Понижение порядка.

1. Если в уравнение y входит только начиная с k-й степени, то понижается заменой $z = y^k$
2. Если в уравнение не входит x, то считаем y независимой переменной, а $y' = p(y)$ - искомой функцией

Уравнения, не разрешенные относительно производной

1. Если можно разрешить относительно y, то заменяем $y' = p(y)$
2. Если уравнение однородно относительно y, то заменяем $y' = z(x)y$

Линейные уравнения.

$$y' + a(x)y = b(x) \Rightarrow \begin{cases} y_o' + a(x)y_o = 0 \\ C- > C(x) \end{cases}$$

Иногда можно поменять местами x и y:

$$y = (2x + y^3)y' \Rightarrow ydx - (2x + y^3)dy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2 \Rightarrow x' - \frac{2}{y}x = y^2$$

Уравнение Бернулли.

$$y' + a(x)y = b(x)y^n \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{y^{n-1}} \\ dz = (1-n)y^{-n}dy \\ dy = \frac{1}{1-n}y^n dz \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1-n}y^n z' + a(x)y = b(x)y^n \Rightarrow z' + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x) \Rightarrow PROFIT$$

Уравнение Эйлера.

$$a_0x^n y^(n) + \ldots + a_n y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} x = e^t,\ x > 0 \\ x = -e^t,\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow a_0\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 1) + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Разложение по параметру.

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \mu) \\ y(x_0, \mu) = y_0(\mu) \end{cases} \Rightarrow y(x, \mu) = a_0(x) + a_1(x)\mu + a_2(x)\mu^2 + \ldots \Rightarrow \begin{cases} a_0' = \ldots \\ a_1' = \ldots \\ a_2' = \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Функция Грина.

$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),\ x_0 \le x \le x_1 \\ \alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0,\ \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \end{cases}$$

Обратите внимание, что краевые условия **нулевые**. Если в задаче они ненулевые, нужно сделать замену.
Решение такой краевой задачи можно найти с помощью функции Грина. Для начала найдем нетривиальные решения однородного уравнения y_1, y_2, удовлетворяющие соответственно первому и второму краевому условию.

$$G(x, s) = \begin{cases} a(s)y_1(x)\ (x_0 \le x \le s), \\ b(s)y_2(x)\ (s \le x \le x_1). \end{cases}, \text{ причем a и b такие, что } \begin{cases} by_2(s) = ay_1(s) \\ by_2'(s) = ay_1'(s) + \frac{1}{a_0(s)} \end{cases}$$

Когда a и b найдены, решение выражается следующей формулой:

$$y(x) = \int\limits_{x_0}^{x_1} G(x, s)f(s)ds = \int\limits_{x_0}^{x} b(s)y_2(x)f(s)ds + \int\limits_{x}^{x_1} a(s)y_1(x)f(s)ds$$

Собственные решения
Собственно, так сказать, соответственно, вооот, собственным значением задачи

$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y,\ x_0 \le x \le x_1 \\ \alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0,\ \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \end{cases}$$

называется такое число λ, при котором уравнение имеет решение $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющее краевым условиям. Это решение называется ~~соответственной~~ собственной функцией.