

### **Аннотация**

Лекции по математическому анализу 2 семестра потока бакалавров ВМК МГУ.

Лектор — Фоменко Татьяна Николаевна.

Составитель — Андрей Тихонов (tiacorporo@gmail.com).

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Определенный интеграл</b>	<b>2</b>
1.1	Основные понятия . . . . .	2
1.2	2 критерия интегрируемости функции по Риману . . . . .	4
1.3	Классы интегрируемых функций . . . . .	5
1.4	Основные свойства определенных интегралов . . . . .	6
1.5	Интеграл с переменным верхним(нижним) пределом . . . . .	8

# Глава 1

## Определенный интеграл

### 1.1 Основные понятия

**Определение.** *Разбиением отрезка  $[a, b]$  называется набор  $\{x_k\} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , где  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$ ,  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .*

**Определение.** *Диаметром, или мелкостью разбиения  $\{x_k\}$  называется число  $d = d(\{x_k\}) = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\}$ ,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ .*

**Определение.** *Размеченным разбиением называется разбиение, в котором зафиксированы точки  $\{\xi_k\}$ , где  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ .*

**Определение.** *Разбиение  $\{y_m\}$  называется измельчением разбиения  $\{x_k\}$ , если  $\{x_k\} \subset \{y_m\}$ .*

**Определение.** *Разбиение  $\{z_j\}$  называется объединением разбиений  $\{x_k\}$  и  $\{y_m\}$ , если  $\{z_j\} = \{x_k\} \cup \{y_m\}$ .*

**Определение.** *Пусть на  $[a, b]$  задана  $f(x)$ . Интегральной суммой для  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , составленной по размеченному разбиению  $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$  называется выражение вида*

$$\sigma_f = \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

**Определение.** *Число  $A$  называется пределом интегральных сумм  $f(x)$  на  $[a, b]$  при  $d \rightarrow 0$ , где  $d$  - мелкость разбиений, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что для любого размеченного разбиения  $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ , мелкость которого  $d < \delta$ , выполнено неравенство:  $|\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A| < \varepsilon$ .*

$$A = \lim_{d \rightarrow 0} \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$$

**Определение.** *Определенным интегралом  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  называется предел интегральных сумм этой функции на этом отрезке при  $d \rightarrow 0$ .*

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

**Теорема 1.** *Если у  $f(x)$  существует предел интегральных сумм, то этот предел – единственный.*

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть существует 2 предела:  $A_1 < A_2$ ,  $A_2 - A_1 = \alpha > 0$ . По определению предела, для  $\forall \varepsilon = \frac{\alpha}{3} \exists \delta_1, \delta_2$ , что:

1. для  $\forall (\{x_k\}, \{\xi_k\})$ ,  $d < \delta_1: |\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A_1| < \varepsilon$
2. для  $\forall (\{x_k\}, \{\xi_k\})$ ,  $d < \delta_2: |\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A_2| < \varepsilon$

Тогда для любого размеченного разбиения  $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ , у которого  $d \leq \min(\delta_1, \delta_2)$ , будет выполнено и 1), и 2)  $\Rightarrow \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$  попадает одновременно в 2 непересекающихся интервала. Противоречие.  $\square$

**Теорема 2.** *Если существует  $\int_a^b f(x) dx$ , то обязательно  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ .*

*Доказательство.* Предположим противное. Пусть  $f(x)$  неограничена на  $[a, b]$ . Тогда для любого разбиения  $\{x_k\}$   $f(x)$  будет неограничена на хотя бы одном отрезке  $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$  этого разбиения. Выберем последовательность разбиений  $\{x_k^m\}$  с мелкостью  $d_m = d_m(\{x_k^m\}) < \frac{1}{m}$ . В каждом из этих разбиений выберем отрезок  $[x_{k_0-1}^m, x_{k_0}^m]$ , где  $f(x)$  не ограничена. Теперь подберем разметку так, чтобы интегральные суммы  $\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$  были больше  $m$ . Выберем  $\xi_k$  на всех отрезках  $[x_{k-1}^m, x_k^m]$ , кроме  $[x_{k_0-1}^m, x_{k_0}^m]$ , произвольным образом. А на  $[x_{k_0-1}^m, x_{k_0}^m]$  выберем  $\xi_{k_0}$  так, чтобы  $|f(\xi_{k_0})| > m + \frac{\sum_{k \neq k_0} f(\xi_k) \Delta x_k}{\Delta x_{k_0}^m}$ . Тогда вспомним неравенство:  $|a + b| \geq |a| - |b|$  ( $|a| = |(a + b) - b| \leq |a + b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a + b|$ , ЧТД).

$$|\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})| = |f(\xi_{k_0}^m) \Delta x_{k_0}^m + \sum_{k \neq k_0} f(\xi_k^m) \Delta x_k^m| \geq |f(\xi_{k_0}^m) \Delta x_{k_0}^m| - \left| \sum_{k \neq k_0} f(\xi_k^m) \Delta x_k^m \right| > m \Rightarrow \frac{\sigma_f}{d < \frac{1}{m}} > m \Rightarrow \text{при } m \rightarrow \infty$$

получим противоречие.  $\square$

**Определение.** Пусть  $f(x)$  ограничена на  $[a, b]$ , и задано размеченное разбиение  $(\{x_k\}, \{\xi_k\}) \Rightarrow f(x)$  ограничена на каждом отрезке  $[x_{k-1}, x_k] \Rightarrow$  существует  $\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\} = M_k$ ,  $\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\} = m_k$ . **Верхней (нижней) интегральной суммой (суммой Дарбу)**  $f(x)$  по разбиению  $\{x_k\}$  на  $[a, b]$  называется выражение:

$$\bar{s} := \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

$$\underline{s} := \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

**Теорема 3.** 6 свойств сумм Дарбу.

1.  $\forall (\{x_k\}, \{\xi_k\}) \underline{s} \leq \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) \leq \bar{s}$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  разметка  $\{\xi_k\}$  данного разбиения  $\{x_k\}$ , что  $\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - \underline{s} < \varepsilon$ ,  $\bar{s} - \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) < \varepsilon$
3. При измельчении разбиения  $\underline{s}$  не может уменьшиться,  $\bar{s}$  – увеличиться.
4. При добавлении к разбиению  $\{x_k\}$   $q$  новых точек  $\bar{s}$  может уменьшиться не более чем на  $(M - m)qd$ ,  $d$  – мелкость  $\{x_k\}$ . Аналогично для  $\underline{s}$ .
5. Пусть  $\{x_k\}$ ,  $\{y_j\}$  – 2 разбиения  $[a, b]$ .  $\bar{s}$ ,  $\underline{s}$  и  $\bar{s}'$ ,  $\underline{s}'$  – их суммы Дарбу. Тогда  $\underline{s} \leq \bar{s}'$ ,  $\bar{s} \geq \underline{s}'$ .
6. В силу 5),  $\exists \sup\{\underline{s}\} = \underline{I}$  – нижний интеграл Дарбу,  $\exists \inf\{\bar{s}\} = \bar{I}$  – верхний интеграл Дарбу, причем  $\underline{s} \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{s}$ .

*Доказательство.* 1. Для любого разбиения  $\{x_k\}$  и любой разметки  $\{\xi_k\}$   $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \Rightarrow \underline{s} = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \leq$

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k = \bar{s}$$

2. По определению  $\sup$ ,  $\forall \varepsilon > 0$  на каждом  $[x_{k-1}, x_k] \exists \xi_k$ , что  $M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ ,  $1 \leq k \leq n \Rightarrow \bar{s} - \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (M_k - f(\xi_k)) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon$ . Аналогично для  $\underline{s}$ .

3. Достаточно доказать, что  $\bar{s}$  не увеличивается, а  $\underline{s}$  не уменьшается, при добавлении к разбиению  $\{x_k\}$  1 новой точки.

Пусть новая точка  $\eta$  добавлена между  $x_{k_0-1}$  и  $x_{k_0}$ . Рассмотрим суммы Дарбу.

$$\bar{s} = M_{k_0} \Delta x_{k_0} + \sum_{k \neq k_0} M_k \Delta x_k$$

$$\bar{s}' = M_{k_0}^1 (\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}^2 (x_{k_0} - \eta) + \sum_{k \neq k_0} M_k \Delta x_k$$

Сравним эти два выражения. Заметим, что  $M_{k_0} \Delta x_{k_0} = M_{k_0} (\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0} (x_{k_0} - \eta)$ . Причём очевидно, что  $M_{k_0} \geq \sup_{x \in [x_{k_0-1}, \eta]} \{f(x)\} = M_{k_0}^1$  и  $M_{k_0} \geq \sup_{x \in [\eta, x_{k_0}]} \{f(x)\} = M_{k_0}^2 \Rightarrow \bar{s} \geq \bar{s}'$ . Аналогично для  $\underline{s}$ .

4. Докажем, что при добавлении 1 новой точки к разбиению  $\{x_k\}$   $\bar{s}$  может уменьшиться не более, чем на  $(M - m)d$ , где  $M = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ ,  $m = \inf_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ ,  $d$  – мелкость разбиения  $\{x_k\}$ .

Аналогично доказательству 3), пусть добавлена новая точка  $\eta$  между  $x_{k_0-1}$  и  $x_{k_0}$ . Рассмотрим разность  $\bar{s} - \bar{s}'$ :

$$\bar{s} - \bar{s}' = M_{k_0} \Delta x_{k_0} - (M_{k_0}^1 (\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}^2 (x_{k_0} - \eta)) = (M_{k_0} - M_{k_0}^1) (\eta - x_{k_0-1}) + (M_{k_0} - M_{k_0}^2) (x_{k_0} - \eta) \leq (M - m) ((\eta - x_{k_0-1}) + (x_{k_0} - \eta)) = (M - m) \Delta x_{k_0} \leq (M - m) d$$

5. Пусть даны 2 любых разбиения:  $\{x_k\}, \{y_j\}; \{z_m\} = \{x_k\} \cup \{y_j\}$ . Пусть  $\bar{s}, \underline{s}$  – суммы Дарбу для  $\{x_k\}$ ,  $\bar{s}', \underline{s}'$  – для  $\{y_j\}$ ,  $\bar{s}'', \underline{s}''$  – для  $\{z_m\}$ .

$$\underline{s} \leq \underline{s}'' \leq \bar{s}' \leq \underline{s}' \leq \bar{s}'' \leq \bar{s}.$$

6. Докажем, что  $\underline{s} \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{s}$ .

Предположим противное.  $\bar{I} < \underline{I}$ ,  $\underline{I} - \bar{I} = \alpha > 0$ . По определению  $\sup, \inf$  для  $\frac{\alpha}{3} \exists \underline{s}$ , что  $\underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \leq \underline{I}$ ;  $\exists \bar{s}$ , что  $\bar{I} \leq \bar{s} < \bar{I} + \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \bar{s} < \bar{I} + \frac{\alpha}{3} < \underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \Rightarrow$  противоречие.  $\square$

**Определение.**  $f(x)$  называется *интегрируемой по Риману на  $[a, b]$* , если  $\exists \int_a^b f(x)dx$ . Также используется запись  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ .

## 1.2 2 критерия интегрируемости функции по Риману

**Теорема 4.** Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу

Для того, чтобы  $f(x)$ , ограниченная на  $[a, b]$ , была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \varepsilon > 0 \exists \{x_k\}$ , что  $\bar{s}_f - \underline{s}_f < \varepsilon$ .

**Доказательство. Необходимость.**

Пусть  $\exists I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow$  по определению  $\lim, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{4}) > 0$ , что для любого разбиения  $\{x_k\}$  и любой его разметки  $\{\xi_k\}$ , если  $d(\{x_k\}) < \delta \Rightarrow |\sigma_f - I| < \frac{\varepsilon}{4}$ .

По 2 свойству из теоремы 3,  $\exists \{\xi'_k\}, \exists \{\xi''_k\}$ , что при даном разбиении  $\{x_k\}$

$$\sigma'_f = \sum_{k=1}^n f(\xi'_k) \Delta x_k, \sigma''_f = \sum_{k=1}^n f(\xi''_k) \Delta x_k, \text{удовлетворяющие неравенствам:}$$

$$\sigma'_f - \underline{s} < \frac{\varepsilon}{4}, \bar{s} - \sigma''_f < \frac{\varepsilon}{4}.$$

При этом выполнены и неравенства:

$$|\sigma'_f - I| < \frac{\varepsilon}{4}, |\sigma''_f - I| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |\bar{s} - \underline{s}| \leq |\bar{s} - \sigma''_f| + |\sigma''_f - I| + |I - \sigma'| + |\sigma' - \underline{s}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \quad \square$$

Для доказательства достаточности нам потребуется доказать следующее утверждение:

**Лемма.** Основная лемма Дарбу.

$$\underline{I} = \lim_{d \rightarrow 0} \{\underline{s}\}, \bar{I} = \lim_{d \rightarrow 0} \{\bar{s}\}$$

**Доказательство.** По определению  $\bar{I} = \inf \{\bar{s}\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$  разбиение  $\{x_k\}$ , что  $\bar{s}$  удовлетворяет неравенству:

$$\bar{I} \leq \bar{s} < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть в  $\{x_k\}$  имеется  $q+1$  точка. Рассмотрим теперь разбиение  $\{y_j\}$  с мелкостью

$$d(\{y_j\}) < \frac{\varepsilon}{2(M+m)(q-1)} = \delta(\varepsilon) > 0$$

Рассмотрим разбиение  $\{z_m\} = \{y_j\} \cup \{x_k\}$ . В  $\{z_m\}$ , по сравнению с  $\{y_j\}$ , добавлено не более, чем  $q-1$  точек. Обозначим верхние суммы Дарбу:  $\bar{s}'$  - для  $\{y_j\}$ ,  $\bar{s}''$  - для  $\{z_m\}$ .

$$\bar{s}'' \leq \bar{s}, \bar{s}'' < \bar{s}'$$

$$\bar{s}' - \bar{s}'' \leq (M-m)(q-1)d < (M-m)(q-1) \frac{\varepsilon}{2(M-m)(q-1)} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I \leq \bar{s}'' < I + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \bar{I} \leq \bar{s}' < \bar{I} + \varepsilon \Rightarrow \bar{I} = \lim_{d \rightarrow 0} \bar{s} \quad \square$$

**Доказательство. Достаточность.**

Дано:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \{x_k\}$ , что  $\bar{s} - \underline{s} < \varepsilon \Rightarrow \underline{s} \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{s} \Rightarrow \underline{I} = \bar{I} = I$

По основной лемме Дарбу  $\lim_{d \rightarrow 0} \underline{s} = \lim_{d \rightarrow 0} \bar{s} = I$

По свойству 1 теоремы 3,  $\underline{s} \leq \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) \leq \bar{s} \Rightarrow \exists \lim \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) = I$ , т. е.  $f \in \mathbb{R}[a, b]$   $\square$

**Теорема 5.** Критерий интегрируемости в терминах верхних и нижних интегралов Дарбу

$$f \in \mathbb{R}[a, b] \Leftrightarrow \underline{I} = \bar{I}$$

**Доказательство. Необходимость.**

Пусть  $f \in \mathbb{R}[a, b] \Rightarrow$  по теореме 4  $\forall \varepsilon \exists \{x_k\}$ , что  $\bar{s} - \underline{s} < \varepsilon \Rightarrow \underline{I} = \bar{I}$

**Достаточность.**

Пусть  $\underline{I} = \bar{I}$ . По основной лемме Дарбу  $\lim_{d \rightarrow 0} \underline{s} = \lim_{d \rightarrow 0} \bar{s} = I$ . По теореме 3  $\underline{s} \leq \sigma_f \leq \bar{s}$ . По теореме о двух милиционерах

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sigma_f = I \quad \square$$

### 1.3 Классы интегрируемых функций

**Теорема 6.** Если  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то она интегрируема.

*Доказательство.* По теореме Кантора  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $[a, b]$ , т. е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in [a, b]: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

Рассмотрим разбиение  $\{x_k\}$  на  $[a, b]$  с мелкостью  $d \leq \delta(\frac{\varepsilon}{b-a})$ . Тогда  $\bar{s} - \underline{s} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$ , где  $M_k - m_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\} - \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} \{f(x)\} = \sup_{x_1, x_2 \in [x_{k-1}, x_k]} \underbrace{\{f(x_1) - f(x_2)\}}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \bar{s} - \underline{s} \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} * (b-a) = \varepsilon$   
 $\Rightarrow$  по теореме 4  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ .  $\square$

**Теорема 7.** Если ограниченная функция  $f(x)$  монотонна на  $[a, b]$ , то она интегрируема.

*Доказательство.* Пусть  $f(x)$  не убывает на  $[a, b]$ . Для  $\forall \varepsilon > 0$  рассмотрим любое разбиение  $x_k$  на  $[a, b]$  с мелкостью  $d \leq \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ . Тогда  $\bar{s} - \underline{s} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k$ .

Так как  $f(x)$  не убывает, то  $\bar{s} - \underline{s} = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \underbrace{\Delta x_k}_{\leq d = \delta(\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (M_n - m_1) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon$ .

По 1 критерию интегрируемости  $f(x)$  интегрируема.

\*: действительно,  $M_k = m_{k+1}$   $\square$

**Определение.** Функция  $f(x)$  называется **почти везде непрерывной** на  $[a, b]$ , если для  $\forall \varepsilon > 0$  существует конечный набор интервалов суммарной длины  $l < \varepsilon$ , покрывающих все точки разрыва  $f(x)$ .

**Теорема 8.** Если  $f(x)$  почти везде непрерывна на  $[a, b]$ , то она интегрируема.

*Доказательство.* Для  $\forall \varepsilon > 0$  рассмотрим конечный набор интервалов  $J_j = (c_j, d_j)$ , сумма длин которых  $l = \sum_{j=1}^q |J_j| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$ , который покрывает все точки разрыва  $f(x)$ .

Здесь  $M = \sup_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$ ,  $m = \inf_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$ . (можно считать, что  $J_j$  не пересекаются)

Тогда  $[a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^q J_j = I$  - объединение отрезков,  $I = \bigcup_{q+1}^{i=1} I_i$ .

Рассмотрим  $f(x)$  на  $I_i$ . Она там непрерывна  $\Rightarrow$  по теореме Кантора  $f(x)$  равномерно непрерывна на  $I_i$ , т. е. для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}) > 0$ , что для  $\forall x', x'' \in I_i, |x' - x''| < \delta_i \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Тогда для любого разбиения  $\nu_i = \{\nu_{i_k}\}$  отрезка  $I_i$  с мелкостью  $d_i < \delta_i(\frac{\varepsilon}{2(b-a)})$  для любых двух точек элементарного отрезка разбиения  $([\nu_{i_{k-1}}, \nu_{i_k}])$ :

$x', x'' \in [\nu_{i_{k-1}}, \nu_{i_k}] \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ .

Переходя к  $\sup$ , получим:

$$M_{i_k} (= \sup_{x \in [\nu_{i_{k-1}}, \nu_{i_k}]} f(x)) - m_{i_k} (= \inf_{x \in [\nu_{i_{k-1}}, \nu_{i_k}]} f(x)) = \sup_{x', x'' \in [\nu_{i_{k-1}}, \nu_{i_k}]} |f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (\#)$$

Возьмем теперь  $0 < \delta \leq \min_{1 \leq i \leq q+1} \{\delta_i\}$  и рассмотрим на любом отрезке  $I_i$  разбиение мелкостью  $d_i < \delta \Rightarrow$  для любого  $i: 1 \leq i \leq q+1$  выполняется  $(\#)$

Объединим все эти разбиения. Получится некоторое разбиение  $\{y_k\}$  отрезка  $[a, b]$ , в которое войдут замыкания выброшенных интервалов  $J_j$ . Пусть  $\bar{s}, \underline{s}$  - суммы Дарбу этого разбиения. Тогда рассмотрим их разность:  $\bar{s} - \underline{s} =$

$$= \sum_{k=1}^N (M_k - m_k) \Delta y_k = \sum_{[y_{k-1}, y_k] \subset \cup I_i} (M_k - m_k) \Delta y_k + \sum_{[y_{k-1}, y_k] \subset \underbrace{[a, b] \setminus \cup I_i}_{= \cup J_j}} (M_k - m_k) \Delta y_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{[y_{k-1}, y_k] \subset \cup I_i} \Delta y_k + \underbrace{\sum_{[y_{k-1}, y_k] \subset \cup J_j} \Delta y_k}_{\leq (b-a)} + (M - m) \underbrace{\sum_{[y_{k-1}, y_k] \subset \cup J_j} \Delta y_k}_{< \frac{\varepsilon}{2(M-m)}} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) + \frac{\varepsilon}{2(M-m)} (M-m) = \varepsilon \quad \square$$

**Теорема 9.** Верно также следующее утверждение (без доказательства):

Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , а  $\phi(y)$  - непрерывна на  $[m; M]$ , то  $\phi(f(x)) \in \mathbb{R}[a, b]$

Следствие: если  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ , то и  $\frac{1}{f}$  - тоже. ( $f(x) \neq 0$  на  $[a, b]$ ).

## 1.4 Основные свойства определенных интегралов

**Теорема 10.** 7 свойств определенных интегралов

Соглашение: будем считать, что  $\int_a^a f(x)dx = 0$ ,  $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$  ( $a < b$ )

$$1. \text{ Линейность: } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in \mathbb{R}[a, b]: \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$2. \text{ Интегрируемость произведения: если } f, g \in \mathbb{R}[a, b], \text{ то } fg \in \mathbb{R}[a, b]$$

$$3. \text{ Аддитивность: если } f \in \mathbb{R}[a, b], \text{ то } f \in \mathbb{R}[c, d] \forall [c, d] \subset [a, b].$$

$$\text{Кроме того, } \forall c \in (a, b) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$4. (a) \text{ Если } f \in \mathbb{R}[a, b] \text{ и } f(x) \geq 0, a \leq x \leq b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$(b) \text{ Если } f \text{ непрерывна и неотрицательна на } [a, b], \text{ и существует } c, a \leq c \leq b, f(c) > 0, \text{ то } \int_a^b f(x)dx > 0$$

$$5. (a) \text{ Если } f, g \in \mathbb{R}[a, b], f(x) \leq g(x), a \leq x \leq b, \text{ то } \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

$$(b) \text{ Если } f, g \text{ непрерывны на } [a, b], f(x) \leq g(x), \exists c \in [a, b]: f(c) < g(c), \text{ то } \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$$

$$6. \text{ Если } f(x) \text{ неотрицательна и непрерывна на } [a, b] \text{ и } \int_a^b f(x)dx = 0, \text{ то } f(x) \equiv 0 \text{ на } [a, b]$$

$$7. \text{ Если } f \in \mathbb{R}[a, b], \text{ то } |f| \in \mathbb{R}[a, b]. \text{ Кроме того, } \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

*Доказательство.*

1. Рассмотрим интегральные суммы функций  $f, g, \alpha f, \beta g$  по некоторому размеченному разбиению  $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ :

$$\sigma_{\alpha f + \beta g} = \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^n g(\xi_k) \Delta x_k$$

Переходя к пределу при  $d \rightarrow 0$ , получим требуемое равенство.

2.  $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$  Заметим, что  $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$ . По свойству 1, достаточно доказать, что если  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ , то и  $f^2 \in \mathbb{R}[a, b]$ .

Предположим сначала, что  $\sup\{f(x)\} = M > 0$  и  $m > 0$ . Пусть  $\bar{s}, \underline{s}$  - суммы Дарбу для  $f$  по  $\{x_k\}$ , а  $\bar{s}', \underline{s}'$  - для  $f^2$ .

$$\bar{s}' - \underline{s}' = \sum (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k) \Delta x_k = \sum (M_k^2 - m_k^2) \Delta x_k = \sum \underbrace{(M_k + m_k)(M_k - m_k)}_{\leq 2M} \Delta x_k \leq 2M \underbrace{\sum (M_k - m_k) \Delta x_k}_{\bar{s} - \underline{s}} < \varepsilon$$

при достаточно мелком разбиении, при котором  $\bar{s} - \underline{s} < \frac{\varepsilon}{2M}$ .

Пусть теперь  $M, m$  не обязательно больше нуля. Рассмотрим  $\tilde{f}(x) = f(x) + \lambda$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , что  $\inf\{\tilde{f}(x)\} > 0$ . По предыдущему рассуждению  $\tilde{f}^2$  интегрируема. Но тогда  $\tilde{f}^2(x) = f^2(x) + 2\lambda f(x) + \lambda^2 \Rightarrow f^2(x) = \tilde{f}^2(x) - 2\lambda f(x) - \lambda^2$  интегрируема как линейная комбинация интегрируемых функций.

3. (a) Пусть  $a \leq c \leq d \leq b$ .

Рассмотрим любое разбиение  $\{x_k\}$  на  $[a, b]$ , содержащее точки  $c$  и  $d$ .

$$(\bar{s} - \underline{s})_{[a, b]} = \sum_{c < x_{k-1} \leq x_k < d} (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{\underbrace{[x_{k-1}, x_k] \in [a, b] \setminus (c, d)}_{=\gamma > 0}} (M_k - m_k) \Delta x_k$$

При этом

$$(\bar{s} - \underline{s})_{[c, d]} = (\bar{s} - \underline{s})_{[a, b]} - \gamma \leq (\bar{s} - \underline{s})_{[a, b]} < \varepsilon$$

при достаточно малой мелкости разбиения  $\{x_k\}$ .

- (b) Для любого  $c: a < c < b$  по предыдущему доказательству  $f$  интегрируема на  $[a, c]$  и  $[c, b]$ . Пусть задано размеченное разбиение  $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ ,  $c \in \{x_k\}$ :

$$\sigma_f[a, b] = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{x_k \leq c} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{x_{k-1} \geq c} f(\xi_k) \Delta x_k$$

Переходя к пределу при  $d \rightarrow 0$ , получим требуемое равенство.

4. (a)

$$f(x) \geq 0, a \leq x \leq b \stackrel{?}{\Rightarrow} \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

Любая интегральная сумма:

$$\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n \underbrace{f(\xi_k)}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_k}_{> 0} \geq 0$$

Переходя к пределу при  $d \rightarrow 0$ , получим требуемое равенство.

- (b)  $f \in \underbrace{C[a, b]}_{\text{непрерывные}}$ ,  $f(x) \geq 0$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $\exists c \in [a, b]$ , что  $\underbrace{f(c)}_{= \gamma} > 0$

По теореме о сохранении знака непрерывных функций,  $\exists \delta > 0$ , что  $f(x) \geq \frac{\gamma}{2}$  в  $U_\delta(c)$  (Если  $c = a$  или  $c = b$ , то будем иметь в виду правую или левую окрестность  $c$ ). Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \underbrace{\int_a^{c-\delta} f(x) dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx}_{> \frac{\gamma}{2} 2\delta > 0} + \underbrace{\int_{c+\delta}^b f(x) dx}_{\geq 0} > 0$$

5. (a) Пусть  $f, g \in \mathbb{R}[a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ . Для доказательства воспользуемся свойством 4.а для функции  $\phi(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ .

- (b) Пусть  $f, g \in C[a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\exists c \in [a, b]: f(c) < g(c)$ . Для доказательства воспользуемся свойством 4.б для функции  $\phi(x) = g(x) - f(x) \geq 0$ ,  $\phi(c) > 0$ .

6. Пусть  $f \in C[a, b]$ ,  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ ,  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Для доказательства предположим противное, т.е. пусть

$\exists c \in [a, b]: f(c) > 0$ . Но тогда по свойству 4.б  $\int_a^b f(x) dx > 0$ . Противоречие.

7. Пусть  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ . Для доказательства воспользуемся неравенством  $||a| - |b|| \leq |a - b|$ . В частности,  $|a| - |b| \leq |a - b|$ . Обозначим, как выше, для разбиения  $\{x_k\}$  на  $[a, b]$   $M_k, m_k - \sup, \inf f(x)$  на  $[x_{k-1}, x_k]$ .

$\tilde{M}_k, \tilde{m}_k - \sup, \inf |f(x)|$  на  $[x_{k-1}, x_k]$ . В силу равенства,  $\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]: ||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|$ . Переходя к  $\sup$  этих разностей, получим:

$$\underbrace{\sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{||f(x')| - |f(x'')||\}}_{=\tilde{M}_k - \tilde{m}_k} \leq \underbrace{\sup_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} \{|f(x') - f(x'')|\}}_{=M_k - m_k}$$

Рассмотри разности сумм Дарбу:  $\bar{s}, \underline{s}$  для  $f(x)$  на  $\{x_k\}$ ,  $\bar{s}', \underline{s}'$  для  $|f(x)|$  на  $\{x_k\}$ .

$$\bar{s}' - \underline{s}' = \sum_{k=1}^n (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \bar{s} - \underline{s} < \varepsilon \forall \varepsilon > 0$$

По критерию интегрируемости  $f \exists \{x_k\}: \forall \varepsilon > 0 \exists \{x_k\}$  на  $[a, b]: \bar{s}' - \underline{s}' < \varepsilon \Rightarrow$  по критерию интегрируемости  $|f(x)|$  интегрируема на  $[a, b]$ .

Рассмотрим интегральные суммы по некоторому размеченному разбиению  $(\{y_j\}, \{\xi_j\})$ :

$$|\sigma_f(\{y_j\}, \{\xi_j\})| = \left| \sum_{j=1}^N f(\xi_j) \Delta y_j \right| \leq \sum_{j=1}^N |f(\xi_j) \Delta y_j| = \sigma_{|f|}(\{y_j\}, \{\xi_j\})$$

Переходя к пределу при  $d \rightarrow 0$  в полученном неравенстве, получим требуемое неравенство. □



### Замечания:

1. Обратное утверждение к свойству 7, вообще говоря, неверно. Пример:

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$D(x)$  не интегрируема, так как  $\forall \{x_k\}$  на  $[a, b]$   $\forall \{\xi_k\}$  – рациональные точки и  $\forall \{j_k\}$  – иррациональные точки  $\Rightarrow \sigma_D(\{x_k\}, \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n (-1)\Delta x_k = -(b-a)$ ;  $\sigma_D(\{x_k\}, \{j_k\}) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b-a$ , причем  $\{x_n\}$  может быть любой

мелкости  $\Rightarrow \nexists \int_a^b D(x)dx$ . Однако  $|D(x)| = 1$  на  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b |D(x)|dx = b-a$ .

2. Композиция двух интегрируемых на  $[a, b]$  функций не обязательно интегрируема.

**Теорема 11.** *Первая теорема о среднем для определенного интеграла.*

Пусть  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ ,  $g(x)$  не меняет знак на  $[a, b]$ . Тогда  $\exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$

*Доказательство.* Пусть  $g(x) \geq 0$  на  $[a, b]$ . Так как  $m \leq f(x) \leq M$ , то  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . Тогда по свойству 5

$$\underbrace{\int_a^b mg(x)dx}_{=m \int_a^b g(x)dx} \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \underbrace{\int_a^b Mg(x)dx}_{=M \int_a^b g(x)dx} \quad (\#)$$

Полагая, что  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ , получим  $m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$ , то есть  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ .

Если  $g(x) \equiv 0$ , то имеем в  $(\#)$  все части равные 0, т. е.  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ . Поэтому равенство  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \underbrace{\int_a^b g(x)dx}_{=0}$

верно при любом  $\mu$ .

Если  $f(x) \leq 0$  на  $[a, b]$ , то рассмотрим  $(-g(x)) \geq 0$ . Для нее формула верна:  $\exists \mu, \int_a^b f(x)(-g(x))dx = \mu \int_a^b (-g(x))dx$ .

Вынесем  $(-1)$  и сократим  $\Rightarrow$  ЧТД.  $\square$

### Следствия.

1. Пусть  $f(x) \in C[a, b]$ . Тогда, так как  $m \leq \mu \leq M$ , то по непрерывности  $f(x)$  для  $\forall \mu, m \leq \mu \leq M, \exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = \mu \Rightarrow$  формула среднего значения имеет вид  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$ .

2. Пусть  $g(x) \equiv 1$  на  $[a, b]$ ,  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ . Тогда по теореме 11  $\exists \mu, m \leq \mu \leq M: \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \left( = \mu \int_a^b 1dx \right)$ . Если

в этих условиях  $f \in C[a, b]$ , то  $\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ .

## 1.5 Интеграл с переменным верхним(нижним) пределом

**Определение.** *Интегралом с переменным верхним(нижним) пределом от  $f(x)$  называется функция*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b \quad \left( G(x) := \int_x^b f(t)dt, \quad a \leq x \leq b \right)$$

**Теорема 12.** *Если  $f \in \mathbb{R}[a, b]$ , то  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  непрерывен на  $[a, b]$ .*

*Доказательство.*  $|\Delta F| = |F(x+\Delta x) - F(x)| = \left| \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \leq (|f(t)| \leq Q, a \leq t \leq b) \Delta x$

$Q \int_x^{x+\Delta x} 1dt = Q\Delta x \Rightarrow F(x)$  непрерывен в  $\forall x$ .

Если  $\Delta x < 0$ , то  $|\Delta F| = \left| - \int_{x+\Delta x}^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right|$ . □

**Теорема 13.** Пусть  $f(x) \in \mathbb{R}[a, b]$  и непрерывна в точке  $x_0 \in (a, b)$ . Тогда  $\int_a^x f(t)dt = F(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , и  $F'(x_0) = f(x_0)$ .

*Доказательство.* Из условия непрерывности  $f(x)$  в точке  $x_0$  следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: x - x_0 = \Delta x < \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+\delta} (f(x_0) - \varepsilon)dx &< \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx < \int_{x_0}^{x_0+\delta} (f(x_0) + \varepsilon)dx \\ (f(x_0) - \varepsilon)\delta &< \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx < (f(x_0) + \varepsilon)\delta \\ f(x_0) - \varepsilon &< \frac{\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx}{\delta} < f(x_0) + \varepsilon \\ \delta &= \Delta x \end{aligned}$$

Таким образом,  $f(x_0) - \varepsilon < \frac{\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx}{\delta} < f(x_0) + \varepsilon \xRightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| < \varepsilon \Rightarrow$   
 $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}}_{=F'(x_0)} = f(x_0)$ , т. е.  $\exists F'(x_0) = f(x_0)$ . □

#### Замечание

Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $a$  справа (в точке  $b$  слева), то аналогично можно показать, что  $\exists F'(a+0) = f(a)$  ( $\exists F'(b-0) = f(b)$ ).

**Теорема 14.** Вторая теорема о среднем для определенного интеграла.

Пусть  $f(x) \in \mathbb{R}[a, b]$ , а  $g(x)$  монотонна на  $[a, b]$ . Тогда  $\exists \xi \in (a, b)$ , что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx \quad (\heartsuit)(извините, нет „цветочка”)$$

#### Замечание.

Если  $g(x) \geq 0$  и не возрастает, или  $g(x) \leq 0$  и не убывает, то  $(\heartsuit)$  имеет вид

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx$$

*Доказательство.* Эта теорема без доказательства. □