Аннотация

Лекции по линейной алгебре 2 семестра потока бакалавров ВМК МГУ.
Лектор — Полосин Алексей Андреевич.
Составитель — Андрей Тихонов (tiacorpo@gmail.com).

Оглавление

Глава 1

Комплексные числа

1.1 Основные понятия

Определение. *Комплексными числами называются упорядоченые пары вещественных чисел* (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$.

Правила:

1. $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$
2. $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
3. $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$
4. $(a, 0) \equiv a \in \mathbb{R}$

Следствия:

1. Вычитание: $(a, b) - (c, d) = (a - b, c - d)$
2. Деление: $\dfrac{(a, b)}{(c, d)} = \dfrac{(a, b)(c, -d)}{(c, d)(c, -d)} = \dfrac{(ac + bd, bc - ad)}{(c^2 + d^2, 0)}$

Замечание.
$(c, -d)$ называется комплексным сопряженным к (c, d).
Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность вытекают из свойств $\mathbb{R}$.
Замечание.
$(0, 0) = 0$, $(1, 0) = 1$

1.2 Алгебраическая форма записи комплексных чисел

$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.
$i = (0, 1)$ – мнимая единица, $i^2 = -1$.
$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a1 + bi = a + bi$ – алгебраическая форма записи комплексного числа.
$z \in \mathbb{C} = (a, b) = a + bi$, $(a, -b) = \overline{z}$
$a = Re\ z$ – вещественная часть, $b = Im\ z$ – мнимая часть. **Свойства:**

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z\overline{z} = (a^2 + b^2, 0) = |z^2|$; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа
3. $\overline{z} = z \ \Leftrightarrow \ Im\ z = 0$
4. $Re\ z = \frac{z + \overline{z}}{2}$, $Im\ z = \frac{z - \overline{z}}{2}$
5. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$

1.3 Комплексная плоскость

Тут не будет картинки

1.4 Сопряженная матрица

$A = (a_{kl}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$
$A^* = (\overline{a}_{kl}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ – сопряженная к A матрица.

1.5 Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
$a = Re\ z = r\cos\phi$
$b = Im\ z = r\sin\phi$
$\phi = arg\ z$ – аргумент z
$z_1 = z_2 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ arg\ z_1 = arg\ z_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ – тригонометрическая форма записи комплексного числа

Утверждение. $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

$z_1 z_2 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = r_1 r_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_2\cos\phi_1)) =$
$= r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))\ |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

Следствие. $z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$ – формула Муавра

$n = 0 \Rightarrow z \neq 0$

1.6 Решение уравнений $z^n = a$ при натуральных n

Определение. *Решение уравнения $z^n = a$ называется корнем n-й степени из a $(z, a \in \mathbb{C})$*

$a = 0 \Rightarrow |a| = 0 \Rightarrow |z| = 0 \Rightarrow z = 0$, других корней нет.
Пусть теперь $a \neq 0$.

Утверждение. *У уравнения существует ровно n попарно различных корней.*

Доказательство.
$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$
$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = a = \rho(\cos\Theta + i\sin\Theta)$
Сравним модули: $r^n = \rho \Rightarrow r = \rho^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}$
Сравниваем три части:
$n\phi = \Theta + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$
$\phi = \dfrac{\Theta + 2\pi k}{n}$
$\phi_k = \dfrac{\Theta}{n} + \dfrac{2\pi k}{n},\ k = \overline{0, n-1}$ ∎

1.7 Стурктура корней n-й степени из 1

$z^n = a$
Пусть z_0 - любой корень этого уравнения. Тогда для $\varepsilon = z/z_0$ получим:
$z = z_0\varepsilon,\ z^n = z_0^n\varepsilon^n = a\varepsilon^n = a \Rightarrow \varepsilon^n = 1$
Следовательно, $z_k = z_0\varepsilon_k$, где $\varepsilon_k^n = 1$.
$\varepsilon_k^n = 1,\ \varepsilon_0 = 1,\ \varepsilon_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n},\ \varepsilon_k = (\varepsilon_1)^k\ (mod\ n),\ \varepsilon_k\varepsilon_e = \varepsilon_{k+e}\ (mod\ n)$

Глава 2

Линейные пространства над произвольным полем

2.1 Основные понятия

Определение. *Полем называется состоящее из не менее чем двух элементов множество с введенными на нем двумя операциями – "сложением" и "умножением" – обладающими следующими свойствами:*

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists\ 0\colon a + 0 = a$
4. $\forall\ a\ \exists\ (-a)\colon a + (-a) = 0$
5. $ab = ba$
6. $(ab)c = a(bc)$
7. $\exists\ 1\colon 1a = a$
8. $\forall\ a \neq 0\ \exists\ \dfrac{1}{a} = a\dfrac{1}{a} = 1$
9. $(a + b)c = ac + bc$

Замечание. Элементы поля называются числами.

Определение. *Пусть заданы множество $\mathbb{V}$ и поле $\mathbb{P}$. Множество $\mathbb{V}$ называется линейным (векторным) пространством над полем $\mathbb{P}$, если в $\mathbb{V}$ определены две операции: сложение двух элементов в $\mathbb{V}$ (внутренний закон композиции: $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{V}$) и умножение элементов $\mathbb{V}$ на элементы $\mathbb{P}$ (внешний хакон композиции: $\mathbb{V} \times \mathbb{P} \mapsto \mathbb{V}$), удовлетворяющие следующим аксиомам: $\forall\ a, b, c \in \mathbb{V},\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{P}$:*

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists\ \Theta\colon a + \Theta = \Theta$
4. $\forall\ a\ \exists\ (-a)\colon a + (-a) = \Theta$
5. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
6. $1a = a$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Элементы линейного пространства называются векторами.

Определение. *Векторы называются коллинеарными, если они различаются лишь числовыми множителями.*

2.2 Линейная зависимость. Ранг и база системы векторов.

Пусть $\mathbb{V}$- линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Будем рассматривать конечные (т.е. состоящие из конечного числа векторов) системы векторов из $\mathbb{V}$.

Определение. *Линейная зависимость*

Определение. *Базой системы векторовназывается ее линейно независимая подсистема, через которую линейно выражается любой вектор системы.*

Теорема 1. *Любая линейно независимая подсистема данной системы является ее базой, и, наоборот, всякая база является максимальной линейно независимой подсистемой.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ - система векторов, а $a_1, \ldots, a_r$ - кк максимальная линейно независимая подсистема, $r \leq k$. Тогда необходимо доказать, что любой вектор $a_j (j = \overline{1,k})$ линейно выражается через $a_1, \ldots, a_k$. Если $j \leq r$, то Капитан Очевидность отдыхает. Если $j > r$, то подсистема $a_1, \ldots, a_r, a_j$ линейно зависима $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_j$, что $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_r a_r + \alpha_j a_j = \Theta$. Если $\alpha_j = 0$, то $a_1, \ldots, a_r$ линейно зависима - противоречие $\Rightarrow \alpha_j \neq 0$ и $a_j = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_j} a_1 - \ldots - \dfrac{\alpha_r}{\alpha_j} a_r$, ч.т.д.
В обратную сторону: необходимо доказать, что база является максимальной линейно независимой подсистемой.
Из определения базы вытекает, что при добавлении к ней любого вектора системы она становится линейно зависимой, так как вновь добавленый вектор выражается через векторы базы. □

Следствие. Все базы данной системы состоят из одинакового числа векторов. Это число есть число векторов в максимальной линейно независимой подсистеме. Оно называется рангом системы: $rg(a_1, \ldots, a_k)$.

Определение. *Две системы векторов называются эквивалентными, если каждый вектор одной системы линейно выражается через вектора другой системы, и наоборот.*

Следствие. Всякая система эквивалентна своей базе.

Теорема 2. *Если любой вектор $a_1, \ldots, a_k$ выражается через векторы $b_1, \ldots, b_m$, то $rg(a_1, \ldots, a_k) \leq rg(b_1, \ldots, b_m)$*

Доказательство. Заменим системы их базисами и воспользуемся соответствующей теоремой из предыдущего семестра. □

Следствие. 1. Ранги эквивалентных систем совпадают.

2. Базы эквивалентных систем состоят из одинакового числа векторов.

2.3 Базис и его размерность

Определение. *Говорят, что система векторов (не обязательно линейно независимая) порождает линейное пространство $\mathbb{V}$, если любой вектор из $\mathbb{V}$представим в виде линейной комбинации векторов этой системы.*

Определение. *Упорядоченая система векторов называется базисом, если она линейно независима и порождает пространство $\mathbb{V}$.*

Теорема 3. *Любые два базиса состоят из одинакового числа векторов.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из эквивалентности двух базисов и следствия 1 теоремы 2. □

Определение. *Количество векторов в базисе называется размерностью пространства $\mathbb{V}$: $dim\ \mathbb{V}$. Если оно конечно, то ространство называется конечномерным, иначе - бесконечномерным.*

Теорема 4. *В n-мерном пространстве любую линейно независимую систему из k векторов ($0 \leq k < n$) можно дополнить до базиса.*

Доказательство. Пусть векторы $e_1, \ldots, e_k$ построены, $k < n$. Выберем вектор e_{k+1} так, чтобы векторы $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}$ были лнейно независимы. И так далее до получения требуемого результата. □

Свойтсва:
$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$
$y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n$
$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) e_1 + \ldots + (\alpha x_n + \beta y_n) e_n$
Переход к другому базису:
$e = (e_1, \ldots, e_n)$ – строка из векторов
$x_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец координат разложения x по базису e.
$x = e x_e = f x_f = e Q x_f \;\Rightarrow\; x_e = Q x_f$
Перейдем к другому базису: $f = eQ$, Q – матрица перехода.

2.4 Линейные подпространства. Линейная оболочка.

Определение. *Подмножество* $\mathbb{L}$ *линейного пространства* $\mathbb{V}$ *называется поддпространством (линейного пространства* $\mathbb{V}$*), если оно само является линейным пространством относительно операций, введеных в* $\mathbb{V}$.

Определение. *Линейной оболочкой векторов* $a_1, \ldots, a_k$ *называется множество всевозможных линейных комбинаций этих векторов. Обозначение:* $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$. *В этосм случае говорят, что линейная оболочка натянута на векторы* $a_1, \ldots, a_k$.

Утверждение. $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ *– подпространство пространства* $\mathbb{V}$.

Теорема 5. *Две системы векторов эквивалентны тогда и только тогда, когда их линейные оболочки совпадают.*

Доказательство. Пусть a и b - две эквивалентные системы, тогда $\mathcal{L}(b) \subset \mathcal{L}(a)$ и $\mathcal{L}(a) \subset \mathcal{L}(b) \Rightarrow \mathcal{L}(a) = \mathcal{L}(b)$. □

Следствие.

1. Линейная оболочка системы векторов совпадает с линейной оболочкой базы этой системы.
2. $dim\ \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k) = rg(a_1, \ldots, a_k)$

Теорема 6. *Если* $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$, *то* $dim\ \mathbb{W} \leq dim\ \mathbb{V}$, *причем если* $dim\ \mathbb{W} = dim\ \mathbb{V}$, *то* $\mathbb{W} = \mathbb{V}$

Доказательство. Предположим противное. Если $dim\ \mathbb{W} > dim\ \mathbb{V}$, то в $\mathbb{V}$ существует болльше линейно независимых векторов, чем его размерность. Противоречие.
Если $dim\ \mathbb{W} = dim\ \mathbb{V}$, то в качестве базиса $\mathbb{V}$ можно взять базис $\mathbb{W} \Rightarrow \mathbb{V} = \mathbb{W}$. □

2.5 Сумма и пересечение линейных подпространств.

Два способа задания линейного подпространства: $\mathcal{L}()$ и СЛАУ.

Определение. *Суммой подпространств* $\mathbb{L}_1, \ldots, \mathbb{L}_k$ *пространства* $\mathbb{V}$ *называется множество всевозможных векторов вида* $x = x_1, \ldots, x_k$, *где* $x_1 \in \mathbb{L}_1, \ldots, x_k \in \mathbb{L}_k$.
Обозначение: $\mathbb{L}_1 + \ldots + \mathbb{L}_k$, *или* $\bigcup\limits_{j=1}^{k} \mathbb{L}_j$, *или* $\sum\limits_{j=1}^{k} \mathbb{L}_j$.

Определение. *Пересечением подпространств* $\mathbb{L}_1, \ldots, \mathbb{L}_k$ *пространства* $\mathbb{V}$ *называется множество всевозможных векторов, принадлежащих всем этим подпространствам одновременно.*
Обозначение: $\mathbb{L}_1 \cap \ldots \cap \mathbb{L}_k$, *или* $\bigcap\limits_{j=1}^{k} \mathbb{L}_j$.

Теорема 7. *Сумма и пересечение подпространств является подпространством.*

Доказательство. Сумма: очевидно, что сложение м умножение не выводят из пространства.
Пересечение: тоже очевидно. □

Замечание. Сумма подпространств есть наименьшее подространство, содержащее эти подпространства.
Пересечение подпространств есть наибольшее подпространство, содержащееся в этих подпространствах.

Теорема 8. *Сумма подпространств есть линейная оболочка совокупности базисов этих подпространств.*

Доказательство. Пусть e - базис $\mathbb{L}_1$, ..., f - базис $\mathbb{L}_k$, тогда $\mathbb{L}_1 + \ldots + \mathbb{L}_k \in \mathcal{L}(e, \ldots, f)$ и $\mathcal{L}(e, \ldots, f) \in \mathbb{L}_1 + \ldots + \mathbb{L}_k$ □

Следствие. $dim(\mathbb{L}_1 + \ldots + \mathbb{L}_k) = rg(e, \ldots, f)$

Теорема 9. *Для любых двух подпространств* $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ *справедливо равенство:* $dim(\mathbb{L}_1 + \mathbb{L}_2) = dim\ \mathbb{L}_1 + dim\ \mathbb{L}_2 - dim(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2)$

Доказательство. □