Аннотация

Лекции по математическому анализу 2 семестра потока бакалавров ВМК МГУ.
Лектор — Фоменко Татьяна Николаевна.
Составитель — Андрей Тихонов (tiacorpo@gmail.com).

Оглавление

Глава 1

Определенный интеграл

1.1 Основные понятия

Определение. ***Разбиением отрезка*** $[a, b]$ *называется набор* $\{x_k\}_{0\le k\le n} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, *где* $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Определение. ***Диаметром,*** *или* ***мелкостью разбиения*** $\{x_k\}$ *называется число* $d = d(\{x_k\}) = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k\}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определение. ***Размеченным разбиением*** *называется разбиение, в котором зафиксированы точки* $\{\xi_k\}_{1\le k\le n}$, *где* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Определение. *Разбиение* $\{y_m\}$ *называется* ***измельчением разбиения*** $\{x_k\}$, *если* $\{x_k\} \subset \{y_m\}$.

Определение. *Разбиение* $\{z_j\}$ *называется* ***объединением разбиений*** $\{x_k\}$ ***и*** $\{y_m\}$, *если* $\{z_j\} = \{x_k\} \cup \{y_m\}$.

Определение. *Пусть на* $[a, b]$ *задана* $f(x)$. ***Интегральной суммой для*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a, b]$***, составленной по размеченному разбиению*** $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ *называется выражение вида*

$$\sigma_f = \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Определение. *Число* A *наывается* ***пределом интегральных сумм*** $f(x)$ ***на*** $[a, b]$ ***при*** $d \mapsto 0$, *где* d *- мелкость разбиений, если* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любого размеченного разбиения* $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$, *мелкость которого* $d < \delta$, *выполнено неравенство:* $|\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A| < \varepsilon$.

$$A = \lim_{d\mapsto 0} \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$$

Определение. ***Определенным интегралом*** $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ *называется предел интегральных сумм этой функции на этом отрезке при* $d \mapsto 0$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{d\mapsto 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Теорема 1. *Если у* $f(x)$ *существует предел интегральных сумм, то этот предел – единственный.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует 2 предела: $A_1 < A_2,\ A_2 - A_1 = \alpha > 0$. По определению предела, для $\forall\ \varepsilon = \frac{\alpha}{3}\ \exists\ \delta_1, \delta_2$, что:

1. для $\forall\ (\{x_k\}, \{\xi_k\}),\ d < \delta_1 \colon |\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A_1| < \varepsilon$
2. для $\forall\ (\{x_k\}, \{\xi_k\}),\ d < \delta_2 \colon |\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A_2| < \varepsilon$

Тогда для любого размеченного разбиения $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$, у которого $d \le min(\delta_1, \delta_2)$, будет выполнено и 1), и 2) $\Rightarrow$ $\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ попадает одновременно в 2 непересекающихся интервала. Противоречие. □

Теорема 2. *Если существует* $\int\limits_a^b f(x)dx$, *то обязательно* $f(x)$ *ограничена на* $[a, b]$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $f(x)$ неограничена на $[a,b]$. Тогда для любого разбиения $\{x_k\}$ $f(x)$ будет неограничена на хотя бы одном отрезке $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ этого разбиения. Выберем последовательность разбиений $\underset{0\le k\le n}{\{x_k^m\}}$ с мелкостью $d_m = d_m(\{x_k^m\}) < \frac{1}{m}$. В каждом из этих разбиений выберем отрезок $[x_{k_0-1}^m, x_{k_0}^m]$, где $f(x)$ не ограничена. Теперь подберем разметку так, чтобы интегральные суммы $\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})$ были больше m. Выберем ξ_k на всех отрезках $[x_{k-1}^m, x_k^m]$, кроме $[x_{k_0-1}^m, x_{k_0}^m]$, произвольным образом. А на $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ выберем ξ_{k_0} так, чтобы $|f(\xi_{k_0})| > \frac{m+|\sum\limits_{k\neq k_0} f(\xi_k)\Delta x_k)|}{\Delta x_{k_0}^m}$. Тогда вспомним неравенство: $|a+b| \ge |a|-|b|$ ($|a| = |(a+b)-b| \le |a+b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \le |a+b|$, ЧТД).

$|\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})| = |f(\xi_k^m)\Delta x_{k_0}^m + \sum\limits_{k\neq k_0} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m| \ge |f(\xi_k^m)\Delta x_{k_0}^m| - |\sum\limits_{k\neq k_0} f(\xi_k^m)\Delta x_k^m| > m \Rightarrow \underset{d<\frac{1}{m}}{\sigma_f} > m \Rightarrow$ при $m \mapsto \infty$ получим противоречие. □

Определение. *Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, и задано размеченное разбиение $(\{x_k\},\{\xi_k\}) \Rightarrow f(x)$ ограничена на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k] \Rightarrow$ существует $\sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\} = M_k$, $\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\} = m_k$. **Верхней (нижней) интегральной суммой (суммой Дарбу)** $f(x)$ по разбиению $\{x_k\}$ на $[a,b]$ называется выражение:*

$\overline{s} := \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$

$\underline{s} := \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$

Теорема 3. *6 свойств сумм Дарбу.*

1. $\forall\ (\{x_k\},\{\xi_k\})\underline{s} \le \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) \le \overline{s}$
2. *$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ разметка $\{\xi_k\}$ данного разбиения $\{x_k\}$, что $\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) - \underline{s} < \varepsilon$, $\overline{s} - \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) < \varepsilon$*
3. *При ризмельчении разбиения $\underline{s}$ не может уменьшиться, $\overline{s}$ – увеличиться.*
4. *При добавлении к разбиению $\{x_k\}$ q новых точек $\overline{s}$ может уменьшиться не более чем на $(M-m)qd$, d – мелкость $\{x_k\}$. Аналогично для $\underline{s}$.*
5. *Пусть $\{x_k\}$, $\{y_j\}$ – 2 разбиения $[a,b]$. $\overline{s}$, $\underline{s}$ и $\overline{s}'$, $\underline{s}'$ – их суммы Дарбу. Тогда $\underline{s} \le \overline{s}'$, $\overline{s} \ge \underline{s}'$.*
6. *В силу 5), $\exists\ sup\{\underline{s}\} = \underline{I}$ – нижний интеграл Дарбу, $\exists\ inf\{\overline{s}\} = \overline{I}$ – верхний интеграл Дарбу, причем $\underline{s} \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{s}$.*

Доказательство.

1. Для любого разбиения $\{x_k\}$ и любой разметки $\{\xi_k\}$ $m_k \le f(\xi_k) \le M_k \Rightarrow \underline{s} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\}) \le \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k = \overline{s}$
2. По определению sup, $\forall\ \varepsilon > 0$ на каждом $[x_{k-1},x_k]\ \exists\ \xi_k$, что $M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $1 \le k \le n \Rightarrow \overline{s} - \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - f(\xi_k))\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = \varepsilon$. Аналогично для $\underline{s}$.
3. Достаточно доказать, что $\overline{s}$ не увеличивается, а $\underline{s}$ не уменьшается, при добавлении к разбиению $\{x_k\}$ 1 новой точки.

   Пусть новая точка η добавлена между x_{k_0-1} и x_{k_0}. Расмотрим суммы Дарбу.

   $\overline{s} = M_{k_0}\Delta x_{k_0} + \sum\limits_{k\neq k_0} M_k\Delta x_k$

   $\overline{s}' = M_{k_0}^1(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}^2(x_{k_0} - \eta) + \sum\limits_{k\neq k_0} M_k\Delta x_k$

   Сравним эти два выражения. Заметим, что $M_{k_0}\Delta x_{k_0} = M_{k_0}(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}(x_{k_0}-\eta)$. Причём очевидно, что $M_{k_0} \ge \sup\limits_{x\in[x_{k_0-1},\eta]}\{f(x)\} = M_{k_0}^1$ и $M_{k_0} \ge \sup\limits_{x\in[\eta,x_{k_0}]}\{f(x)\} = M_{k_0}^2 \Rightarrow \overline{s} \ge \overline{s}'$. Аналогично для $\underline{s}$.
4. Докажем, что при добавлении 1 новой точки к разбиению $\{x_k\}$ $\overline{s}$ может уменьшиться не более, чем на $(M-n)d$, где $M = \sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$, d – мелкость разбиения $\{x_k\}$.

   Аналогично доказательству 3), пусть добавлена новая точка η между x_{k_0-1} и x_{k_0}. Рассмотрим разность $\overline{s} - \overline{s}'$:

   $\overline{s} - \overline{s}' = M_{k_0}\Delta x_{k_0} - (M_{k_0}^1(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}^2(x_{k_0}-\eta)) = (M_{k_0} - M_{k_0}^1)(\eta - x_{k_0-1}) + (M_{k_0} - M_{k_0}^2)(x_{k_0}-\eta) \le (M-m)((\eta - x_{k_0-1}) + (x_{k_0}-\eta)) = (M-m)\Delta x_{k_0} \le (M-m)d$

5. Пусть даны 2 любых разбиения: $\{x_k\},\ \{y_j\}$; $\{z_m\} = \{x_k\} \cup \{y_j\}$. Пусть $\overline{s}, \underline{s}$ – суммы Дарбу для $\{x_k\}$, $\overline{s}', \underline{s}'$ – для $\{y_j\}$, $\overline{s}'', \underline{s}''$ – для $\{z_m\}$.
   $\underline{s} \le \underline{s}'' \le \overline{s}'' \le \overline{s}'$, $\underline{s}' \le \underline{s}'' \le \overline{s}'' \le \overline{s}$.

6. Докажем, что $\underline{s} \le \underline{I}\ \le\ \overline{I} \le \overline{s}$.
   Предположим противное. $\overline{I} < \underline{I}$, $\underline{I} - \overline{I} = \alpha > 0$. По определению $sup,\ inf$ для $\frac{\alpha}{3}$ $\exists\ \underline{s}$, что $\underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \le \underline{I}$; $\exists\ \overline{s}$, что $\overline{I} \le \overline{s} < \overline{I} + \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \overline{s} < \overline{I} + \frac{\alpha}{3} < \underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \Rightarrow$ противоречие.

□

Определение. *$f(x)$ называется **интегрируемой по Риману на** $[a,b]$, если $\exists \int\limits_a^b f(x)dx$. Также используется запись $f \in \mathbb{R}[a,b]$.*

1.2 2 критерия интегрируемости функции по Риману

Теорема 4. *Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу*
Для того, чтобы $f(x)$, ограниченная на $[a,b]$, была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s}_f - \underline{s}_f < \varepsilon$.

Доказательство. **Необходимость.**
Пусть $\exists\ I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d \mapsto 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow$ по определению lim, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{4}) > 0$, что для любого разбиения $\{x_k\}$ и любой его разметки $\{\xi_k\}$, если $d(\{x_k\}) < \delta \Rightarrow |\sigma_f - I| < \frac{\varepsilon}{4}$.
По 2 свойству из теоремы 3, $\exists\ \{\xi_k'\}$, $\exists\ \{\xi_k''\}$, что при даном разбиении $\{x_k\}$
$\sigma_f' = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k')\Delta x_k,\ \sigma_f'' = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k'')\Delta x_k$, удовлетворяющие неравенствам:
$\sigma_f' - \underline{s} < \frac{\varepsilon}{4},\ \overline{s} - \sigma_f'' < \frac{\varepsilon}{4}$.
При этом выполнены и неравенства:
$|\sigma_f' - I| < \frac{\varepsilon}{4},\ |\sigma_f'' - I| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |\overline{s} - \underline{s}| \le |\overline{s} - \sigma_f''| + |\sigma'' - I| + |I - \sigma'| + |\sigma' - \underline{s}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$ □

Для доказательства достаточности нам потребуется доказать следующее утверждение:

Лемма. *Основная лемма Дарбу.*
$\underline{I} = \lim\limits_{d \mapsto 0}\{\underline{s}\},\ \overline{I} = \lim\limits_{d \mapsto 0}\{\overline{s}\}$

Доказательство. По определению $\overline{I} = inf\{\overline{s}\} \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение $\{x_k\}$, что $\overline{s}$ удовлетворяет неравенству:
$\overline{I} \le \overline{s} < I + \frac{\varepsilon}{2}$
Пусть в $\{x_k\}$ имеется $q+1$ точка. Рассмотрим теперь разбиение $\{y_j\}$ с мелкостью
$d(\{y_j\}) < \frac{\varepsilon}{2(M+m)(q-1)} = \delta(\varepsilon) > 0$
Рассмотрим разбиение $\{z_m\} = \{y_j\} \cup \{x_k\}$. В $\{z_m\}$, по сравнению с $\{y_j\}$, добавлено не более, чем $q-1$ точек. Обозначим верхние суммы Дарбу: $\overline{s}'$ - для $\{y_j\}$, $\overline{s}''$ - для $\{z_m\}$.
$\overline{s}'' \le \overline{s},\ \overline{s}'' < \overline{s}'$
$\overline{s}' - \overline{s}'' \le (M-m)(q-1)d < (M-m)(q-1)\frac{\varepsilon}{2(M-m)(q-1)} = \frac{\varepsilon}{2}$
$I \le \overline{s}'' < I + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \overline{I} \le \overline{s}' < \overline{I} + \varepsilon \Rightarrow \overline{I} = \lim\limits_{d \mapsto 0} \overline{s}$ □

Доказательство. **Достаточность.**
Дано: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s} - \underline{s} < \varepsilon \Rightarrow \underline{s} \le \underline{I} \le \overline{I} \le \overline{s} \Rightarrow \underline{I} = \overline{I} = I$
По основной лемме Дарбу $\lim\limits_{d \mapsto 0} \underline{s} = \lim\limits_{d \mapsto 0} \overline{s} = I$
По свойству 1 теоремы 3, $\underline{s} \le \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) \le \overline{s} \Rightarrow \exists\ \lim\ \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) = I$, т. е. $f \in \mathbb{R}[a,b]$ □

Теорема 5. *Критерий интегрируемости в теминах верхних и нижних интегралов Дарбу*
$f \in \mathbb{R}[a,b]\ \Leftrightarrow\ \underline{I} = \overline{I}$

Доказательство. **Необходимость.**
Пусть $f \in \mathbb{R}[a,b] \Rightarrow$ по теореме 4 $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s} - \underline{s} < \varepsilon\ \Rightarrow\ \underline{I} = \overline{I}$
Достаточность.
Пусть $\underline{I} = \overline{I}$. По основной лемме Дарбу $\lim\limits_{d \mapsto 0} \underline{s} = \lim\limits_{d \mapsto 0} \overline{s} = I$. По теореме 3 $\underline{s} \le \sigma_f \le \overline{s}$. По теореме о двух милиционерах $\lim\limits_{d \mapsto 0} \sigma_f = I$ □

1.3 Классы интегрируемых функций

Теорема 6. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема.*

Доказательство. По теорема Кантора $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, т. е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall\ x_1,\ x_2 \in [a,b]\colon |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Рассмотрим разбиение $\{x_k\}$ на $[a,b]$ с мелкостью $d \leq \delta(\frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда $\overline{s} - \underline{s} = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k$, где $M_k - m_k = \underset{x\in[x_{k-1},x_k]}{sup}\{f(x)\} - \underset{x\in[x_{k-1},x_k]}{inf}\{f(x)\} = \underset{x_1,x_2\in[x_{k-1},x_k]}{sup}\{\underbrace{f(x_1) - f(x_2)}_{\leq\frac{\varepsilon}{b-a}}\} \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \overline{s} - \underline{s} \leq \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a} * (b-a) = \varepsilon$

$\Rightarrow$ по теореме 4 $f \in \mathbb{R}[a,b]$. □

Теорема 7. *Если ограниченная функция $f(x)$ монотонна на $[a,b]$, то она интегрируема.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ не убывает на $[a,b]$. Для $\forall\ \varepsilon > 0$ рассмотрим любое разбиение x_k на $[a,b]$ с мелкостью $d \leq \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$. Тогда $\overline{s} - \underline{s} = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k$.

Так как $f(x)$ не убывает, то $\overline{s} - \underline{s} = \sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\underbrace{\Delta x_k}_{\leq d = \delta(\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(M_n - m_1)^* = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b) - f(a)) = \varepsilon$.

По 1 критерию интегрируемости $f(x)$ интегрируема.

*: действительно, $M_k = m_{k+1}$ □

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***почти везде непрерывной на*** $[a,b]$, *если для $\forall\ \varepsilon > 0$ существует конечный набор интервалов суммарной длины $l < \varepsilon$, покрывающих все точки разрыва $f(x)$.*

Теорема 8. *Если $f(x)$ почти везде непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема.*

Доказательство. Для $\forall\ \varepsilon > 0$ рассмотрим конечный набор интервалов $J_j = (c_j, d_j)$, сумма длин которых $l = \sum\limits_{j=1}^{q}|J_j| < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$, который покрывает все точки разрыва $f(x)$.

Здесь $M = \underset{a\leq x\leq b}{sup}\{f(x)\},\ m = \underset{a\leq x\leq b}{inf}\{f(x)\}$. (можно считать, что J_j не пересекаются)

Тогда $[a,b] \setminus \bigcup\limits_{q}^{j=1} J_j = I$ - объедиение отрезков, $I = \bigcup\limits_{q+1}^{i=1} I_i$.

Рассмотрим $f(x)$ на I_i. Она там непрерывна $\Rightarrow$ по теореме Кантора $f(x)$ равномерно непрерывна на I_i, т. е. для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}) > 0$, что для $\forall\ x', x'' \in I_i,\ |x' - x''| < \delta_i \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Тогда для любого разбиения $\nu_i = \{\nu_{i_k}\}$ отрезка I_i с мелкостью $d_i < \delta_i(\frac{\varepsilon}{2(b-a)})$ для любых двух точек элементарного отрезка разбиения($[\nu_{i_{k-1}}, \nu_{i_k}]$):

$x', x'' \in [\nu_{i_{k-1}}, \nu_{i_k}] \ \Rightarrow\ |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Переходя к sup, получим:

$$M_{i_k}(= \underset{x\in[\nu_{i_{k-1}},\nu_{i_k}]}{sup} f(x)) - m_{i_k}(= \underset{x\in[\nu_{i_{k-1}},\nu_{i_k}]}{inf} f(x)) = \underset{x',x''\in[\nu_{i_{k-1}},\nu_{i_k}]}{sup}|f(x') - f(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad (\#)$$

Возьмем теперь $0 < \delta \leq \underset{1\leq i\leq q+1}{min}\{\delta_i\}$ и рассмотрим на любом отрезке I_i разбиение мелкостью $d_i < \delta \Rightarrow$ для любого $i\colon 1 \leq\leq q+1$ выполняется (#)

Объединим все эти разбиения. Получится некоторое разбиение $\{y_k\}$ отрезка $[a,b]$, в которое войдут замыкания выброшенных интервалов J_j. Пусть $\overline{s}, \underline{s}$ - суммы Дарбу этого разбиения. Тогда рассмотрим их разность: $\overline{s} - \underline{s} =$

$= \sum\limits_{k=1}^{N}(M_k - m_k)\Delta y_k = \sum\limits_{[y_{k-1},y_l]\subset\cup I_i}(M_k - m_k)\Delta y_k + \sum\limits_{[y_{k-1},y_k]\subset\underbrace{[a,b]\setminus\cup I_i}_{=\cup J_j}}(M_k - m_k)\Delta y_k \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\underbrace{\sum\limits_{[y_{k-1},y_l]\subset\cup I_i}\Delta y_k}_{\leq(b-a)} +$

$+(M-m)\underbrace{\sum\limits_{[y_{k-1},y_l]\subset\cup J_j}\Delta y_k}_{<\frac{\varepsilon}{2(M-m)}} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2(M-m)}(M-m) = \varepsilon$ □

Теорема 9. *Верно также следующее утверждение (без доказательства):*
Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, а $\phi(y)$ - непрерывна на $[m;M]$, то $\phi(f(x)) \in \mathbb{R}[a,b]$

Следствие: если $f \in \mathbb{R}[a,b]$, то и $\dfrac{1}{f}$ - тоже. ($f(x) \neq 0$ на $[a,b]$).

1.4 Основные свойства определенных интегралов

Теорема 10. *7 свойств определенных интегралов*

Соглашение: будем считать, что $\int\limits_a^a f(x)dx = 0,\ \int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx\ (a < b)$

1. *Линейность:* $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathbb{R}[a,b]\colon\ \int\limits_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_a^b f(x) + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$

2. *Интегрируемость произведения: если* $f, g \in \mathbb{R}[a,b]$*, то* $fg \in \mathbb{R}[a,b]$

3. *Аддитивность: если* $f \in \mathbb{R}[a,b]$*, то* $f \in \mathbb{R}[c,d]\ \forall\ [c,d] \subset [a,b]$.

   Кроме того, $\forall\ c \in (a,b)\ \int\limits_a^b f(x)df = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

4. (a) *Если* $f \in \mathbb{R}[a,b]$ *и* $f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)df \geq 0$

   (b) *Если* f *непрерывна и неотрицательна на* $[a,b]$*, и существует* $c,\ a \leq c \leq b,\ f(c) > 0$*, то* $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$

5. (a) *Если* $f, g \in \mathbb{R}[a,b],\ f(x) \leq g(x),\ a \leq x \leq b$*, то* $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$

   (b) *Если* f, g *непрерывны на* $[a,b],\ f(x) \leq g(x),\ \exists\ c \in [a,b]\colon f(x) < g(c)$*, то* $\int\limits_a^b f(x)dx < \int\limits_a^b g(x)dx$

6. *Если* $f(x)$ *неотрицательна и непрерывна на* $[a,b]$ *и* $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$*, то* $f(x) \equiv 0$ *на* $[a,b]$

7. *Если* $f \in \mathbb{R}[a,b]$*, то* $|f| \in \mathbb{R}[a,b]$*. Кроме того,* $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$

Доказательство.

1. Рассмотрим интегральные суммы функций $f, g, \alpha f, \beta g$ по некоторому размеченному разбиению $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$:

$$\sigma_{\alpha f + \beta g} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))\Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$$

   Переходя к пределу при $d \mapsto 0$, получим требуемое равенство.

2. $f, g \in \mathbb{R}[a,b]$ Заметим, что $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$. По свойству 1, достаточно доказать, что если $f \in \mathbb{R}[a,b]$, то и $f^2 \in \mathbb{R}[a,b]$.

   Предположим сначала, что $sup\{f(x)\} = M > 0$ и $m > 0$. Пусть $\overline{s}, \underline{s}$ - суммы Дарбу для f по $\{x_k\}$, а $\overline{s}', \underline{s}'$ - для f^2.

$$\overline{s}' - \underline{s}' = \sum (\tilde{M}_k - \tilde{m}_k)\Delta x_k = \sum (M_k^2 - m_k^2)\Delta x_k = \sum \underbrace{(M_k + m_k)}_{\leq 2M}(M_k - m_k)\Delta x_k \leq 2M \underbrace{\sum (M_k - m_k)\Delta x_k}_{\overline{s} - \underline{s}} < \varepsilon$$

   при достаточно мелком разбиении, при котором $\overline{s} - \underline{s} < \frac{\varepsilon}{2M}$.

   Пусть теперь M, m не обязательно больше нуля. Рассмотрим $\tilde{f}(x) = f(x) + \lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, что $inf\{\tilde{f}(x)\} > 0$. По предыдущему рассуждению $\tilde{f}^2$ интегрируема. Но тогда $\tilde{f}^2(x) = f^2(x) + 2\lambda f(x) + \lambda^2 \Rightarrow f^2(x) = \tilde{f}^2(x) - 2\lambda f(x) - \lambda^2$ интегрируема как линейная комбинация интегрируемых функций.

3. (a) Пусть $a \leq c \leq d \leq b$.

   Рассмотрим любое разбиение $\{x_k\}$ на $[a,b]$, содержащее точки c и d.

$$(\overline{s} - \underline{s})_{[a,b]} = \sum_{c < x_{k-1} \leq x_k < d} (M_k - m_k(\Delta x_k + \underbrace{\sum_{[x_{k-1}, x_k] \in [a,b] \setminus (c,d)}}_{= \gamma > 0} (M_k - m_k)\Delta x_k$$

   При этом

$$(\overline{s} - \underline{s})_{[c,d]} = (\overline{s} - \underline{s})_{[a,b]} - \gamma \leq (\overline{s} - \underline{s})_{[a,b]} < \varepsilon$$

   при достаточно малой мелкости разбиения $\{x_k\}$.

(b) Для любого c: $a < c < b$ по предыдущему доказательству f интегрируема на $[a,c]$ и $[c,b]$. Пусть задано размеченное разбиение $(\{x_k\},\{\xi_k\}),\ c\in\{x_k\}$:

$$\sigma_f[a,b]=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{x_k\le c} f(\xi_k)\Delta x_k+\sum_{x_{k-1}\ge c} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Переходя к пределу при $d\mapsto 0$, получим требуемое равенство.

4. (a)

$$f(x)\ge 0,\ a\le x\le b \overset{?}{\Rightarrow} \int\limits_a^b f(x)dx\ge 0$$

Любая интегральная сумма:

$$\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{f(\xi_k)}_{\ge 0}\underbrace{\Delta x_k}_{>0}\ge 0$$

Переходя к пределу при $d\mapsto 0$, получим требуемое равенство.

(b) $f\in \underbrace{C[a,b]}_{\text{непрерывные}}$, $f(x)\ge 0,\ a\le x\le b,\ \exists c\in[a,b]$, что $\underbrace{f(c)}_{=\gamma}>0$

По теореме о сохранении знака непрерывных функций, $\exists\ \delta>0$, что $f(x)\ge\frac{\gamma}{2}$ в $U_\delta(c)$ (Если $c=a$ или $c=b$, то будем иметь в виду правую или левую окрестность c). Тогда

$$\int_a^b=\underbrace{\int_a^{c-\delta} f(x)dx}_{\ge 0}+\underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx}_{>\frac{\gamma}{2}2\delta>0}+\underbrace{\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx}_{\ge 0}>0$$

5. (a) Пусть $f,g\in\mathbb{R}[a,b],\ f(x)\le g(x)\ \forall\ x\in[a,b]$. Для доказательством воспользуемся свойством 4.a для функции $\phi(x)=g(x)-f(x)\ge 0$.

(b) Пусть $f,g\in C[a,b],\ f(x)\le g(x),\ \exists c\in[a,b]\colon f(c)<g(c)$. Для доказательства воспользуемся свойством 4.б для функции $\phi(x)=g(x)-f(x)\ge 0,\ \phi(c)>0$.

6. Пусть $f\in C[a,b],\ f(x)\ge 0\ \forall\ x\in[a,b],\ \int\limits_a^b f(x)dx=0$. Для доказательства предположим противное, т.е. пусть $\exists\ c\in[a,b]\colon f(c)>0$. Но тогда по свойству 4.б $\int\limits_a^b f(x)dx>0$. Противоречие.

7. Пусть $f\in\mathbb{R}[a,b]$. Для доказательства воспользуемся неравенством $||a|-|b||\le|a-b|$. В частности, $|a|-|b|\le|a-b|$. Обозначим, как выше, для разбиения $\{x_k\}$ на $[a,b]$ $M_k,\ m_k$ – $sup,\ inf\ f(x)$ на $[x_{k-1},x_k]$.

$\tilde{M}_k,\ \tilde{m}_k$ – $sup,\ inf\ |f(x)|$ на $[x_{k-1},x_k]$. В силу равенства, $\forall\ x',x''\in[x_{k-1},x_k]\colon ||f(x')|-|f(x'')||\le|f(x')-f(x'')|$. Переходя к sup этих разносткй, получим:

$$\underbrace{\sup_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]}\{||f(x')|-|f(x'')||\}}_{=\tilde{M}_k-\tilde{m}_k}\le\underbrace{\sup_{x',x''\in[x_{k-1},x_k]}\{|f(x')-f(x'')|\}}_{=M_k-m_k}$$

Рассмотри разности сумм Дарбу: $\overline{s},\underline{s}$ – для $f(x)$ на $\{x_k\}$, $\overline{s}',\underline{s}'$ – для $|f(x)|$ на $\{x_k\}$.

$$\overline{s}'-\underline{s}'=\sum_{k=1}^{n}(\tilde{M}_k-\tilde{m}_k)\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\overline{s}-\underline{s}<\varepsilon\ \forall\ \varepsilon>0$$

По критерию интегрируемости $f\ \exists\ \{x_k\}\colon\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \{x_k\}$ на $[a,b]\colon\overline{s}'-\underline{s}'<\varepsilon\Rightarrow$ по критерию интегрируемости $|f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$.

Рассмотрим интегральные суммы по некоторому размеченному разбиению $(\{y_j\},\{\xi_j\})$:

$$|\sigma_f(\{y_j\},\{\xi_j\})|=|\sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\Delta y_j|\le\sum_{j=1}^{N}|f(\xi_j)\Delta y_j|=\sigma_{|f|}(\{y_j\},\{\xi_j\})$$

Переходя к пределу при $d\mapsto 0$ в полученном неравенстве, получим требуемое неравенство.

$\square$

Замечания:

1. Обратное утверждение к свойству 7, вообще говоря, неверно. Пример:

   Рассмотрим функцию Дирихле:
$$D(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   $D(x)$ не интегрируема, так как $\forall\{x_k\}$ на $[a,b]$ $\forall\{\xi_k\}$ – рациональные точки и $\forall\{j_k\}$ – иррациональные точки $\Rightarrow \sigma_D(\{x_k\},\{\xi_k\}) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)\Delta x_k = -(b-a)$; $\sigma_D(\{x_k\},\{j_k\}) = \sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k = b-a$, причем $\{x_n\}$ может быть любой мелкости $\Rightarrow \nexists \int\limits_a^b D(x)dx$. Однако $|D(x)| = 1$ на $[a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b |D(x)|dx = b-a$.

2. Композиция двух интегрируемых на $[a,b]$ функций не обязательно интегируема.

Теорема 11. *Первая теорема о среднем для определенного интеграла.*
Пусть $f \in \mathbb{R}[a,b]$, $g(x)$ *не меняет знак на* $[a,b]$. *Тогда* $\exists\ \mu \in [m,M]\colon \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$

Доказательство. Пусть $g(x) \geq 0$ на $[a,b]$. Так как $m \leq f(x) \leq M$, то $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, $a \leq x \leq b$. Тогда по свойству 5
$$\underbrace{\int\limits_a^b mg(x)dx}_{=m\int\limits_a^b g(x)dx} \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq \underbrace{\int\limits_a^b Mg(x)dx}_{=M\int\limits_a^b g(x)dx} \qquad (\#)$$

Полагая, что $\int\limits_a^b g(x)dx \neq 0$, получим $m \leq \underbrace{\dfrac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}}_{=\mu} \leq M$, то есть $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$.

Если $g(x)dx \equiv 0$, то имеем в $(\#)$ все части равные 0, т. е. $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Поэтому равенство $\int\limits_a^b \underbrace{f(x)g(x)}_{=0}dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$ верно при любом μ.

Если $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то рассмотрим $(-g(x)) \geq 0$. Для нее формула верна: $\exists\ \mu, \int\limits_a^b f(x)(-g(x))dx = \mu\int\limits_a^b(-g(x))dx$. Вынесем (-1) и сократим $\Rightarrow$ ЧТД. $\square$

Следствия.

1. Пусть $f(x) \in C[a,b]$. Тогда, так как $m \leq \mu \leq M$, то по непрерывности $f(x)$ для $\forall\ \mu$, $m \leq \mu \leq M$, $\exists\ \xi \in [a,b]\colon f(\xi) = M \Rightarrow$ формула среднего значения имеет вид $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)dx$.

2. Пусть $g(x) \equiv 1$ на $[a,b]$, $f \in \mathbb{R}[a,b]$. Тогда по теореме 11 $\exists\ \mu$, $m \leq \mu \leq M\colon \int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)\left(= \mu\int\limits_a^b 1dx\right)$. Если в этих условиях $f \in C[a,b]$, то $\exists\ \xi \in [a,b] \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

1.5 Интеграл с переменным верхним(нижним) пределом

Определение. ***Интегралом с переменным верхним(нижним) пределом от*** $f(x)$ *называется функция* $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt,\ a \leq x \leq b$ $\left(G(x) := \int\limits_x^b f(t)dt,\ a \leq x \leq b\right)$

Теорема 12. *Если* $f \in \mathbb{R}[a,b]$, *то* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ *непрерывен на* $[a,b]$.

Доказательство. $|\Delta F| = |F(x+\Delta x) - F(x)| = |\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = |\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt| \leq \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \leq (|f(t)| \leq Q,\ a \leq t \leq b)$ $x-$
$Q\int\limits_x^{x+\Delta x} 1dt = Q\Delta x \Rightarrow F(x)$ непрерывен в $\forall\ x$.

Если $\Delta x < 0$, то $|\Delta F| = |-\int\limits_{x+\Delta x}^{x} f(t)dt| = |\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt|$. □

Теорема 13. *Пусть* $f(x) \in \mathbb{R}[a,b]$ *и непрерывна в точке* $x_0 \in (a,b)$. *Тогда* $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x)$ *дифференцируема в точке* x_0, *и* $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. Из условия непрерывности $f(x)$ в точке x_0 следует, что $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $x - x_0 = \Delta x < \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

$$\int_{x_0}^{x_0+\delta} (f(x_0) - \varepsilon)dx < \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx < \int_{x_0}^{x_0+\delta} (f(x_0) + \varepsilon)dx$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)\delta < \int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx < (f(x_0) + \varepsilon)\delta$$

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{\int_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx}{\delta} < f(x_0) + \varepsilon$$

$$\delta = \Delta x$$

Таким образом, $f(x_0) - \varepsilon < \dfrac{\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta} f(x)dx}{\delta} < f(x_0) + \varepsilon \underset{\Delta x \mapsto 0}{\Longrightarrow} |\dfrac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow$
$\exists\ \underbrace{\lim_{\Delta x \mapsto 0} \dfrac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x}}_{=F'(x_0)} = f(x_0)$, т. е. $\exists\ F'(x_0) = f(x_0)$. □

Замечание
Если $f(x)$ непрерывна в точке a справа (в точке b слева), то аналогично можно показать, что $\exists\ F'(a+0) = f(a)$ $(\exists\ F'(b-0) = f$

Теорема 14. *Вторая теорема о среднем для определенного интеграла.*
Пусть $f(x) \in \mathbb{R}[a,b]$, *а* $g(x)$ *монотонна на* $[a,b]$. *Тогда* $\exists\ \xi \in (a,b)$, *что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx + g(b)\int\limits_\xi^b f(x)dx \qquad (\heartsuit)(\text{извините, нет „цветочка”})$$

Замечание.
Если $g(x) \geq 0$ *и не возрастает, или* $g(x) \leq 0$ *и не убывает, то* $(\heartsuit)$ *имеет вид*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^\xi f(x)dx$$

Доказательство. Эта теорема без доказательства. □