Случайные величины

Определение

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$.
$\mathcal{K}$ - некоторый класс подмножеств Ω.

Определение. *Сигма-алгебра $\o(\mathcal{K})$ называется порождающим классов $\mathcal{K}$, если*

1. $\mathcal{K} \subseteq \o(\mathcal{K})$
2. *среди всех таких сигма-алгебр эта алгебра минимальная.*

Определение. *Борелевской сигма-алгеброй ($\mathcal{B}$) подмножества вещественной прямой называется минимальная сигма-алгебра, содержащая все интервалы $\mathcal{J} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b > a\}$*
$\mathcal{B} = \o(\mathcal{J})$

Определение. *Отображение $\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если $\forall B \in \mathcal{B}\ \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$*

Примеры случайных величин

Индикатор

$A \in \mathcal{A}$
$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases} = \mathbb{1}_A(\omega)$

Дискретная случайная величина

$x_1, x_2, \ldots, x_n \colon x_i \in \mathbb{R}$
$A_1, A_2, \ldots, A_n \colon A_i \in \mathcal{A}; A_i \cap A_j = \emptyset$
$\xi(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega)$
Если слагаемых конечное количество, то это простая случайная величина.

Пример использования

Задача
Привести пример функции ξ такой, что $\xi(\omega)$ - не случайная величина, а $\xi^2(\omega)$ - случайная величина.

Решение
$\mathcal{A} \neq 2^\Omega, A \notin \mathcal{A}$
$\xi(w) = \mathbb{1}_A(\omega)$ - не случайная величина:
$B \ni 1, -1 \notin B$
$\xi^{-1}(B) = A \notin \mathcal{A}$
А $\xi^2(\omega)$ - случайная величина:
$\xi^2(\omega) = 1\ \forall \omega \in \Omega$
$B \ni 1 \ \Rightarrow\ \xi^{2^{-1}}(B) = \Omega \in \mathcal{A}$
$B \not\ni 1 \ \Rightarrow\ \xi^{2^{-1}}(B) = \emptyset \in \mathcal{A}$

Утверждение

Пусть $\mathcal{E}$ - некоторая система подмножеств $\mathbb{R}$: $\mathcal{E}$: ø($\mathcal{E}$) $= \mathcal{B}$
Тогда для того, чтобы $\xi(\omega)$ была случайной величиной, необходимо и достаточно, чтобы
$\forall E \in \mathcal{E}\ \xi^{-1}(E) = \{\omega : \xi(\omega) \in E\} \in \mathcal{A}$

Доказательство.
$\Rightarrow$: очевидно
$\Leftarrow$:
$\mathcal{D} = \{D : D \in \mathcal{B},\ \xi^{-1}(D) \in \mathcal{A}\}$
$\xi^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha}$ $\square$