Оглавление

[06.09.11] Лекция 1

Определение дизъюнктивной нормальной формы (ДНФ). Геометрическая интерпретация ДНФ. Совершенная ДНФ.

Пусть есть бесконечный алфавит $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Введем множество $B = E_2 = \{0, 1\}$.
$B^n = E^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n | \alpha_i \in B, i = \overline{1, n}\}$ – n-мерный булев куб.
$f(x_1, \ldots, x_n) : B^n \to B$ – булева функция. $x_1, \ldots, x_n$ – булевы переменные.
Если есть ??? $f(x_1, \ldots, x_n)$, где x_i - булевы переменные, то следует определение формулы над Q.

Определение. *Пусть δ-некоторое множество, а $\delta_1, \ldots, \delta_s$ - некоторое его подмножество. Тогда система подмножеств $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$ называется покрытием множества δ тогда и только тогда, когда $\cup_{i=1}^{s} \delta_i = \delta$*
При этом каждое δ_i называется блоком (компонентой) покрытия $\{\delta_1, \ldots, \delta_s\}$.
Покрытие неприводимо тогда и только тогда, когда никакая его компонента не является подмножеством другой его компоненты.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ - булева функция, тогдв $N_f = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n | f(\alpha) = 1\}$ - объект геометрической интерпретации ДНФ.
Пусть x_i - символ переменной, $\delta \in \{0, 1\}$, тогда x_i^δ - буква (x_i при $\delta = 1, \overline{x_i}$ при $\delta = 0$.

Определение. *Элементарная конъюнкция – это конъюнкция букв различных переменных.*
$K = x_{i_1}^{\delta_1} x_{i_2}^{\delta_2} \ldots x_{i_r}^{\delta_r}$ *- элементарная конъюнкция.* $R(K) = r$ *- ранг элементарной конъюнкции.*

Определение. *Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция букв различных переменных.*

Определение. *ДНФ – формула, которая представляет собой дизъюнкцию различных элементарных конъюнкций.*
КНФ – формула, которая представляет собой конъюнкцию различных элементарных дизъюнкций.

Замечание. ДНФ существует тогда и только тогда, когда функция тождественно не равна 0. КНФ существует тогда и только тогда, когда функция тождественно не равна 1.

Теорема. *(О разложении булевой функции по переменным)*
Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ *- булева функция,* $1 \le r \le n, r \in \mathbb{N}$, *тогда* $f(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) = \bigvee\limits_{\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)} x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_r^{\delta_r} f(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$

Доказательство. Левая часть $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n, f(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ - есть $f(\alpha)$.
Рассмотрим правую часть $\bigvee\limits_{\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)} x_1^{\delta_1} x_2^{\delta_2} \ldots x_r^{\delta_r} f(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$.

1. $\delta : \delta_i = \alpha_i \ \forall i \in \{1, \ldots, r\}$, тогда соответствующее слагаемое имеет вид (на α) $\alpha_1^{\delta_1} \ldots \alpha_r^{\delta_r} f(\delta_1, \ldots, \delta_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha)$
2. $\delta : \exists i \in \{1, \ldots, r\} : \delta_i \ne \alpha$, тогда соответствующее слагаемое $\alpha_1^{\delta_1} \ldots \alpha_i^{\delta_i} \ldots \alpha_r^{\delta_r} f(\delta_1, \ldots, \delta_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n) = 0$, т.к. $\alpha_i^{\delta_i} = 0$

Итак, правая часть имеет вид $0 \vee 0 \ldots 0 \vee f(\alpha) \vee 0 \ldots . \vee 0 = f(\alpha)$ □

Следствие. (теорема о СДНФ) Каждая $f(\tilde{x}^n) \ne 0$ имеет место представление $f(\tilde{x}^n) = \bigvee\limits_{\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n); f(\alpha) = 1} x_1^{\delta_1} \ldots x_n^{\delta_n}$

Замечание. ДНФ рассматривается для функций, зависящих от $x_1, \ldots, x_n$ (если не оговорено противное)

Геометрическая интерпретация ДНФ

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, где $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \gamma_i \in \{0, 1, 2\}$

Определение. *Гранью G_γ n-мерного булевого куба B^n называется множество $\{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \{0, 1\} \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$ и если $\gamma \in \{0, 1\}$, то $\alpha_i = \gamma_i\}$*
Пусть количество "2"в наборе γ есть $n - r$, тогда r-ранг грани G_γ, а $n - r$ - размерность грани. Набор γ называется кодом грани G_γ

Пример: n=4, $\gamma = (0,2,1,2) G_\gamma = \{(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,1,0),(0,1,1,1)\}$

Определение. *G-грань булева куба B^n тогда и только тогда, когда существует $\gamma \in \{0,1,2\}^n : G = G_\gamma$*

Причем здесь конъюнкция?
Для каждой грани $G_\gamma \in B^n$ $\exists!$ элементарная конъюнкция от переменных $x_1,\ldots,x_n$, являющаяся характеристикой функцией этой грани (обозначим эту элементарную конъюнкцию как K), то есть $\alpha \in G_\gamma \Leftrightarrow K(\alpha) = 1$. Пусть все символы в γ не равны 2, суть $\gamma_{i_1},\ldots,\gamma_{i_r}$, значит, искомая элементарная конъюнкция K имеет вид $K = x_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \ldots x_{i_r}^{\gamma_{i_r}}$. Ясно, что $N_k = G_\gamma$
Булева функция f' имплицирует булеву функцию f'', если $\forall\alpha : f'(\alpha) = 1$ следует, что $f''(\alpha) = 1$ (или, по-другому, f'' помещает f'): $f' \to f'' = 1$ или же: $f' * f'' = f', f' \vee f'' = f''$.

Определение. *Если элементарная конъюнкция имплицирует f, то говорят, что эта элементарная конъюнкция является импликантой f.*

Пусть $D_f = K_1 \vee \ldots \vee K_s$ - ДНФ, реализующая БК f и $K_1,\ldots,K_s$ - элементарная конъюнкция (f и элементарная конъюнкция от $x_1,\ldots,x_r$). Тогда этой ДНФ соответствует покрытие множества N_f гранями $N_{k_1},\ldots,N_{k_s}$ куба B^n.

Определение. *Элементарная конъюнкция K называется простой импликантой функции f, если она не имплицирует никакую другую импликанту K' функции f (то есть $N_k \notin N_{k'}$)*

Определение. *G_γ-грань булевой функции f тогда и только тогда, когда $G_\gamma \subseteq N_f$ ясно, что по умолчанию G_γ-грань B^n.*

Определение. *Пусть K - простая импликанта булевой функции f, тогда соответствующая ей грань называется максимальной гранью функции f.*

Легко увидеть, что максимальная грань булевой функции f – это максимальная по включению наборов грань булевой функции f.

Замечание. (о совершенной ДНФ): совершенная ДНФ D_f функции f соответствует покрытию N_f нульмерными гранями, то есть точками.

Определение. *Вес булева набора α - число $||\alpha||$ единиц в нем. r-й слой булева куба B^n – это множество $B^n_r = \{\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) | \alpha \in B^n, ||\alpha|| = r\}$.*

Определение. *Два набора называются соседними, если они отличны в одной координате.*

[13.09.11] Лекция 2

Сложность ДНФ. Минимальная ДНФ. Кратчайшие ДНФ. Функции Шеннона для ДНФ

Определение. *Пусть ϕ-функция, ставящая в соответствие каждой ДНФ некоторым образом число, при этом:*

1. *для любой ДНФ D: $0 \leq \phi(D)$*
2. *если ДНФ D' получена из D вычеркиванием букв и слагаемых (элементарных конъюнкций), то $\phi(D') \leq \phi(D)$*

В таком случае говорят, что задан неотрицательный функционал ϕ сложности (ранга) ДНФ, обладающий свойством монотонности.

Примеры $\phi(D)$:
$R(D)$ - ранг (сложность) ДНФ D, суммарное число букв в D.
$\lambda(D)$ - длина ДНФ D, число слагаемых в ДНФ D.
$L(D)$ - число всех операций, необходимых для построения ДНФ D.

Определение. *ДНФ D' называется минимальной относительно функционала ϕ булевой функции f (ϕ - минимальная ДНФ булевой функции f) тогда и только тогда, когда $\phi(D') = \underset{D}{min}\phi(D)$ (D - ДНФ, реализующая f).*
Ранг минимальной ДНФ называется минимальным, длина - кратчайшей.

Функция Шеннона относительно функционала ϕ сложности ДНФ

$\phi(n) = \underset{f(\overline{x}^n)\in P_2}{max} \underset{D}{min}\phi(D)$, D - ДНФ, реализующая f.

Замечание. Если $D' - \phi -$ минимальная ДНФ булевой функции f, то говорят, что $\phi(D')$-сложность функции f относительно функционала ϕ.

Теорема. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение: $R(n) = n2^{n-1}, \lambda(n) = 2^{n-1}$.*

Доказательство. (Нижняя оценка) Рассмотрим функцию $f_n(\tilde{(x)}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, максимальной грани функции - это точка, следовательно, единственной, следовательно, минимальной ДНФ этой функции является совершенная ДНФ.
Пусть α', α'' - соседние наборы в B^n, тогда $f(\alpha') \neq f(\alpha'')$, тогда любая максимальная грань есть точка, то есть грань размерности 0, то есть единственная ДНФ f_n есть ее совершенная ДНФ, поскольку $|N_f| = 2^{n-1}$, то длина f_n есть $\lambda(f_n) = 2^{n-1}$, а ранг $R(f_n) = n2^{n-1}$, следовательно, $2^{n-1} \leq \lambda(n), n2^{n-1} \leq R(n)$.
(Верхняя оценка) Рассмотрим любую функцию $f(\tilde{x}^n)(f \neq 0)$. Разложим f по $x_2, \ldots, x_n$: $f(x_1, \ldots, x_n) = \underset{(\delta_2,\ldots,\delta_n)\in B^{n-1}}{\vee} x_2^{\delta_2} \ldots x_n^{\delta_n} f(x_1, \delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{0, 1, x_1, \overline{x_1}\}$, тогда у любой булевой функций $R \leq n2^{n-1}, \lambda \leq 2^{n-1}$, тогда в силу произвольности выбора $f \in P_2(n) \lambda(n) \leq 2^{n-1}, R(n) \leq n2^{n-1}$ □

Тупиковая ДНФ. Сокращённая ДНФ и методы её построения

Определение. *ДНФ $D = \overset{s}{\underset{i=1}{\vee}} K_i$ называется неприводимой тогда и только тогда, когда покрытие $\{N_{k_1}, \ldots, N_{k_s}\}$ является неприводимым.*

Определение. *ДНФ D называется тупиковой тогда и только тогда, когда любая ДНФ D', получающаяся из D вычеркиванием букв или слагаемых, не эквивалентна ДНФ D (то есть D' и D реализуют разные булевы функции).*

Определение. *ДНФ D называется сокращённой ДНФ функции f тогда и только тогда, когда D есть дизъюнкция всех простых импликант булевой функции f*

Замечание. Тупиковая ДНФ состоит только из простых импликант.

Замечание. Тупиковая ДНФ является неприводимой и может быть получена из сокращённой ДНФ выбрасыванием некоторых слагаемых.

Замечание. Минимальная ДНФ является тупиковой.

Замечание. Среди всех тупиковых ДНФ есть кратчайшие, но не все кратчайшие ДНФ являются тупиковыми.

Построение сокращённой ДНФ - это первый этап построения кратчайшей ДНФ.

Методы построения сокращённой ДНФ

1. Геометрический (по определению). Пусть $N_f = \{\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(p)}\}$.

   - Шаг 1. Построить покрытие множества N_f гранями $\{\alpha^{(1)}\}, \dots, \{\alpha^{(p)}\}$.
   - Шаг i+1. Дополнить покрытие N_f предыдущего шага всевозможными расширениями на 1 размерность в пределах N_f граней из предыдущего шага; удалить поглощённые грани.

   За конечное число шагов будет построено покрытие множества N_f всеми максимальными гранями f.

2. Алгоритм Квайна (построение сокращённой ДНФ по КНФ)

   Приведение подобных (после раскрытия скобок с ДНФ) предполагает:

   (a) приведение слагаемых к виду элементарной конъюнкции или удаление слагаемых
   (b) применение правил: $K' \vee K'' = K'' \vee K', (K' \vee K'') \vee K''' = K' \vee (K'' \vee K'''), K' \vee K'K'' = K'$

   Эти преобразования выполняются пока возможно, то есть результат есть ДНФ, в которой $K' \vee K' = K', K' \vee K'K'' = K'$ нельзя применить слева направо (при $\forall$ применение тождеств ассоциативности и коммутативности)

   Теорема. *Пусть D', D'' - сокращённые ДНФ f', f'' соответственно, тогда ДНФ D, получаемая в результате раскрытия скобок и приведения подобных в формуле $D'D''$ является сокращённой ДНФ функции $f = f'f''$.*

   Доказательство. Достаточно доказать, что любая простая импликанта K функции f является слагаемым D. Так как K – импликанта, то K имплицирует f' и K имплицирует f'', следовательно, так как D', D'' – сокращённые ДНФ f', f'', то существует элементарная конъюнкция K' (слагаемое в D') и элементарная конъюнкция K'' (слагаемое в D'') - K имплицирует их, следовательно, K имплицирует $K'K''$, но при раскрытии скобок в $D'D''$ и приведении подобных найдется элементарная конъюнкция $\tilde{K}$ (слагаемое в D), которую имплицирует $K'K''$, следовательно, K имплицирует элементарную конъюнкцию $\tilde{K}$, но K – простая импликанта f, значит, $K = \tilde{K}$, то есть K встречается в D. ☐

   Следствие. (описание алгоритма Квайна): сокращённая ДНФ D булевой функции f может быть получена из произвольной КНФ функции f (при $f \not\equiv 1$) путем последовательных раскрытий скобок и приведения подобных.

3. Метод Блэйка (Нэльсона) (построение сокращённой ДНФ по любой ДНФ).

   Правило обобщённого склеивания: ($xK' \vee \overline{x}K'' = xK' \vee \overline{x}K'' \vee K'K''$) применяем пока возможно. Затем приводим подобные.

   Определение. *ДНФ D', полученная из ДНФ D применением к каким-то парам ее слагаемых правил обобщённого склеивания, называется расширением ДНФ D.*

   Определение. *Расширение D' ДНФ D называется строгим расширением ДНФ D тогда и только тогда, когда в D' есть слагаемое (элементарная конъюнкция), не имплицирующее никакое слагаемое в D.*

   Замечание. Сокращённая ДНФ не имеет строгих расширений.

Теорема. *Пусть ДНФ D является неприводимой и не имеет строгих расширений, тогда D есть сокращённая ДНФ.*

Доказательство. Достаточно доказать, что любая простая импликанта встречается в D.

От противного: Пусть D - неприводимая ДНФ булевой функции f, не имеет строгих расширений, K - простая импликанта f и K - не слагаемое D. Построим множество χ всех элементарная конъюнкция, которые являются импликантами f, но не имплицируют никакое слагаемое из D. $\chi \not\equiv \oslash$, ибо $K \in \chi$. В таком случае пусть K - элементарная конъюнкция максимального ранга из $\chi, f = f(x_1, \ldots, x_n)$, следовательно, $R(\widehat{K}) < n$ (так как если бы $R(\widehat{K}) = n$, то $\widehat{K}$ имплицировала бы некоторые элементарные конъюнкции из D), тогда пусть x_i не встречается в $widehatK$, тогда так как $\widehat{K}$ - элементарная конъюнкция максимального ранга из χ, то существует $K', K'' \in \chi : x_i\widehat{K}$ имплицирует слагаемое x_iK' из D $\overline{x_i}\widehat{K}$ имплицирует слагаемое $\overline{x_i}K''$ из D. Следовательно, $\widehat{K}$ имплицирует $K'K''$, которое получается правилом обобщённого склеивания x_iK' и $\overline{x_i}K''$, значит, $\widehat{K} \notin \chi$, получаем противоречие, значит, $K \in D$ □

Следствие. (метод Блэйка): сокращённую ДНФ можно построить, применяя, пока возможно, правило обобщённого склеивания всех возможных пар слагаемых ДНФ по всем переменным последующим приведением подобных.

[20.09.11] Лекция 3

4. Алгоритм, основанный на картах Карно.

   Если рассмотреть наборы из 2 аргументов, то их можно упорядочить по коду Грея (расстояние между соседними равно 1, например, 00-01-11-10). Множество $\sim$ тор, любому треугольнику на торе соответствует максимальная грань.

Сложность одновременного нахождения min и max массива

За наименьшее число сравнений. Сколько в худшем случае? $(n-1)+(n-2)=2n-3$
Нельзя ли проще? Вспомним теорему Мура: $n-1 \leq \alpha(n)$
Алгоритм:
разбить элементы на пары, max высшей лиги, min низшей.
$n=2r\colon r+(r-1)+(r-1)=\frac{3n}{2}-2$
$n=2r+1\colon r+(r-1)+(r-1)+2=3r=\frac{3(n-1)}{2}$
Получаем $\alpha(n) \leq \rceil \frac{3n}{2}-2 \lceil$ (целое сверху)
Минимизация числа сравнений по множеству всех алгоритмов решений.
Алгоритм:

$$E(x)=\begin{cases} 2, \text{если x может быть max и min} \\ 1, \text{если x может быть max илм min} \\ 0, \text{если x не может быть ни max, ни min} \end{cases}$$

Энергия массива в начале = 2n, в конце = 2. $E(\overline{x})=\sum_{i=1}^{n} E(x)$
Энергия массива может уменьшиться на 2. Тогда за $\rceil \frac{3n}{2}-2 \lceil$ операции можно получить в лучшем случае.

[27.09.11] Лекция 4

Выведение сокращённой ДНФ из совершенной ДНФ

Все простые импликанты входят в нее тогда и только тогда, когда сокращённая ДНФ $K_1 \vee \ldots \vee K_n$ простая импликанта $\sim$ нельзя удалить букву из $K_i \leq f$.
Пусть существует сокращённая или иная ДНФ реализующая нашу функцию: $x_1\overline{x_2} \vee x_2\overline{x_3} \vee x_3\overline{x_1} \vee x_1\overline{x_3} \vee x_3\overline{x_2} \vee x_2\overline{x_1}$.
Удаляя по ребру можно получить 5 вариантов. Для покрытия в таких точках необходимо 3 ребра, значит, 2+3 варианта.

Определение. *Тупиковая ДНФ - это ДНФ, к которой неприменимо ни одно из преобразований: удаление буквы или удаление конъюнкции.*

У нашей функции их 5. Вопрос: сколько их может быть?
Ведь из совершенной ДНФ выводится сокращённая ДНФ.
$f(\tilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_n$.
Что можно сказать о допустимых конъюнкциях?
В каждую конъюнкцию этой функции должен входить множитель $x_4^{\sigma_4} \ldots x_n^{\sigma_n}$ нет конъюнкции без этих переменных. $\sigma_4 \ldots \sigma_n$ делятся на 2 части: $\sum \sigma_i = 0$(тупиковая ДНФ? их $5^{2^{n-4}}$), $\sum \sigma_i = 1$

ДНФ Квайна (основана на построении таблицы Квайна)

$K_1(\overline{\alpha_1}) = 1$
$K_1(\overline{\alpha_i} = 0)$, следует решение задачи о покрытии, имея о том, кого выкинуть из сокращённой ДНФ. Сначала решаем, кого оставить; нельзя выкинуть конъюнкцию, которая единственная покрывает некоторый набор (такая конъюнкция называется ядром), тогда и только тогда это ДНФ Квайна.

Теорема. *(Журавлева)*

1. *Простая импликанта K входит в ДНФ $\sum T$ тогда и только тогда, когда K не является регулярной.*

2. *Конъюнкция K называется регулярной тогда и только тогда, когда все ее точки регулярны относительно этой конъюнкции*

3. *$\tilde{\alpha}$ регулярна относительно K, если существует $\tilde{\beta} : f(\tilde{\beta}) = 1, K(\tilde{\beta}) = 0, \Pi(\tilde{\beta}) \leq \Pi(\tilde{\alpha})(\Pi(\tilde{\beta}) - множество K_i$, которые обращаются в 1 на β, тогда все $K_i : K_i(\beta) = 1$, тогда $K_i(\alpha) = 1$.*

Доказательство. =>(от противного) Почему K не принадлежит тупиковой ДНФ.
Пусть K регулярна и обращается в 1 на наборах $\tilde{\alpha_1}, \ldots, \tilde{\alpha_m}$, тогда $\exists \tilde{\beta_1}, \ldots, \tilde{\beta_n} : f(\tilde{\beta_i}) = 0, K'_m(\tilde{\beta_m}) = 1$.
Рассмотрим $K'_1, \ldots, K'_m : K'_1(\tilde{\beta_1}) = 1, \ldots, K'_m(\tilde{\beta_m}) = 1$, значит, покрываются все такие точки конъюнкции K, следовательно, её можно выкинуть.
<= Если K не является регулярной, то входит ли она в тупиковую ДНФ? Проотрицаем определение регулярности.
K является нерегулярной, если существует точка, которая не является регулярной.
$\tilde{\alpha}$ нерегулярна относительно K, если $\forall \tilde{\beta} : f(\tilde{\beta}) = 1, K(\tilde{\beta}) = 0$, следовательно, $\Pi(\tilde{\alpha}) \leq \Pi(\tilde{\beta})$
Пусть $\tilde{\alpha}$ - нерегулярная точка. Рассмотрим ДНФ $K'_1 \vee \ldots \vee K$, где K'_i - все простые импликанты: $K'_i(\tilde{\alpha}) = 0$. Эти ДНФ реализует функция. Для всех $\tilde{\beta}$ ее пучок не принадлежит пучку $\tilde{\alpha}$. Делаем тупиковую, но K выбросить нельзя, ибо она единственная, которая обращается в 1 на $\tilde{\alpha}$. □

Рассмотрим несколько функций. Ясно, что на булевом кубе можно уложить цикл и цепочку только четной длины.
Соседние наборы на булевом кубе имеют разные четности, тогда, пройдя по циклу, мы сменили бы четность. Кроме того, булев куб двухцветен, а нечетный цикл трёхцветен. Минимальная ДНФ для цикла цепочки четной или нечетной длины $K_1, \ldots, K_n$.
В цепочке в любом случае мы должны брать хвосты (а не ядра). Если числа наборов четные (соответственно число звеньев нечетно), то $K_1 \vee K_2 \vee K_3$. Если нечетная длина, то минимальная ДНФ должна содержать (2n+1 наборов) n+1 конъюнкцию, то переход с четной на нечетную в каком-либо месте.

Пусть наш алгоритм не может перелезть через некоторый параметр. II теорема Журавлева (сумма минимальных не лежит в классе локальных алгоритмов).

. . . .

Есть некоторая пара ("управляющая система"): $< \Sigma, f >, \Sigma$ - функция, или функционирование. $\alpha(\Sigma)$ - функционал сложности.

Мы хотим найти $L(f) = \max_{f(x_1,...,x_n)} \min_{\Sigma,f} \alpha f$.

Аргумент функции Шеннона - число переменных.

[04.10.11] Лекция 5

Оценим $L(n)$ сверху: произв. схема синтеза; снизу: оценка основана на том, что едва схемы f функцию не реализуют.
$L(n) \leq n + (n-1)2^n + 2^n - 1$
Для улучшения надо ввести понятие дешифратора $D_n : L(n) \leq 2^n - 1 + L(D_n)$. Сложность дешифратора асимптотически равна 2^n.
Пусть есть дешифратор D_{n-1}, как получить из него D_n? Берем x_n, $x_n x_n$ $\forall$наK_i, тогда $L(D) \leq L(D_{n-1}) + 1 + 2^n; L(D_1) = 1, L(D_2) = 6 \ldots$
$L(D_n) = L(D_{n-r}) + L(D_r) + 2^n$

Разложение функции по k переменным

$f(x^n) = \bigvee_{\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)} x_1^{\sigma_1} \ldots x_r^{\sigma_r} f(\sigma_1, .., \sigma_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$
$L(n) \leq L(D_r) + L(U_{n-r}) + 2^r + 2^{r-1}$
$L(U_n) = 2^{2^n}$, тогда $L(n) \leq L(D_r) + L(U_{n-r}) + 3 \cdot 2^{r-1} \leq 3 \cdot 2^{r-1} + O(2^{r/2}) + 2^{2^{n-r}}$
Как оптимально выбрать r? $3 \cdot 2^r ln(r) + 2^{n-r} \cdot 2^{2^{n-r}} ln(n-r) = 0$
$r \approx 2^{n-r}$
Рассмотрим $r =]n - log_2 n[$
$n - log_2 n = 2^{log_2 n} = n$
$3 \cdot 2^{n - log_2 n} + 2^n = 2^n(3 \cdot 2^{-log_2 n} + 1)$
Если $r = n - log_2 log_2 n$
$3 \cdot 2^{n - log_2 log_2 n} + 2^{2^{log_2 log_2 n}} = 3 \cdot 2^{n - log_2 log_2 n} + 2^{log_2 n}$
Если $r = n - log_2(n - 2log_2 n)$
$3 \cdot 2^{n - log_2(n-2log_2 n)} + 2^{n - 2log_2 n} = 2^n(3 \cdot 2^{-log_2(n-2log_2 n)} + 4n^{-2}) = 2^n(3(n-2log_2 n)^{-1} - n)^{-2}$
$2^r = 2^{]n - log_2(n-2log_2 n)[} \leq \frac{2^{n+1}}{n - 2log_2 n}$
$L(n) \leq 3 \cdot 2^r + O(R^{r/2}) + 2^{2^{n-r}}$
При $r =]n - log_2(n - 2log_2 n)[= O(2^n/n) + O(2^{r/2}) + O(2^n/n)$
Получим оценку $\Theta(2^n/n)$

Нижняя оценка функции Шеннона

Сколько всего можно получить схем сложности L (от n переменных)? Связной является схема, реализующая функцию. Утверждения про связные графы:

1. количество нечетных вершин четно
2. у связного графа можно выделить остовное дерево

Выделим остовное дерево функции в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$
Если сложность L, то вершин максимально n+L. Сколько различных деревьев с n+L вершинами: $L + n - 1 \ldots 4^{L+n-1}$
Будут некоторые вершины, которые внутренние вершины, то есть L вершин, в которых неизвестны элементы, тогда $4^{L+n-1} n^{L+n} 3^L (L+n)^L L$
Требование: $\varepsilon 2^{2^n} \leq \ldots$
$2^n - log_2 \varepsilon \leq 2(L + n - 1) + (L+n)log_2 n + L log_2 3 + L log_2(L+n) + log_2 L$
Пусть $L \leq (1-\delta) \cdot 2^n/n$
при $n \to \infty : 1, 2, 3, 5 = o(2^n - log_2 \varepsilon)$
$(1-\delta)\frac{2^n}{n} log_2(n + (1-\delta)2^n/2)$
$(1-\delta)\frac{2^n}{n} n(1 + o(1))$
Эффект Шеннона: для почти всех функции $n \to \infty$ сложность почти $\frac{2^n}{n}$

[11.10.11] Лекция 6

Метод Лупанова для СФЭ

Идея представления булевой функции в виде прямоугольной таблицы. Этот прямоугольник режется на равные полосы шириной S. Сколько их? $]2^r/s[\ = pS'$ (последний) может быть меньше, поэтому в нашей задаче 3 параметра $r,\ s,\ n$.
Будет предложен способ ее решения, после чего будет необходимо оценить, насколько сложна схема, полученная с помощью этого решения. Мы хотим реализовать короткий стб, то есть мал. функцию, завис.
...
Пусть у нас есть дешифратор, во что это обойдется? S-1 дизъюнкция.
Длинный стб - собирается из коротких стб, сложность P-S дизъюнкций.
$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee\limits_{\gamma_1, \dots, \gamma_r} x_1^{\gamma_1} \dots x_r^{\gamma_r} f(\gamma_1, \dots, \gamma_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ - Шенноновское разложение, будем брать:
$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee\limits_{\gamma_{r+1}, \dots, \gamma_n} x_{r+1}^{\gamma_{r+1}} \dots x_n^{\gamma_n} f(x_1, \dots, x_r, \gamma_{r+1}, \dots, \gamma_n)$
Теперь мы сделаем еще один шаг. Метод Лупанова - м-д 2 порядка Шеннона, но дает оконч. ответ.
Будем собирать длинный стб из коротких. Нам необходимо n, затем нам необходимо получить дешифраторы D_k, D_{n-k}: $n + 2(2^r + 2^{n-r}) + \dots$ нужно построить все функции коротких стд: $2^s p(s-1)$, потом длинные: $2^{n-r}(p-1) + 2 \cdot 2^{n-r}$ на сборку.
Естественно предположим, что $s, r, 2^r/s \to \infty$.
$p \sim 2^p/s; 2^{n-r}(p-1) \le 2^{n-r} 2^r/s \sim 2^r/s; p2^s(s-1) =]2^r/s[2^s(s-1) \sim 2^{r+s}$
Очевидно, $s = n(1 - o(1))$. С другой стороны, казалось бы, r можно подбирать как угодно, но не так: $p \to \infty; 2^r/s \to \infty$, если $\ln s = o(r)$
2 или 3 логарифма: если $r = [3logn]; s = [n - 5log_n]$, то $2^{n-r}(p-1) = 2^n/s \sim 2^n/n; 0,5n^3 \le 2^r; s \le n$, тогда $p2^s(s-1) \sim 2^n/n^2$, тогда главным слагаемым является первое.
Итак, мы доказали, что для любой функции по методу Лупанова можно построить схему некоторой сложности, которая при $n \to \infty$ стремится к $2^n/n$.
$lim \frac{\text{лев}}{\text{прав}} < 1$; левая асимптотически не превосходит правую.
Если есть нижняя оценка Шеннона и решение Лупанова, то задача, возник. реальна: надо синтезировать некую функцию: у нас есть оценка для п.в. и оценка наихудш.

Контактные схемы (КС)

[18.10.11] Лекция 7

Эквивалентные преобразования

Пусть есть $< \Sigma', f >, < \Sigma'', f >$.
Задача синтеза: построить систему, обладающую заданными свойствами.
Задача анализа: понять, что описано.
Упрощение: вводим $L(\Sigma)$ и минимизируем.
ЭВП:$< \Sigma', f > \leftrightarrow < \Sigma'', f >$

Алгоритм задачи неразрешимости самоприм.

Базис $\{\&, \vee, \neg, 0, 1\}$, мы хотим выписать систему тождеств. Если мы хотим привести куда-либо $< \Sigma', f >, < \Sigma'', f >$, неплохо было бы привести и онозначно опред. каноническому виду $< \Sigma''', f >$
$(x_1 x_2) x_3, x_2(x_1 x_3)$ - разные для ЭВП.
Какие нужны преобразования, чтобы разные представления ДНФ приводились к единому виду? Их 4: коммутативность, ассоциативность, конъюнкция, дизъюнкция. В формуле может появиться 0, то есть нам нужно еще $x\overline{x} = 0$
Итак, нам нужно выражение $K_1 \vee \ldots \vee K_s$, а это совершенная ДНФ.
$0 \vee x = x; 1 \vee x = 1; x \vee \overline{x} = 1; x\overline{x} = 0; xy \vee x\overline{y} = x; x(y \vee z) = xy \vee xz; x \cdot x = x; x \vee x = x; 0 \cdot x = 0; \overline{\overline{x}} = x$

1. Пусть K - замкнутый класс, A - базис в нем. В качестве K можно взять $K = [A]$
2. Пусть есть нек. B: $[B] = K$, тогда $[B] = [A]$
3. Для A существует конечная полная система тождеств (КПСТ), тогда для B также существует КПСТ.

$F_1 \sim F_1', \ldots, F_m \sim F_m'$ - ф-лы, в базисе A они являются эквивалентными формами.
Можем выписать A и B: $A = \{g_1(x), \ldots, g_r(x)\}; B = \{h_1(x), \ldots, h_l(x)\}$. Все функции g выражаются через h:
$g_1(\tilde{x}) = G_1(h_1(\tilde{x}), \ldots, h_l(\tilde{x})), \ldots, g_r(\tilde{x}) = G_r(h_1(\tilde{x}), \ldots, h_l(\tilde{x}))$ и
$h_1(\tilde{x}) = H_1(g_1(\tilde{x}), \ldots, g_r(\tilde{x})), \ldots, h_l(\tilde{x}) = H_l(g_1(\tilde{x}), \ldots, g_r(\tilde{x}))$
Наличие КПСТ не зависит от выбранного базиса. (Мы здесь не пояснили, о чём говорим, ибо это неважно!)

[01.11.11] Лекция 8

Ещё о функции Линдана.

1. $x \cdot x = 0$
2. $x \cdot (y \cdot z) = 0$
3. $x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_1 = 0$
4. $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_2 = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$

Все переменные функции существенны.

Тесты для таблиц

"Чёрный ящик например.
Первое формальное определение в работе Яблонского: есть матрица (таблица), мы хотим определить <по значениям> на нём наборе строк.
Задача проверяющего тестирования и диагностического тестирования.
(1) эталонный отб. или нет
(2) где, что именно есть промежуточные
Боремся за длину теста (кол-во строк) стираемая седал минимальной. $L(n), T(n)$
Вопрос: существует матрица из n сб. кроме эталонного. Что можно сказать о длине проверяющего теста?
Не менее 1, не более n.
А диагностический тест?

Теорема. *Длина минимального диагностического теста удовлетворяет* $\log_2 n \leqslant J(n) \leqslant n-1$

Мы хотим угадать какое-либо его вариантов ответа не менее n.
$n-1$: это доказано в теореме Мура. Взначально есть 1 класс эквивалентности $R(0) = 1, R(T) = n$, бессмысленно брать строку, увеличивает число классов эквивалентности.
Если перед ними случ. матрица, то какое ??? ?

Теорема. *Для почти всех т-ц. первые* $2\log_2 n + \phi(n)$ *строк являются диагностическими тестом, если* $\phi(n) \to \infty$ *(как угодно медленно)*

Доказательство. $m \times n$ матрица, мы хотим разные столбцы. Сколько таких матриц?

$$2^m(2^m-1)\dots(2^m-n+1)$$

Всего матриц 2^{mn}

$$p = \frac{2^m(2^m-1)\dots(2^m-n+1)}{2^{mn}} \geqslant \frac{(2^m-n)^m}{2^{mn}} \geqslant (1-\frac{n}{2^m})^n$$

□

[08.11.11] Лекция 9

Есть схема Карно. Требуется построить проверяющий тест относительно разложения.
"Взрослая задача": надо найти ответ самим и доказать его потом.
$n \geqslant 3$ не произошло ли размыкание?
$f(10\dots00) = 1$ Если $f'(10\dots00) = 0$, то разомкнулись верхние контанты.
Можно взять $f(00\dots01)$ и наборы $(11\dots1(n \mod 2))$.
Почему нельзя обойтись 3 наборами.
А что с замыканием?
Возьмём набор, на котором $f(\dots) = 0$.
$f(0\dots0) = 0$ — проводимость проверяется наверху или снизу
$f(1\dots1) = 0$, n чётно
если n нечётно: $f(0, 1\dots1)$ и $f(1\dots1, 0)$ то 2 или 3 набора.

Полный диагностический тест для КС

$\forall$ безусловный ПДТ для КС, реализующий $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$, содержит все наборы.
Как устроена схема, реализующая $\bigoplus x_i$?

$$x_i^{\sigma_1}\dots x_n^{\sigma_n}, \quad \sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_n = 1$$

Если разорвать всё кроме этой цепи, то схема б. реализ-ть $x_1^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$.
Если $\sigma_1 \oplus \dots \oplus \sigma_n = 0$, то есть срез ???. Мимо них нельзя пройти. Если замкнуть всё кроме них, то б. $x_1 \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$
Из этой схемы можно получить $\mathbb{0}$, $\mathbb{1}$ (замкнуть или разомкнуть всё).
Если в тест не вкл. набор ??? к.-п. набор $\bigwedge x_i^{\sigma_i}$, то не отличим от $\mathbb{0}$, если не вкл. $\bigvee x_i^{\overline{\sigma_i}}$, то не отличим от $\mathbb{1}$.
! Если схема Карно из 4-х переменных, нужно построить полный диагностический тест (условный). Нужны все наборы или нет? Можно ли за 15 наборов?
Каким образом решается задача о тестировании матрицы?

$$\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f_0 \oplus f_1 & f_0 \oplus f_2 & \cdots & f_0 \oplus f_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

Надо подобрать такие строки, чтобы 1 столбец отличался от всех других.
Найти строки: в любом столбце есть единицы.
$<$ Задача о полноте и базисе в P_2 $>$
Задача о покрытии матриц.

$$\begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f_1 \oplus f_2 & \cdots & f_1 \oplus f_n & \cdots & f_{n-1} \oplus f_n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Строим все тупиковые покрытия матрицы. Для этого: есть строки i, j, k, где 1 у f_1

$$(i \vee j \vee k)(k \vee l \vee m)\dots(\dots) = 1$$

в каждом столбце матрицы №4.
После этого формальное раскрытие скобок и упрощение (á la алгоритм Нельсона).

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1 \vee 6)(1 \vee 2)(2 \vee 3)(3 \vee 4)(4 \vee 5)(5 \vee 6) = (1 \vee 26)(3 \vee 24)(5 \vee 46) = 135 \vee 246 \vee 1245 \vee 1346 \vee 2356$$

тупиковые ДНФ для функции, которая $= 0$ на 3 и более.

Градиентный алгоритм

Сформулируем задачу. Что такое *градиентный алгоритм* (жадный): минимизируем функции по антиградиенту.
Проблемы: с f'', которая может быстро меняться.
Есть параметр, который связан с оптимизацией и который мы меняем.

Градиентный алгоритм для задачи о покрытии

Состоит в том, что берём строку, которая покрывает наибольшее количество столбцов и убираем всё вместе со столбцами и т. д.
При определённых условиях этот алгоритм работает качественно.

Теорема. *Если в булевой матрице $m \times n$ доля единиц в любом столбце не меньше p, то градиентное покрытие не более $1 - \log_{1-p}(n)$ строк.*

Доказательство. Выбрав первую строку, имеем в ней же менее p доли столбцов.
$'1' \geqslant pmn$ разбрасываем по m стр.
Теперь осталось $\leqslant (1-p)n$ столбцов, следовательно, доля единиц повысилась.

$$(1-p)^t n, \quad t - ? \qquad (1-p)^t \leqslant \frac{1}{n}, \text{ то есть } t \geqslant -\log_{1-p} n$$

□

Пример: дискретная задача, где алгоритм работает хорошо. Поиск наикратчайшего остовного дерева. Задан связный граф, ребра с весами. Найти остовное дерево с наименьшим суммарным весом рёбер. (Будем считать, что граф полный и что веса > 0.)
Алгоритм: беру ребро наименьшего веса. Беру следующие лёгкие, если они не образуют цикл...

Доказательство. $l_1, \dots, l_{n-1} \Rightarrow$ дерево (алгоритма) $= D$(алг)
$l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots l_{n-1}$ и
$l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots l_{n-1}$ — $\widetilde{D}$(опт), $\exists$, если D(алг) неокб ???
р/м $l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, l'_{p+1}, \dots, l'_{n-1}$ — граф с 1 циклом. □

Если есть l'_k, образующее цикл, то выбросим его.
Теперь дерево ещё более оптимальное, чего быть не может.
Какие алгоритмы хорошие (по времени их работы) и почему? Полиномиальные лучше экспоненциальных. Что значит «алгоритм долго работает»?
Для решения задачи можно привлечь разные ресурсы. Если n^k — время, обычно решаем уравнение $n^k \leqslant C$, следовательно, $n \leqslant \sqrt[k]{C}$ — растущая функция.
А что имеем при $2^n \leqslant C$. Это хуже!
Оказывается, что почти все задачи (дискретные) в некотором смысле эквивалентны.
То есть умея решить с полиномиальной сложностью задачу №1, могу решить с полиномиальной сложностью задачу №2.
Язык, состоящий из КНФ.
КНФ называется *выполнимой*, если существует набор переменных, на которых КНФ $= 1$.
МТ: определить, является ??? КНФ легко.
NP-полный язык (недетерминированной полиномиальности) Недетерминированная МТ может содержать 2 разных команды q_1 и q_2 в L и q_1 и q_2 в R.

1. $L \in NP$

2. $L' \in NP, L' \propto L$ (полиномиально сводится)

$L' \in NP$ эт.б. нек. МТ ??? 1

Теорема. *(Кук, Карп, Левин)*

[15.11.11] Лекция 10

Пусть у нас есть задача распознавания, то есть есть некоторый алфавит A, множество слов в этом алфавите и подмножество этого множестве (язык) $L \in A^*$.
Докажем, что $L \in P \iff \exists$ ВМТ, распозн. L, и время разбора $\le P(n)$
$L \in NP \iff \exists$ НМТ
/ Задача на перебор /
Говорят, что один язык полиномиально сводится к другому языку: $L_1 \mathcal{L} L_2$: $\exists$ ДМТ, работающая за полиномиальное от длины входа время, $x \in L_1 \Leftrightarrow \phi(x) \in L_2$
Утверждение 1: $L \in NP,\ L' \mathcal{L} L \Rightarrow L' \in NP$
Утверждение 2 (транзитивность полиномиального сведения): $L_1 \mathcal{L} L_2, L_2 \mathcal{L} L_3 \Rightarrow L_1 \mathcal{L} L_3$
Эталонная задача на перебор – задача выполнимости

ВЫП

$A = \{(,), x, v, 1, 0, \neg\}$
$\omega \in$ВЫП, $(x_1 \vee \notin$ВЫП$)$
$(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3) \in$ВЫП

Определение. *Язык L – NP-полный, если:*

1. $L \in NP$
2. $\forall L' \in NP$: $L' \mathcal{L} L$

Теорема. *(Теорема Куна)*
Язык выполнимости является NP-полным. / без доказательства /

Утверждение: если язык L – NP-полный, L' – некоторый другой язык и $L \mathcal{L} L' \Rightarrow L'$ – NP-полный.
Рассмотрим ещё несколько NP-полных задач.

КЛИКА

КЛИКА: дан граф G и некоторое число k.
$(G, k) \in$КЛИКА тогда и только тогда, когда в G есть полный подграф из k вершин.

Теорема. *Язык КЛИКА является NP-полным.* Докажем две вещи:

1. КЛИКА$\in$NP
2. ВЫП $\mathcal{L}$ КЛИКА

Доказательство. На вход подаётся ω.
$\omega \notin$???, ω - не КНФ, тогда $(:, 2) \in$КЛИКА.
ω – КНФ $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$
$\forall$ литералу в КНФ поставим в соответствие вершину. Рёбра проводятся между всеми парами вершин, кроме

1. тех, которые соответствуют литералам, стоящим в одной скобке
2. тех, которые соответствуют x_i и $\overline{x}_i$

Если КНФ выполнима, то в $\forall$ скобке $\exists$ литерал, равный 1.
Вершины, соответствующие истинным литералам, взятые по одному из каждой скобки, образуют клику (они не находятся в одной скобке и не являются отрицанием друг друга, так как оба истинны).
Обратно: если есть некая клика, то в неё входят литералы из разных скобок, им ставим в соответствие 1, остальным - 0 и всё ОК.
(| размер клики$=k$, то

1. литералы, соответствующие разным вершинам, стоят в разных скобках и
2. не являются отрицаниями друг друга.

$x_i \in$КЛИКА, тогда $x_i = 1$; $\overline{x}_i \in$КЛИКА, тогда $x_i = 0$: $f(\tilde{x}) = 1$, т.к. все скобки $= 1$) ☐

NM

NM - независимое множество.
(G, k) : существует ли в G множество из k вершин, не соединённых рёбрами?
КЛИКА $\mathcal{L}$ NM
$(G, k) \mapsto (\overline{G}, n - k)$
$G = \langle V, E \rangle,\ \overline{G} = \langle V, V^2 \setminus E \rangle$
$P \subseteq NP$, т.к. $\forall$ ДНТ яляется НДТ ($\subseteq$ или $\subset$, неизвестно (!!!))

2-ВЫП

$\omega \in$2-ВЫП, если ω – КНФ, в $\forall$ скобке ровно 2 литерала.
2-ВЫП$\in P$
$K = (x_1 \vee y_1)(x_1 \vee y_2) \ldots (x_1 \vee y_k) \& (\overline{x}_1 \vee z_1)(\overline{x}_1 \vee z_2) \ldots (\overline{x}_1 \vee z_l) \& K'(x_2, \ldots, x_n)$
Преобразуем формулу следующим образом:
$= (x_1 \vee y_1 \ldots y_k)(\overline{x_1} \vee z_1 \ldots z_l)K'$
$(x_1 \vee x_1) \Rightarrow x_1 = 1$
$(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_1) \Rightarrow \overline{x} = 1$
Если литералы различны, то эта формула выполнима тогда и только тогда, когда $\underset{\substack{1 \le j \le l \\ 1 \le i \le k}}{\&} (y_i \vee z_j)K' = \Phi'$

Φ' - выполнима, тогда $(x_1 \vee y_1 \ldots y_k) = 1\$x_1 \vee z_1 \ldots z_l) = 1$
$\left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \Rightarrow z_1 = \ldots = z_l = 1 \\ x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = \ldots = y_l = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \Phi' = 1$
Обратно: если Φ' – выполнима, то

1. все $y_i = 1$, следовательно, $x_1 = 0$ или
2. существует $y_i = 0$, тогда $\&(y_i \vee z_j) = 0\ \Rightarrow z_j = 1\ \forall j\ \Rightarrow x_1 = 1$

Лемма. $\exists$ *биномиальное преобразование* ϕ: k *вып. тогда и только тогда, когда* $\phi(k)$ *вып.*

В $\phi(k)$ на одну переменную меньше.
$(x_1 \vee x_2 x_4)(\overline{x}_2 \vee x_3)(x_3 \vee \overline{x}_1)(x_4 \vee x_1)(x_4 \vee x_3)(\overline{x}_4 \vee x_2)$
Устраним x_1:
$(x_1 \vee x_2 x_4)(\overline{x}_1 \vee x_3)K'$ выполн. тогда и только тогда, когда $(x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee x_4)(x_4 \vee x_3)(\overline{x}_4 \vee x_2)$
Устраним x_2:
$(x_2 \vee x_3 \overline{x}_4)(\overline{x}_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_4)\ \Leftrightarrow\ (x_3 \vee x_3)(\overline{x}_4 \vee x_3)(x_3 \vee x_4),\ x_3 = 1$
Эта КНФ выполнима, следовательно, исходная КНФ выполнима

Язык 3-ВЫП

$\omega \in$3-ВЫП тогда и только тогда, когда ω – КНФ, любая скобка которой содержит ровно 3 литерала.
Задача распознавания 3-выполнимости является NP-полной.