下收缩时可能塌缩为一个时空上的奇点，且在该点上物质密度、压强和时空度规都会发散[1, 2]。不带电荷的大量物质以球对称方式塌缩时，其最终状态将是一个史瓦西黑洞。在黑洞中心存在一个类时的奇点，而奇点外则存在一个零超曲面，即视界面[3]。由于这个零超曲面的存在，奇点附近的信息无法传播到远处的观察者处，即奇点和时空远处并无因果关系。其他黑洞，包括 Reissner-Nordstrom 黑洞（带电荷，无旋转）、Kerr 黑洞（不带电荷，旋转）、Kerr-Newman 黑洞（带电荷，带旋转）[4]也具有类似的性质，即具有时空奇异性的区域会被视界面所包裹。宇宙监督假设（Cosmic censorship hypothesis）统一的描述了这个特性，即假设任何时空的奇点均会被视界面所包裹[5]。

但是，上述宇宙监督假设仍然未被证明，故也有研究提出了裸奇点的模型。这类时空的奇点之外并没有视界面，故与外部时空是有因果关联的。这意味着在裸奇点附近仍然可能出现可以被观察到的吸积盘。有文章指出这类奇点是有可能通过非均匀物质的塌缩形成的[6, 7]。在裸奇点时空中，最著名且被最多研究的是 JMN 时空[8, 9]和 JNW 时空[10]，在它们的中心存在类时的奇点。本篇论文中主要关注第一类 JMN 时空，即 JMN-1 时空。

关于黑洞、裸奇点和宇宙监督假设，近两年最重大的发现之一为通过视界望远镜（EHT）成功的观测到了 M87 星系中心黑洞吸积盘的毫米波图像[11-13]及其偏振情况[14]。其备受关注的原因之一即吸积盘的观测图像可以提供其中心黑洞的信息，尤其是图像中心的阴影结构即意味着被拍摄的黑洞很可能存在视界和光子球[15]。但与此同时，有阴影的信息也不意味着照片一定拍摄到的是黑洞的吸积盘，其另外一种可能是拍摄到了一个裸奇点的吸积盘。关于此类的讨论可见[16-18]等文献。正因为通过吸积盘图像去反推天体性质这一问题的复杂性，去深

入的研究不同情况下吸积盘的图像是很有意义的,有了更多的关于吸积盘图像的信息,就可以反过来从拍摄的图像中获得更多关于天体本身的性质。

而要更深入的研究吸积盘的图像,首先就要对吸积盘本身进行研究。关于吸积盘,最早的研究包括[19, 20],其中描述了吸积盘的基本模型,它假设吸积盘是一个处于黑洞赤道面上的薄盘,仅通过粘滞力传递能量和产生能量辐射,而不考虑光压等的影响。而后在[21]中,相较之前研究了盘上物质的相对论效应对其影响,且在[22]中又对相对论性吸积盘进行了讨论。额外的,光线弯折会导致盘自己发出的光可以达到自己身上,这个效应也在[23]中被讨论到,但其对 Kerr 黑洞的吸积盘影响较大,而对史瓦西黑洞的吸积盘影响较小。前面这些主要考虑的是类似流体粘滞的效应,而在吸积盘中物质的高速运动也会导致很强的电磁场效应。其中[24]讨论了在有磁场情况下吸积盘上物质的能量释放,[25]更进一步讨论了 Kerr 黑洞吸积盘在磁场作用下的行为、辐射强度、辐射谱和偏振情况,而[26]讨论了在磁场影响下最内稳定半径(ISCO)之内的吸积盘的状态。在[27]中,作者对之前薄盘模型中广泛采用的盘内沿无力矩的假设进行了验证,并确定了其合理性。当然,也有很多工作关注于厚盘的情况,尤其是那些关注黑洞射流的研究,如[28],但在本论文中主要还是采用最早期最简单的 Novikov-Thorne 薄盘模型[20]来进行计算。

第二节 广义相对论渲染器

已知黑洞、裸奇点和吸积盘的特性之后,要分析 EHT 的图像还需要考虑在广义相对论时空中的观察者会观察到的图像如何。物理学家很早就意识到在广义相对论性的时空中,由于光线被时空扭曲,因此物体的成像规律很不同于平直时空中的情况。最早的关于完整图像渲染的尝试可以追溯到[29],其中对 Kerr 黑洞附近的单个发光体成像的位置、频率、亮度等规律进行了研究,而在[30, 31]中就已经给出了史瓦西黑洞附近的吸积盘的外貌和亮度图像。随着电脑的发展,后来物理学家可以更快速便捷的计算吸积盘图像了,这也带来了更高清和动态的图像和更多的关于图像的信息[32]。与此同时,也有人在使用类似的方法计算星空背

景在引力透镜效应下的图像[33, 34], 而关于克尔黑洞附近吸积盘的完整图像则要等到[35], 其计算了一小圈吸积盘在克尔黑洞下的成像和频移情况。在此之后不久就又有了完整吸积盘强度和频移图像[36], 而再往后图像质量的进一步提升就是[37]了, 值得一提的是这个工作最广为人知的是它用于制作电影《星际穿越》中 Kerr 黑洞附近吸积盘的图像。之前也有不少比较粗略的关于裸奇点附近和不寻常时空中的视觉效应的研究, 如[15, 38]。

到目前为止, 甚至有不少公开的代码可以通过光线追踪计算吸积盘的形态[39-41], 但其大多关注于吸积盘的外形特征, 而对引力透镜和时间平均的效应考虑并不完备, 且大多不能简单的提取吸积盘的单个像。相较之下, 本文对提出的渲染器的物理背景进行了更加清晰准确的阐释。此外, 由于该渲染器主要关注球对称时空下的渲染, 因此相较于一般时空下的渲染器, 本文提出的渲染器在处理球对称时空下的渲染问题时不需要对每个像素进行光线追踪, 故效率更高。

第三节 文章结构

在第二章中, 论文将讨论吸积盘渲染器的理论和实现。文中将首先给出问题的一般形式, 而后在第一节中将讨论光如何在时空中传播, 亦即观察者看到的吸积盘外形如何; 在第二节中将讨论观察到吸积盘上发光点发出的光的频率和强度会如何变化, 其中包括了多普勒效应、前灯效应和引力透镜效应的影响; 在第三节中将详细说明如何应用和更改前面得到的结论来计算整个盘面的形态及其各处的亮度和频率, 并给出完整的伪代码。在第三章中, 将首先对围绕球对称静态时空作圆周运动的吸积盘的一般性质进行分析, 并给出稳定轨道的范围和各处的辐射强度, 而后在第一节和第二节中将分别讨论在史瓦西黑洞和 JMN-1 裸奇点这两种特殊情况下吸积盘的样貌和辐射强度, 在第三节中将利用在第二章中描述的渲染器分别对二者吸积盘进行渲染, 并比较二者的吸积盘视觉形态差异。最后, 在第四章中将对全文内容进行总结, 并再次回顾渲染器的特点和史瓦西黑洞和 JMN-1 裸奇点吸积盘图像的特点。

第二章 吸积盘渲染器

这一章将讨论在一个一般的球对称静态时空中如何渲染一个静止于时空某坐标处观察者看到的吸积盘的样貌。如此时空中的度规具有如下的一般形式：

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + g_{\theta\theta}(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

对于渲染吸积盘图像，首先要计算出盘上一发光点 (r, θ, ϕ) 到像面上一点 (x, y) 的一对多映射，同时也要知道其光强和频率 (I_0, f_0) 在观察者眼中的值 (I_1, f_1) 。总的来说，需要求解如下的一对多映射：

$$(r, \theta, \phi, I_0, f_0) \mapsto (x, y, I_1, f_1) \quad (2)$$

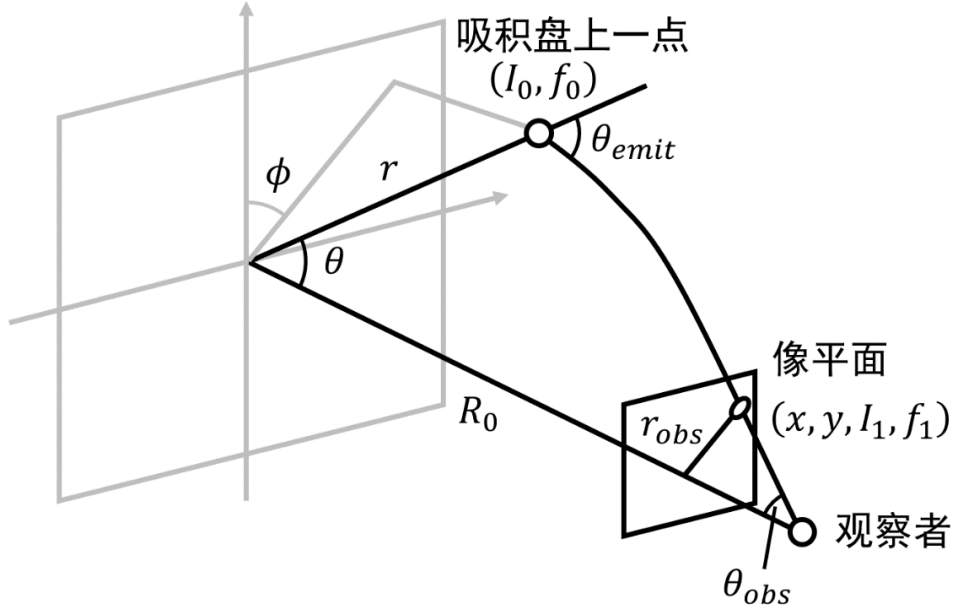


图 1 映射示意图。观察者在坐标系极轴上，即 $\theta = 0$ 处。

注意到论文关注的是一个球对称时空，故不妨将观察者放置在球坐标的极轴上（如图 1 所示），此时观察者、时空中心、吸积盘上点、光线轨迹均在 $\phi = \text{const}$ 的一个平面内，故可以将问题简化为求解如下一对多映射：

$$(r, \theta, I_0, f_0) \mapsto (\theta_{obs}, I_1, f_1) \quad (3)$$

其中 $\sqrt{x^2 + y^2} = r_{obs} = F \tan \theta_{obs}$, F 为像平面距离观察者的距离（焦距）， θ_{obs}

为观察者观察吸积盘上一点发出的光到达的角度。

计算核心步骤主要分为三个部分：一是计算图像的外形，也就是 $(r, \theta) \mapsto (\theta_{obs})$ 这一部分，这由光线在时空中弯曲的情况决定，只需要计算从盘上一点到观察者的类光测地线即可；二是图像的频率和光强，对此有贡献的包括吸积盘本身发光的强度(flux)，即 (I_0, f_0) ，但同时也依赖于由吸积盘中物质移动带来的多普勒效应，前灯效应(Beaming Effect)和引力透镜效应，其中多普勒效应对频率和强度都有贡献，而后两者仅对强度有贡献；最终，还需要将映射应用于实际的吸积盘，来计算出整体的二维图像。

在本章中将依此对这些部分进行讨论。

第一节 光线追踪

光线追踪任务即在(1)给定的时空中计算类光测地线。前面已经说明了由于对称性，光线轨迹在 $\phi = const$ 的平面内，故度规可简化为 2+1 维

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + g_{\theta\theta}(r)d\theta^2 \quad (4)$$

之后的讨论均在如上度规下进行。首先可以计算得到克里斯托弗符号

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \quad (5)$$

不难发现，在该时空中，仅有如下几个不独立分量

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 &= \frac{g'_{tt}(r)}{2g_{tt}(r)}, \Gamma_{00}^1 = -\frac{g'_{tt}(r)}{2g_{rr}(r)}, \Gamma_{11}^1 = \frac{g'_{rr}(r)}{2g_{rr}(r)}, \Gamma_{22}^1 = -\frac{g'_{\theta\theta}(r)}{2g_{rr}(r)}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{g'_{\theta\theta}(r)}{2g_{\theta\theta}(r)} \end{aligned} \quad (6)$$

而后以观察者为起点，在观察者参考系下以不同初始角度 θ_{obs} 发射光线。在观察者所处位置上，可以构造一个局域静止正交归一坐标系

$$\begin{cases} e_t = \frac{\partial_t}{\sqrt{-g_{tt}(R_0)}} \\ e_r = \frac{\partial_r}{\sqrt{g_{rr}(R_0)}} \\ e_{\theta} = \frac{\partial_{\theta}}{\sqrt{g_{\theta\theta}(R_0)}} \end{cases} \quad (7)$$

故观察者看来以初始角度 θ_{obs} 发射的光线，即 $-e_t - \cos \theta_{obs} e_r + \sin \theta_{obs} e_\theta$ ，在史瓦西度规下可以被写为如下形式

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \left(\sqrt{-\frac{g_{rr}(R_0)}{g_{tt}(R_0)}}, -\cos \theta_{obs}, \sqrt{\frac{g_{rr}(R_0)}{g_{\theta\theta}(R_0)}} \sin \theta_{obs} \right) \quad (8)$$

综合初态和测地线方程可得(9)，由此即可数值求解出光线的实际轨迹。

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \\ \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \left(\sqrt{-\frac{g_{rr}(R_0)}{g_{tt}(R_0)}}, -\cos \theta_{obs}, \sqrt{\frac{g_{rr}(R_0)}{g_{\theta\theta}(R_0)}} \sin \theta_{obs} \right) \\ x^\mu \Big|_{\lambda=0} = (0, R_0, 0) \end{cases} \quad (9)$$

在 $x^1 > R_0, x^2 > 3\pi$ 或者光线触碰到视界时停止求解。并在所有的采样点 $x^i = (r, \theta)$ 上，记录初始角度 θ_{obs} 和在该点处局域坐标系下光线与 ∂_r 的夹角

$$\theta_{emit} = \arctan\left(-\frac{dr}{d\lambda}, \sqrt{\frac{g_{\theta\theta}(r)}{g_{rr}(r)}} \frac{d\theta}{d\lambda}\right) \quad (10)$$

通过对 θ_{obs} 进行扫描即可以用追踪光线上的点去“覆盖” $r < R_0$ 且在视界外的平面。插值后就能在任意关心区域内的点 $x^i = (r_1, \theta_1)$ 上得到对应的 $\theta_{obs}(r_1, \theta_1)$ 和 $\theta_{emit}(r_1, \theta_1)$ 。在史瓦西度规下， $R_0 = 15R_s$ 处观察时，处于 $\theta_1 < 2\pi$ 部分的采样点和插值函数 $\theta_{obs}(r, \theta)$ 的图像如图 2 所示。

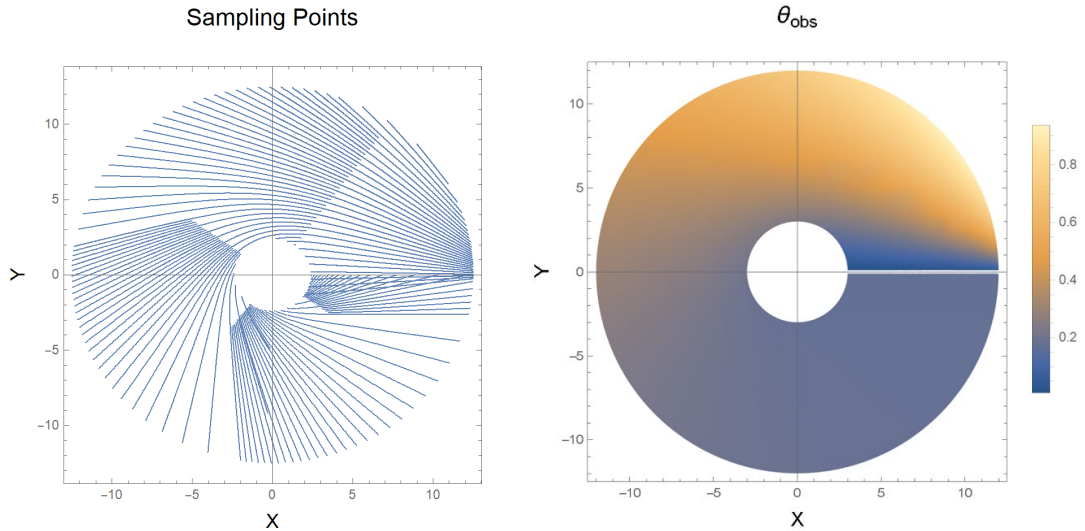


图 2 θ_{obs} 采样点和插值函数图。

由图可知，由于采样点足够密集，故插值函数也十分平滑，这种近似是完全

可行的。此外还可以发现，在 $\theta_1 > \pi$ 时， θ_{obs} 整体变化较为缓慢，均在0.17弧度左右，对应光子球的视觉位置。

对于一个处于 $x^i = (r_1, \theta_1)$, $\theta_1 < \pi$ 处的物体，由于引力透镜效应，观察者实际会看见多个像。不难发现，它们分别应该处于如下位置

$$\theta_{obs}|_{(r_1, \theta_1)} = \theta_{obs}(r_1, \theta_1), -\theta_{obs}(r_1, 2\pi - \theta_1), \theta_{obs}(r_1, 2\pi + \theta_1), \dots \quad (11)$$

示意图如图 3 所示。

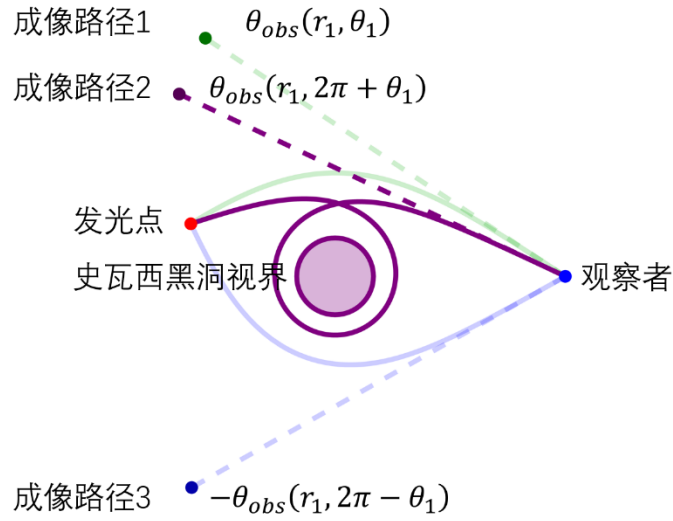


图 3 成像路径和对应的 θ_{obs} 示意图。

之后，为了叙述方便，称 $\theta_{obs}(r_1, \theta_1)$, $-\theta_{obs}(r_1, 2\pi - \theta_1)$, $\theta_{obs}(r_1, 2\pi + \theta_1)$ 所对应的像分别为第一个、第二个和第三个像。

在史瓦西黑洞和 JMN-1 裸奇点的情况下，由于更高阶的像很小且强度很弱，因此可只计算前 3 个像的效果。至此，我们已经得到了足够完整的一对多映射 $(r, \theta) \mapsto (\theta_{obs})$ 。

第二节 频移和光强

这一节将主要处理 $(r, \theta, I_0, f_0) \mapsto (I_1, f_1)$ 这一部分。假设在相对吸积盘上物质静止的参考系下，物质发射的光是各项同性的。由于吸积盘上的物质在运动，在

史瓦西时空某固定坐标处的参考系来看,吸积盘物质发射出来的光会产生多普勒效应和前灯效应,改变发射光的频率、强度的角向分布。而随着光在时空中行进,由于引力红移的影响,其频率和强度还会改变。最终,只有从特定的 $\Delta\Omega$ 立体角内发出的光能被观察者接收到, $\Delta\Omega$ 的大小也将影响最终观察者观察得到的光强度。

第一小节 多普勒效应

多普勒效应反映了因吸积盘上物体运动和引力红移效应而带来的频率和光强度改变,在此讨论一个处于 $x^i = (r_1, \theta_1, \phi_1)$,以速度 $\frac{dx^\mu}{dx^0} = (1, v_r, v_\theta, v_\phi)$ 运动的发光体,其发光方向为 $\frac{dy^\mu}{d\lambda} = \left(\sqrt{-\frac{g_{rr}(R_0)}{g_{tt}(R_0)}}, \cos \theta_{emit}, -\sqrt{\frac{g_{rr}(r_1)}{g_{\theta\theta}(r_1)}} \sin \theta_{emit}, 0 \right)$ 。

在发光体本征系下和观察者系下,频率 f 和单位时间内发射光子数 n 由如下式决定

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{n_0}{n_1} = \frac{\frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dy^\mu}{d\lambda}}{\frac{dx_{obs\mu}}{d\tau} \frac{dy_{obs}^\mu}{d\lambda}} \quad (12)$$

其中 x_{obs}, y_{obs} 分别为观察者的4-速度和光子到达观察者时的4-速度。由于考虑的是稳态时空,因此 ∂_t 为基林矢量,故有

$$\frac{dy_0}{d\lambda} = \frac{dy_{obs0}}{d\lambda} \quad (13)$$

由此可以进一步得到

$$\begin{aligned} \frac{f_0}{f_1} &= \frac{n_0}{n_1} \\ &= \frac{\sqrt{g_{tt}(R_0)}(\sqrt{-g_{rr}(r_1)g_{tt}(r_1)} + g_{rr}(r_1)v_r \cos \theta_{emit} - \sqrt{g_{rr}(r_1)g_{\theta\theta}(r_1)}v_\theta \sin \theta_{emit})}{\sqrt{-g_{rr}(r_1)g_{tt}(r_1)}\sqrt{g_{tt}(r_1) + g_{rr}(r_1)v_r^2 + g_{\theta\theta}(r_1)(v_\theta^2 + \sin^2 \theta_1 v_\phi^2)}} \end{aligned} \quad (14)$$

不难验证,该式在 $v_r = v_\theta = v_\phi = 0$ 时为 $\sqrt{g_{tt}(R_0)/g_{tt}(r_1)}$,是正确的。

第二小节 前灯效应

前灯效应指在本征参考系下各向均匀发光的运动发光体,在静止系下观察各方向发光不再均匀。这是因为在本征系下沿某特定方向 \hat{r} 发出的光在静止系下将

沿 \hat{r}' 方向发出。而光发射方向的变化也就导致在本征系下在 $d\Omega$ 立体角内发出的光，在静止系下变为了于 $d\Omega'$ 立体角内发出。除去多普勒效应带来的频率和强度变化，立体角的变化还会导致单位立体角内发射的光子数变化，因此而带来额外的强度变化。

$$\frac{\left. \frac{dn}{d\Omega} \right|_{prop}}{\left. \frac{dn}{d\Omega} \right|_{stat}} = \frac{d\Omega'}{d\Omega} \quad (15)$$

其中下标 *prop* 代表了本征系下的值，而下标 *stat* 代表了在史瓦西时空中固定空间坐标处的静止系下的值。

该效应是一个纯狭义相对论效应，故在发光点 $x^i = (r_1, \theta_1, \phi_1)$ 处建立局域静止正交归一坐标系

$$\left\{ \begin{array}{l} e_t = \frac{\partial_t}{\sqrt{-g_{tt}(r_1)}} \\ e_r = \frac{\partial_r}{\sqrt{g_{rr}(r_1)}} \\ e_\theta = \frac{\partial_\theta}{\sqrt{g_{\theta\theta}(r_1)}} \\ e_\phi = \frac{\partial_\phi}{\sin \theta \sqrt{g_{\theta\theta}(r_1)}} \end{array} \right. \quad (16)$$

那么发光点运动速度 $\frac{dx^\mu}{dx^0} = (1, v_r, v_\theta, v_\phi)$ 在局域坐标系下可以写为

$$\frac{dx^i}{dx^0} = \sqrt{\frac{g_{rr}(r_1)}{g_{tt}(r_1)}} v_r e_r + \sqrt{\frac{g_{\theta\theta}(r_1)}{g_{tt}(r_1)}} v_\theta e_\theta + \sqrt{\frac{g_{\theta\theta}(r_1)}{g_{tt}(r_1)}} \sin \theta v_\phi e_\phi \quad (17)$$

由此可得发光点相对于局域坐标系的速度为

$$\beta = \sqrt{\frac{g_{rr}(r_1) v_r^2 + g_{\theta\theta}(r_1) (v_\theta^2 + \sin^2 \theta v_\phi^2)}{g_{tt}(r_1)}} \quad (18)$$

发光点于发光方向夹角 α 为

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{\frac{dx^i}{dx^0}}{\left| \frac{dx^i}{dx^0} \right|} \cdot (\cos \theta_{emit} e_r - \sin \theta_{emit} e_\theta) \\
 &= \frac{\sqrt{g_{rr}(r_1)} v_r \cos \theta_{emit} - \sqrt{g_{\theta\theta}(r_1)} v_\theta \sin \theta_{emit}}{\sqrt{g_{rr}(r_1) v_r^2 + g_{\theta\theta}(r_1) (v_\theta^2 + \sin^2 \theta v_\phi^2)}}
 \end{aligned} \tag{19}$$

在静止系下看与发光体运动方向呈 α 角发射的光在发光体本征系下与其运动方向夹角为 α' ，且 α, α' 满足

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - \beta}{1 - \beta \cos \alpha} \tag{20}$$

故有

$$\frac{\left. \frac{dn}{d\Omega} \right|_{prop}}{\left. \frac{dn}{d\Omega} \right|_{stat}} = \frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{\sin \alpha' d\alpha'}{\sin \alpha d\alpha} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos \alpha)^2} \tag{21}$$

第三小节 引力透镜效应

从光源发射的光最终要到达观察者的眼中才能被观察到。因为只有从立体角 $\Delta\Omega$ 内发出的光才能到达观察者眼中，所以 $\Delta\Omega$ 也会直接影响其亮度。论文假定观察者眼睛面积很小（ $\Delta S \ll R_0^2$ ），且观察者眼睛对光的接收是各项同性的，那么可以通过

$$\Delta\Omega = \Delta S \frac{d\Omega}{dS} \tag{22}$$

来计算有多大立体角内的光可以被观察者接收到。 $\frac{d\Omega}{dS}$ 则可以参考下图来计算。

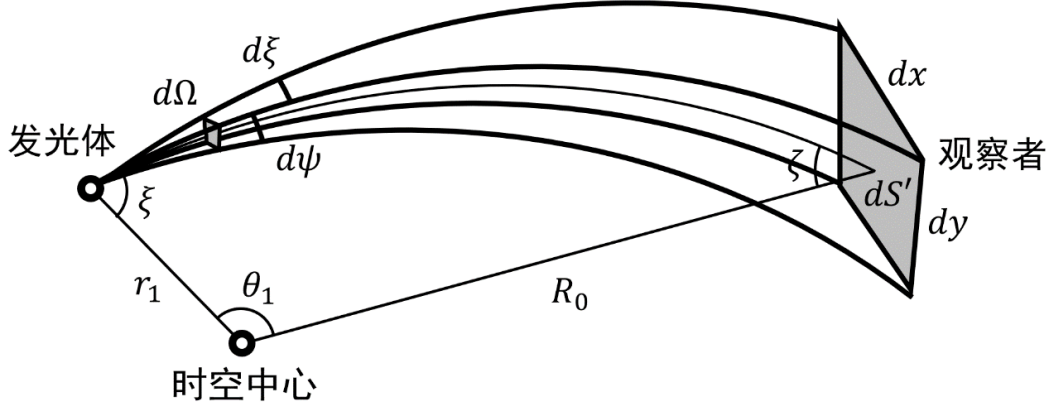


图 4 发光立体角和对应面积示意图。

图中 $d\Omega = d\psi d\xi$ 对应的是发光体发光的立体角范围，范围由四条测地线决定，其中测地线与时空中心和发光体连线的夹角为 $\xi - \frac{d\xi}{2}$ 和 $\xi + \frac{d\xi}{2}$ ，与发光体-时空中心-观察者所张成的平面的夹角为 $\pm \frac{\psi}{2}$ 。 $dS' = dx dy$ 则是对应立体角内的光打在观察者所在处照亮的面积， dS' 面元与时空中心和观察者连线垂直。

由于时空的球对称性， $d\psi$ 对应的两条测地线仅相当于绕发光体和时空中心进行了一个 $d\psi$ 角度的旋转，故可直接得到

$$dy = \frac{R_0 \sin \theta_1}{\sin \xi} d\psi \quad (23)$$

与此同时，利用第一节中描述的数值方法即可追踪与时空中心和发光体连线的夹角为 $\xi - \frac{\Delta\xi}{2}$ 和 $\xi + \frac{\Delta\xi}{2}$ 的两条光线，得到 $\Delta x / \Delta \xi$ ，用来近似的代表 $dx / d\xi$ 。此外，论文假定观察者对各方向来的等强度的光有相同的感知，故需要将 dS 投影到与入射光线方向垂直的面上，即需要在 $dx dy$ 的基础上乘以 $\cos \zeta$ 因子

$$dS = \cos \zeta dS' \quad (24)$$

最终可以得到因引力透镜效应而带来的强度因子

$$\Delta\Omega = \Delta S \frac{d\Omega}{dS} = \Delta S \frac{d\xi d\psi dS'}{dx dy dS} = \Delta S \frac{\Delta\xi}{\Delta x} \frac{\sin \xi}{R_0 \sin \theta_1} \frac{1}{\cos \zeta} \quad (25)$$

不难发现，这里的 ξ, ζ 即之前的 $\theta_{emit}, \theta_{obs}$ ，这样就可以利用第一节中光线追踪得到的结果，结合额外的两次光线追踪，来计算吸积盘上各点因引力透镜效应

带来的光强因子。为了后续计算方便，同之前一样取不同的 (r_1, θ_1) 进行如此操作，并将结果插值，获得引力透镜带来的光强变化函数 $I_g(r, \theta)$ 。

至此，已经可以计算完整的 $(r, \theta, I_0, f_0) \mapsto (\theta_{obs}, I_1, f_1)$ 一对多映射了。我们已经获得了 $\theta_{obs}(r, \theta)$ ，且知道 f_1/f_0 由多普勒效应产生，而关于光强，有

$$\frac{I_1}{I_0} \propto \Delta\Omega \frac{\left. \frac{dn}{d\Omega} \right|_{stat}}{\left. \frac{dn}{d\Omega} \right|_{prop}} \frac{n_1 f_1}{n_0 f_0} \quad (26)$$

第三节 吸积盘的渲染

这一节将讨论如何从 $(r, \theta, I_0, f_0) \mapsto (\theta_{obs}, I_1, f_1)$ 一对多映射计算出吸积盘的完整样貌。这并不是平凡的。不难想象，如果直接将吸积盘上的点映射到观察者平面上，那么将不会得到正确的结果。一个简单的例子是，如果在吸积盘上发光的点粒子的密度是均匀的且发光强度也是相等的，在像平面上这些点被映射到的位置不一定是均匀的，那么在像平面上，发光点的像密的地方会更亮，而疏的地方会更暗。即使考虑进发光点的密度，结果仍然是不正确的，因为光的传播需要时间，导致观察者某一时刻看见的其实是不同时刻时发光的点光源，而由于点光源还在运动，故观察者看到的像分布和点光源静止时的像分布也是不同的。实际上，这种效应会部分抵消掉由多普勒效应带来的 n_1/n_0 因子，下文将详细说明此事。

下面的论述采用时间和系综平均化的视角，不再考虑单个发光体，而是考虑吸积盘上一小块区域和它在观察者眼中呈的像。

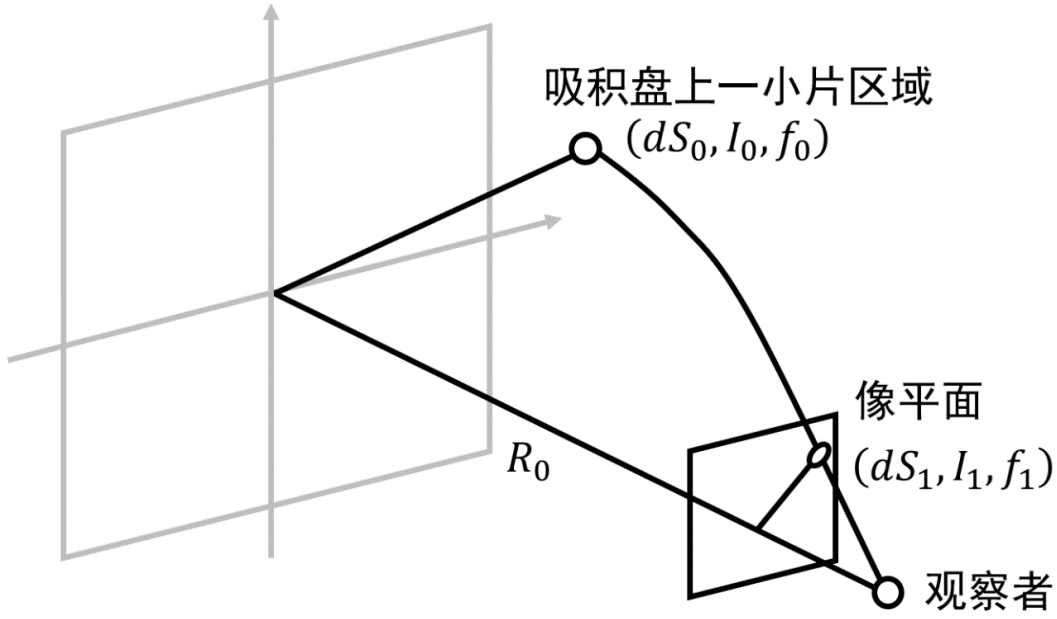


图 5 吸积盘上一小块区域及其像。

在一段坐标时 $T_0 \sim T_0 + \Delta T_0$ 内，认为从吸积盘这一片坐标固定的区域 dS_0 内发出的、能到达观察者的光子总数为 $N\Delta t$ ，且这些光子全落在 dS_1 的区域中。由于 ∂_t 为基林矢量，因此观察者也会在 ΔT_0 的时间内接收到这些光子。而 ΔT_0 的坐标时间隔对于观察者和以速度 $\frac{dx^\mu}{dx^0} = (1, v_r, v_\theta, v_\phi)$ 运动的吸积盘上粒子来说，分别对应固有有时

$$\begin{cases} \Delta T_{obs} = \Delta T_0 / \sqrt{-g_{tt}(R_0)} \\ \Delta T_{emit} = \Delta T_0 / \sqrt{-g_{tt}(r_1) - g_{rr}(r_1)v_r^2 - g_{\theta\theta}(r_1)(v_\theta^2 + \sin^2 \theta_1 v_\phi^2)} \end{cases} \quad (27)$$

故实际上观察者单位时间内接收到的光子数 N_1 和吸积盘这一小片面积上的发光体单位本征时间内发射出的能到达观察者的光子数 N_0 之比为

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{\Delta T_{emit}}{\Delta T_{obs}} = \sqrt{\frac{g_{tt}(R_0)}{g_{tt}(r_1) + g_{rr}(r_1)v_r^2 + g_{\theta\theta}(r_1)(v_\theta^2 + \sin^2 \theta_1 v_\phi^2)}} \quad (28)$$

最终得到吸积盘渲染图像上某区域 dS_1 的亮度 I_1 满足

$$\frac{I_1}{I_0} \propto \frac{dS_0}{dS_1} \Delta\Omega \frac{\left. \frac{dn}{d\Omega} \right|_{stat}}{\left. \frac{dn}{d\Omega} \right|_{prop}} \frac{N_1 f_1}{N_0 f_0} \quad (29)$$

其中 I_0 代表了吸积盘上该处在其本征系下的发光强度，即一般文献中的 flux。相较于之前代表点光源像的光强的(26)式，由于这里考虑的是一个具有大量发光点的吸积盘，因此计算图像亮度时需要将所有发光点的亮度求和并除以其所分布在的面积，故该式中额外增加了 dS_0/dS_1 项。并且，观察者接收到的光子数的关系也不再是之前单发光点情况下的 n_1/n_0 ，而是改为了 N_1/N_0 ，相比于之前少了 $1 - \beta \cos \theta_{emit}$ 的因子，即去掉了纯非相对论效应带来的光子数量变化，这是比较令人费解的。

这里可以考虑一个完全非相对论的例子来理解这个因子的消失。考虑如图 4 所示的一辆在环形道上恒定速率运行的小车，其以固定间隔向观察者抛出一系列球，观察者可以记录球来的方向，并推断小车的位置。

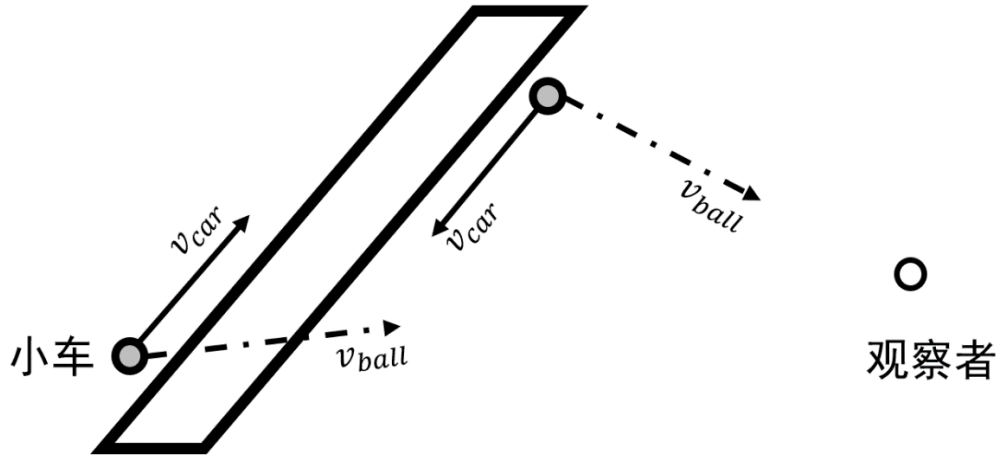


图 6 例子示意图

由于经典多普勒效应，观察者会记录到小车在朝向观察者运行时单位时间接收到小球的数量多于小车远离时的情况。但由于小车本身接近观察者的时间和远离观察者的时间相同，因此小车会在朝向和远离观察者行驶时发射出同样数量的小球。也就是说，从时间平均来看，单位时间内观察者收到的小车远离时发出的小球和小车接近时发出的小球数量相同，不存在多普勒效应的因子。其原因在于观察者看来，小车朝向他运行时发出的小球会在更短的时间内全部到达，故虽然单位时间内接收到的球更多，但球的总数和小车远离时发出的小球数目相等。

至此，我们已经完成了渲染吸积盘的全部步骤，下面给出完整的伪代码：

Error! Use the Home tab to apply 标题 1 to the text that you want to appear here.

算法 1：渲染吸积盘

前提条件：静态球对称时空下的稳态吸积盘。

输入：时空度规 g

观察者位置 R_0

吸积盘上各个微小面元的大小 ΔS_0 ，位置 x^i ，速度 dx^i/dx^0 ，发光频率 f_0
(或频谱)和发光强度 I_0

- 1 程序开始。
 - 2 用(5)计算克里斯托弗符号 $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ 。
-

光线追踪

- 3 如(9)建立微分方程组。
 - 4 对每一个 θ_{obs} ：
 - 5 计算微分方程组，求解光轨迹。
 - 6 在光轨迹上取一系列采样点。
 - 7 对光线轨迹上每一个 (r_1, θ_1) ：
 - 8 记录 θ_{obs} 和由(10)式计算得到的 θ_{emit} 。
 - 9 将记录到的所有采样点 (r_1, θ_1) 和 $\theta_{obs}, \theta_{emit}$ 进行插值，得到插值函数 $\theta_{obs}(r, \theta)$ 和 $\theta_{emit}(r, \theta)$ 。
-

计算引力透镜效应

- 10 对于每一个 (r_1, θ_1) ：
 - 11 计算 $\theta_{obs}(r_1, \theta_1)$ 和 $\theta_{emit}(r_1, \theta_1)$ 。
 - 12 以

$$\begin{cases} \left. \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \left(\sqrt{-\frac{g_{rr}(r_1)}{g_{tt}(r_1)}}, \cos(\theta_{emit} \pm \Delta\xi), -\sqrt{-\frac{g_{rr}(r_1)}{g_{\theta\theta}(r_1)}} \sin(\theta_{emit} \pm \Delta\xi) \right) \\ x^\mu|_{\lambda=0} = (0, r_1, \theta_1) \end{cases}$$

为初态，追踪光线（同(9)式）直至 $x^1 = R_0$ ，记录终止点的 x^2 之差 $\Delta\theta$ 。

- 13 同(25)计算引力透镜带来的光强因子

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta\xi}{\Delta\theta} \frac{\sin \theta_{emit}}{\sin \theta_1} \frac{1}{\cos \theta_{obs}}$$

- 14 将记录到的所有采样点 (r_1, θ_1) 和 $\Delta\Omega$ 进行插值，得到插值函数 $\Delta\Omega(r, \theta)$ 。
-

计算吸积盘上各点的位置、频率和强度，绘制吸积盘的像

- 15 对吸积盘上每一点 $x^i = (r_1, \theta_1, \phi_1)$:
- 16 计算 $\theta_{obs}(r_1, \theta_1), -\theta_{obs}(r_1, 2\pi - \theta_1), \theta_{emit}(r_1, 2\pi + \theta_1)$ 。
- 17 计算 $-\theta_{emit}(r_1, \theta_1), \theta_{emit}(r_1, 2\pi - \theta_1), -\theta_{emit}(r_1, 2\pi + \theta_1)$ 。
- 18 计算吸积盘该处发光体的速度 dx^i/dx^0 、发光强度 I_0 、频率 f_0 （或频谱）。
- 19 对于上面每一对 $\theta_{obs}, \theta_{emit}$ ，即每一个像：
- 20 于 $(x, y) = (\cos \phi_1 \tan \theta_{obs}, \sin \phi_1 \tan \theta_{obs})$ 处绘制其像。
- 21 据(14)计算出 f_1 ，绘制颜色。
- 22 据(12,21,28)式计算 $I_{raw} = \Delta\Omega(r_1, \theta') \frac{\frac{dn}{d\Omega}|_{stat}}{\frac{dn}{d\Omega}|_{prop}} \frac{N_1 f_1}{N_0 f_0}$ ，这里 θ' 即 16、17 行中函数的第二个参数值，为 $\theta_1, 2\pi - \theta_1, 2\pi + \theta_1$ 中的一个。
- 23 计算吸积盘上该点对应的面元面积 ΔS_0 和其在相平面上的大小 ΔS_1 。
- 24 计算该点光强 $I = \frac{\Delta S_0}{\Delta S_1} I_{raw}$ 并绘制。
- 25 对于上面每一个像：
- 26 以各点的该像为顶点，绘制吸积盘整体图像（一共会计算吸积盘的三个图像，分别对应三对 $\theta_{obs}, \theta_{emit}$ ）。面元颜色由顶点插值决定。

基于吸积盘的物理模型，综合吸积盘的像

- 27 如果是光学厚吸积盘（即不透明的吸积盘）
- 27 先绘制由第三个像，再在其上绘制第二个像，最后在其上绘制第一个像。
- 28 程序结束。
- 29 如果是光学薄吸积盘（即完全透明的吸积盘）
- 30 将三张生成的图像直接叠加。
- 31 程序结束。

第三章 史瓦西黑洞和 JMN-1 裸奇点的渲染

首先要讨论一下在一个由(1)给出的时空中，吸积盘可能在什么半径下存在，而在各个地方的发光强度是多少。因为这是个球对称时空，所以总可以通过旋转将吸积盘放置在 $\theta = \pi/2$ 的赤道面上，时空化简为

$$ds^2 = g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + g_{\theta\theta}(r)d\phi^2 \quad (30)$$

显然这里有 $\partial_t, \partial_\phi$ 均为基林矢量，故可以获得守恒量

$$\begin{cases} E = -g_{tt}(r) \frac{dt}{d\tau} \\ L = g_{\theta\theta}(r) \frac{d\phi}{d\tau} \end{cases} \quad (31)$$

其中 τ 代表吸积盘上发光体的固有时。将其带入有质量粒子的归一化条件

$$-1 = g_{tt}(r) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + g_{rr}(r) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + g_{\theta\theta}(r) \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 \quad (32)$$

可以得到

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{g_{rr}(r)} \left(\frac{E^2}{g_{tt}(r)} + \frac{L^2}{g_{\theta\theta}(r)} + 1 \right) = 0 \quad (33)$$

令第二项为有效势 $V(r)$ 。若半径 r 处存在稳定轨道，则要求

$$\begin{cases} V(r) = 0 \\ V'(r) = 0 \\ V''(r) > 0 \end{cases} \quad (34)$$

由前两式可得

$$\begin{cases} E = -g_{tt}(r) \sqrt{\frac{g'_{\theta\theta}(r)}{g_{\theta\theta}(r)g'_{tt}(r) - g'_{\theta\theta}(r)g_{tt}(r)}} \\ L = g_{\theta\theta}(r) \sqrt{\frac{-g'_{tt}(r)}{g_{\theta\theta}(r)g'_{tt}(r) - g'_{\theta\theta}(r)g_{tt}(r)}} \end{cases} \quad (35)$$

故 r 处轨道角速度为

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{-\frac{g'_{tt}(r)}{g'_{\theta\theta}(r)}} \quad (36)$$

将(35)带入(34)的第三式可得稳定性判据为：

$$(g'_{\theta\theta}(r)g_{tt}(r) - g_{\theta\theta}(r)g'_{tt}(r))(g_{\theta\theta}(r)(2g'_{tt}(r)^2g'_{\theta\theta}(r) - g_{tt}(r)g''_{tt}(r)g'_{\theta\theta}(r) + g_{tt}(r)g'_{tt}(r)g''_{\theta\theta}(r)) - 2g_{tt}(r)g'_{tt}(r)g'_{\theta\theta}(r)^2) > 0 \quad (37)$$

关于吸积盘模型，在后面的计算中将采用[20]中描述的 Novikov-Thorne 薄盘模型。在所考虑的球对称静态时空下，用该模型计算得到的盘上辐射强度 $F(r)$ 满足

$$F(r) = -\frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{-g}}\frac{\Omega'}{(E - \Omega L)^2}\int_{r_{in}}^r (E - \Omega L)L' dr \quad (38)$$

其中 $r_{in}, \dot{M}, \sqrt{-g}$ 分别代表吸积盘的内径、物质积累率（Mass accretion rate）和对应位置的体积元大小。后面的两节将对史瓦西黑洞和 JMN-1 裸奇点情形分别计算其吸积盘状态并进行渲染。

第一节 史瓦西黑洞模型

对于史瓦西黑洞，其度规为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{R_s}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (39)$$

其中 $R_s = 2M$ 为黑洞的史瓦西半径。带入(36)可得吸积盘上物质的角速度

$$\Omega = \sqrt{\frac{R_s}{2r^3}} \quad (40)$$

即在越靠近奇点的地方角速度越快。事实上，该公式和经典的多普勒公式是一致的。带入(37)并结合(35)中 E 是实数的隐含条件，容易发现吸积盘可以稳定存在于

$$r > 3R_s \quad (41)$$

处。即 $r = 3R_s$ 为 ISCO（Innermost stable circular orbit）。

利用(38)计算辐射强度可以得到

$$F(r) = \frac{3\dot{M}\left(\frac{R_s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{8\pi r^{\frac{5}{2}}\left(r - \frac{3}{2}R_s\right)} \left(\sqrt{\frac{2r}{R_s}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{r} - \sqrt{\frac{3}{2}R_s}}{\sqrt{r} + \sqrt{\frac{3}{2}R_s}} - \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \quad (42)$$

第二节 JMN-1 裸奇点模型

对于 JMN-1 裸奇点，其度规为

$$ds^2 = -(1 - M_0) \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{M_0}{1-M_0}} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - M_0} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (43)$$

其中 M_0 被限制在 $[0, 0.8]$ 的区间内。并且 JMN-1 时空在 $r = R_b$ 处与外部的史瓦西时空缝合。为了能将两个空间连续的拼接上，要求

$$R_s = M_0 R_b \quad (44)$$

显然，该时空于 $r = 0$ 处存在一个类时的裸奇点。该时空在 $M_0 > \frac{2}{3}$ 时存在光子球（Photon sphere），且光子球存在于外部相接的史瓦西时空中[42]。故观察到其吸积盘的样貌极为接近史瓦西黑洞的吸积盘样貌，且存在阴影。而在 $M_0 < \frac{2}{3}$ 时，不存在光子球，故观察者将会看到类似于“满月”状的图像，且不存在阴影[38]。

同样，可以利用(36)计算得到 JMN-1 时空中吸积盘上物质的角速度

$$\Omega = \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{R_s}{R_b - R_s}} R_s}}{2R_b r^2} \quad (45)$$

可以发现，在中心的 JMN-1 时空中，越靠近奇点，物质运动的线速度越低，且在趋近于裸奇点时为 0，这和史瓦西时空中的吸积盘特性是完全不同的（当然，史瓦西黑洞的吸积盘也不会出现在靠近黑洞奇点处）。用(37)和(35)计算得到吸积盘可以稳定存在的半径。考虑内部的 JMN-1 时空，可以得到一个特征半径

$$r_{sd} = R_b \sqrt{3M_0(2 - 3M_0)} \quad (46)$$

在 $R_b < 3R_s$ 时，吸积盘存在于 $[0, R_{sd}] \cup [3R_s, +\infty]$ 半径处，而在 $R_b > 3R_s$ 时，可以看到 $r = 3R_s$ 不再存在于史瓦西时空当中，而是存在于 JMN-1 时空当中，此

时从奇点延续到无穷远均可存在稳定轨道。图 7 中更好地展现吸积盘在不同情况下可以存在的范围

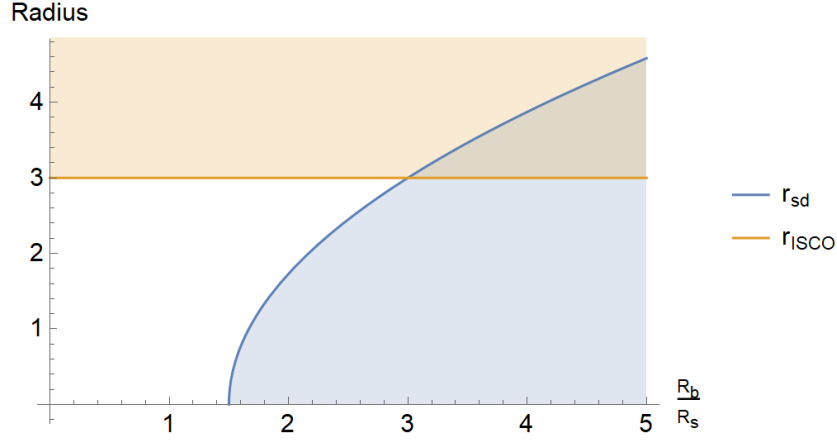


图 7 吸积盘可以存在的范围图。其中阴影位置即可存在吸积盘的位置。

如图 7 所示，可以明显的看到，当 $R_b < 1.5R_s$ 时仅有一个吸积盘，在 $R_b = 1.5R_s$ 时出现第二个吸积盘， $1.5R_s < R_b < 3R_s$ 时存在分离的两个吸积盘，在 $R_b = 3R_s$ 时两盘相接，而后 $R_b > 3R_s$ 时合为一整个盘。

参考[38]可直接给出在该时空下的吸积盘辐射强度。在 $R_b < 1.5R_s$ 时，由于吸积盘完全处于外部的史瓦西时空当中，因此 $F(r)$ 与(42)中给出的一致。在 $1.5R_s < R_b < 3R_s$ 时，外盘仍然处于史瓦西时空当中，且与内盘分立，故外盘的辐射强度仍然与(42)一致，而内盘的辐射强度为

$$F(r) = \frac{\dot{M}M_0}{4\pi R_b^2} \left(\frac{r}{R_b} \right)^{\frac{3M_0-4}{2(1-M_0)}} \quad (47)$$

对于 $R_b > 3R_s$ 的情况，因为两盘已经相接，故由(38)给出的积分中的下限 $r_{in} = 0$ ，而非 $r_{in} = 3R_s$ ，因此即使对处于史瓦西时空中的吸积盘，其辐射强度也会有所影响。在该情况下，处于 JMN-1 时空中的吸积盘辐射强度仍然遵循(47)式，而处于史瓦西时空中的吸积盘的辐射强度相较之前的(42)需要添加一项

$$F(r) = \frac{\dot{M}M_0}{4\pi R_b^2} + \frac{3\dot{M}\left(\frac{R_s}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{8\pi r^{\frac{5}{2}}\left(r - \frac{3}{2}R_s\right)} \left(\sqrt{\frac{2r}{R_s}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{r} - \sqrt{\frac{3}{2}R_s}}{\sqrt{r} + \sqrt{\frac{3}{2}R_s}} - \sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \Bigg|_{R_b}^r \quad (48)$$

为了更好地理解之后的图像，可以绘制一下几种特征情况下的辐射强度随半径的变化。

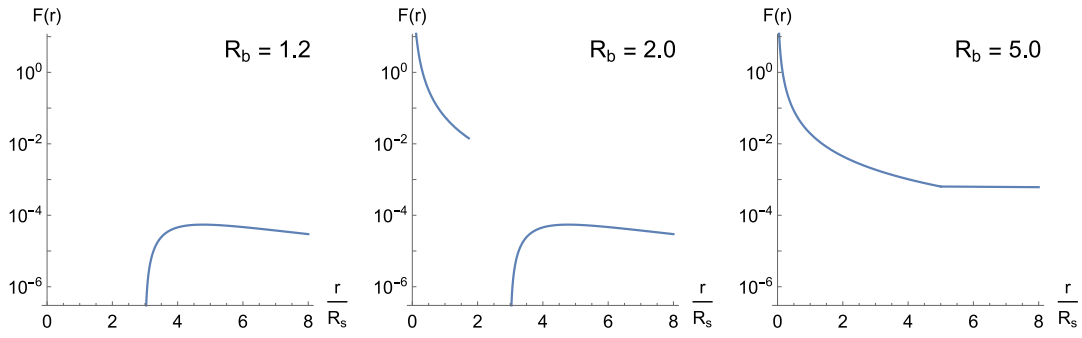


图 8 吸积盘辐射强度随半径图

从图中可以明显的看出，在 $R_b < 1.5R_s$ 时，即仅有史瓦西时空中的吸积盘时，史瓦西时空中的吸积盘为内侧暗，约 $4R_s$ 时最亮，而后随着半径增大吸积盘缓慢变暗的趋势。而在 $R_b > 1.5R_s$ 时，出现延续到奇点的中心吸积盘，其辐射强度比史瓦西黑洞高出两到三个数量级，且越靠近裸奇点，吸积盘强度急剧提高。故可以猜想，在 $R_b > 1.5R_s$ 情况下的吸积盘图像中，中心盘对应的区域会明显比外围盘对应的区域呈数量级的亮。比较特别的一点是，当 R_b 从 $(3 - \epsilon)R_s$ 变为 $(3 + \epsilon)R_s$ （ ϵ 为无穷小量）时，于 $3R_s$ 外的吸积盘亮度会有不连续的增高，将变大 $\frac{\dot{M}M_0}{4\pi R_b^2}$ ，这是因为对 $3R_s$ 外的吸积盘来说，积分下限从 $3R_s$ 降为了 0。

第三节 渲染和比较

利用在第二章中说明的渲染器可以对前面史瓦西黑洞和 JMN-1 裸奇点附近的吸积盘进行渲染。文章中将尽量多的展示渲染过程中的一些中间结果及它们的

视觉效应。

在后面的所有图像中，将考虑史瓦西黑洞（其图像和 $R_b < 1.5R_s$ 的 JMN-1 裸奇点图像相同）和 $R_b = 1.6R_s, 2R_s, 3.3R_s$ 三种不同参数下的 JMN-1 裸奇点，对四种情况下吸积盘的形貌进行分析。选取的这四种情况分别对应光子球，或者说 $R_b < 1.5R_s$ 、 R_b 略大于 $1.5R_s$ 、 R_b 处于 $1.5R_s \sim 3R_s$ 之间和 $R_b > 3R_s$ 。它们的吸积盘图像都有独特的特点，且之间有极大的差别。

在渲染中，观察者被放置在 $15R_s$ 处，且认为吸积盘向外延伸到最远 $10R_s$ 处，与观察者和时空中心的连线呈 10 度角。这意味着和之前的工作[38]不同，本文讨论的是一个靠近黑洞或裸奇点的观察者。当然，将本文的结果和[38]中进行比较，可以发现由于 $15R_s$ 仍然数倍大于 R_s, R_b 等尺度，故整体吸积盘的特征还是一致的，其中得出的结论对观察者在无穷远的情况来说一样适用。并且，本文中描述的代码在经过参数调整后也完全可以渲染观察者位于数百倍 R_s 的情况。对于薄盘的光学性质，在不多加说明时，本文采用光学薄盘的模型，即盘除了发光外是透明的。采取光学薄盘的假定完全是为了更好地展示其多个像的结构，在图 10 中也展示光学厚盘情况下的渲染结果。

对后处理，在不多加说明的情况下，本文中用颜色来代表频移情况。其中白色代表无频移情况，而越蓝代表频率越高，越黄越橙则代表频率越低。文中用图像亮度代表观察到的亮度情况。但由于吸积盘亮度会横跨多个量级，因此本文中的图片一律将亮度进行 $1/2.2$ 次方后再显示以更好地展示亮暗细节，且在一台标准的 $\gamma = 2.2$ 的显示器上，这样处理后显示器上展现的亮度即实际观察的亮度。

图 9 展示这几个情况下渲染得到的吸积盘形貌。

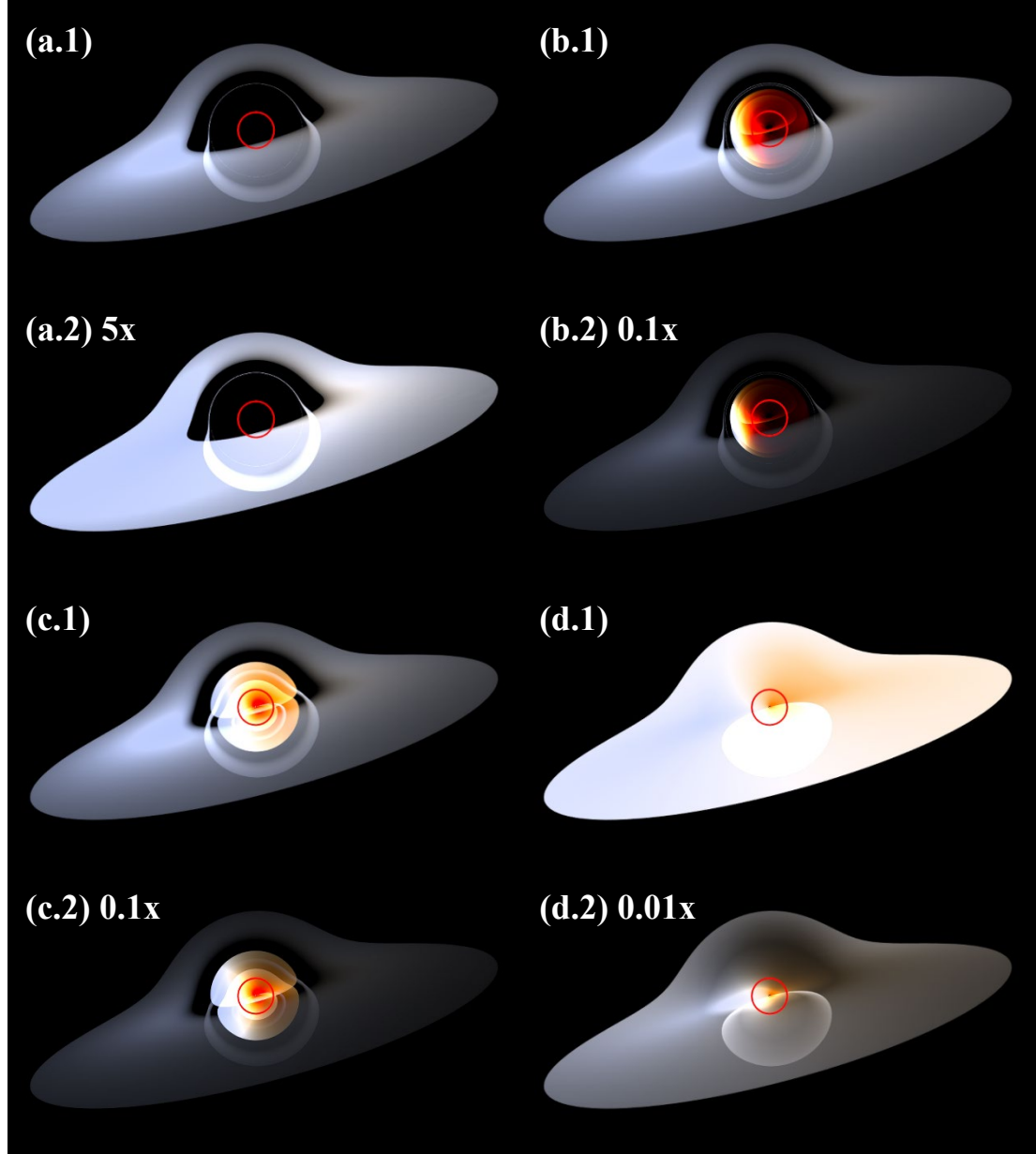


图 9 吸积盘形貌图。其中图像亮度即观察到的吸积盘亮度，颜色代表相较于发光体本征系下的频率变化，偏蓝即频率变高，偏红则频率变低。图像中心的红圈代表史瓦西半径的大小。(a)组代表史瓦西黑洞的吸积盘图像，(b~d)分别代表 $R_b = 1.6, 2.0, 3.3$ 下 JMN-1 裸奇点的吸积盘图像。其中(a.1)~(d.1)组情况下采用了相同的 \dot{M} 和同样的亮度显示标准，故亮度可以进行比较，而(a.2)~(d.2)为了更好观察吸积盘亮度分布，相对于(a.1)~(d.1)进行了亮度放缩，放缩倍数可见于编号旁。

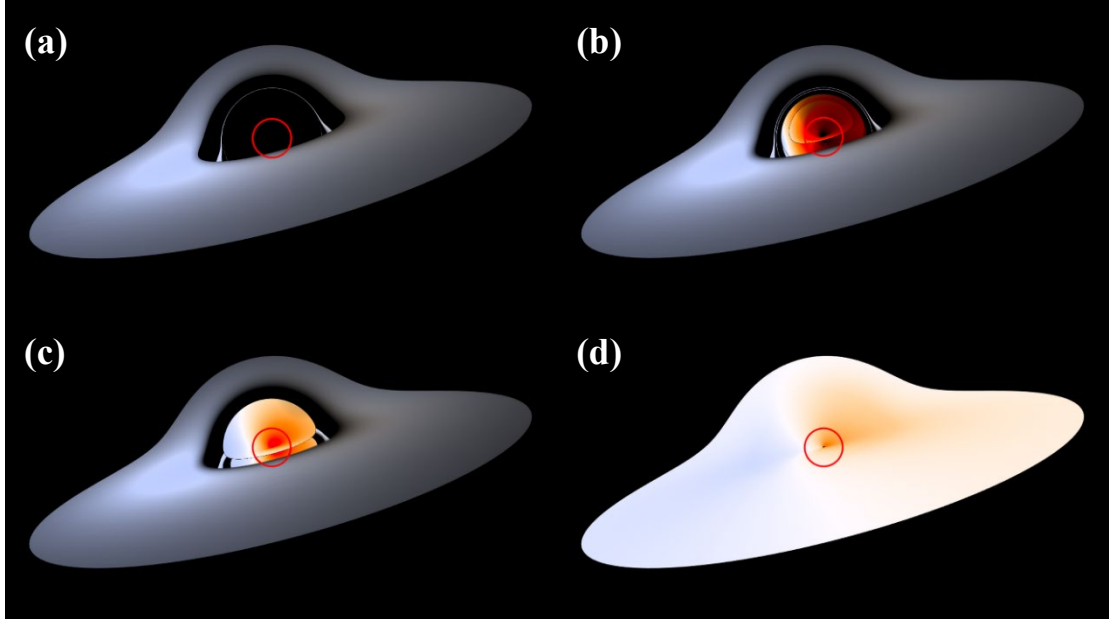


图 10 吸积盘形貌图（光学厚盘情况）。本图展示了光学厚吸积盘的形貌，图中亮度和颜色代表的意义同图 9。图像顺序也和图 9 一致，(a)组代表史瓦西黑洞的吸积盘图像，(b~d)分别代表 $R_b = 1.6, 2.0, 3.3$ 下 JMN-1 裸奇点的吸积盘图像。

从外形上看，几种情况下的吸积盘图像的外轮廓是一致的。这也是很合理的：对于 $r_1 = 10R_s$ 的一圈吸积盘，其发射的光到达观察者的最近路径距离时空中心约为 $4.5R_s$ ，即在所考虑的所有情况下都不会与 JMN-1 时空部分相交。史瓦西黑洞的吸积盘图像中间有一片无光的区域，且围绕着一圈细小的像，即第三个像。这里第三个像已经非常接近于光子球的视觉位置了，其形貌也非常接近于圆形（关于第三个像的样貌可见图 11）。在第三个像之外是紧贴着其的第二个像。而在 JMN-1 时空中没有光子球的情况下，由于内部吸积盘的出现，从内部的积极盘处发出的光会占据光子球视觉位置的内部区域。在 $R_b = 1.6R_s$ ，即略大于 $1.5R_s$ 时，虽然光子球视觉位置之外的部分并无很大的变化，但其内部出现了一个圆形的像，且其最中心位置是较为暗淡的。但是当 R_b 逐渐变大时，内部吸积盘的半径也逐渐变大，且其像会超出光子球的视觉位置，呈一个馒头状，此时仍然能在图像的下半部分观察到外环第二个、第三个像的部分。在 $R_b = 3.3R_s$ 的图像中，即 $R_b > 3R_s$ 时，由于内外盘合为一体，故整张图像内部完全没有阴影，

而是形成一片。为了更好地观察吸积盘各个像的形貌，还可以分开渲染各个吸积盘的像。四种吸积盘的前三个像分别作图如图 11 所示。

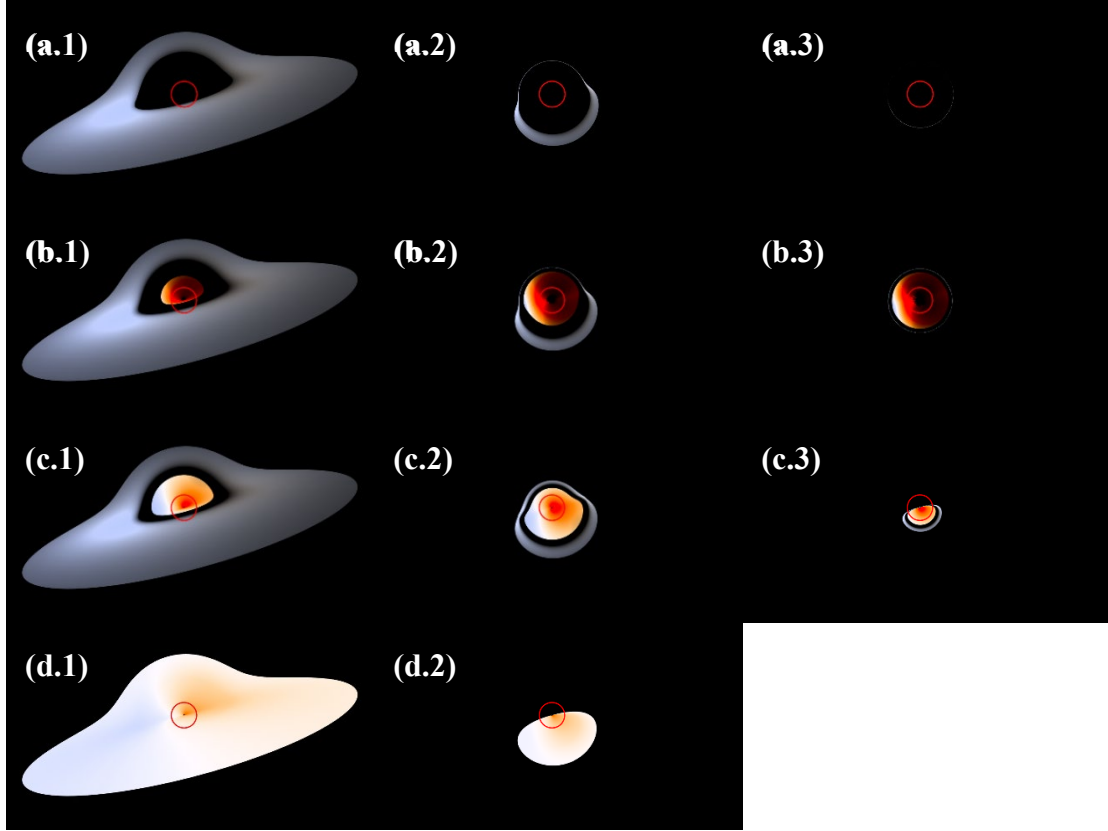


图 11 吸积盘各个像的形貌图。图中亮度和颜色代表的意义同图 9。(a)组代表史瓦西黑洞的吸积盘图像，(b~d)分别代表 $R_b = 1.6, 2.0, 3.3$ 下 JMN-1 裸奇点的吸积盘图像。序号中的数字代表第几个像。

此时可以更好的看到， $R_b = 1.6R_s$ 时 JMN-1 裸奇点外盘的像的整体形态和史瓦西黑洞的吸积盘形态是类似的，而只是多了个内盘的像，且内盘的第二个、第三个像接近圆形。这是比较好理解的，因为此时 JMN-1 时空所在的范围仅略微超出原本光子球的范围，故也不会对大量光线的偏折情况产生影响。而在 R_b 增大到 $2R_s$ 时，内部 JMN-1 时空对光线的偏折效应就明显了起来。其中内盘的第二个、第三个像不再类似圆形，而且外盘的第二个、第三个像也不再和史瓦西情况一致。可以观察到，在 $R_b = 2R_s$ 的情况下，第三个像就已经不完整了，只有部分吸积盘发出的光可以绕奇点 2π 以上并达到观察者。在 R_b 更大的时候，甚至可能不存在高阶的像（甚至三阶的像），因为光线即使直接对准裸奇点附近发射，也不可能

绕裸奇点旋转过多圈。 R_b 越大，像越少。

再来关注频率方面，由于盘左侧的物质在接近观察者，而右侧在远离观察者，所以很明显第一个和第三个像左侧会偏蓝而右侧偏红。虽然第二个像的左侧其实对应吸积盘右侧物质，但右侧物质向远离观察者方向发光才可以形成第二个像，故也符合左侧偏蓝右侧偏红的规律，上述是符合多普勒效应原理的。对于史瓦西黑洞附近靠近黑洞部分的吸积盘来说，由吸积盘物质运动带来的多普勒效应超过了由 $g_{tt}(r)$ 在发光处和观察者处不同而带来的引力红移效应，故即使是吸积盘内侧，仍然左侧偏蓝右侧偏红。然而，对于 JMN-1 裸奇点的吸积盘，这则不一定成立，JMN-1 裸奇点内盘处于 JMN-1 时空中，而前面(45)给出了吸积盘上发光体的速度在越靠近中心处越小，故此时在裸奇点附近的吸积盘的引力红移效应会显著大于因发光体运动而带来的多普勒效应，从而会明显的偏红。

强度方面，首先观察史瓦西黑洞的吸积盘。最外盘左侧由于盘上物质朝向观察者运动，故多普勒效应和前灯效应均会让盘变得更亮。并且很明显，在盘左侧靠内处亮度达到最亮，这既是因为此处的发光体在自身本征系下辐射强度强，也是因为其运动速度较快，故多普勒效应更强烈。而由于文章中采用的是光学薄盘模型，所以还可以观察到盘的第二个像的左侧一小部分区域也很亮，这是因为这片区域其实是很大一个范围的吸积盘的像，故虽然(29)中 $\Delta\Omega$ 小，但 $\frac{dS_0}{ds_1}$ 很大，再叠加上多普勒效应带来的增强，最终甚至可能比第一个像的最亮处还亮。对于 JMN-1 裸奇点，在 $R_b = 1.6R_s$ 时，内盘仅延伸到约 $0.77R_s$ 处，还很小，因此其对应的像还并不很亮。而且图像中心位置对应的吸积盘因所处位置 $g_{tt}(r_1)$ 很小，故引力红移带来的变暗很显著，导致还是会产生一个中心较暗的图像。如果 R_b 更接近 $1.5R_s$ ，其图像还会和史瓦西黑洞更类似。但是当 R_b 进一步增大时，由于内盘变大，且其强度数百倍于外盘，故图像中最亮的部分全集中于内盘的像部分，即在图像中间。在史瓦西黑洞情况下位于此的黑洞阴影消失，此时图像和史瓦西黑洞的图像已经差距非常大了。而在 $R_b > 3R_s$ 后，由于外盘强度也增加很多，因此整个图像的亮度相对于史瓦西黑洞的情况已经强了数百倍。

再之后，还可以去掉盘本身辐射强度的差别，来专注观察各效应对发射光强度的影响。在图 10 中，取辐射强度函数

$$F(r) = 1 \quad (49)$$

后再进行渲染。

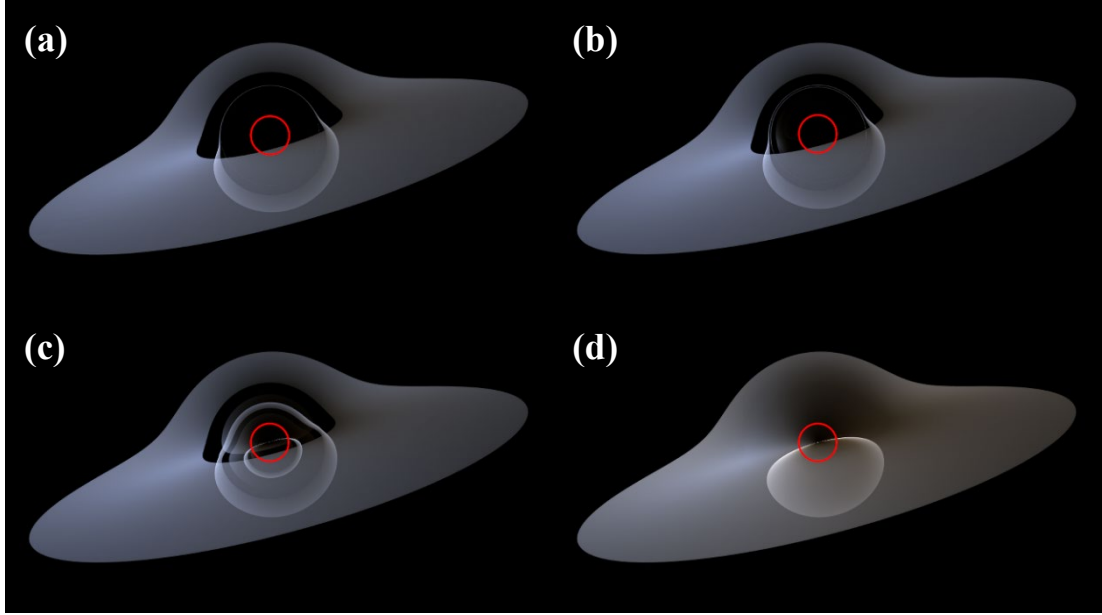


图 12 吸积盘形貌图 ($F(r) = 1$ 情况)。本图展示了当忽略盘面本身的发光强度分布后的吸积盘形貌。图中亮度和颜色代表的意义同图 9。图像顺序也和图 9 一致，(a)组代表史瓦西黑洞的吸积盘图像，(b~d)分别代表 $R_b = 1.6, 2.0, 3.3$ 下 JMN-1 裸奇点的吸积盘图像。

不难发现，此时 JMN-1 裸奇点在 $R_b < 3R_s$ 情形下内盘亮度很低，在 $R_b > 3R_s$ 时中心亮度也很低，故之前内盘亮完全是因为其在本征系下辐射强度过强所致，而引力透镜效应和引力红移都会导致内盘被观察者观察到的亮度远低于其实际辐射强度。

总之，在 $R_b < 1.5R_s$ 时，由于 JMN-1 时空仍然存在光子球且存在于外部的史瓦西时空中，故无法通过其吸积盘图像来分辨吸积盘是围绕 JMN-1 裸奇点运行还是绕史瓦西黑洞运行。但当 $R_b > 1.5R_s$ 时，阴影很快会被内盘的像填满，从而和史瓦西黑洞附近的吸积盘图像产生明显差别，而在 R_b 进一步增加到 $2R_s$ 以上时，图像中心将会是一个十分亮的内盘的像，而非阴影了。在 R_b 再增加到 $3R_s$ 以上时，内外盘连接成一个整体盘，且辐射强度也会大幅增加。

第四章 总结和讨论

本文首先提出了一种物理正确的针对球对称稳态时空结构附近吸积盘图像的渲染器。该渲染器利用数值求解测地线方程来计算吸积盘的外形，并考虑了由于吸积盘上发光体运动和引力红移效应带来的多普勒频移和由多普勒效应、前灯效应和引力透镜共同导致的亮度变化。并且，论文还详细分析了单个发光体成像时的亮度规律和面元成像时亮度规律的差别，并基于此导出了正确的吸积盘图像亮度公式。该算法需要在固定时空度规和观察者位置后先进行插值函数 $\theta_{emit}, \theta_{obs}, \Delta\Omega$ 的计算，但之后可以快速的对任意吸积盘形貌进行渲染。

本文还展示了史瓦西黑洞在 $r > 3R_s$ 处存在吸积盘，而 JMN-1 裸奇点在 $1.5R_s < R_b < 3R_s$ 时还会额外出现一个从奇点延伸出的内部吸积盘，且在 $R_b > 3R_s$ 时可以在任意半径上存在吸积盘，随后计算了 Novikov-Thorne 薄盘模型下对应的吸积盘辐射强度。作者利用前文提到的渲染器对史瓦西黑洞和 $R_b = 1.6R_s, 2R_s, 3.3R_s$ 的 JMN-1 裸奇点附近的吸积盘图像进行了渲染，并展示了其吸积盘的前三个像的强度和频移情况。四种情况下的吸积盘图像外轮廓一致，但内部结构不同。在 $R_b = 1.6R_s$ 情况下的 JMN-1 裸奇点附近吸积盘图像和黑洞吸积盘图像最大的差别在于其内盘的像会出现在图像中间“填充”上阴影，其亮度与外盘的像可比拟，但其最中心部分由于引力红移的效果仍然是暗淡的。而在 R_b 进一步增大到 $R_b = 2R_s$ 时，内盘的像就变得数倍亮度于外盘的像，至此开始 JMN-1 的吸积盘图像和史瓦西黑洞的吸积盘图像开始有巨大的差别。而在 $R_b = 3.3R_s$ 时，一个从裸奇点一直延伸出的极亮吸积盘占据了全图。

关于进一步的工作，在论文中只讨论了发光频率的变化，而没有精确地表征吸积盘发光的频谱特性。可以想见，吸积盘各处发光的频谱特性也会是不同的，靠近内部的吸积盘温度较高，故辐射的频率也会较高。如果可以进一步调研吸积盘本身的特性，了解吸积盘发光的频谱特征，利用现有渲染器即可得到观察者会看到的频谱图和每个频段的强度图。由于实际上天文观测都会是针对某一特定波段，故这样更进一步的计算得到频谱特征可能有更直接的参照作用。额外的，本渲染器也可以直接用来渲染时空对背景环境的扭曲，这对传统意义上黑洞和裸奇

Error! Use the Home tab to apply 标题 1 to the text that you want to appear here.

点阴影的研究也有一定意义，如可以用它来复现[15]中的结果。

在渲染器的改进方面，进一步的工作可以主要关注扩展适用面、减少计算量和增加精度。目前的渲染器是无法计算 JNW 时空中的吸积盘图像的，因为在 JNW 时空中可能出现两个以不同 θ_{emit} 发射的光线在绕奇点同一角度后以不同的 θ_{obs} 被观察者观察到的现象，这会导致直接套用本文中描述的程序会无法正常构建插值函数。这可以通过允许插值函数取多个值，或者构建多个插值函数来解决。如此可以将渲染器的适用面拓宽。在减少计算量和增加精度方面，可以结合前人常用的反向光线追踪法，在像素对应的角度增加插值函数的采样点。相比于现在人为设置的采样点，这种方法可以避免插值过程带来的误差，并有望减少计算量。同时，如果结合这种方案，也有望更加方便的进行第三个以上像的更精确渲染。

参考文献

1. Chon, S., et al., *Cosmological simulations of early black hole formation: halo mergers, tidal disruption, and the conditions for direct collapse*. The Astrophysical Journal, 2016. **832**(2): p. 134.
2. Brady, P.R., *The internal structure of black holes*. Progress of Theoretical Physics Supplement, 1999. **136**: p. 29-44.
3. Poisson, E., *A relativists toolkit. The mathematics of black-hole mechanics*. 2004: Cambridge University Press.
4. Kerr, R.P., *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*. Physical Review Letters, 1963. **11**(5): p. 237-238.
5. Hawking, S.W. and R. Penrose, *The singularities of gravitational collapse and cosmology*. Proceedings of the Royal Society A Mathematical Physical & Engineering Sciences, 1970. **314**(1519): p. 529-548.
6. Joshi, P.S. and I.H. Dwivedi, *Naked singularities in spherically symmetric inhomogeneous Tolman-Bondi dust cloud collapse*. Physical review D: Particles and fields, 1993. **47**(12): p. 5357-5369.
7. Goswami, R., et al., *Timelike naked singularity*. Physical Review D, 2004. **70**(8): p. 1-84038.
8. Joshi, P.S., D. Malafarina, and R. Narayan, *Equilibrium configurations from gravitational collapse*. Classical & Quantum Gravity, 2011. **28**(23): p. 235018-235036(19).
9. Joshi, P.S., D. Malafarina, and R. Narayan, *Distinguishing black holes from naked singularities through their accretion disc properties*. Classical and Quantum Gravity, 2014. **31**(1): p. 15002.
10. Janis, A.I., E.T. Newman, and J. Winicour, *Reality of the Schwarzschild singularity*. Phys.rev.lett, 1968. **20**(16): p. 878-880.
11. Collaboration, T., *First M87 Event Horizon Telescope results. I. the shadow of the supermassive black hole*. The Astrophysical Journal, 2019. **875**(1): p. L1.
12. Collaboration, T., *First M87 Event Horizon Telescope results. V. physical origin of the asymmetric ring*. The Astrophysical Journal, 2019. **875**(1): p. L5.
13. Collaboration, T., *First M87 Event Horizon Telescope results. VI. the shadow and mass of the central black hole*. The Astrophysical Journal Letters, 2019. **875**(1): p. L4.
14. Chael, A.A., et al., *High resolution linear polarimetric imaging for the Event Horizon Telescope*. Astrophysical Journal, 2016. **829**(1): p. 11.
15. Dey, D., et al., *Shadow of a naked singularity without photon sphere*. Physical Review D, 2020. **102**(2): p. 2.
16. Cunha, P., C. Herdeiro, and M.J. Rodriguez, *Does the black hole shadow probe the event horizon geometry?* Physical Review D, 2018. **97**(8): p. 9.
17. Abdikamalov, A.B., et al., *Black hole mimicker hiding in the shadow: Optical*

-
- properties of the γ metric*. Physical Review D, 2019. **100**(2).
18. Bambi, C., et al., *Testing the rotational nature of the supermassive object M87* from the circularity and size of its first image*. Physical Review D, 2019. **100**(4).
 19. Shakura, N.I. and R.A. Sunyaev, *Black holes in binary systems: observational appearances*. Proceedings of the International Astronomical Union, 1973. **55**: p. 155 - 164.
 20. Page, D.N. and K.S. Thorne, *Disk-accretion onto a black hole. time-averaged structure of accretion disk*. The Astrophysical Journal, 1974. **191**(2): p. 499-506.
 21. Dewitt, C. and B.S. Dewitt, *Black holes (Les astres occlus)*. Black Holes (Les Astres Occlus), 1973.
 22. Riffert, H. and H. Herold, *Relativistic accretion disk structure revisited*. The Astrophysical journal, 1995. **450**(2): p. 508-511.
 23. Cunningham, C.T., *The effects of redshifts and focusing on the spectrum of an accretion disk around a Kerr black hole*. Astrophysical Journal, 1975. **202**(202): p. 788-802.
 24. Gammie, C.F., *Efficiency of magnetized thin accretion disks in the Kerr metric*. Astrophysical Journal, 1999. **522**(1): p. L57-L60.
 25. Agol, E. and J.H. Krolik, *Magnetic Stress at the Marginally Stable Orbit: Altered Disk Structure, Radiation, and Black Hole Spin Evolution*. Astrophysical Journal, 1999. **528**(1): p. 161-170.
 26. Krolik, J.H., *Magnetized accretion inside the marginally stable orbit around a black hole*. The Astrophysical Journal, 1999. **515**(2): p. L73-L76.
 27. Afshordi, N. and B. Paczynski, *Geometrically Thin Disk Accreting into a Black Hole*. The Astrophysical Journal, 2003. **592**(1): p. 354-367.
 28. Davelaar, J., et al., *Observing supermassive black holes in virtual reality*. Computational Astrophysics and Cosmology, 2018. **5**(1): p. 1-17.
 29. Cunningham, C.T. and J.M. Bardeen, *The optical appearance of a star orbiting an extreme Kerr black hole*. The Astrophysical Journal, 1973. **183**(1): p. 237-264.
 30. Luminet, J.P., *Image of a spherical black hole with thin accretion disk*. Astronomy & Astrophysics, 1979. **75**: p. 228-235.
 31. Fukue, J. and T. Yokoyama, *Color photographs of an accretion disk around a black hole*. Publications- Astronomical Society of Japan, 1988. **40**(1): p. 15-24.
 32. Marck, J.A., *Short-cut method of solution of geodesic equations for Schwarzschild black hole*. Classical and Quantum Gravity, 1996. **13**(3): p. 393-393.
 33. Stuckey, W.M., *The Schwarzschild black hole as a gravitational mirror*. American Journal of Physics, 1993. **61**(5): p. 448.
 34. Nemiroff, R.J., *Visual distortions near a neutron star and black hole*. American Journal of Physics, 1997. **61**(7): p. 619-632.
 35. Viergutz, S.U., *Image generation in Kerr geometry. I. Analytical investigations on the stationary emitter-observer problem*. Astronomy and Astrophysics, 1993.

- 272(1): p. 355.
36. Claudio, F., et al., *Detecting accretion disks in active galactic nuclei*. Publications- Astronomical Society of Japan, 1997. **49**(2): p. 159-169.
37. James, O., et al., *Gravitational lensing by spinning black holes in astrophysics, and in the movie Interstellar*. Classical & Quantum Gravity, 2015. **32**(6): p. 65001-65041(41).
38. Shaikh, R. and P.S. Joshi, *Can we distinguish black holes from naked singularities by the images of their accretion disks?* Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2019. **2019**(10): p. 064-064.
39. Pu, H.Y., et al., *ODYSEY: a public GPU-based code for general relativistic radiative transfer in Kerr spacetime*. The Astrophysical Journal, 2016. **820**(2): p. 105.
40. Yang, X., *YNOGK: A new public code for calculating null geodesics in the Kerr spacetime*. Astrophysical Journal Supplement, 2013. **207**(1): p. 2615-2624.
41. Jason, D., *A public code for general relativistic, polarised radiative transfer around spinning black holes*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2016. **462**(1): p. 115-136.
42. Shaikh, R., et al., *Shadows of spherically symmetric black holes and naked singularities*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2018. **482**(1): p. 52-64.

致谢

在论文的最后，首先我要感谢我的导师陈斌教授在选题、理论设定和文章修改方面提供的宝贵意见，也要感谢李鹏程博士对理论分析、计算实现、文章内容和最终校对上对我的指导。陈斌老师严谨求实的治学态度和高水平的学术研究给我做出了好的榜样。没有陈斌教授、李鹏程博士和组内其他师兄的指导与帮助，我不可能如此高效的完成这篇论文。

我也要感谢所有其他教授过和指导过我的老师，老师们教授的知识和传授的技能都是我能完成这篇文章的基础。还有在平时与我经常讨论问题的诸多同学朋友，我也从这些讨论中学到了很多各方面的知识，纠正了很多知识上的问题和漏洞。

当然，我也要感谢我的父母、学校和女朋友，有了他们在经济、学术和心理上的支持，我才能顺利的度过大学四年，并最终完成学业、毕业设计和论文撰写。

最后，我要感谢所有来参加答辩和审阅论文的老师，希望各位老师可以多多指出本文中不足之处，以便我进一步完善。

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明： 所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：王竞先 日期： 2021 年 6 月 18 日

学位论文使用授权说明

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保留学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；
- 因某种特殊原因需要延迟发布学位论文电子版，授权学校 ☐ 一年/☐ 两年/☐ 三年以后，在校园网上全文发布。

（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名：王竞先 导师签名：



日期： 2021 年 6 月 1 日