Аннотация

Лекции по математическому анализу 2 семестра потока бакалавров ВМК МГУ.
Лектор — Фоменко Татьяна Николаевна.
Составитель — Андрей Тихонов (tiacorpo@gmail.com).

Оглавление

Глава 1

Определенный интеграл

1.1 Основные понятия

Определение. ***Разбиением отрезка*** $[a,b]$ *называется набор* $\underset{0\le k\le n}{\{x_k\}} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, *где* $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Определение. ***Диаметром,*** *или* ***мелкостью разбиения*** $\{x_k\}$ *называется число* $d = d(\{x_k\}) = \underset{1\le k\le n}{max}\{\Delta x_k\}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определение. ***Размеченным разбиением*** *называется разбиение, в котором зафиксированы точки* $\underset{1\le k\le n}{\{\xi_k\}}$, *где* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Определение. *Разбиение* $\{y_m\}$ *называется* ***измельчением разбиения*** $\{x_k\}$, *если* $\{x_k\} \subset \{y_m\}$.

Определение. *Разбиение* $\{z_j\}$ *называется* ***объединением разбиений*** $\{x_k\}$ ***и*** $\{y_m\}$, *если* $\{z_j\} = \{x_k\} \cup \{y_m\}$.

Определение. *Пусть на* $[a,b]$ *задана* $f(x)$. ***Интегральной суммой для*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a,b]$***, составленной по размеченному разбиению*** $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ *называется выражение вида*

$$\sigma_f = \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Определение. *Число* A *наывается* ***пределом интегральных сумм*** $f(x)$ ***на*** $[a,b]$ ***при*** $d \mapsto 0$, *где* d *- мелкость разбиений, если* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любого размеченного разбиения* $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$, *мелкость которого* $d < \delta$, *выполнено неравенство:* $|\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A| < \varepsilon$.

$$A = \lim_{d\mapsto 0} \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$$

Определение. ***Определенным интегралом*** $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ *называется предел интегральных сумм этой функции на этом отрезке при* $d \mapsto 0$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{d\mapsto 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Теорема 1. *Если у* $f(x)$ *существует предел интегральных сумм, то этот предел – единственный.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует 2 предела: $A_1 < A_2,\ A_2 - A_1 = \alpha > 0$. По определению предела, для $\forall\ \varepsilon = \frac{\alpha}{3}\ \exists\ \delta_1, \delta_2$, что:

1. для $\forall\ (\{x_k\}, \{\xi_k\}),\ d < \delta_1 \colon |\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A_1| < \varepsilon$
2. для $\forall\ (\{x_k\}, \{\xi_k\}),\ d < \delta_2 \colon |\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A_2| < \varepsilon$

Тогда для любого размеченного разбиения $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$, у которого $d \le min(\delta_1, \delta_2)$, будет выполнено и 1), и 2) $\Rightarrow$ $\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ попадает одновременно в 2 непересекающихся интервала. Противоречие. $\square$

Теорема 2. *Если существует* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *то обязательно* $f(x)$ *ограничена на* $[a,b]$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $f(x)$ неограничена на $[a,b]$. Тогда для любого разбиения $\{x_k\}$ $f(x)$ будет неограничена на хотя бы одном отрезке $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ этого разбиения. Выберем последовательность разбиений $\underset{0\leq k\leq n}{\{x_k^m\}}$ с мелкостью $d_m = d_m(\{x_k^m\}) < \frac{1}{m}$. В каждом из этих разбиений выберем отрезок $[x_{k_0-1}^m, x_{k_0}^m]$, где $f(x)$ не ограничена. Теперь подберем разметку так, чтобы интегральные суммы $\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})$ были больше m. Выберем ξ_k на всех отрезках $[x_{k-1}^m, x_k^m]$, кроме $[x_{k_0-1}^m, x_{k_0}^m]$, произвольным образом. А на $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ выберем ξ_{k_0} так, чтобы $|f(\xi_{k_0})| > \frac{m+|\sum\limits_{k\neq k_0} f(\xi_k)\Delta x_k)|}{\Delta x_{k_0}^m}$. Тогда вспомним неравенство: $|a+b| \geq |a| - |b|$ ($|a| = |(a+b)-b| \leq |a+b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a+b|$, ЧТД).
$|\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})| = |f(\xi_k^m)\Delta x_{k_0}^m + \sum\limits_{k\neq k_0} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m| \geq |f(\xi_k^m)\Delta x_{k_0}^m| - |\sum\limits_{k\neq k_0} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m| > m \Rightarrow \underset{d<\frac{1}{m}}{\sigma_f} > m \Rightarrow$ при $m \mapsto \infty$ получим противоречие. □

Определение. *Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, и задано размеченное разбиение $(\{x_k\},\{\xi_k\}) \Rightarrow f(x)$ ограничена на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k] \Rightarrow$ существует $\sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\} = M_k$, $\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\} = m_k$. **Верхней (нижней) интегральной суммой (суммой Дарбу)** $f(x)$ по разбиению $\{x_k\}$ на $[a,b]$ называется выражение:*

$\overline{s} := \sum\limits_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$

$\underline{s} := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$

Теорема 3. *6 свойств сумм Дарбу.*

1. $\forall$ $(\{x_k\},\{\xi_k\})\underline{s} \leq \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) \leq \overline{s}$
2. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ *разметка* $\{\xi_k\}$ *данного разбиения* $\{x_k\}$, *что* $\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) - \underline{s} < \varepsilon$, $\overline{s} - \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) < \varepsilon$
3. *При ризмельчении разбиения* $\underline{s}$ *не может уменьшиться,* $\overline{s}$ *– увеличиться.*
4. *При добавлении к разбиению* $\{x_k\}$ q *новых точек* $\overline{s}$ *может уменьшиться не более чем на* $(M-m)qd$, d *– мелкость* $\{x_k\}$. *Аналогично для* $\underline{s}$.
5. *Пусть* $\{x_k\}$, $\{y_j\}$ *– 2 разбиения* $[a,b]$. $\overline{s}$, $\underline{s}$ *и* $\overline{s}'$, $\underline{s}'$ *– их суммы Дарбу. Тогда* $\underline{s} \leq \overline{s}'$, $\overline{s} \geq \underline{s}'$.
6. *В силу 5),* $\exists\ sup\{\underline{s}\} = \underline{I}$ *– нижний интеграл Дарбу,* $\exists\ inf\{\overline{s}\} = \overline{I}$ *– верхний интеграл Дарбу, причем* $\underline{s} \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq \overline{s}$.

Доказательство.

1. Для любого разбиения $\{x_k\}$ и любой разметки $\{\xi_k\}$ $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \Rightarrow \underline{s} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k = \overline{s}$
2. По определению sup, $\forall\ \varepsilon > 0$ на каждом $[x_{k-1},x_k]\ \exists\ \xi_k$, что $M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $1 \leq k \leq n \Rightarrow \overline{s} - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - f(\xi_k))\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon$. Аналогично для $\underline{s}$.
3. Достаточно доказать, что $\overline{s}$ не увеличивается, а $\underline{s}$ не уменьшается, при добавлении к разбиению $\{x_k\}$ 1 новой точки.

   Пусть новая точка η добавлена между x_{k_0-1} и x_{k_0}. Расмотрим суммы Дарбу.

   $\overline{s} = M_{k_0}\Delta x_{k_0} + \sum\limits_{k\neq k_0} M_k\Delta x_k$

   $\overline{s}' = M_{k_0}^1(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}^2(x_{k_0} - \eta) + \sum\limits_{k\neq k_0} M_k\Delta x_k$

   Сравним эти два выражения. Заметим, что $M_{k_0}\Delta x_{k_0} = M_{k_0}(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}(x_{k_0} - \eta)$. Причём очевидно, что $M_{k_0} \geq \sup\limits_{x\in[x_{k_0-1},\eta]}\{f(x)\} = M_{k_0}^1$ и $M_{k_0} \geq \sup\limits_{x\in[\eta,x_{k_0}]}\{f(x)\} = M_{k_0}^2 \Rightarrow \overline{s} \geq \overline{s}'$. Аналогично для $\underline{s}$.
4. Докажем, что при добавлении 1 новой точки к разбиению $\{x_k\}$ $\overline{s}$ может уменьшиться не более, чем на $(M-n)d$, где $M = \sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, d – мелкость разбиения $\{x_k\}$.

   Аналогично доказательству 3), пусть добавлена новая точка η между x_{k_0-1} и x_{k_0}. Рассмотрим разность $\overline{s} - \overline{s}'$:
   $\overline{s} - \overline{s}' = M_{k_0}\Delta x_{k_0} - (M_{k_0}^1(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}^2(x_{k_0} - \eta)) = (M_{k_0} - M_{k_0}^1)(\eta - x_{k_0-1}) + (M_{k_0} - M_{k_0}^2)(x_{k_0} - \eta) \leq (M - m)((\eta - x_{k_0-1}) + (x_{k_0} - \eta)) = (M-m)\Delta x_{k_0} \leq (M-m)d$

5. Пусть даны 2 любых разбиения: $\{x_k\},\ \{y_j\}$; $\{z_m\} = \{x_k\} \cup \{y_j\}$. Пусть $\overline{s}, \underline{s}$ – суммы Дарбу для $\{x_k\}$, $\overline{s}', \underline{s}'$ – для $\{y_j\}$, $\overline{s}'', \underline{s}''$ – для $\{z_m\}$.
   $\underline{s} \le \underline{s}'' \le \overline{s}'' \le \overline{s}'$, $\underline{s}' \le \underline{s}'' \le \overline{s}'' \le \overline{s}$.
6. Докажем, что $\underline{s} \le \underline{I}\ \le\ \overline{I} \le \overline{s}$.
   Предположим противное. $\overline{I} < \underline{I}$, $\underline{I} - \overline{I} = \alpha > 0$. По определению $sup,\ inf$ для $\frac{\alpha}{3}$ $\exists\ \underline{s}$, что $\underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \le \underline{I}$; $\exists\ \overline{s}$, что $\overline{I} \le \overline{s} < \overline{I} + \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \overline{s} < \overline{I} + \frac{\alpha}{3} < \underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \Rightarrow$ противоречие.

□

Определение. *$f(x)$ называется* ***интегрируемой по Риману на*** *$[a,b]$, если $\exists \int\limits_a^b f(x)dx$. Также используется запись $f \in \mathbb{R}[a,b]$.*

1.2 2 критерия интегрируемости функции по Риману

Теорема 4. *Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу*
Для того, чтобы $f(x)$, ограниченная на $[a,b]$, была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s}_f - \underline{s}_f < \varepsilon$.

Доказательство. **Необходимость.**
Пусть $\exists\ I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d \mapsto 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow$ по определению lim, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{4}) > 0$, что для любого разбиения $\{x_k\}$ и любой его разметки $\{\xi_k\}$, если $d(\{x_k\}) < \delta \Rightarrow |\sigma_f - I| < \frac{\varepsilon}{4}$.
По 2 свойству из теоремы 3, $\exists\ \{\xi_k'\}$, $\exists\ \{\xi_k''\}$, что при даном разбиении $\{x_k\}$
$\sigma_f' = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k')\Delta x_k,\ \sigma_f'' = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k'')\Delta x_k$, удовлетворяющие неравенствам:
$\sigma_f' - \underline{s} < \frac{\varepsilon}{4},\ \overline{s} - \sigma_f'' < \frac{\varepsilon}{4}$.
При этом выполнены и неравенства:
$|\sigma_f' - I| < \frac{\varepsilon}{4},\ |\sigma_f'' - I| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |\overline{s} - \underline{s}| \le |\overline{s} - \sigma_f''| + |\sigma'' - I| + |I - \sigma'| + |\sigma' - \underline{s}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$ □

Для доказательства достаточности нам потребуется доказать следующее утверждение:

Лемма. *Основная лемма Дарбу.*
$\underline{I} = \lim\limits_{d \mapsto 0}\{\underline{s}\},\ \overline{I} = \lim\limits_{d \mapsto 0}\{\overline{s}\}$

Доказательство. По определению $\overline{I} = inf\{\overline{s}\} \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение $\{x_k\}$, что $\overline{s}$ удовлетворяет неравенству:
$\overline{I} \le \overline{s} < I + \frac{\varepsilon}{2}$
Пусть в $\{x_k\}$ имеется $q+1$ точка. Рассмотрим теперь разбиение $\{y_j\}$ с мелкостью
$d(\{y_j\}) < \frac{\varepsilon}{2(M+m)(q-1)} = \delta(\varepsilon) > 0$
Рассмотрим разбиение $\{z_m\} = \{y_j\} \cup \{x_k\}$. В $\{z_m\}$, по сравнению с $\{y_j\}$, добавлено не более, чем $q-1$ точек. Обозначим верхние суммы Дарбу: $\overline{s}'$ - для $\{y_j\}$, $\overline{s}''$ - для $\{z_m\}$.
$\overline{s}'' \le \overline{s},\ \overline{s}'' < \overline{s}'$
$\overline{s}' - \overline{s}'' \le (M-m)(q-1)d < (M-m)(q-1)\frac{\varepsilon}{2(M-m)(q-1)} = \frac{\varepsilon}{2}$
$I \le \overline{s}'' < I + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \overline{I} \le \overline{s}' < \overline{I} + \varepsilon \Rightarrow \overline{I} = \lim\limits_{d \mapsto 0} \overline{s}$ □

Доказательство. **Достаточность.**
Дано: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s} - \underline{s} < \varepsilon \Rightarrow \underline{s} \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{s} \Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = I$
По основной лемме Дарбу $\lim\limits_{d \mapsto 0} \underline{s} = \lim\limits_{d \mapsto 0} \overline{s} = I$
По свойству 1 теоремы 3, $\underline{s} \le \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) \le \overline{s} \Rightarrow \exists\ \lim\ \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) = I$, т. е. $f \in \mathbb{R}[a,b]$ □

Теорема 5. *Критерий интегрируемости в теминах верхних и нижних интегралов Дарбу*
$f \in \mathbb{R}[a,b]\ \Leftrightarrow\ \underline{I} = \overline{I}$

Доказательство. **Необходимость.**
Пусть $f \in \mathbb{R}[a,b] \Rightarrow$ по теореме 4 $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s} - \underline{s} < \varepsilon\ \Rightarrow\ \underline{I} = \overline{I}$
Достаточность.
Пусть $\underline{I} = \overline{I}$. По основной лемме Дарбу $\lim\limits_{d \mapsto 0} \underline{s} = \lim\limits_{d \mapsto 0} \overline{s} = I$. По теореме 3 $\underline{s} \le \sigma_f \le \overline{s}$. По теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{d \mapsto 0} \sigma_f = I$ □

1.3 Классы интегрируемых функций

Теорема 6. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема.*

Доказательство. По теорема Кантора $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, т. е. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0,\ \forall\ x_1,\ x_2\in[a,b]\colon |x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

Рассмотрим разбиение $\{x_k\}$ на $[a,b]$ с мелкостью $d\le\delta(\frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\overline{s}-\underline{s}=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$, где $M_k-m_k=$

$\underset{x\in[x_{k-1},x_k]}{sup}\{f(x)\}-\underset{x\in[x_{k-1},x_k]}{inf}\{f(x)\}=\underset{x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]}{sup}\{\underbrace{f(x_1)-f(x_2)}_{\le\frac{\varepsilon}{b-a}}\}\le\frac{\varepsilon}{b-a}\ \Rightarrow\ \overline{s}-\underline{s}\le\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k\le\frac{\varepsilon}{b-a}*(b-a)=\varepsilon$

$\Rightarrow$ по теореме 4 $f\in\mathbb{R}[a,b]$. □

Теорема 7. *Если ограниченная функция $f(x)$ монотонна на $[a,b]$, то она интегрируема.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ не убывает на $[a,b]$. Для $\forall\ \varepsilon>0$ рассмотрим любое разбиение x_k на $[a,b]$ с мелкостью $d\le\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Тогда $\overline{s}-\underline{s}=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$.

Так как $f(x)$ не убывает, то $\overline{s}-\underline{s}=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\underbrace{\Delta x_k}_{\le d=\delta(\varepsilon)}\le\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-m_k)=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(M_n-m_1)^*=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a))=\varepsilon$.

По 1 критерию интегрируемости $f(x)$ интегрируема.

*: действительно, $M_k=m_{k+1}$ □

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***почти везде непрерывной на*** $[a,b]$*, если для $\forall\ \varepsilon>0$ существует конечный набор интервалов суммарной длины $l<\varepsilon$, покрывающих все точки разрыва $f(x)$.*

Теорема 8. *Если $f(x)$ почти везде непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема.*

Доказательство. Для $\forall\ \varepsilon>0$ рассмотрим конечный набор интервалов $J_j=(c_j,d_j)$, сумма длин которых $l=\sum\limits_{j=1}^{q}|J_j|<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}$, который покрывает все точки разрыва $f(x)$.

Здесь $M=\underset{a\le x\le b}{sup}\{f(x)\},\ m=\underset{a\le x\le b}{inf}\{f(x)\}$. (можно считать, что J_j не пересекаются)

Тогда $[a,b]\setminus\overset{j=1}{\underset{q}{\cup}}J_j=I$ - объедиение отрезков, $I=\overset{i=1}{\underset{q+1}{\cup}}I_i$.

Рассмотрим $f(x)$ на I_i. Она там непрерывна $\Rightarrow$ по теореме Кантора $f(x)$ равномерно непрерывна на I_i, т. е. для $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\frac{\varepsilon}{2(b-a)})>0$, что для $\forall\ x',x''\in I_i,\ |x'-x''|<\delta_i\ \Rightarrow\ |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Тогда для любого разбиения $\nu_i=\{\nu_{i_k}\}$ отрезка I_i с мелкостью $d_i<\delta_i(\frac{\varepsilon}{2(b-a)})$ для любых двух точек элементарного отрезка разбиения($[\nu_{i_{k-1}},\nu_{i_k}]$):

$x',x''\in[\nu_{i_{k-1}},\nu_{i_k}]\ \Rightarrow\ |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Переходя к sup, получим:

$$M_{i_k}(=\underset{x\in[\nu_{i_{k-1}},\nu_{i_k}]}{sup}f(x))-m_{i_k}(=\underset{x\in[\nu_{i_{k-1}},\nu_{i_k}]}{inf}f(x))=\underset{x',x''\in[\nu_{i_{k-1}},\nu_{i_k}]}{sup}|f(x')-f(x'')|\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\qquad(\#)$$

Возьмем теперь $0<\delta\le\underset{1\le i\le q+1}{min}\{\delta_i\}$ и рассмотрим на любом отрезке I_i разбиение мелкостью $d_i<\delta\Rightarrow$ для любого $i\colon 1\le\le q+1$ выполняется (#)

Объединим все эти разбиения. Получится некоторое разбиение $\{y_k\}$ отрезка $[a,b]$, в которое войдут замыкания выброшенных интервалов J_j. Пусть $\overline{s},\underline{s}$ - суммы Дарбу этого разбиения. Тогда рассмотрим их разность: $\overline{s}-\underline{s}=$

$=\sum\limits_{k=1}^{N}(M_k-m_k)\Delta y_k=\sum\limits_{[y_{k-1},y_l]\subset\cup I_i}(M_k-m_k)\Delta y_k+\sum\limits_{[y_{k-1},y_k]\subset\underbrace{[a,b]\setminus\cup I_i}_{=\cup J_j}}(M_k-m_k)\Delta y_k\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\underbrace{\sum\limits_{[y_{k-1},y_l]\subset\cup I_i}\Delta y_k}_{\le(b-a)}+$

$+(M-m)\underbrace{\sum\limits_{[y_{k-1},y_l]\subset\cup J_j}\Delta y_k}_{<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}}<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+\frac{\varepsilon}{2(M-m)}(M-m)=\varepsilon$ □

Теорема 9. *Верно также следующее утверждение (без доказательства):*
Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, а $\phi(y)$ - непрерывна на $[m;M]$, то $\phi(f(x))\in\mathbb{R}[a,b]$

Следствие: если $f\in\mathbb{R}[a,b]$, то и $\dfrac{1}{f}$ - тоже. ($f(x)\neq0$ на $[a,b]$).

1.4 Основные свойства определенных интегралов

Теорема 10. *7 свойств определенных интегралов*

Соглашение: будем считать, что $\int\limits_a^a f(x)dx = 0,\ \int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx\ (a < b)$

1. *Линейность:* $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathbb{R}[a, b]\colon \int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x) + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$

2. *Интегрируемость произведения: если* $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$, *то* $fg \in \mathbb{R}[a, b]$

3. *Аддитивность: если* $f \in \mathbb{R}[a, b]$, *то* $f \in \mathbb{R}[c, d]\ \forall\ [c, d] \subset [a, b]$.

   Кроме того, $\forall\ c \in (a, b)\ \int\limits_a^b f(x)df = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

4. (a) *Если* $f \in \mathbb{R}[a, b]$ *и* $f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)df \geq 0$

   (b) *Если* f *непрерывна и неотрицательна на* $[a, b]$, *и существует* $c,\ a \leq c \leq b,\ f(c) > 0$, *то* $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$

5. (a) *Если* $f, g \in \mathbb{R}[a, b],\ f(x) \leq g(x),\ a \leq x \leq b$, *то* $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

   (b) *Если* f, g *непрерывны на* $[a, b],\ f(x) \leq g(x),\ \exists\ c \in [a, b]\colon f(x) < g(c)$, *то* $\int\limits_a^b f(x)dx < \int\limits_a^b g(x)dx$

6. *Если* $f(x)$ *неотрицательна и непрерывна на* $[a, b]$ *и* $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, *то* $f(x) \equiv 0$ *на* $[a, b]$

7. *Если* $f \in \mathbb{R}[a, b]$, *то* $|f| \in \mathbb{R}[a, b]$. *Кроме того,* $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

Доказательство.

1. Рассмотрим интегральные суммы функций $f, g, \alpha f, \beta g$ по некоторому размеченному разбиению $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$:

$$\sigma_{\alpha f + \beta g} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))\Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$$

   Переходя к пределу при $d \mapsto 0$, получим требуемое равенство.

2. $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$ Заметим, что $fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$. По свойству 1, достаточно доказать, что если $f \in \mathbb{R}[a, b]$, то и $f^2 \in \mathbb{R}[a, b]$.

   Предположим сначала, что $sup\{f(x)\} = M > 0$ и $m > 0$. Пусть $\overline{s}, \underline{s}$ - суммы Дарбу для f по $\{x_k\}$, а $\overline{s}', \underline{s}'$ - для f^2.

$$\overline{s}' - \underline{s}' = \sum (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k)\Delta x_k = \sum (M_k^2 - m_k^2)\Delta x_k = \sum \underbrace{(M_k + m_k)}_{\leq 2M}(M_k - m_k)\Delta x_k \leq 2M \underbrace{\sum (M_k - m_k)\Delta x_k}_{\overline{s} - \underline{s}} < \varepsilon$$

   при достаточно мелком разбиении, при котором $\overline{s} - \underline{s} < \frac{\varepsilon}{2M}$.

   Пусть теперь M, m не обязательно больше нуля. Рассмотрим $\tilde{f}(x) = f(x) + \lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, что $inf\{\tilde{f}(x)\} > 0$. По предыдущему рассуждению $\tilde{f}^2$ интегрируема. Но тогда $\tilde{f}^2(x) = f^2(x) + 2\lambda f(x) + \lambda^2 \Rightarrow f^2(x) = \tilde{f}^2(x) - 2\lambda f(x) - \lambda^2$ интегрируема как линейная комбинация интегрируемых функций.

3. (a) Пусть $a \leq c \leq d \leq b$.

   Рассмотрим любое разбиение $\{x_k\}$ на $[a, b]$, содержащее точки c и d.

$$(\overline{s} - \underline{s})_{[a,b]} = \sum_{c < x_{k-1} \leq x_k < d} (M_k - m_k(\Delta x_k + \underbrace{\sum_{[x_{k-1}, x_k] \in [a, b] \setminus (c, d)}}_{= \gamma > 0} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

   При этом

$$(\overline{s} - \underline{s})_{[c,d]} = (\overline{s} - \underline{s})_{[a,b]} - \gamma \leq (\overline{s} - \underline{s})_{[a,b]} < \varepsilon$$

   при достаточно малой мелкости разбиения $\{x_k\}$.

(b) Для любого c: $a < c < b$ по предыдущему доказательству f интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$. Пусть задано размеченное разбиение $(\{x_k\}, \{\xi_k\}),\ c \in \{x_k\}$:

$$\sigma_f[a,b] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{x_k \le c} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{x_{k-1} \ge c} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Переходя к пределу при $d \mapsto 0$, получим требуемое равенство.

4. (a)

$$f(x) \ge 0,\ a \le x \le b \overset{?}{\Rightarrow} \int_a^b f(x)dx \ge 0$$

Любая интегральная сумма:

$$\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\xi_k)}_{\ge 0}\underbrace{\Delta x_k}_{>0} \ge 0$$

Переходя к пределу при $d \mapsto 0$, получим требуемое равенство.

(b) $f \in \underbrace{C[a,b]}_{\text{непрерывные}},\ f(x) \ge 0,\ a \le x \le b,\ \exists c \in [a, b]$, что $\underbrace{f(c)}_{=\gamma} > 0$

По теореме о сохранении знака непрерывных функций, $\exists\ \delta > 0$, что $f(x) \ge \frac{\gamma}{2}$ в $U_\delta(c)$ (Если $c = a$ или $c = b$, то будем иметь в виду правую или левую окрестность c). Тогда

$$\int_a^b = \underbrace{\int_a^{c-\delta} f(x)dx}_{\ge 0} + \underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx}_{> \frac{\gamma}{2}2\delta > 0} + \underbrace{\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx}_{\ge 0} > 0$$

5. (a) Пусть $f, g \in \mathbb{R}[a, b],\ f(x) \le g(x)\ \forall\ x \in [a, b]$. Для доказательством воспользуемся свойством 4.а для функции $\phi(x) = g(x) - f(x) \ge 0$.

(b) Пусть $f, g \in C[a, b],\ f(x) \le g(x),\ \exists c \in [a, b]\colon f(c) < g(c)$. Для доказательства воспользуемся свойством 4.б для функции $\phi(x) = g(x) - f(x) \ge 0,\ \phi(c) > 0$.

6. Пусть $f \in C[a, b],\ f(x) \ge 0\ \forall\ x \in [a, b],\ \int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Для доказательства предположим противное, т.е. пусть $\exists\ c \in [a, b]\colon f(c) > 0$. Но тогда по свойству 4.б $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$. Противоречие.

7. Пусть $f \in \mathbb{R}[a, b]$. Для доказательства воспользуемся неравенством $||a| - |b|| \le |a - b|$. В частности, $|a| - |b| \le |a - b|$. Обозначим, как выше, для разбиения $\{x_k\}$ на $[a, b]$ $M_k,\ m_k$ – $sup,\ inf\ f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k]$.

$\tilde{M}_k,\ \tilde{m}_k$ – $sup,\ inf\ |f(x)|$ на $[x_{k-1}, x_k]$. В силу равенства, $\forall\ x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]\colon ||f(x')| - |f(x'')|| \le |f(x') - f(x'')|$. Переходя к sup этих разносткй, получим:

$$\underbrace{\sup_{x',x'' \in [x_{k-1},x_k]} \{||f(x')| - |f(x'')||\}}_{=\tilde{M}_k - \tilde{m}_k} \le \underbrace{\sup_{x',x'' \in [x_{k-1},x_k]} \{|f(x') - f(x'')|\}}_{=M_k - m_k}$$

Рассмотри разности сумм Дарбу: $\overline{s}, \underline{s}$ – для $f(x)$ на $\{x_k\}$, $\overline{s}', \underline{s}'$ – для $|f(x)|$ на $\{x_k\}$.

$$\overline{s}' - \underline{s}' = \sum_{k=1}^{n}(\tilde{M}_k - \tilde{m}_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \overline{s} - \underline{s} < \varepsilon\ \forall\ \varepsilon > 0$$

По критерию интегрируемости $f\ \exists\ \{x_k\}\colon \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \{x_k\}$ на $[a, b]\colon \overline{s}' - \underline{s}' < \varepsilon \Rightarrow$ по критерию интегрируемости $|f(x)|$ интегрируема на $[a, b]$.

Рассмотрим интегральные суммы по некоторому размеченному разбиению $(\{y_j\}, \{\xi_j\})$:

$$|\sigma_f(\{y_j\}, \{\xi_j\})| = |\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\Delta y_j| \le \sum_{j=1}^{N} |f(\xi_j)\Delta y_j| = \sigma_{|f|}(\{y_j\}, \{\xi_j\})$$

Переходя к пределу при $d \mapsto 0$ в полученном неравенстве, получим требуемое неравенство.

□

Замечания:

1. Обратное утверждение к свойству 7, вообще говоря, неверно. Пример:

   Рассмотрим функцию Дирихле:
$$D(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   $D(x)$ не интегрируема, так как $\forall\{x_k\}$ на $[a,b]$ $\forall\{\xi_k\}$ – рациональные точки и $\forall\{j_k\}$ – иррациональные точки $\Rightarrow \sigma_D(\{x_k\},\{\xi_k\}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)\Delta x_k = -(b-a)$; $\sigma_D(\{x_k\},\{j_k\}) = \sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a$, причем $\{x_n\}$ может быть любой мелкости $\Rightarrow \nexists \int\limits_a^b D(x)dx$. Однако $|D(x)| = 1$ на $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b |D(x)|dx = b-a$.

2. Композиция двух интегрируемых на $[a,b]$ функций не обязательно интегируема.

Теорема 11. *Первая теорема о среднем для определенного интеграла.*
Пусть $f \in \mathbb{R}[a,b],\ g(x)$ *не меняет знак на* $[a,b]$. *Тогда* $\exists\ \mu \in [m,M]\colon \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Пусть $g(x) \geq 0$ на $[a,b]$. Так как $m \leq f(x) \leq M$, то $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),\ a \leq x \leq b$. Тогда по свойству 5
$$\underbrace{\int\limits_a^b mg(x)dx}_{=m\int\limits_a^b g(x)dx} \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq \underbrace{\int\limits_a^b Mg(x)dx}_{=M\int\limits_a^b g(x)dx} \qquad (\#)$$

Полагая, что $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$, получим $m \leq \underbrace{\dfrac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}}_{=\mu} \leq M$, то есть $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$.

Если $g(x)dx \equiv 0$, то имеем в (#) все части равные 0, т. е. $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Поэтому равенство $\int\limits_a^b \underbrace{f(x)g(x)}_{=0}dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$ верно при любом μ.

Если $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то рассмотрим $(-g(x)) \geq 0$. Для нее формула верна: $\exists\ \mu, \int\limits_a^b f(x)(-g(x))dx = \mu\int\limits_a^b(-g(x))dx$. Вынесем (-1) и сократим $\Rightarrow$ ЧТД. $\square$

Следствия.

1. Пусть $f(x) \in C[a,b]$. Тогда, так как $m \leq \mu \leq M$, то по непрерывности $f(x)$ для $\forall\ \mu,\ m \leq \mu \leq M,\ \exists\ \xi \in [a,b]\colon f(\xi) = M \Rightarrow$ формула среднего значения имеет вид $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$.

2. Пусть $g(x) \equiv 1$ на $[a,b],\ f \in \mathbb{R}[a,b]$. Тогда по теореме 11 $\exists\ \mu,\ m \leq \mu \leq M\colon \int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)\left(= \mu\int\limits_a^b 1dx\right)$. Если в этих условиях $f \in C[a,b]$, то $\exists\ \xi \in [a,b] \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

1.5 Интеграл с переменным верхним(нижним) пределом

Определение. ***Интегралом с переменным верхним(нижним) пределом от*** $f(x)$ *называется функция* $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt,\ a \leq x \leq b\ \left(G(x) := \int\limits_x^b f(t)dt,\ a \leq x \leq b\right)$

Теорема 12. *Если* $f \in \mathbb{R}[a,b]$, *то* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ *непрерывен на* $[a,b]$.

Доказательство. $|\Delta F| = |F(x+\Delta x) - F(x)| = |\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = |\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt| \leq \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \leq (|f(t)| \leq Q,\ a \leq t \leq b)$ $Q\int\limits_x^{x+\Delta x} 1dt = Q\Delta x \Rightarrow F(x)$ непрерывен в $\forall\ x$.

Если $\Delta x < 0$, то $|\Delta F| = |-\int\limits_{x+\Delta x}^{x} f(t)dt| = |\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt|$ $\square$

Теорема 13. *Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in (a,b)$. Тогда $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$ дифференцируема в точке x_0, и $F'(x_0) = f(x_0)$*