Оглавление

Глава 1

Комплексные числа и функции комплексной переменной

1.1 Комплексные числа и их свойства

Определение. *Комплексное число* $z = (x; y), x, y \in \mathbb{R}$
$x = \operatorname{Re} z$ - *действительная часть* z
$y = \operatorname{Im} z$ - *мнимая часть* z

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$

1.1.1 Арифметические операции

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$
Вычитание - обратное к сложению
Деление - обратное к умножению
$z = \dfrac{z_1}{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z * z_2$
$0 = (0; 0)$
$1 = (1; 0)$
$a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = (a; 0)$
$\{z\} = \mathbb{C}$ - поле комплексных чисел
$\mathbb{R}$ - поле действ. чисел - подполе $\mathbb{C}$

1.1.2 Комплексное сопряжение

$\overline{z} = (x; -y)$ - компл. сопр. к z
Свойства:

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. $z\overline{z} = (x^2 + y^2; 0)$
3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
4. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
5. $\overline{z1 * z2} = \overline{z1} * \overline{z2}$
6. $\overline{\left(\dfrac{z1}{z2}\right)} = \dfrac{\overline{z1}}{\overline{z2}}$

1.1.3 Геометрическая интерпретация

$z = (x, y) = (r, \phi)$
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$$\begin{cases} \cos\phi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\phi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}, \ z \neq 0$$
$z = 0 \Leftrightarrow r = 0$

$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\cos\phi \end{cases}$
$\phi \in \Phi = \operatorname{Arg} z = \{\phi_0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\phi_0 = \arg z,\ \phi_0 \in [0; 2\pi]$
Множество точек (векторов) с арифметическими операциями: сложение и умножение на действительное число $\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$ – линейное пространство.
Если $||z_1 - z_2|| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, то это евклидово пространство.
Sample: доказать, что $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (используя правило параллелограма и тот факт, что сумма квадратов диагоналей параллелограма равна двойной сумме квадратов сторон)

1.1.4 Алгебраическая форма комплексных чисел

В линейном пространстве $\forall z$
$z = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2$
$\overline{e}_1, \overline{e}_2$ - векторы системы координат
$\overline{e}_1 = (1, 0) = 1$
$\overline{e}_2 = (0, 1) = i$
$i^2 = (-1, 0) = -1$

1.1.5 Тригонометрическая форма

$r = \sqrt{x^2 + y^2}/ = |z|/$
$\phi \in \operatorname{Arg} z$
$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$
$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$
Утверждение (свойства модуля):

1. $|z| \geq 0; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $|-z| = |z|$
4. $z\overline{z} = |z|^2$
5. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
6. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
7. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;\ |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
8. $|Re\ z| \leq |z|;\ |Im\ z| \leq |z|$
9. $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$

Доказательство. $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ □

1.1.6 Показательная форма

$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ (Формула Эйлера)
$e^{-i\phi} = \cos\phi - i\sin\phi$
$z = re^{i\phi}; r = |z|, \phi \in \operatorname{Arg} z (z \neq 0);\ \overline{z} = re^{-i\phi}$
$z = 0 \Leftrightarrow r = 0$
Утверждение:

1. $e^{i\phi_1} e^{i\phi_2} = e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$
2. $\dfrac{e^{i\phi_1}}{e^{i\phi_2}} = e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$
3. $\left(e^{i\phi}\right)^n = e^{in\phi},\ n \in \mathbb{Z}$
4. $\left|e^{i\phi}\right| = 1$
5. $e^{i(\phi + 2\pi k)} = e^{i\phi},\ k \in \mathbb{Z}$

Доказательство.

3. $e^{i\phi_1}e^{i\phi_2} = (\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = \cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_2\cos\phi_1) = \cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2) = e^{i(\phi_1+\phi_2)}$

4. $|e^{i\phi}| = |\cos\phi + i\sin\phi| = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = 1$

□

1.1.7 Извлечение корня n-й степени

Определение. $z = \sqrt[n]{c}$ $(n \in \mathbb{N},\ n > 1) \Leftrightarrow z^n = c$

1. $\sqrt[n]{0} = 0$

2. $c \neq 0$
   $c = \rho e^{i\alpha}$
   $z = re^{i\phi}$
   $z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\phi} = \rho e^{i\alpha} \ \Rightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\phi = \alpha + 2\pi k \end{cases}$
   $\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\alpha+2\pi k}{n}},\ k = 0, 1, \ldots, n-1$

1.2 Расширенная комплексная плоскость. Кривые. Множества на комплексной плоскости.

1.2.1 Расширенная комплексная плоскость

Определение. *Расширенная комплексная плоскость* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Модель расширенной комплексной плоскости - сфера Римана S.
Утверждение.
Пусть $N \leftrightarrow M$. Тогда
$\xi = \dfrac{x}{1+|z|^2}, \eta = \dfrac{y}{1+|z|^2}, \zeta = \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}$ (1)
$x = \dfrac{\xi}{1-\zeta}, y = \dfrac{\eta}{1-\zeta}$ (2)

Доказательство. $N(x, y, 0)$
$\vec{PM} = (\xi, \eta, \zeta - 1)$
$\vec{PN} = (x, y, -1)$
$\vec{PM} || \vec{PN} \ \Rightarrow \ \exists k \neq 0$, что $\dfrac{\xi}{x} = \dfrac{\eta}{y} = \dfrac{\zeta - 1}{-1} = k$ (3) $\ \Rightarrow \ \zeta = 1 - k, \xi = kx, \eta = ky$
$S\colon \xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta$
$k^2(x^2+y^2) + (1-k)^2 = 1 - k$
$k = \dfrac{1}{1+x^2+y^2} = \dfrac{1}{1+|z|^2}$
$\xi = \dfrac{x}{1+|z|^2}, \eta = \dfrac{y}{1+|z|^2}, \zeta = \dfrac{|z|^2}{1+|z|^2}$ □

Замечания:

1. ∞ - одна на $\overline{\mathbb{C}}$

2. Множество окружностей на S $\leftrightarrow$ множество окружностей и прямых $\overline{\mathbb{C}}$

3. Любая окружность на S, не проходящая через точку P, соответствует окружности $\overline{\mathbb{C}}$; любая окружность на S, проходящая через точку P, соответствует прямой $\overline{\mathbb{C}}$

1.2.2 Кривые на плоскости

Пусть $x(t), y(t), t \in [\alpha, \beta]$ - вещественные непрерывные функции.
$\gamma\colon \begin{cases} z(t) = x(t) + iy(t) \\ \quad t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$ (4)
Уравнение (4) задает непрерывную кривую на плоскости.
На γ в силу (4) индуцировано направление, соответствующее изменению параметра t.

Определение. *$z(\alpha)$ - начальная точка γ, $z(\beta)$ - конечная точка γ.*

Кривая, которая отличается от γ только направлением, обозначается γ^{-1}.

Определение. *Если $\exists\ t_1 \neq t_2$, что $z(t_1) = z(t_2)$, то это точка самоперемечения кривой γ (кроме $t_1 = \alpha, t_2 = \beta$ и наоборот).*

Определение. *Простая (жорданова) кривая - непрерывная кривая без точек самопересечения.*

Определение. *Если $z(\alpha) = z(\beta)$, то γ - замкнутая кривая.*

Определение. *Кривая γ - гладкая, если $x, y \in \mathbb{C}^1[\alpha, \beta]$, причем $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$. Иначе говоря, $\exists z'(t), t \in [\alpha, \beta]$, причем $z'(t) \neq 0$.*

Замечание:
Если кривая замкнута, то для гладкости необходимо дополнительное равенство $z'(\alpha + 0) = z'(\beta - 0)$.

Определение. *Непрерывная кривая называется кусочно-гладкой, если она состоит из конечного числа гладких кусков.*

Определение. *Замкнутая простая кусочно-гладкая кривая называется замкнутым контуром.*

1.2.3 Множества на комплексной плоскости

$E \neq \varnothing$
$d = \operatorname{diam} E = \underset{z_1, z_2 \in E}{sup} |z_1 - z_2|$
Круговые окрестности:
$z_0 \neq \infty$
$K_\varepsilon(z_0) = \{z\colon |z - z_0| < \varepsilon\}$
Проколотая окрестность: $\dot{K}_\varepsilon(z_0) = \big\{z\colon 0 < |z - z_0| < \varepsilon\big\}$
$z_0 = \infty$
$K_B(\infty) = \big\{z\colon |z| > B\big\}$
$\dot{K}_B(\infty) = \big\{z\colon B < |z| < \infty\big\}$

Определение. *Внутренняя точка - точка, у которой есть окрестность, содержащая только точки, принадлежащие множеству.*

Определение. *Внешняя точка - точка, у которой есть окрестность, содержащая только точки, не принадлежащие множеству.*

Определение. *Граничная точка - точка, в любой ненулевой окрестности которой есть как внешние, так и внутренние точки.*

Определение. *Предельная точка - точка, в любой ненулевой окрестности которой бесконечно много внутренних точек.*

Определение. *Открытое множество - множество, все точки которого внутренние.*

Определение. *Замкнутое множество - множество, содержащее все свои предельные точки.*

Определение. *Связное множество - множество, для любых двух точек которого существует непрерывная кривая, принадлежащая данному множеству, соединяющая эти точки.*

Определение. *Область - непустое открытое связное множество.*

Теорема (Жордан)**.** *Всякая непрерывная простая замкнутая кривая γ разбивает $\overline{\mathbb{C}}$ на две области: внутреннюю ($\operatorname{int} \gamma$) с границей γ и внешнюю ($\operatorname{ext} \gamma$) с границей γ, содержащую точку ∞.*

Определение. *Односвязное множество - такое множество, с которым любой замкнутый контур непрерывной деформацией может быть стянут к точке, приналежащей множеству.*
Alternative one: односвязное множество - множество, в котором для любого замкнутого контура, принадлежащего множеству, его внутренняя область тоже принадлежит множеству.

#fuzzy: Связность - количество границ.

1.2.4 Задание множеств на комплексной плоскости

Уравнение прямой:
$bx + cy + d = 0,\ b^2 + c^2 > 0$
$\begin{cases} z = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{z+\overline{z}}{2} \\ y = \frac{z-\overline{z}}{2} \end{cases}$
$b(z + \overline{z}) - i(z - \overline{z})c + 2d = 0$
$\overline{B}z + B\overline{z} + D = 0$ (5)
$B = b + ic, D = 2d, B\overline{B} \neq 0$ $/B \neq 0/$
Уравнение окружности:
$a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0$ $(a \neq 0)$
$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2-ad}{a^2}$ $/b^2 + c^2 - ad > d/$
$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + D = 0$ (6)
$A = a,\ D = d,\ B = b + ic$

1.3 Числовые последовательности и ряды

1.3.1 Сходимость

$\{z_n\} \in \mathbb{C},\ z_n = x_n + iy_n$

Определение. $\{z_n\} \underset{n\to\infty}{\to} z_0$ $(z_0 \neq \infty)$ $/\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0/$ $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |z_n - z_0| < \varepsilon$

Определение. $\{z_n\}$ - *бесконечно большая последовательность* $\Leftrightarrow$ $\forall B > 0\ \exists N\colon \forall n > N\ |z_n| > B$

Теорема. $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \end{cases}, n \to \infty$

Доказательство.

1. $|x| \leq |z|\ |y| \leq |z|$

2. $\forall\varepsilon\ \exists N, \forall n > N\colon \begin{cases} |x_n - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ |y_n - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \end{cases}$

   $|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$

□

Замечание.
Для $z_0 = \infty$ теорема не выполняется.
Утверждение 1.
$z_n = r_n e^{i\phi_n}$
Если $\begin{cases} r_n \to r_0 \\ \phi_n \to \phi_0 \end{cases}$, $n \to \infty \quad \Rightarrow \quad z_n \to z_0 = r_0 e^{i\phi_0}$

Доказательство. $z_n = r_n e^{i\phi_n} = r_n(\cos\phi_n + i\sin\phi_n)$
$\begin{cases} x_n = r_n\cos\phi_n \to x_0 \\ y_n = r_n\sin\phi_n \to y_0 \end{cases} \Rightarrow$ $z_n \to z_0$ по теореме. □

Замечание.
Обратное утверждение неверно.
Утверждение 2.
$z_n \to z_0 \ \Rightarrow\ r_n \to r_0$ (доказательство следует из $\big||z_n| - |z_0|\big| \leq |z_n - z_0|$)
Замечание.
Из сходимости $z_n \to z_0$ не обязательно следует $\phi_n \to \phi_0$
Примеры:

1. $z_n = \frac{1}{n}\ \forall n$ $\arg z_n = 0$; $\arg 0$ не определён.

2. $\arg z \in [0, 2\pi)$

   $z_n = 1 + i\dfrac{(-1)^n}{n} \to z_0 = 1$

   $n = 2k\colon z_{2k} = 1 + \dfrac{i}{2k},\ \arg z_{2k} \to 0+$

   $n = 2k - 1\colon z_{2k-1} = 1 - \dfrac{i}{2k-1},\ \arg z_{2k-1} \to 2\pi-$

1.3.2 Ряды

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ (1) - числовой ряд

Определение. *Числовой ряд (1) сходится, если сходится к конечному пределу последовательность* $\{\rho_n\}$

Теорема. *Ряд (1) сходится* $\Leftrightarrow \begin{cases} \textit{сходится } \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n \\ \textit{сходится } \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n \end{cases}$

Определение. *Ряд (1) сходится абсолютно, если сходится* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *(2)*

Утверждение 3.
Ряд (1) сходится $\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N\colon \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}\ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon$
Утверждение 4.
Сходимость ряда (1) означает $z_n \to 0$
Утверждение 5.
Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).
Утверждение 6.
Сходимость ряда (2) можно исследовать, применяя любой из признаков сходимости вещественных рядов с неотрицательными членами.

1.4 Функции комплексной переменной. Предельное значение и неприменимость. Основные элементарные функции.

1.4.1 Основные понятия

Определение. *Пусть* $E, F \in \overline{\mathbb{C}}$, E, F *- непустые.*
$f\colon E \to F\ (w = f(z))$, *если* $\forall z \in E\ \exists w \in F\colon w = f(z)$

Определение. *ФКП* $w = f(z)$ *однолистна на* $G \subset E$, *если* $\forall z_1, z_2 \in G, z_1 \neq z_2\ w_1 \neq w_2$

Замечание.
Далее рассматриваются однозначные ФКП, если специально не оговорено противное.
Задание однозначной функции $w = f(z)$ на E означает задание пары вещественных функций двух действительных переменных: $\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ $/w = u + iv,\ z = x + iy/,\ u, v, x, y \in \mathbb{R}$

1.4.2 Предельное значение функции

$w = f(z),\ z_0$ - предельная точка множества E, $z_0 \neq \infty$.

Определение. l *- предельное значение* $f(z)$ *в точке* z_0 $/\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l/ \Leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\colon$
$\forall z \in E\colon 0 < |z - z_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - l| < \varepsilon$

Теорема. *Пусть* $l = a + ib$ $(l \neq \infty)$.
$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = l\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} u(x,y) \to a \\ v(x,y) \to b \end{cases}$ *при* $(x,y) \to (x_0, y_0)$

Доказательство. $f = u_i v$
$$\left.\begin{matrix} |u-a| \\ |v-b| \end{matrix}\right] \leq \sqrt{(u-a)^2 + (v-b)^2} = |f(z) - l| \leq |u-a| + |v-b| \qquad \square$$

Следствие:
Из теоремы вытекают свойства пределов ФКП - те же, что и в вещественном случае.

Теорема (арифметические действия с пределами). *Пусть* $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B\ \Rightarrow\ \dots$

1.4.3 Непрерывность

Определение. *$f(z)$ $\mathbb{C}$-непрерывна в т. z_0 (z_0 - предельная точка E) $\Leftrightarrow$* $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

В частности, если $z_0 \neq \infty,\ f(z_0) \neq \infty$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\colon\ \forall z \in E,\ |z - z_0| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Определение. *$f(z)$ непрерывна на E, если $f(z)$ непрерывна $\forall z \in E$*

Теорема. *$f(z)$ $\mathbb{C}$-непрерывна в т. $z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases}$ - $\mathbb{R}^2$-непрерывна в (x_0, y_0) (следует из т. 4.1))*

Теорема. *Если f, g $\mathbb{C}$-непрерывны в т. z_0, то $f \pm g, f * g, \dfrac{f}{g}(g(z_0))$ $\mathbb{C}$-непрерывны в z_0*

Теорема. *Если $\zeta = f(z)$ непрерывна в $z_0 \in E$, $w = g(\zeta)$ непрерывна в т. $\zeta_0 = f(z_0)$, то $F(z) = g(f(z))$ непрерывна в т. z_0*

Определение. *f(z) равномерно непрерывна на $E \Leftrightarrow$* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\colon \forall z_1, z_2 \in E\ |z_1 - z_2| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

Теорема (Кантор)**.** *Пусть E - ограниченное замкнутое множество. Если f непрерывна на $E \quad\Rightarrow\quad f$ равномерно непрерывна на E.*

1.4.4 Основные элементарные функции

а) $w = z^n,\ n > 1,\ n \in \mathbb{N}$

Определена в $\mathbb{C}$, доопределим в $\overline{\mathbb{C}}$: $w(\infty) = \infty$

Неоднолистна (n-листна) в $\mathbb{C}$.

Непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$ (см. т. 4.4)

б) $w = \sqrt[n]{z}$

Определена в $\overline{\mathbb{C}}$

n-значная

Главная ветвь ($k = 0$):

$w = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{i \arg z}{n}}$

$w = \arg z$

Определена при $z \neq 0, z \neq \infty$

Непрерывна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

в) $w = e^z$

$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

$\nexists \lim\limits_{z\to\infty} e^z$

Периодическая с основным периодом $T_0 = 2\pi i \quad\Rightarrow$ бесконечнолистна в $\mathbb{C}$

Непрерывна в $\mathbb{C}$

г) $w = \operatorname{Ln} z$ ($\Leftrightarrow e^w = z$)

Бесконечнозначная.

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}\ \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Главная ветвь: $\ln z = \ln|z| + i \arg z$

Непрерывна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

д) Тригонометрические функции:

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$

$\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

Непрерывны на множестве определения.

Имеют место все формулы элементарной тригонометрии.

е) Обратные тригонометрические функции

ж) Гиперболические функции:
   $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$
   $\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$
   $\operatorname{th} z,\ \operatorname{cth} z$

1.5 Дифференцируемость ФКП

1.5.1 Определение и свойства дифференцируемых функций

$z_0, z \in E,\ z - z_0 = \Delta z$
$f(z)$ - однозначная
$\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$

Определение. *Производная $f(z)$ в т. z_0 (по множеству E в т. z_0) $f'(z_0) = \lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in E}} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$ (предел конечный)*

Определение. *$f(z)$ дифф-ма в т. $z_0 \Leftrightarrow \Delta f(z_0) = K\Delta z + \overline{o}(|\Delta z|)$, где $K \in \mathbb{C}$ и не зависит от Δz (но может зависить от z_0)*

$|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \rho$, т.е. $\overline{o}(|\Delta z|) = \overline{o}(\rho)$
Утверждение 1.
$f(z)$ дифференцируема в $z_0 \Leftrightarrow \exists f'(z_0)$, причём $K = f'(z_0)$

Определение. *$f(z)$ дифф. на $E \Leftrightarrow\ \exists f'(z)\ \forall z \in E$*

Утверждение 2.

а) $f(z) = C\ \Rightarrow\ f'(z) = 0$

б) $(cf(z))' = cf'(z)$

в) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

г) $(fg)' = f'g + fg'$

д) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$

при условии, что существуют производные в правых частях.
Утверждение 3.
$\zeta = f(z)$ - дифференцируема в т. $z_0 \in Z$
$w = g(\zeta)$ определена на $G \supset f(E)$
$g(\zeta)$ дифференцируема в $\zeta_0 = f(z_0)\ \Rightarrow\ F(z) = g(f(z))$ дифференцируема в т. z_0, причём $F'(z_0) = g'(\zeta_0)f'(z_0)\big|_{\zeta_0 = f(z_0)}$
Утверждение 4.
Пусть $w = f(z)$ - взаимно-однозначное отображение E на F, причём обратная функция $z = \phi(w)$ непрерывна. Тогда, если $\exists f'(z_0) \neq 0$, то $\exists \phi'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$

Доказательство.
$$\frac{1}{\frac{w-w_0}{z-z_0}} = \frac{z - z_0}{w - w_0} = \frac{\phi(w) - \phi(w_0)}{w - w_0}$$
$$\lim_{\Delta w \to 0} \frac{z - z_0}{w - w_0} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\phi(w) - \phi(w_0)}{w - w_0} = \phi'(w_0) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{\frac{w-w_0}{z-z_0}} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\frac{w-w_0}{z-z_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{z \to z_0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$ □

1.5.2 Необходимое и достаточное условие дифференцируемости ФКП в точке

Теорема (5.1)**.** *$f(z) = u + iv$ дифференцируема ($\mathbb{C}$ - дифф.) в т. $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда*

1. *$u(x, y), v(x, y) - \mathbb{R}^2$ - дифференцируемы в (x_0, y_0)*

2. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ *в (x_0, y_0) - условия Коши-Римана.*

Доказательство.

а) Необходимость
$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(\rho), \rho \to 0, f'(z_0) = A + iB$
$\Delta f = \Delta u + i\Delta v$
$\Delta u(x_0, y0) + i\Delta v(x0, y0) = (A + iB)(\Delta x + i\Delta y) + \overline{o}_1(\rho) + i\overline{o}_2(\rho)$
$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$
Отделяем действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} \Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \overline{o}_1(\rho) \\ \Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \overline{o}_2(\rho) \end{cases}_{\rho\to 0}$$

Заметим, что $\rho \to 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases}\rho_1 \to 0 \\ \rho_2 \to 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0\end{cases} \ \Rightarrow \ u(x,y), \ v(x,y) - \mathbb{R}^2$-дифференцируемы в т. (x_0, y_0)

Причем $A = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \ -B = \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$

$B = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \ A = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$

б) достаточность - самостоятельно
u, v дифф-мы и имеют место равенства. пишем условия дифф-сти, бла-бла-бла

□

Следствие.
$f'(z_0) = A + iB = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} - i\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$
Задачи.
1) Доказать, что условия Коши-Римана в полярной системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \phi} \end{cases}$$

2) Условия Коши-Римана $\Leftrightarrow \ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ (если рассматривать $f(z, \overline{z})$) (условие Даламбера-Эйлера)

1.6 Аналитические функции и их свойства

1.6.1 Основные определения и свойства аналитических функций

Определение. *$f(z)$ - аналитическая в обл. D ($f \in A(D)$) $\Leftrightarrow$ $\forall z \in D \ \exists$ непрерывная $f'(z)$*

Определение. *$f \in A(z_0)$, если существует окрестность $U(z_0)\colon f \in A(U(z_0))$*

Определение. $f \in A(\overline{D}) \ \Leftrightarrow \ \exists D_1\colon \overline{D} \subset D_1, \ f \in A(D_1)$

Утверждение 1.
$f \in A(D) \ \Rightarrow \ f \in \mathbb{C}(D)$
Если $f, g \in A(D)$, то

a) $f \pm g \in A(D)$

b) $fg \in A(D)$

c) $\dfrac{f}{g} \in A(D \setminus \{z\colon g(z) = 0\})$

Утверждение 2.
$f \in A(D), G \supset f(E), g \in A(G) \ \Rightarrow \ g(f(z)) \in A(D)$
Утверждение 3.
$w = f(z) \in A(z_0), w_0 = f(z_0), f'(z_0) \neq 0 \ \Rightarrow \ z = \phi(w) \in A(w_0)$

1.6.2 Связь аналитичности с гармоничностью

Определение. *Функция* $u(x,y)$ *- гармоническая в* D *(*$u \in H(D)$*), если а)* $u \in \mathbb{C}^2[D]$ *и б)* $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *в* D

Определение. u, v *- сопряжённые, если они удовлетворяют условиям Коши-Римана*

$$(1): \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Утверждение 4.

а) u, v - сопряжённые $\Rightarrow$ $u, v \in H(D)$

б) $f = u + iv \in A(D)$ $\Leftrightarrow$ u, v - сопряжённые гармонические функции в D

Доказательство. а) Возьмём уравнение (1) и дифференцируем $=>$ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{cases}$ $=> \Delta u = 0 => u \in H(D)$; аналогично для v

б) $=> f \in A \Leftrightarrow \begin{cases} u, v \in D(D)(\text{дифференцируемые}) \\ \text{выполнено (1)} \end{cases}$

$<=$ очевидно

$\square$

1.6.3 Задача определения аналитической функции по её части

Утверждение 5.
Пусть $u \in H(D)$. Тогда $\exists$ единственная с точностью до аддитивной константы $v(x,y)$: $f = u + iv \in A(D)$. В частности, $v(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_y dx + u'_x dy + C$ (2)

Доказательство. $dv = v'_x dx + v'_y dy = -u'_y dx + u'_x dy$
Убедимся, что имеется полный дифференциал.
$= (u'_y)'_y = -u''_{yy},\ (u'_x)'_x = u''_{xx} \Leftrightarrow\ u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, т.к. $u \in H(D)$
$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv = v(x,y) - v(x_0,y_0)$ т.к. результат не зависит от выбора пути интегрирования.
В силу произвольности выбора $(x_0, y_0) \in D$ следует (2) $\square$

Замечания.

1. Аналогичное утверждение верно для $v(x,y) = \operatorname{Im} f$. При этом вместо формулы (2) будет что-то другое
2. Парную функцию можно находить не из (2), а непосредственно из системы (1).
3. Если $f(z) \neq 0$, то $f(z) = |f(z)| e^{i \operatorname{Arg} f(z)}$
   $f \in A$ $\Leftrightarrow$ $|f(z)|$, $\operatorname{Arg} f(z)$ - сопряжённые гармонические функции – неверно!

Глава 2

Конформные отображения

2.1 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

2.1.1 Основные понятия конформных отображений

Определение. *Угол между гладкими кривыми, пересекающимися в точке z_0 – это меньший угол между их касательными в этой точке. ($z_0 \neq \infty$)*

Определение. *Угол между пересекающимися в точке $z_0 = \infty$ кривыми - это угол в точке $\zeta_0 = 0$ между образами кривых при преобразовании $\zeta = \frac{1}{z}$*

Определение. *Непрерывное отображение $f(z)$ называется конформным в точке z_0, если оно сохраняет углы между пересекающимися в этой точке гладкими кривыми (по величине и направлению).*

Определение. *Отображение $f(z)$ называется конформным в области, если оно конформно во всякой точке этой области и взаимно-однозначно.*

$z_0 \in \overline{\mathbb{C}},\ \gamma$ - гладкая кривая: $\gamma\colon z = \lambda t, t \in [a,b]$
$z_0 \in \gamma$, т.е. $\exists\ t_0\colon z_0 = \lambda t_0$
$\lambda'(t_0)$ - вектор касательной к γ в точке z_0
$\phi = \arg \lambda'(t_0)$ - угол наклона касательной к γ в z_0 (т.е. угол между касательной и положительным направлением)
$z \in \gamma$
$\Delta z = z - z_0$
$\Gamma = f(\gamma),\ w_0 = f(z_0),\ w = f(z);\ w_0, w \in \Gamma;\ \Delta w = w - w_0$
$\Gamma\colon w = \Lambda(t) = f(\lambda(t)),\ t \in [a,b]$
$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k \neq 0$ - коэффициент линейного растяжения (сжатия) кривой γ в точке z_0 при отображении $f(z)$

2.1.2 Геометрический смысл модуля и аргумента $f'(z)$

Пусть $f \in A(z_0),\ f'(z_0) \neq 0$. Тогда можно показать, что f отображает некоторую окрестность точки z_0 взаимно-однозначно на окрестность w_0.

Теорема (7.1).
Пусть $f \in A(z_0),\ f'(z_0) \neq 0$, тогда

а) $|f'(z_0)|$ - коэффициент растяжения в точке z_0 при отображении f

б) $\arg f'(z_0)$ - угол поворота гладкой кривой, проходящей через z_0 при отображении f

в) отображение f конформно в точке z_0

Доказательство.

а) Т.к. $\exists f'(z_0)$, т.е. $\exists \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z)$. Тогда выполнено следующее равенство:

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = k(\neq 0)$$

Причём это равенство независимо от выбора γ.

б) $\phi = \arg \lambda'(z_)$

$\Phi = \arg \Lambda'(t_0)$

Тогда $\Lambda'(t_0) = f'(z_0)\lambda'(t_0) \Rightarrow \arg \Lambda'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \lambda'(t_0)$ (при надлежащем выборе промежутка для arg)

$\Phi - \phi = \arg f'(z_0)$

в) Рассмотрим γ_1, γ_2 - две гладкие кривые, проходящие через z_0, Γ_1, Γ_2 - их образы, проходящие через w_0

$\alpha = \arg f'(z_0)$

$\begin{cases} \Phi_1 - \phi_1 = \alpha \\ \Phi_2 - \phi_2 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \Phi_1 - \Phi_2 = \phi_1 - \phi_2$

□

Замечание.
Теперь ясно, что коэффициент сжатия не привязан к кривой.

2.1.3 Основные свойства конформных отображений

Утверждение 1.
Если $f \in A(z_0), f'(z_0) \neq 0$, то отображение f конформно в z_0.
Утверждение 2.
Если f однолистна в D, $f \in A(D), f'(z) \neq 0 \forall z \in D$, то f конформно отображает D.

Теорема (7.1).
Пусть $f \in A(D)$, f однолистна в D, D – область, тогда $G = f(D)$ – область.

Замечание.
Требование $f'(z) \neq 0$ можно опустить.

Теорема (7.2).
Пусть D, G – области в $(z), (w)$ соответственно с границами $\partial D, \partial G$ - замкнутыми контурами и $f \in A(D) \cap C(\overline{D})$. Если $f \colon \partial D \leftrightarrow \partial G$ взаимно-однозначна с сохранением ориентации, то f конформно отображает D на G

Теорема (7.3, Риман).
Пусть D – односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$, ∂D содержит больше одной точки. Тогда существует конформное отображение D на единичный круг (вообще говоря, не единственное).

2.2 Дробно-линейные функции

2.2.1 Определение, непрерывность

Определение. $w = L(z)$, $L(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ – *дробно-линейная функция.* $\Delta = ad - bc \neq 0$

$z \neq -\dfrac{d}{c} \Rightarrow \exists L^{-1} \colon z = \dfrac{dw - b}{-cw + a} \in \{L\}$, $\Delta^{-1} = \Delta \neq 0$ (2)

$L \colon \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \leftrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$ взаимно-однозначно и взаимно непрерывно.

$\begin{cases} w\left(-\dfrac{d}{c}\right) = \infty \\ w(\infty) = \dfrac{a}{c} \end{cases} \Rightarrow L \colon \overline{\mathbb{C}} \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}}$

2.2.2 Конформность отображения

Теорема.

1. $w = L(z) \in A\left(\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\right)$
2. $L \colon \overline{\mathbb{C}} \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ *конформно*

Доказательство.

1. $w' = \dfrac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \dfrac{\Delta}{(cz+d)^2} \neq 0$

2. $\left.\begin{array}{c}\exists w'(z) \neq 0, z \neq -\dfrac{d}{c} \\ w = L(z) - \text{взаимно-однозначно}\end{array}\right\} \Rightarrow$ отображение конформно в $\mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ Рассмотрим $z_0 = -\dfrac{d}{c}$

Пусть гладкие кривые γ_1, γ_2 пересекаются в z_0 под углом ϕ.

$L(z_0) = w_0 = \infty$

$L(\gamma_1) = \Gamma_1, L(\gamma_2) = \Gamma_2$

Γ_1, Γ_2 пересекаются в $w_0 = \infty$ под углом пересечения их образов C_1, C_2 в т. $\zeta_0 = 0$ при отображении $\zeta = \dfrac{1}{w}$.

$\zeta = \dfrac{cz+d}{az+b} \in \{L\}$ даёт конформное отображение в $z_0 = -\dfrac{d}{c}$, т.е. угол между C_1 и C_2 равен ϕ - углу между Γ_1 и Γ_2.

Рассмотрение в ∞ сводится к аналогичному доказательству конформности $L^{-1}(w)$ в т. $w_0 = \dfrac{a}{c}$

□

2.2.3 Групповое свойство

Теорема (8.2).
$\{L\}$ - *алгебраическая группа относительно операций суперпозиции*

Доказательство.

1. $\forall L \in \{L\} \Rightarrow L^{-1} \in \{L\}$
2. $\forall L_1(\Delta_1), L_2(\Delta_2) \in \{L\} \Rightarrow L_2(L_1(z))(\Delta = \Delta_1\Delta_2 \neq 0) \in \{L\}$

□

2.2.4 Инвариантность двойного отношения

Теорема (8.3).
$\forall (z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3)$, *в каждой из которых нет совпадающих чисел, существует единственное дробно-линейное преобразование, что* $w_k = L(z_k),\ k = 1, 2, 3$, *причём это* L *можно получить из отношений*

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} \quad (3)$$

Доказательство.
$L_1(z) = \dfrac{z-z_1}{z-z_2} : \dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$
$L_2(w) = \dfrac{w-w_1}{w-w_2} : \dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}$
$(3) \Leftrightarrow L_1(z) = L_2(w) \Leftrightarrow w = L_2^{-1}(L_1(z))$ по т. 8.2
$w = L(z),\ L \in \{L\}$
Единственность: Пусть существует $F\colon F(z_k) = w_k,\ k = 1, 2, 3$
L^{-1} - дробно-линейная
$\dfrac{az_k+b}{cz_k+d} = z_k$

$cz_k^2 + (d-a)z_k - b = 0,\ k = 1, 2, 3 \Rightarrow$ квадратный многочлен с тремя корнями тождественно равен нулю, $\begin{cases} c = 0 \\ d = a \\ b = 0 \end{cases}$, т.е.

$L(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \equiv z \Leftrightarrow F = L$ □

Замечание.
В (3) - равенство т.н. двойных отношений, т.е. инвариантность относительно дробно-линейного преобразования.

2.2.5 Круговое свойство

Теорема (8.4).
Дробно-линейное преобразование переводит множество прямых либо окружностей в (возможно, другое) множество прямых либо окружностей.

Доказательство.

1. Для линейного отображения $w = l(z)$ - очевидно.

2. Рассмотрим преобразование $w = \Lambda(z) \equiv \dfrac{1}{z}$.

   Ранее было доказано, что уравнение

$$(4)\ Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + D = 0\ (B\overline{B} - AD > 0)$$

   это уравнение окружности ($A \neq 0$) или прямой ($A = 0$).

   $w = \dfrac{1}{z} \Leftrightarrow z = \dfrac{1}{w} \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1}{\overline{w}} \ \Rightarrow\ (4)$

   $Dw\overline{w} + Bw + \overline{B}\overline{w} + A = 0$ (5)

   $B\overline{B} - AD > 0$

   т.е. (5) описывает множество прямых либо окружностей.

3. $L(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c}\dfrac{z + \frac{b}{a} + \frac{d}{c} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \dfrac{a}{c}\left(1 + \dfrac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{z + \frac{d}{c}}\right) = \dfrac{a}{c}\left(1 + \dfrac{bc - ad}{a(cz+d)}\right)$ $(a \neq 0,\ c \neq 0)$

$$\left.\begin{array}{c} w_1 = l_1 = cz + d \\ \Lambda = \dfrac{1}{w_1} (= w_2) \\ w = l_2(w_2) \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ L = l_2 \Lambda l_1(z)$$

□

2.2.6 Сохранение симметрии

Определение. *z_1, z_2 – симметричное отношение прямой l, если l - срединный перпендикуляр к отрезку с концами в z_1, z_2*

Определение. *z_1, z_2 симметричны (сопряжены) относительно окружности γ, если*

1. *z_1, z_2 лежат на одном луче, исходящем из центра z_0 окружности γ*
2. *$|z_1 - z_0||z_2 - z_0| = R^2$*

Обозначение: $z_1 = z_2^*$

Утверждение 1 (свойства симметрии).
Пусть z_1, z_2 симметричны относительно прямой либо окружности.

а) $(z^*)^* = z$

б) $z = z^* \Leftrightarrow z \in l/\gamma$, иначе они расположены по разные стороны l/γ

в) γ: Если $z \to z_0$, то $z^* \to \infty$, т.е. z_0 и ∞ симметричны (сопряжены) относительно окружности любого радиуса.

Лемма.
z_1, z_2 симметричны относительно прямой либо окружности тогда и только тогда, когда любая обобщённая окружность (т.е. окружность либо прямая), проходящая через z_1, z_2, ортогональна к $l(\gamma)$

Доказательство.

1. В случае прямой доказательство очевидно.
2. Рассмотрим произвольную окружность, проходящую через две эти точки. Проведём из z_0 касательную к этой окружности, M - точка касания. Из элементарной геометрии следует, что $OM^2 = |z - z_0||z^* - z_0| = R^2 \ \Rightarrow\ OM = R \ \Rightarrow\ \gamma \perp k$

   ... доказательство геометрическое, см. учебник

□

Теорема (8.5).
Пусть z, z^* симметричны относительно обобщённой окружности γ
$\Gamma = L(\gamma), w = L(z), w_1 = L(z^*) \ \Rightarrow\ w_1 = w^*$ *(относительно Γ)*

Доказательство.
γ, z, z^*
$L\colon \Gamma, w, w_1$
Рассмотрим в плоскости (w) произвольную окружность $K \ni w, w_1$.
Пусть $k = L^{-1}(K)$, тогда по лемме k - прямая/окружность
$z, z^* \in k \ \Rightarrow\ \gamma \perp k$. Тогда, в силу конформности L, $\Gamma \perp K \ \Rightarrow\ w_1 = w^*$ □

2.3 Степенная функция и обратная к ней

2.3.1 Степенная функция

Определение. *Степенная функция:* $w = z^n, n \in \mathbb{N}, n > 1$ *(1)*

Утверждение 1.
Степенная функция:

1. Непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}$
2. Аналитична в $\overline{\mathbb{C}}$
3. Конформна в любой точке $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$
4. Конформно отображает $\{\alpha < \arg z < \beta\}$ $(0 < \beta - \alpha < \frac{2\pi}{n}$, в частности, $D_k = \left\{\dfrac{2(k-1)\pi}{n} < \arg z < \dfrac{2\pi k}{n}\right\} \to G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

Доказательство.

1. $w(\infty) = \infty$ - доопределим до непрерывности. В т. $z \neq \infty$ непрерывность очевидна
2. $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists w' = nz^{n-1}$ непрерывна в $\mathbb{C} \ \Rightarrow\ w \in A(\mathbb{C})$
3. $w' = 0 \Leftrightarrow z = 0$
   $\forall z \neq 0\ w' \neq 0 \ \Rightarrow\$ конформна в т. z
4. конф. в обл.
   Область однолистна
   $z_1 \neq z_2 \ \Rightarrow\ w_1 \neq w_2$
   $z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow |z_1|^n e^{i(\arg z_1)n} = |z_2|^n e^{i(\arg z_2)n} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 - \arg z_2 = \dfrac{2\pi k}{n} \end{cases} \Rightarrow \{\alpha < \arg z < \beta\}, \beta - \alpha \leq \dfrac{2\pi}{n}$ - множество однолистности
   $\begin{cases} z = |z|e^{i\arg z} \\ w = z^n = |w|e^{i\arg w} = |z|^n e^{i(\arg z)n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = |z|^n \\ \arg w = n \arg z \end{cases}$

□

2.3.2 Функция $w = \sqrt[n]{z}$

Определение. $w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow z = w^n, n \in N, n > 1$

Определение. *Однозначная аналитическая в D функция $f(z)$ - регулярная однозначная ветвь многозначной функции $F(z)$ в D, если $\forall z \in D$ значение $f(z)$ совпадает с одним из значений $F(z)$.*

Утверждение 2.
Функция $w = \sqrt[n]{z}$ $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}, z \neq 0; \infty$ имеет n значений. В области $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ допускает выделение n однозначных регулярных ветвей w_k, причём $w_k \in A(G)$
$w_k' = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{z})_k^{n-1}}$, w_k конформно отображает G на $D_k = \left\{\dfrac{2\pi(k-1)}{n} < \arg w < \dfrac{2\pi}{n}k\right\}$

Доказательство.
$w(0) = 0, w(\infty) = \infty$
$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{\dfrac{i \arg z + 2\pi k}{n}}$
Фиксируем k. Выделяем однозначную ветвь $w_k = (\sqrt[n]{z})_k$
По теореме о производной обратной функции
$w_k' = \dfrac{1}{nw^{n-1}} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)_k^{n-1}} \neq 0$ (4) $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ непрерывна в G.
Из (4) следует конформность отображения $w_k(z)$ $\forall z \in G$. Т.к. отображение взаимно-однозначно, то w_k конформно в области G. □

2.4 Показательная функция и обратная к ней

2.4.1 Показательная функция

Определение. $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

Утверждение.

1. $e^z \in A(\mathbb{C})$
2. Осуществляет конформное отображение $\forall z \in \mathbb{C}$
3. Конформно отображает $\{y < \operatorname{Im} z < y + 2\pi\}$. В частности, $D_k = \{2\pi < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)$ отображается конформно на $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

Доказательство.

1. $(e^z)' = e^z \neq 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$

□

2.4.2 Логарифмическая функция

Определение. $w = \operatorname{Ln} z \Leftrightarrow z = e^W$

$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$ (2)
Утверждение 2.
Логарифмическая функция, определённая (2), $\forall z \neq 0$ является бесконечнозначной.
На множестве $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ допускает выделение регулярных однозначных ветвей.
$w_k = (\operatorname{Ln} z)_k, w_k \in A(G)$, конформно отображает $G \to D_k$
$w'_k = \dfrac{1}{z} \; \forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$

Глава 3

Интегрирование функций комплексных переменных

3.1 Определение и свойства интегралов функций комплексных переменных

3.1.1 Изначальное определение

Пусть γ - кусочно-гладкая простая кривая без особых точек.
γ: $\begin{cases} z = z(t) \\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$ (1)
$A = z(\alpha),\ B = z(\beta)$
$f(z)$ - однозначная ФКП $z \in \gamma$
$T\colon z_0 = A, z_1, \ldots, z_n = B$
$z_k \in \gamma$
$\gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \gamma_k$
$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$
$|\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}| = s_k$
$\lambda(T) = \max\limits_k s_k$
$\zeta_k \in \gamma_k$
$\{\zeta_k\}$
Интегральные суммы:
$S(f,T) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ (2)
$S_1(f,T) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)|\Delta z_k|$ (3)
$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(f,T) = \int\limits_\gamma f(z)dz$ (4)
$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_1(f,T) = \int\limits_\gamma f(z)|dz| = \int\limits_\gamma f(z)ds$ (5)
Если существуют конечные пределы (4), (5), не зависящие от способа разбиения и выбора $\{\zeta_k\}$ - это интеграл и интеграл первого рода $f(z)$ по γ.

Теорема (11.1)**.**
Пусть γ - гладкая кривая, $f = u + iv$ - непрерывная на γ функция. Тогда существуют интегралы (4), (5), причём справедливы равенства:
$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\gamma (udx - vdy) + i\int\limits_\gamma (vdx + udy)$ (6)
$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$ (7)
$\int\limits_\gamma f(z)|dz| = \int\limits_\gamma uds + i\int\limits_\gamma vds$ (8)
$\int\limits_\gamma f(z)|dz| = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))|z'(t)|dt$ (9)

Доказательство.
(6): $S(f,T) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k\Delta x_k - v_k\Delta y_k) + i\sum\limits_{k=1}^{n} (v_k\Delta x_k + u_k\Delta y_k)$
$|\Delta z_k| \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(f,T) = \int\limits_\gamma (udx - vdy) + i\int\limits_\gamma (vdx + udy)$

(7): используя параметризацию (1), получаем:
$(7) = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t))dt+i\int\limits_{\alpha}^{\beta}(u(x(t),y(t))y'(t)+v(x(t),y(t))x'(t))dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(u+iv)(x'+iy') = \int\limits_{\alpha}^{\beta}f(z(t))z'(t)dt$
(8): $S_1(f,T) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)|\Delta z_k| = \sum\limits_{k=1}^{n}(u_k+iv_k)s_k = \sum\limits_{k=1}^{n}u_k s_k + i\sum\limits_{k=1}^{n}v_k s_k$
(9): $|z_k| = s_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$
$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt = |z'(t)|dt$
При $\lambda(T) \to 0$ получаем требуемое равенство. $\square$

Теорема (11.2)**.**

а) $\int\limits_{\gamma(A\to B)} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma^{-1}(B\to A)} f(z)dz$

$\int\limits_{\gamma} f(z)|dz|$ *не зависит от направления интегрирования*

б) Если γ_1, γ_2 *составляют* γ *без наложения, то* $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz$, *причём интегралы в левой и правой частях существуют одновременно.*

в) $\forall a,b \in \mathbb{C},\ f,g$ *интегрируемы по* $\gamma \Rightarrow \int\limits_{\gamma}(af(z)+bg(z))dz = a\int\limits_{\gamma} f(z)dz + b\int\limits_{\gamma} g(z)dz$

г) $f(z)$ *интегрируема на* $\gamma \Rightarrow |f(z)|$ *интегрируема на* γ *и* $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\gamma}|f(z)||dz|$ (10)

Доказательство.

а) Следует из теории вещественных криволинейных интегралов

б) Следует из теории вещественных криволинейных интегралов

в) Следует из теории вещественных криволинейных интегралов

г) Следует из теории торсионных полей
$f \in C(\gamma) \Rightarrow |f| \in C(\gamma)$, т.е. $|f(z)|$ интегрируема на γ. (10) следует из неравенства:
$|S(f,T)| = |\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k| \le |f(\zeta_k)||\Delta z_k| = S_1(|f|,T)$ и предельного перехода.

$\square$

Следствие 1.
$|f(z)| \le M \forall z \in \gamma$, длина $\gamma = L \Rightarrow |\int\limits_{\gamma} f(z)dz| \le ML$

Доказательство. $\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \le \int\limits_{\gamma}|f(z)||dz| \le M\int\limits_{\gamma} ds = ML$ $\square$

Следствие 2.
Интеграл и интеграл первого рода от $f(z)$ по γ существует и имеет те же свойства, если γ – кусочно-гладкая кривая и $f(z)$ – кусочно-непрерывная
Замечание.
Формула среднего значения для интеграла ФКП, вообще говоря, не верна.
Контрпример: $\gamma\colon [0,2\pi] \subset \mathbb{R},\ f(z) = e^{iz}$
$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{0}^{2\pi} e^{ix}dx = \int\limits_{0}^{2\pi}\cos x dx + i\int\limits_{0}^{2\pi}\sin x dx = 0$
Предположим, что $\exists \zeta\colon \int\limits_{\gamma} e^{iz} = e^{i\zeta}\int\limits_{\gamma} dz \ne 0$ - противоречие.

3.2 Интегральная теорема Коши

3.2.1 Случай односвязной области

Теорема. *Пусть* $f \in A(D)$, γ *- замкнутый контур в* D. *Тогда* $\oint\limits_\gamma f(z)dz = 0$ *(1)*

Доказательство. Из теоремы 11.1: $\oint\limits_\gamma f(z)dz = \oint\limits_\gamma udx - vdy + i\oint\limits_\gamma vfx + udy = I_1 + I_2$

$G = \operatorname{int}\gamma$

$f \in A(D) \Rightarrow \exists f'(z) \in C(D)$

Используем формулу Грина:

$I_1 = \oint\limits_\gamma udx - vdy = \iint\limits_{\overline{G}} (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy = 0$ (по усл. К/Р)

$I_2 = \oint\limits_\gamma vdx + udy = \iint\limits_{\overline{G}} (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})dxdy = 0$ (по усл. К/Р) □

Следствия.

1. $f \in A(D) \Rightarrow \oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$

2. $f \in A(D) \Rightarrow \forall z_1, z_2 \in D \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ не зависит от пути интегрирования (лежащего в D)

3.2.2 Случай неодносвязной области

Теорема. *Пусть* $D - -n$*-связная область с границей* $\partial G = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_{n-1}$, *ориентированной положительно относительно* D, *и* $f \in A(\overline{D})$.

Тогда $\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$, *т.е.* $\oint\limits_\Gamma f(z)dz + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz = 0$

Доказательство. Проведём доказательство для 2-х связной области, далее - по индукции.

$A \in \Gamma,\ B \in \gamma_1$

Сделаем разрез по AB, тогда область односвязна. По теореме 12.1

$\oint\limits_\Gamma f(z)dz + \oint\limits_{AB} f(z)dz + \oint\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \oint\limits_{BA} f(z)dz = 0$, но $\oint\limits_{AB} f(z)dz = -\oint\limits_{BA} f(z)dz \Rightarrow \int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$ □

Следствие. В условиях т. 12.2

$\oint\limits_\Gamma f(z)dz = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \oint\limits_{\gamma_k} f(z)dz$, (4)

где во всех интегралах интегрирование в одном и том же направлении.

3.3 Интегральная формула Коши

3.3.1 И.Ф.К.

Теорема. *Пусть* $f \in A(D)$, γ *- замкнутый контур. Тогда* $\forall z_0 \in \operatorname{int}\gamma \subset D:$

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz$

Доказательство. Так как z_0 внутри D, то существует $\gamma_\rho \colon |z - z_0| = \rho,\ \gamma_\rho \subset \operatorname{int}\gamma$, тогда

$\oint\limits_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz = \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}$

$\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$

$\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - 2\pi i f(z_0) = \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} - \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{z_0}{z - z_0}dz = \oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz =$

$= \{z \in \gamma_\rho \Leftrightarrow z = z_0 + \rho e^{i\phi}\} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\phi}) - f(z_0)}{\rho e^{i\phi}} i\rho e^{i\phi} d\phi = i\int\limits_0^{2\pi} (f(z) - f(z_0))d\phi$

$\left|\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - 2\pi i f(z_0)\right| = \left|i\int\limits_0^{2\pi} (f(z) - f(z_0))d\phi\right| \le \int\limits_0^{2\pi} |f(z) - f(z_0)|\, d\phi < \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi}d\phi = \frac{\varepsilon}{2\pi}2\pi = \varepsilon$

Т. о. доказано, что существует $\lim\limits_{\rho\to 0}\oint\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$ - не зависит от ρ □

Следствие 1 (формула среднего значения).
Пусть $\gamma_R = \{z\colon |z-z_0| = R\},\ \overline{\operatorname{int}\gamma_R} \subset D,\ f \in A(D)$. Тогда
$f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\phi})d\phi$
$f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi R}\oint\limits_{\gamma_R} f(z)ds$

Доказательство. По (1) $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_R}\dfrac{f(z)}{z-z_0}dz = \{z = z_0 + Re^{i\phi}\} = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{f(z_0+Re^{i\phi})}{Re^{i\phi}}iRe^{i\phi}d\phi = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\phi})d\phi$ □

Следствие 2.
$\oint\limits_\gamma \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0),\ z_0 \in \operatorname{int}\gamma \\ 0, z_0 \in \operatorname{ext}\gamma \end{cases}$

3.3.2 Принцип max модуля аналитической функции

Теорема. *Пусть $f \in A(D),\ f \not\equiv const$. Тогда $\max\limits_{z\in D}|f(z)|$ не может достигаться во внетренней точке D.*

Доказательство. Пусть $\exists z_0 \in D\colon \max\limits_{z\in D}|f(z)| = |f(z_0)| = M \ \Rightarrow\ \exists K_0 = \{|z-z_0| \le R\} \subset D$
По (3) $M = |f(z_)| = \dfrac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\phi})d\phi\right| \le \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(z_0+Re^{i\phi}|d\phi \le \dfrac{1}{2\pi}M2\pi = M \Leftrightarrow \int\limits_0^{2\pi}|f(z)|d\phi = 2\pi M \Leftrightarrow \int\limits_0^{2\pi}(M-|f(z)|)d\phi = 0$
$g(\phi) = M - |f(z_0+Re^{i\phi})| \ge 0$ – действительная непрерывная функция параметра ϕ на $[0, 2\pi]$
$\Rightarrow\ M - |f(z)| = 0\ \forall z \in \gamma_R \ \Rightarrow\ |f(z)| = M\ \forall z \in \gamma_R$. То же верно для $\forall \gamma_r,\ r < R \ \Rightarrow\ |f(z)| \equiv M\ \forall z \in K_0$
Покажем теперь, что $|f(z)| \equiv M\ \forall z \in D$
Для любой $z^* \in D$ существует непрерывная кривая $l \subset D$, соединяющая z_0 с z^*.
Рассмотрим т. $z_1 = \gamma_R \cap l \in D$
$\exists K_{R_1} = \{|z-z_1| \le R_1\} \subset D$
$|f(z_1)| = M \ \Rightarrow\ |f(z)| = M\ \forall z \in K_{R_1}$
$z_2 = \gamma_{R_1} \cap l,\ \exists K_{R_2}\dots$
За конечное число шагов получаем $K_{R_n} = \{|z-z_n| \le R_n\} \subset D$
$|f(z_n)| = M,\ z^* \in K_{R_n} \ \Rightarrow\ |f(z^*)| = M$
Если $\rho(l, \partial D) = \delta$, то можно взять все $R_k > \dfrac{\delta}{2} > 0$
Теперь докажем, что $f(z) \equiv const$ в D.
$|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = M^2$
$\begin{cases} 2uu'_x + 2vv'_x = 0 \\ 2uu'_y + 2vv'_y = 0 \end{cases}$
$v'_x = -u'_y,\ v'_y = u'_x$
$\begin{cases} uu'_x - vu'_y = 0 \\ uu'_x + vu'_y = 0 \end{cases}$ - линейна относительно (u'_x, u'_y).
$\Delta = u^2 + v^2 = M^2$
$M = 0 \Leftrightarrow |f(z)| \equiv 0 \Leftrightarrow f(z) \equiv 0$
$M > 0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} u'_x = 0 \\ u'_y = 0 \end{cases} \ \Rightarrow\ u = const \ \Rightarrow$ (из условий К-Р) $v = const \ \Rightarrow\ f = const$ □

Следствие 1.
Пусть D ограничено, ∂D – граница, $f \in A(D) \cap C(\overline{D})$. Тогда $\max\limits_{\overline{D}}|f(z)| = \max\limits_{\partial D}|f(z)|$

Доказательство. f непрерывна в $\overline{D}$, следовательно, $|f|$ непрерывен в $\overline{D}$. D - ограниченная замкнутая область, следовательно, f достигает своё максимальное значение. Но это значение не может достигаться внутри области, следовательно, оно достигается на границе. □

Следствие 2.
Пусть D ограничено, $f_1, f_2 \in A(D) \cap C(\overline{D})$. Если $f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \partial D$, то $f_1(z) \equiv f_2(z) \forall z \in D$

Доказательство. $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ и применяем следствие 1. □

Следствие 3. Пусть $f \in A(D), f \ne const, f \ne 0 \forall z \in D$. Тогда $\min\limits_{D}|f(z)|$ не может достигаться во внутренней точке D

Доказательство. $\dfrac{1}{f(z)} \in A(D);\ \max\left|\dfrac{1}{f(z)}\right| = \dfrac{1}{\min|f(z)|}$ □

3.4 Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.

3.4.1 Интеграл типа Коши

Определение. $g(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$, *$\gamma$ – кусочно-гладкая кривая, $f \in C(\gamma)$*

Теорема. *Пусть γ – кусочно-гладкая кривая, $f \in C(\gamma)$. Тогда*

а) $g(z) \in A(\mathbb{C} \setminus \gamma)$

б) $\forall n \in N\ \exists g^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\int\limits_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$

Доказательство.

а) следует из б) $(n = 1, 2)$ ($\Rightarrow$ непрерывна $f'(z)\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$)

б) индукция по n

$n = 1$ Докажем, что $g' = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$

$\forall z \notin \gamma\ \exists U(z),\ \rho(\overline{U(z)}, \gamma) = d > 0$
Возьмём $z + \Delta z \in U(z)$

$$\frac{1}{\Delta z}(g(z + \Delta z) - g(z)) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta =$$

(ИФК: $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \dfrac{f(z)}{z - z_0}dz$)

$$= \frac{1}{2\pi i \Delta z}\int\limits_\gamma \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right)d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma f(\zeta)\left(\underbrace{\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{\zeta - z}\right) - \frac{1}{(\zeta - z)^2}}_{=B_1}\right)d\zeta$$

$$B_1 = \frac{1}{\Delta z(\zeta - z)}\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta z}{\zeta - z}} - 1\right) - \frac{1}{\zeta - z}^2 \underset{\Delta z \to 0}{=} \frac{1}{\Delta z(\zeta - z)}\left(1 + \frac{\Delta z}{\zeta - z} + O\left(\left(\frac{\Delta z}{\zeta - z}\right)^2\right) - 1\right) - \frac{1}{(\zeta - z)^2} = O\left(\frac{\Delta z}{(\zeta - 1)^3}\right)$$

{списать у Тани}
Переход $(n - 1) \to n$
{тоже списать у Тани}

$\square$

3.4.2

Теорема. $f \in A(D) \Rightarrow \forall z \in D\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$, *где γ - произвольный замкнутый контур.*

Доказательство. $\forall z \in D, \forall \Gamma \Rightarrow$ инт. Коши $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$

инт. Коши $\Rightarrow$ интеграл типа Коши $\Rightarrow$ 13.1 $\square$

Следствие 1 (оценка Коши для производных)
$K_R = \{\zeta \colon |\zeta - z| \le R\},\ \gamma_R = \{\zeta \colon |\zeta - z| = R\}$
$f \in A(\overline{K_R}),\ \max\limits_{\zeta \in \gamma_R}|f(\zeta)| = M_R$

Тогда $|f^{(n)}(z)| \le \dfrac{n! M_R}{R^n}$

Доказательство. По (5) $|f^{(n)}(z)| = |\dfrac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta| \le \dfrac{n!}{2\pi}\int\limits_{\gamma_R} \dfrac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}}d\zeta \le \dfrac{n! M_r}{2\pi}\dfrac{1}{R^{n+1}}\int\limits_{\gamma_R} d\zeta = \dfrac{M_R n!}{R^{n+1}}$ $\square$

3.4.3 Теорема Лиувилля и её следствия

Определение. *Однозначная функция* $f(z)$ *называется целой, если* $f \in A(\mathbb{C})$

Теорема (Лиувилль)**.** *Если* $f \in A(\mathbb{C}),\ |f(z)| \le M\ \forall z \in \mathbb{C}$, *то* $f = const$

Доказательство. $\forall z \in \mathbb{C}$, рассмотрим γ_R с центром в точке z. По (6) $|f'(z)| \le \dfrac{M}{R} \underset{R\to\infty}{\to} 0 \ \Rightarrow\ |f'(z)| = 0 \Leftrightarrow f'(z) = 0$

$f'(z) = u'_x + iv'_x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'_x = 0 \\ v'_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_y = 0 \\ u'_y = 0 \end{cases}$ □

Следствие (основная теорема высшей алгебры).
Многочлен $P_n(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n,\ a_k \in \mathbb{C}$ имеет хотя бы один корень в $\mathbb{C}$.

Доказательство. От противного. Пусть $P_n(z) \ne 0\ \forall z \in \mathbb{C}$. Рассмотрим $f(z) = \dfrac{1}{P_n(z)}$. $f \in A(\mathbb{C}),\ f(z)$ ограничена в C.
Из того, что $|P_n(z)| \underset{z\to\infty}{\to} \infty$, следует $|f(z)| \underset{z\to\infty}{\to} 0$
$|f| \le M$, тогда по т. Лиувилля $f = const$ - противоречие. □

3.5 Первообразная и неопределённые интегралы. Теорема Морера

3.5.1

Теорема. $f \in C(D)$, *для любого замкнутого контура* $\gamma \subset D$
$\oint\limits_\gamma f(\zeta)d\zeta = 0$ (1)
Тогда
$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ (2)
$F(z) \in A(D)\ \forall z_0 \in D$, *причём* $F'(z) = f(z)$

Доказательство. Из условия (1) следует, что (2) не зависит от пути интегрирования, соединяющего z_0 и z, т.е. $F(z)$ – однозначная функция z □

Глава 4

Ряды аналитических функций

4.1 Равномерно сходящиеся функциональные ряды

4.1.1 Основные определения

Определение. *ФР – $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ (1), $f_n(z)$ – однозначные функции.*

Определение. *ФР (1) сходится в точке $z_0 \Leftrightarrow$ сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$*

Определение. *Множество точек, где сходится (1) – множество сходимости ФР – E*

$\forall z_0 \in E$ $\exists$ сумма (2).
На E определена однозначная функция $f(z)$

Определение. *ФР (1) $\underset{E_0}{\rightrightarrows} f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall z \in E_0\ \left|\sum\limits_{k=1}^{n} \{f_k(z) - f(z)\}\right| < \varepsilon$*

4.1.2 Непрерывность и интегрируемость суммы ряда

Утверждение.
Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) \underset{E_0}{\rightrightarrows} f(z), |g(z)| \leq M\ \forall z \in E_0$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)g(z) \underset{E_0}{\rightrightarrows} f(z)g(z)$

Доказательство. $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)g(z) - f(z)g(z)| = |\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) - f(z)||g(z)| < \varepsilon$ □

Теорема (16.1)**.** *Пусть $f_n \in C(E_0)$, ФР $\underset{E_0}{\rightrightarrows} f(z)$. Тогда $f(z) \in C(E_0)$.*

Доказательство. Аналогично вещественному случаю. □

Теорема (16.2)**.** *Пусть $\gamma \subset D$ – кусочно-гладкая, $f_n(z) \in C(\gamma)$, ФР$\underset{\gamma}{\rightrightarrows} f(z)$. Тогда $\int\limits_{\gamma} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right) dz = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\gamma} f_n(z)dz$*

Доказательство. По т. 16.1 $f(z) \in C(\gamma)$, т.е. все интегралы существуют.
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma} f_k(z)dz - \int_{\gamma} f(z)dz\right| = \left|\int_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right)\right| \leq \int_{\gamma} \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| dz \leq \frac{\varepsilon}{L}\int_{\gamma} dz = \varepsilon$$ □

Определение. *ФР сходится равномерно внутри области D, если он равномерно сходится на любом компакте из D*

Замечание.
В т. 16.1 при $E_0 = D$ (область) условие равномерной сходимости на D можно заменить на условие равномерной сходимости внутри D.