Аннотация

Лекции по математическому анализу 2 семестра потока бакалавров ВМК МГУ.
Лектор — Фоменко Татьяна Николаевна.
Составитель — Андрей Тихонов (tiacorpo@gmail.com).

Оглавление

1 Определенный интеграл **2**
1.1 Основные понятия 2
1.2 2 критерия интегрируемости функции по Риману 4

Глава 1

Определенный интеграл

1.1 Основные понятия

Определение. ***Разбиением отрезка*** $[a;b]$ *называется набор* $\underset{0\le k\le n}{\{x_k\}} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$*, где* $x_0 = a$*,* $x_n = b$*,* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$*.*

Определение. ***Диаметром,*** *или* ***мелкостью разбиения*** $\{x_k\}$ *называется число* $d = d(\{x_k\}) = \underset{1\le k\le n}{max}\{\Delta x_k\}$*,* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$*.*

Определение. ***Размеченным разбиением*** *называется разбиение, в котором зафиксированы точки* $\underset{1\le k\le n}{\{\xi_k\}}$*, где* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$*.*

Определение. *Разбиение* $\{y_m\}$ *называется* ***измельчением разбиения*** $\{x_k\}$*, если* $\{x_k\} \subset \{y_m\}$*.*

Определение. *Разбиение* $\{z_j\}$ *называется* ***объединением разбиений*** $\{x_k\}$ ***и*** $\{y_m\}$*, если* $\{z_j\} = \{x_k\} \cup \{y_m\}$*.*

Определение. *Пусть на* $[a;b]$ *задана* $f(x)$*.* ***Интегральной суммой для*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$***, составленной по размеченному разбиению*** $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ *называется выражение вида*

$$\sigma_f = \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Определение. *Число* A *наывается* ***пределом интегральных сумм*** $f(x)$ ***на*** $[a;b]$ ***при*** $d \mapsto 0$*, где* d *- мелкость разбиений, если* $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0$*, что для любого размеченного разбиения* $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$*, мелкость которого* $d < \delta$*, выполнено неравенство:* $|\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A| < \epsilon$*.*

$$A = \lim_{d\mapsto 0} \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$$

Определение. ***Определенным интегралом*** $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *называется предел интегральных сумм этой функции на этом отрезке при* $d \mapsto 0$*.*

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{d\mapsto 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Теорема 1. *Если у* $f(x)$ *существует предел интегральных сумм, то этот предел – единственный.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует 2 предела: $A_1 < A_2,\ A_2 - A_1 = \alpha > 0$. По определению предела, для $\forall\ \epsilon = \frac{\alpha}{3}\ \exists\ \delta_1, \delta_2$, что:

1. для $\forall\ (\{x_k\}, \{\xi_k\}),\ d < \delta_1 \colon |\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A_1| < \epsilon$
2. для $\forall\ (\{x_k\}, \{\xi_k\}),\ d < \delta_2 \colon |\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A_2| < \epsilon$

Тогда для любого размеченного разбиения $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$, у которого $d \le min(\delta_1, \delta_2)$, будет выполнено и 1), и 2) $\Rightarrow$ $\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ попадает одновременно в 2 непересекающихся интервала. Противоречие. $\square$

Теорема 2. *Если существует* $\int\limits_a^b f(x)dx$*, то обязательно* $f(x)$ *ограничена на* $[a;b]$*.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $f(x)$ неограничена на $[a;b]$. Тогда для любого разбиения $\{x_k\}$ $f(x)$ будет неограничена на хотя бы одном отрезке $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ этого разбиения. Выберем последовательность разбиений $\{x_k^m\}_{0\le k\le n}$ с мелкостью $d_m = d_m(\{x_k^m\}) < \frac{1}{m}$. В каждом из этих разбиений выберем отрезок $[x_{k_0-1}^m, x_{k_0}^m]$, где $f(x)$ не ограничена. Теперь подберем разметку так, чтобы интегральные суммы $\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})$ были больше m. Выберем ξ_k на всех отрезках $[x_{k-1}^m, x_k^m]$, кроме $[x_{k_0-1}^m, x_{k_0}^m]$, произвольным образом. А на $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ выберем ξ_{k_0} так, чтобы $|f(\xi_{k_0})| > \frac{m+|\sum\limits_{k\neq k_0} f(\xi_k)\Delta x_k)|}{\Delta x_{k_0}^m}$. Тогда вспомним неравенство: $|a+b| \ge |a| - |b|$ ($|a| = |(a+b)-b| \le |a+b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \le |a+b|$, ЧТД).

$|\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})| = |f(\xi_k^m)\Delta x_{k_0}^m + \sum\limits_{k\neq k_0} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m| \ge |f(\xi_k^m)\Delta x_{k_0}^m| - |\sum\limits_{k\neq k_0} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m| > m \Rightarrow \underset{d<\frac{1}{m}}{\sigma_f} > m \Rightarrow$ при $m \mapsto \infty$ получим противоречие. □

Определение. *Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, и задано размеченное разбиение $(\{x_k\},\{\xi_k\}) \Rightarrow f(x)$ ограничена на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$ существует $\sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\} = M_k$, $\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\} = m_k$.* ***Верхней (нижней) интегральной суммой (суммой Дарбу)*** *$f(x)$ по разбиению $\{x_k\}$ на $[a;b]$ называется выражение:*

$\overline{s} := \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$

$\underline{s} := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$

Теорема 3. *6 свойств сумм Дарбу.*

1. $\forall\ (\{x_k\},\{\xi_k\})\underline{s} \le \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) \le \overline{s}$
2. *$\forall\ \epsilon > 0\ \exists$ разметка $\{\xi_k\}$ данного разбиения $\{x_k\}$, что $\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) - \underline{s} < \epsilon$, $\overline{s} - \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) < \epsilon$*
3. *При ризмельчении разбиения $\underline{s}$ не может уменьшиться, $\overline{s}$ – увеличиться.*
4. *При добавлении к разбиению $\{x_k\}$ q новых точек $\overline{s}$ может уменьшиться не более чем на $(M-m)qd$, d – мелкость $\{x_k\}$. Аналогично для $\underline{s}$.*
5. *Пусть $\{x_k\}$, $\{y_j\}$ – 2 разбиения $[a;b]$. $\overline{s}$, $\underline{s}$ и $\overline{s}'$, $\underline{s}'$ – их суммы Дарбу. Тогда $\underline{s} \le \overline{s}'$, $\overline{s} \ge \underline{s}'$.*
6. *В силу 5), $\exists\ sup\{\underline{s}\} = \underline{I}$ – нижний интеграл Дарбу, $\exists\ inf\{\overline{s}\} = \overline{I}$ – верхний интеграл Дарбу, причем $\underline{s} \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{s}$.*

Доказательство.

1. Для любого разбиения $\{x_k\}$ и любой разметки $\{\xi_k\}$ $m_k \le f(\xi_k) \le M_k \Rightarrow \underline{s} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k = \overline{s}$
2. По определению sup, $\forall\ \epsilon > 0$ на каждом $[x_{k-1}, x_k]\ \exists\ \xi_k$, что $M_k - f(\xi_k) < \frac{\epsilon}{b-a}$, $1 \le k \le n \Rightarrow \overline{s} - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - f(\xi_k))\Delta x_k < \frac{\epsilon}{b-a}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = \epsilon$. Аналогично для $\underline{s}$.
3. Достаточно доказать, что $\overline{s}$ не увеличивается, а $\underline{s}$ не уменьшается, при добавлении к разбиению $\{x_k\}$ 1 новой точки.

   Пусть новая точка η добавлена между x_{k_0-1} и x_{k_0}. Расмотрим суммы Дарбу.

   $\overline{s} = M_{k_0}\Delta x_{k_0} + \sum\limits_{k\neq k_0} M_k\Delta x_k$

   $\overline{s}' = M_{k_0}^1(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}^2(x_{k_0} - \eta) + \sum\limits_{k\neq k_0} M_k\Delta x_k$

   Сравним эти два выражения. Заметим, что $M_{k_0}\Delta x_{k_0} = M_{k_0}(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}(x_{k_0} - \eta)$. Причём очевидно, что $M_{k_0} \ge \sup\limits_{x\in[x_{k_0-1};\eta]}\{f(x)\} = M_{k_0}^1$ и $M_{k_0} \ge \sup\limits_{x\in[\eta;x_{k_0}]}\{f(x)\} = M_{k_0}^2 \Rightarrow \overline{s} \ge \overline{s}'$. Аналогично для $\underline{s}$.
4. Докажем, что при добавлении 1 новой точки к разбиению $\{x_k\}$ $\overline{s}$ может уменьшиться не более, чем на $(M-n)d$, где $M = \sup\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$, $m = \inf\limits_{x\in[a;b]}\{f(x)\}$, d – мелкость разбиения $\{x_k\}$.

   Аналогично доказательству 3), пусть добавлена новая точка η между x_{k_0-1} и x_{k_0}. Рассмотрим разность $\overline{s} - \overline{s}'$:

   $\overline{s} - \overline{s}' = M_{k_0}\Delta x_{k_0} - (M_{k_0}^1(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}^2(x_{k_0} - \eta)) = (M_{k_0} - M_{k_0}^1)(\eta - x_{k_0-1}) + (M_{k_0} - M_{k_0}^2)(x_{k_0} - \eta) \le (M - m)((\eta - x_{k_0-1}) + (x_{k_0} - \eta)) = (M-m)\Delta x_{k_0} \le (M-m)d$

5. Пусть даны 2 любых разбиения: $\{x_k\},\ \{y_j\}$; $\{z_m\} = \{x_k\} \cup \{y_j\}$. Пусть $\overline{s}, \underline{s}$ – суммы Дарбу для $\{x_k\}$, $\overline{s}', \underline{s}'$ – для $\{y_j\}$, $\overline{s}'', \underline{s}''$ – для $\{z_m\}$.
   $\underline{s} \le \underline{s}'' \le \overline{s}'' \le \overline{s}'$, $\underline{s}' \le \underline{s}'' \le \overline{s}'' \le \overline{s}$.

6. Докажем, что $\underline{s} \le \underline{I}\ \le\ \overline{I} \le \overline{s}$.
   Предположим противное. $\overline{I} < \underline{I}$, $\underline{I} - \overline{I} = \alpha > 0$. По определению sup, inf для $\frac{\alpha}{3}$ $\exists\ \underline{s}$, что $\underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \le \underline{I}$; $\exists\ \overline{s}$, что $\overline{I} \le \overline{s} < \overline{I} + \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \overline{s} < \overline{I} + \frac{\alpha}{3} < \underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \Rightarrow$ противоречие.

□

Определение. *$f(x)$ называется* ***интегрируемой по Риману на*** *$[a;b]$, если $\exists \int\limits_a^b f(x)dx$. Также используется запись $f \in \mathbb{R}[a;b]$.*

1.2 2 критерия интегрируемости функции по Риману

Теорема 4. *Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу*
Для того, чтобы $f(x)$, ограниченная на $[a;b]$, была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s}_f - \underline{s}_f < \epsilon$.

Доказательство. **Необходимость.**
Пусть $\exists\ I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d \mapsto 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow$ по определению lim, $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\frac{\epsilon}{4}) > 0$, что для любого разбиения $\{x_k\}$ и любой его разметки $\{\xi_k\}$, если $d(\{x_k\}) < \delta \Rightarrow |\sigma_f - I| < \frac{\epsilon}{4}$.
По 2 свойству из теоремы 3, $\exists\ \{\xi_k'\}$, $\exists\ \{\xi_k''\}$, что при даном разбиении $\{x_k\}$
$\sigma_f' = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k')\Delta x_k$, $\sigma_f'' = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k'')\Delta x_k$, удовлетворяющие неравенствам:
$\sigma_f' - \underline{s} < \frac{\epsilon}{4}$, $\overline{s} - \sigma_f'' < \frac{\epsilon}{4}$.
При этом выполнены и неравенства:
$|\sigma_f' - I| < \frac{\epsilon}{4}$, $|\sigma_f'' - I| < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow |\overline{s} - \underline{s}| \le |\overline{s} - \sigma_f''| + |\sigma'' - I| + |I - \sigma'| + |\sigma' - \underline{s}| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$ □

Для доказательства достаточности нам потребуется доказать следующее утверждение:

Лемма. *Основная лемма Дарбу.*
$\underline{I} = \lim\limits_{d \mapsto 0}\{\underline{s}\}$, $\overline{I} = \lim\limits_{d \mapsto 0}\{\overline{s}\}$

Доказательство. По определению $\overline{I} = inf\{\overline{s}\} \Rightarrow \forall\ \epsilon > 0\ \exists$ разбиение $\{x_k\}$, что $\overline{s}$ удовлетворяет неравенству:
$\overline{I} \le \overline{s} < I + \frac{\epsilon}{2}$
Пусть в $\{x_k\}$ имеется $q+1$ точка. Рассмотрим теперь разбиение $\{y_j\}$ с мелкостью
$d(\{y_j\}) < \frac{\epsilon}{2(M+m)(q-1)} = \delta(\epsilon) > 0$
Рассмотрим разбиение $\{z_m\} = \{y_j\} \cup \{x_k\}$. В $\{z_m\}$, по сравнению с $\{y_j\}$, добавлено не более, чем $q-1$ точек. Обозначим верхние суммы Дарбу: $\overline{s}'$ - для $\{y_j\}$, $\overline{s}''$ - для $\{z_m\}$.
$\overline{s}'' \le \overline{s}$, $\overline{s}'' < \overline{s}'$
$\overline{s}' - \overline{s}'' \le (M-m)(q-1)d < (M-m)(q-1)\frac{\epsilon}{2(M-m)(q-1)} = \frac{\epsilon}{2}$
$I \le \overline{s}'' < I + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \overline{I} \le \overline{s}' < \overline{I} + \epsilon \Rightarrow \overline{I} = \lim\limits_{d \mapsto 0} \overline{s}$ □

Доказательство. **Достаточность.**
Дано: $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s} - \underline{s} < \epsilon \Rightarrow \underline{s} \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{s} \Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = I$
По основной лемме Дарбу $\lim\limits_{d \mapsto 0}\ \underline{s} = \lim\limits_{d \mapsto 0}\ \overline{s} = I$
По свойству 1 теоремы 3, $\underline{s} \le \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) \le \overline{s} \Rightarrow \exists\ \lim\ \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) = I$, т. е. $f \in \mathbb{R}[a;b]$ □

Теорема 5. *Критерий интегрируемости в теминах верхних и нижних интегралов Дарбу*
$f \in \mathbb{R}[a;b]\ \Leftrightarrow\ \underline{I} = \overline{I}$

Доказательство. **Необходимость.**
Пусть $f \in \mathbb{R}[a;b] \Rightarrow$ по теореме 4 $\forall\ \epsilon\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s} - \underline{s} < \epsilon\ \Rightarrow\ \underline{I} = \overline{I}$
Достаточность.
Пусть $\underline{I} = \overline{I}$. По основной лемме Дарбу $\lim\limits_{d \mapsto 0}\ \underline{s} = \lim\limits_{d \mapsto 0}\ \overline{s} = I$. По теореме 3 $\underline{s} \le \sigma_f \le \overline{s}$. По теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{d \mapsto 0}\ \sigma_f = I$ □