Аннотация

Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии для 1 курса потока бакалавров ВМК МГУ.
Лектор — Леонид Владимирович Крицков.
Составитель — Андрей Тихонов (tiacorpo@gmail.com).
Выражаю благодарность за полные и написанные разборчивым почерком конспекты Валентине Глаголевой и Никите Баруздину.

Оглавление

Часть I

Матрицы и определители

Глава 1

Понятие матрицы

Определение. ***Матрицей размера*** *$m \times n$ называют набор из mn чисел, упорядоченых в прямоугольную таблицу, состоящую из m строк и n столбцов. Эти числа -* ***элементы*** *этой матрицы.*
Записывается это так: $A^{m \times n} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Если m=n, то матрица — ***квадратная****.*
Для матрицы A:
a'_i — i-я строка
a_i — i-й столбец
$A_{m \times 1}$ — ***вектор-столбец***
$A_{1 \times n}$ — ***вектор-строка***

Определение. ***Главная диагональ*** *— совокупность элементов, расположенных в строках и столбцах с одинаковыми номерами.*
Эти элементы — ***диагональные****.*

Определение. *Матрица, в которой все элементы равны нулю, называется* ***нулевой*** *и обозначается $\Theta_{m \times n}$*

1.1 Квадратные матрицы

Квадратные матрицы делят на:

- Верхние треугольные
- Нижние треугольные
- Диагональные
- Скалярные
- Единичные

Определение. ***Верхними треугольными*** *называются квадратные матрицы, в которых для $\forall i > j$ $a_{ij} = 0$, то есть матрицы, в которых все элементы ниже главной диагонали — нулевые:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. ***Нижними треугольными*** *называются квадратные матрицы, в которых для* $\forall i < j$ $a_{ij} = 0$, *то есть матрицы, в которых все элементы выше главной диагонали — нулевые:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. ***Диагональными*** *называются квадратные матрицы, в которых для* $\forall i \neq j$ $a_{ij} = 0$, *то есть матрицы, в которых все элементы, не лежащие на главной диагонали, нулевые:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональные матрицы обозначаются символом Λ, *или* $diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$.

Определение. ***Скалярными*** *называются диагональные матрицы, в которых все диагональные элементы равны:*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение. ***Единичными*** *называются скалярные матрицы, в которых диагональные элементы равны 1:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Единичные матрицы обозначаются символом $I = (e_1, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}$.

1.2 Ступенчатые матрицы

Матрицы любого размера принято делить на верхние и нижние ступенчатые.

Определение. *Признак* ***верхней ступенчатой матрицы****:*
В каждой строке отметим позицию, в которой находится первый ненулевой элемент.
1) Если какая-либо строка нулевая, то все последующие строки тоже нулевые
2) Местоположение первых ненулевых элементов каждой строки таково, что номера столбцов, в которых они располагаются, образуют возрастающую последовательность.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Если в этом определении поменять ролями строки и столбцы, то получится определение ***нижней ступенчатой матрицы****.*

Если в верхней ступенчатой матрице a_{kj_k} (первые ненулевые элементы) таковы, что $j_k = k$, то это ***верхняя трапецевидная матрица****.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3 Блочная (клеточная) структура

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix} = \left|\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right|$$

Определение. *Если при некотором делении матрицы на клетки получилось так, что клетки, стоящие на главной диагонали, являются квадратными матрицами, а клетки, стоящие под главной диагональю - нулевые, то говорят, что эта матрица является* ***(верхней) квазитреугольной****.*
Аналогично определяются ***нижняя квазитреугольная*** *и* ***квазидиагональная*** *матрицы.*

Глава 2

Операции над матрицами

2.1 Равенство матриц

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Определение. *A и B называюся* ***равными****, если $\forall i, j\ a_{ij} = b_{ij}$.*

2.2 Сложение матриц

Определение. *Матрица $C = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется* ***суммой*** *матриц A и B.*

Теорема 1. ***Свойства операции сложения.***
Для любых мартиц одинакового размера выполнено:
1) $A + B = B + A$ ***(коммутативность сложения)***
2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ ***(ассоциативность сложения)***
3) $A + \Theta = A$ ***(нулевая матрица является нейтральным элементом относительно сложения)***
4) $\forall A\ \exists(-A):\ A + (-A) = \Theta$ ***(существование противоположного элемента)***

Доказательство. Справедливость всех этих свойств вытекает непосредственно из определения операции сложения и свойств рациональных чисел. □

Определение. *Матрица $C = (a_{ij} - b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется* ***разностью*** *матриц A и B.*

2.3 Умножение матрицы на число

Определение. *Матрица $(\alpha A) = (\alpha a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется* ***произведением матрицы*** *A* ***на число*** *α. Операция умножения матрицы на число выполнима всегда.*

Теорема 2. ***Свойства операции умножения матрицы на число***
Для любых мартиц соответствующего размера выполнено:
1) $1A = A$
2) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ ***(ассоциативность умножения на число)***
3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ ***(дистрибутивность умножения относительно сложения)***
4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ ***(дистрибутивность сложения относительно умножения)***

Доказательство. Справедливость всех этих свойств вытекает непосредственно из определения операции сложения и свойств рациональных чисел. □

Замечания

- $-A = (-1)A$

- Любая скалярная матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I$

Определение. ***Линейной комбинацией матриц*** *$A_1, \dots, A_k$* ***с коэффициентами*** *$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ называется матрица $B = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i A_i$*

2.4 Умножение матриц

Определение. ***Произведением матриц*** *$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$* ***и*** *$B \in \mathbb{R}^{k\times l}$ называется матрица $C \in \mathbb{R}^{m\times l}$ такая, что $c_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{k} a_{ip}b_{pj}$*

Замечание. Операция умножения определена только в том случае, когда A и B **согласованны**, т.е. $n = k$.
Пусть AB определена. Тогда:

- BA может быть неопределена $(m \neq l)$
- Даже если BA определена, то AB и BA могут быть разного размера.
- Даже если AB и BA одинакового размера $(m = n = k = l)$, результаты умножения могут быть разными. Пример:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\ BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Определение. ***Перестановочными (коммутирующими)*** *называются матрицы A и B такие, что $AB = BA$*

Известно, что для $\forall\ i, j \in \mathbb{R}, ab = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right.$. В случае с матрицами это неверно. Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \Theta$, но $A, B \neq \Theta$.

Определение. *Матрицы A и B такие, что $AB = \Theta$, называются* ***делителями нуля****.*

Теорема 3. ***Свойства операции умножения***
Для любых матриц A, B, C подходящего размера выполнено:
1) $(AB)C = A(BC)$ ***(ассоциативность умножения матриц)***
2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B$
3) $(A + B)C = AC + BC$ ***(Дистрибутивность умножения относительно сложения)***

Доказательство. 1) Если операция в левой части этого равенства определена, то определена операция в правой части равенства и результирующие матрицы правой и левой частей совпадают.
Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k} \Rightarrow AB \in \mathbb{R}^{m\times k}$; $C \in \mathbb{R}^{k\times l}$.
Тогда: $(AB)C \in \mathbb{R}^{m\times l}$, $BC \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $A(BC) \in \mathbb{R}^{m\times l}$, следовательно, размеры правой и левой части совпадают.
Дано: $\{(AB)C\}_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{k} (AB)_{cp}C_{pj} = \sum\limits_{p=1}^{k} (\sum\limits_{q=1}^{n} a_{iq}b_{qp})c_{pj} = \sum\limits_{p=1}^{k}\sum\limits_{q=1}^{n} a_{iq}b_{qp}c_{pj} = \sum\limits_{q=1}^{n}\sum\limits_{p=1}^{k} a_{iq}b_{qp}c_{pj} =$
$= \sum\limits_{q=1}^{n} a_{iq}(\sum\limits_{p=1}^{k} b_{qp}c_{pj}) = \sum\limits_{q=1}^{n} a_{iq}\{BC\}_{qj} = \{A(BC)\}_{ij}$, т.о., для $\forall\ i, j\ \{(AB)C\}_{ij} = \{A(BC)\}_{ij}$, т.е.
$(AB)C = A(BC)$ по определению.
2 и 3 части - аналогично □

Замечание. Большинство формул сокращенного умножения для матриц имеют другой, более сложный, вид.
а) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, но $(A - B)(A + B) = A^2 - BA + AB - B^2$.
б) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, но $(A \pm B)^2 = A^2 \pm AB \pm BA + B^2$.
Однако, эти формулы верны и для матриц, если A и B — перестановочные.

2.5 Транспонирование матриц

Определение. *Матрица B называется транспонированием к матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, если $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и для $\forall\ i, j$ $b_{ij} = a_{ji}$. Это обозначается $B = A^T$.*

Замечание. Если $A^T = A$, то A — **симметрическая**.

Теорема 4. *Для $\forall\ A, B$ подходящих размеров выполнены следующие свойства:*
1) $(A^T)^T = A$
2) $(A+B)^T = A^T + B^T$
3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
4) $(AB)^T = B^T A^T$

Доказательство. 1),2),3) - очевидно, доказательство по определению.
4) Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Тогда $(AB)^T \in \mathbb{R}^{k\times m}$, $B^T \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B^T A^T \in \mathbb{R}^{k\times m}$.
$\{(AB)^T\}_{ij} = \{(AB)\}_{ji} = \sum\limits_{p=1}^{n} A_{jp}B_{pi} = \sum\limits_{p=1}^{n} \{A^T\}_{pj}\{B^T\}_{ip} = \sum\limits_{p=1}^{n} \{B^T\}_{ip}\{A^T\}_{pj} = \{B^T A^T\}_{ij}$
Т.о., для $\forall\ i, j$ $\{(AB)^T\}_{ij} = \{B^T A^T)\}_{ij}$, т.е. $(AB)^T = B^T A^T$ по определению. $\square$

2.6 Некоторые дополнительные особенности операции умножения матриц

1) $Ae_i = a_i$, $e'_i A = a'_i$
2) Пусть $b = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}$, тогда $Ab = A(\beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n) = \beta_1 Ae_1 + \cdots + \beta_n Ae_n = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n$
Произведение матрицы на столбец является линейной комбинацией столбцов этой матрицы.
Аналогично, **произведение матрицы на строку является линейной комбинацией строк этой матрицы.**

3) $AB = A\left[\begin{array}{c:c:c} b_1 & \cdots & b_k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} Ab_1 & \cdots & Ab_k \end{array}\right]$; $BA = \left[\begin{array}{c} b'_1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline b'_l \end{array}\right] A = \left[\begin{array}{c} b'_1 A \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline b'_l A \end{array}\right]$
Столбцы произведения AB являются линейной комбинацией столбцов A.
Строки произведения BA являются линейной комбинацией строк A.
3^0) $AI = A\left[\begin{array}{c:c:c} e_1 & \cdots & e_k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} Ae_1 & \cdots & Ae_k \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} a_1 & \cdots & a_k \end{array}\right] = A$
I является нейтральным элементом относительно операции умножения как справа, так и слева.

Глава 3

Элементарные преобразования матриц. Основной процесс

Элементарные преобразования (ЭП) матриц - преобразование строк или столбцов матрицы.
ЭП строк бывают:
I типа - перестановка 2-х строк матрицы местами
II типа - умножение какой-либо строки матрицы на число, отличное от нуля
III типа - прибавление к какой-либо строке матрицы другой строки этой матрицы, умноженной на любое число
Аналогично для столбцов.

Определение. ***Основной процесс*** *— приведение матрицы к верхнему ступенчатому виду, используя только ЭП строк I и III типа.*

Теорема 5. *(Об основном процессе).*
Любая ненулевая матрица путем элементарных преобразований только строк может быть приведена к верхнему ступенчатому виду.

Доказательство. 1) Так как матрица ненулевая, то есть хотя бы один ненулевой столбец. Пусть k_1 - номер первого ненулевого столбца. Выполним, при необходимости, ЭП I рода так, чтобы элемент в позиции $(1, k)$ был ненулевым. Этот элемент — **«ведущий элемент первого шага»**.
2) Для $\forall\ i > 1$ из i-й строки вычтем первую,умноженную на a_{ik_1} и разделенную на a_{1k_1}. Получим матрицу такого вида:

$$\left[\begin{array}{c:c:c} \Theta & a_{1k_1} & a_{1k_1+1} \ \cdots \ a_{1n} \\ \hdashline \Theta & \Theta & A' \end{array}\right]$$

3) Перейдем к 1 пункту, но будем рассматривать не A, а A'. Так как размер рассматриваемой матрицы каждый раз уменьшается, то этот процесс конечен. □

Теорема 6. *Любое ЭП строк матрицы A может быть описано как умножение её слева на специальным образом подобранную матрицу.*

$$A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} A' = SA$$

Аналогично, для столбцов:

$$A \xrightarrow[\text{столбцов}]{\text{ЭП}} A' = AS$$

Доказательство. ЭП I типа: $A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} A' = \begin{bmatrix} a'_2 \\ a'_1 \\ a'_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ s'_3 \\ \vdots \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} s'_1 A \\ s'_2 A \\ s'_3 A \\ \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} s'_1 = (0,1,0,\ldots) \equiv e'_2 \\ s'_2 = (1,0,0,\ldots) \equiv e'_1 \\ s'_3 = e'_3, \ \ldots \end{array}$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ЭП II типа: $A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} A' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \alpha a'_2 \\ a'_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ s'_3 \\ \vdots \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} s'_1 A \\ s'_2 A \\ s'_3 A \\ \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} s'_1 = (1,0,0,\ldots) \equiv e'_1 \\ s'_2 = (0,\alpha,0,\ldots) \equiv \alpha e'_2 \\ s'_3 = e'_3, \ \ldots \end{array}$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ЭП III типа: $A = \begin{bmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} A' = \begin{bmatrix} a'_1 \\ \alpha a'_1 + a'_2 \\ a'_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ s'_3 \\ \vdots \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} s'_1 A \\ s'_2 A \\ s'_3 A \\ \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} s'_1 = (1,0,0,\ldots) \equiv e'_1 \\ s'_2 = (\alpha,1,0,\ldots) \equiv \alpha e'_1 + e'_2 \\ s'_3 = e'_3, \ \ldots \end{array}$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Т.о., для каждого типа преобразований мы сформировали специальную матрицу, умножение на которую эквивалентно применению этого ЭП; произведение таких матриц эквивалентно последовательному применению нескольких ЭП.

Для столбцов - аналогично. □

Замечание. Применим теорему к единичной матрице $A = I : A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} A' = SA = SI = S$, $A \xrightarrow[\text{столбцов}]{\text{ЭП}} A' = AS = IS = S$

Т.о., чтобы построить матрицу S, соответствующую ЭП, необходимо это ЭП применить к единичной матрице.
S — **матрицы перехода**.

Глава 4

Определители

4.1 Перестановки и их свойства

Определение. ***Перестановкой из множества*** *M называется упорядоченная совокупность чисел из M $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, в которой в разных позициях стоят разные числа ($\forall\ i \neq j\ \alpha_i \neq \alpha_j$)*
$(1, 2, \ldots, n)$ — ***натуральная перестановка***

Теорема 7. *Всего существует $n!$ перестановок из n первых чисел.*

Доказательство. На первое место можно поставить n чисел, на второе — $n-1$ остальных чисел, ..., на последнее место можно поставить одно оставшееся число. Итого вариантов $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ □

Определение. *Если α_i и α_j таковы, что $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$, то говорят, что они образуют* ***инверсию****, иначе —* ***порядок****.*
Количество инверсий в перестановке обзоначается так: $\sigma(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$
$\sigma(1, 2, \cdots, n) = 0$
$\sigma(n, n-1, \cdots, 1) = \frac{n(n-1)}{2}$

Определение. *Будем говорить, что перестановка* ***чётная****, если количество инверсий в ней чётное, и* ***нечётная*** *— в противном случае.*

Определение. *Преобразование, при котором два элемента перестановки меняются местами, называется* ***транспозицией****.*

Теорема 8. *Любая транспозиция в перестановке меняет ее чётность.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:
1) поменялись местами два соседних элемента - очевидно, что количество инверсий изменилось на 1 $\Rightarrow$ чётность изменилась.
2) поменялись местами два несоседних элемента. Тогда перегоним первый элемент ко второму, поменяем их местами и перегоним второй на место первого. Итого $2(j-i-1)+1$ транспозиций соседних элементов $\Rightarrow$ чётность менялась $2(j-i-1)+1$ раз - это нечётное число $\Rightarrow$ чётность изменилась. □

Лемма. *Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - перестановка с S инверсиями. Запишем числа этой перестановки в порядке возрастания. Тогда их индексы в исходной последовательность будут образовывать новую перестановку с тем же количеством (S) инверсий.*

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{столбцов}]{\text{перестановка}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{bmatrix}$$

Доказательство. Рассмотрим два элемента: α_i и α_j, $i < j$. Если в исходной перестановке они образовывали порядок, т. е. $\alpha_i < \alpha_j$, тогда их индексы в новой перестановке тоже будут образовывать порядок, т. к. их взаимное расположение не изменится. Если в исходной перестановке они образовывали инверсию, т. е. $\alpha_i > \alpha_j$, тогда их индексы в новой перестановке тоже будут образовывать инверсию, т. к. их взаимное расположение изменится. Итого для любых двух элементов отношение их индексов в новой перестановке такое же, как отношение самих элементов в исходной $\Rightarrow \sigma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \sigma(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ □

4.2 Понятие определителя n–го порядка

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Определителем n–го порядка называется число, сопоставленное этой матрице по определенному правилу. Обозначение: $|A|$, $\det A$.

Определение. ***Определителем*** *называется алгебраическая сумма произведений элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы A; знак произведения определяется по следующему правилу: если сомножители в нем упорядочить по возрастанию номеров строк, то знак ставится в зависимости от четности перестановки, образованной номерами столбцов. Если она чётная, то знак плюс, иначе — минус.*

$$n = 2 : |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underset{(1,2)}{a_{11}a_{22}} - \underset{(2,1)}{a_{12}a_{21}}$$

$$n = 3 : |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underset{(1,2,3)}{a_{11}a_{22}a_{33}} - \underset{(2,1,3)}{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underset{(1,3,2)}{a_{11}a_{23}a_{32}} + \underset{(2,3,1)}{a_{12}a_{23}a_{31}} + \underset{(3,1,2)}{a_{13}a_{21}a_{32}} - \underset{(3,2,1)}{a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$\det A = \sum\limits_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}$ (*) - $n!$ слагаемых

4.3 Свойства определителя

1. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

   Доказательство. Все остальные слагаемые обязательно содержат нулевые элементы. □

2. Определитель квадратной матрицы не меняется при её транспонировании.

   Доказательство. $\det A^T = \sum\limits_{\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)} (-1)^{\sigma(\beta)} \{A^T\}_{1\beta_1} \{A^T\}_{2\beta_2} \cdots \{A^T\}_{n\beta_n} =$

   $$= \sum_{\beta(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)} (-1)^{\sigma(\beta)} \overbrace{a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \cdots a_{\beta_n n}}^{\text{переупорядочим сомножители}}$$

   $$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{столбцов}]{\text{перестановка}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

   По лемме, $\sigma(\beta) = \sigma(\alpha)$. Значит, у каждого слагаемого одинаковые знаки □

   Замечание. В силу того, что при транспонировании матрицы каждый столбец переводится в соответствующую строку, а строка — в столбец, то во всех свойствах определителя строки и столбцы равноправны, т. е. каждое свойство о строках определителя имеет аналог для столбцов.

3. Если в квадратной матрице есть нулевая строка, то ее определитель равен нулю.

   Доказательство. В сумме (*) в каждое слагаемое обязательно входит элемент из той строки, которая нулевая $\Rightarrow$ все слагаемые равны нулю. □

4. Если все элементы какой-либо строки квадратной матрицы умножить на число α, то определитель также умножится на α.

   Доказательство. Пусть на α умножится i–я строка. В сумме (*) в каждом слагаемом есть элемент из i–й строки $\Rightarrow$ вместо него стоит $\alpha a_{i\alpha_i}$. Из каждого слагаемого можно вынести α $\Rightarrow$ весь определитель умножится на α. $\square$

   Замечание. $|\alpha A| = \alpha^n |A|$, где n — размер матрицы.

5. Если какая-либо строка квадратной матрицы является суммой двух строк, то определитель этой матрицы равен сумме двух определителей, в которых вместо рассматриваемой сроки стоит соответственно 1–я и 2–я слагаемая строка.

   Доказательство. В сумме (*) вместо элемента, соответсвующего выбранной строке, каждый раз стоит сумма двух чисел, поэтому каждое слагаемое в сумме представимо в виде суммв двух произведений. С учетом определения определителя, каждая из двух сумм является определителем соответствующей матрицы. $\square$

6. При перестановке двух строк квадратной матрицы её определитель меняет знак.

   Доказательство. В произведениях четность перестановок номеров столбцов элементов новой матрицы относительно исходной матрицы изменится на противоположную $\Rightarrow$ знак каждого слагаемого в сумме изменится $\Rightarrow$ знак суммы изменится. $\square$

7. Если в квадратной матрице есть две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю.

   Доказательство. Переставим эти две местами, при этом матрица не изменится. По свойству имеем:
   $|A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0$. $\square$

8. Если какая-либо строка квадратной матрицы является линейной комбинацией других строк этой матрицы, то определитель матрицы равен нулю.

   Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что таковой является первая строка.
   $$\begin{vmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 a_2' + \dots + \alpha_n a_n' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_2 a_2' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \alpha_n a_n' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} = \alpha_2 \begin{vmatrix} a_2' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{vmatrix} a_n' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix}$$
   В каждом определителе есть одинаковые строки, следовательно, $|A| = 0$. $\square$

9. Если к какой-либо строке квадратной матрицы прибавить линейную комбинацию других строк этой матрицы, то её определитель не изменится.

   Доказательство. $$\begin{vmatrix} a_1' + \alpha_2 a_2' + \dots + \alpha_n a_n' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 a_2' + \dots + \alpha_n a_n' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix}$$ $\square$

Замечание. Свойства 4 и 5 принято называть свойством линейности определителя относительно выбранной строки.
Свойства 4,6 и 9 показывают, как меняется определитель при элементарных преобразованиях матрицы:

- I типа: определитель меняет знак.

- II типа: определитель умножается на коэффициент.
- III типа: определитель не меняется.

Так как коэффициент α в ЭП II типа отличен от нуля, то изменение определителя при ЭП контролируемо.

$$|A| \xrightarrow{\text{ЭП}} \begin{cases} \text{I тип:} & \alpha|A| \ (\alpha \neq 0) \\ \text{II тип:} & -|A| \\ \text{III тип:} & |A| \end{cases}$$

4.4 Метод Гаусса вычисления определителя

$A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}}$ верхняя треугольная матрица

При всех преобразованиях в этом процессе det меняется контролируемым образом. При этом при вычислении определителя по определению приходится выполнять порядка $n!$ умножений, а методом Гаусса — порядка $\frac{1}{3}n^3$.

4.5 Миноры и алгебраические дополнения

Определение. $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$; $k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq min(m, n)$
Выберем в A произвольные k строк и k столбцов.
Строки $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, столбцы $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$.
На пересечении выбранных строк и столбцов расположены k^2 элементов. Упорядочим их в матрицу. Определитель этой матрицы называется ***(основным) минором k–го порядка, расположенным в выбранных строках и столбцах.***
Обозначается так: $M^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$

Определение. *Пусть теперь A — квадратная. Из нее можно исключить выбранные строки и столбцы целиком. Определитель оставшейся матрицы называется* ***дополнительным минором*** *к минору, построенному на предыдущем этапе.*
Обозначается так: $\tilde{M}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$

Определение. $A^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} = (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\tilde{M}^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$ *называется* ***алгебраическим дополнением к основному минору.***

Теорема 9. *Теорема Лапласа(строчный вариант)*
Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n-1$ и в A выбраны какие-либо k строк $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Тогда $\det A$ *равен сумме всевозможных произведений миноров k–го порядка, расположенных в выбранных строках, на их алгебраические дополнения.*

$$|A| = \sum_{1\leq j_1<\ldots<j_k\leq n} M^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k} A^{i_1\ldots i_k}_{j_1\ldots j_k}$$

Доказательство. На потоке бакалавров теорема идет без доказательства. □

Теорема 10. *Следствие из теоремы Лапласа (разложение определителя по строке/столбцу)*
Строчный вариант:
Пусть в $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ выбрана какая-либо (i–я) строка. Тогда $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A^i_j$
Столбцовый вариант:
Пусть в $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ выбрана какой-либо (j–й) столбец. Тогда $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}A^i_j$

Доказательство. Докажем строчный вариант.
$\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}A^i_j$ (1)

1. Пусть $i = 1$. $\det A = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\tilde{M}_j^1$ (2)

   Каждая часть (2) является алгебраической суммой. Левая часть — в силу определения det, а правая — так как является линейной комбинацией det $n-1$–го порядка.

   Для обоснования (2):

   - Одинаковое количество слагаемых в обоих частях
   - Любое произведение из левой части есть в правой части и наоборот
   - Любое произведение из левой части имеет такой же знак в правой

   Обоснование:

   - Слева $n!$ слагаемых, справа — $n(n-1)! = n!$ слагаемых
   - Слагаемое из левой части:
   $$\underbrace{a_{1\alpha_1}}_{j=\alpha_1}\underbrace{a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}}_{\text{в } M_j^1}$$
     Слагаемое из правой части:
   $$a_{1j}a_{2\beta_2}\dots a_{n\beta_n}$$
     $(j, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — перестановка
   - Рассмотрим слагаемое из правой части при $j = 1$:
   $$a_{11} \quad \underbrace{a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}}_{\text{произведение из } \tilde{M}_1^1} \quad \text{в правой части у него :}(-1)^{\sigma(1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$$
     Рассмотрим слагаемое из правой части с $\forall\ j > 1$:
     $(-1)^{1+j+\sigma(\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$
     В левой части:
     $(-1)^{\sigma(j,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$
     В $(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ есть все числа от 1 до $j-1 \Rightarrow \sigma(j, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (j-1) + \sigma(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$

2. Пусть $i \geq 2$. Введем дополнительную матрицу $\tilde{A}$, которая является матрицей A, в которой поменяли местами 1 и i строки. Выведем разложение (1) с помощью (2):

   $\det A = (-1)^{i-1}\det\tilde{A} = (-1)^{i-1}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{1+j}\tilde{M}_j^i$

□

4.6 Определитель квазитреугольной матрицы

Теорема 11. *Определитель квазитреугольной матрицы равен произведению определителей диагональных клеток.*

Доказательство. Выделим столбцы, которые попадают в первую диагональную клетку. В этих столбцах имеется только один минор, который может быть ненулевым - угловой.
$|A| = |A_1|(-1)^{2(1+\dots+k)}|A_2| = |A_1||A_2|$ □

4.7 Определитель произведения матриц

Теорема 12. *Определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей.*

Доказательство. Воспользуемся вспомогательной матрицей:

$C = \begin{array}{|c|c|} \hline A & \Theta \\ \hline -I & B \\ \hline \end{array}$; $|C| = |A||B|$; $C \xrightarrow[\text{III типа}]{\text{ЭП строк}} \begin{array}{|c|c|} \hline \Theta & AB \\ \hline -I & B \\ \hline \end{array} \Rightarrow |C| = |AB| \Rightarrow |A||B| = |AB|$ □

Глава 5

Обратная матрица

Определение. *Матрица* B *называется* ***обратной к*** A*, если* $AB = BA = I$*. Обозначение:* $B = A^{-1}$

Замечание. Известно, что если A,B - перестановочны, то обе матрицы A и B — квадратные одного размера. Понятие корректности:

1. Существование объекта
2. Однозначная определенность (единственность)

Теорема 13. ***Критерий обратимости.***
Квадратная матрица A *имеет обратную тогда и только тогда, когда* $\det A \neq 0$

Доказательство. $\Rightarrow$. $AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = 1 \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow \begin{cases} \det A \neq 0 \text{ (и } \det A^{-1} \neq 0) \\ \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \end{cases}$ $\Leftarrow$. Алгоритм построения обратной матрицы.

1. Заменим каждый элемент матрицы A на его алгебраическое дополнение: $a_{ij} \to A_{ij}$
2. Транспонируем полученную матрицу
3. Получится матрица $\hat{A} : \hat{A}_{ij} = A^i_j$

   $A\hat{A}_{kk} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} A^k_j = |A|I$

   $A\hat{A}_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A^k_j$

   Лемма. *О фальшивом разложении определителя.*
   В любой квадратной матрице сумма произведений элементов какой-либо строки на соответствующие алгебраические дополнения другой строки равно нулю.

   $\forall\ i \neq j\ \ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0\ (*)$

   Доказательство. Построим дополнительную матрицу, в которой заменим j–ю строку на i–ю. Заметим, что разложение её определителя по j-й строке равно (*). В этой матрице две одинаковых строки $\Rightarrow$ ее определитель равен нулю $\Rightarrow (*) = 0$ $\square$

   По лемме, все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю.

$$A\hat{A} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A|I \Rightarrow \frac{1}{|A|}A\hat{A} = I \Rightarrow \begin{cases} A(\frac{1}{|A|}\hat{A}) = I \\ (\frac{1}{|A|}\hat{A})A = I \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\hat{A}$$

□

Теорема 14. *Если обратная матрица существует, то она определена единственным образом.*

Доказательство. Предположим противное: $\exists\ B_1, B_2,\ B_1 \neq B_2 : \begin{cases} AB_1 = B_1A = I \\ AB_2 = B_2A = I \end{cases}$

$AB_1 = I = AB_2 \ \Rightarrow\ B_1(AB_1) = B_1(AB_2) \ \Rightarrow\ (B_1A)B_1 = (B_1A)B_2 \ \Rightarrow\ IB_1 = IB_2 \ \Rightarrow\ B_1 = B_2$, что противоречит предположению. □

Теорема 15. *Свойства обратной матрицы:*

1. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3. $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}A^{-1}, \forall\ \alpha \neq 0$

4. $(A^{-1})^{-1} = A$

5. $I^{-1} = I$

6. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Замечание. Перечисленные свойства понимаются следующим образом: если левая часть определена, то имеет смысл и правая часть и обе части совпадают.

Доказательство. 1. По теореме о критерии обратимости

2. Очевидно, выводится по определениям

3. Очевидно, выводится по определениям

4. Очевидно, выводится по определениям

5. Очевидно, выводится по определениям

6. Пусть AB обратима $\Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow |A||B| \neq 0 \Rightarrow A, B$ обратимы — правая часть определена.
   Докажем, что матрица $B^{-1}A^{-1}$ является обратной к (AB)
   $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I$
   $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I$

□

Метод Гаусса-Жорданна вычисления обратной матрицы

1. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|A| \neq 0$. Покажем:

   $A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} I$

   $A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}}$ верхний ступенчатый вид

   Если A — квадратная, то верхняя ступенчатая матрица — квадратная $\Rightarrow$ она является треугольной матрицей

   Квадратная $A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}}$ верхняя треугольная матрица

   (a) Смена знака

   (b) Умножение на $\alpha \neq 0$

   (c) Неизменность

   Если $|A| \neq 0$, то и у получившейся верхней треугольной матрицы $\det \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} I$$

   $A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} A' \Longleftrightarrow A' = SA$

   Таким образом, $A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} I \Longleftrightarrow I = S_k \cdots S_1 A$; $I = SA \Rightarrow IA^{-1} = SAA^{-1} \Rightarrow S = A^{-1}$

   Проведем те же ЭП строк и в том же порядке с I: получим матрицу $B = S_k \cdots S_1 I = S = A^{-1}$

   $(A|I) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} (I|A^{-1})$

Часть II

Геометрические векторы. Вещественное линейное пространство

Глава 6

Направленный отрезок и свободный вектор

Определение. ***Направленный отрезок*** *— упорядоченная пара точек на плоскости.*

Определение. ***Длина*** $\vec{AB}$ *- длина отрезка* AB*, если* A *и* B *различны, и число 0 в противном случае.*

Определение. $\vec{AB}$ ***параллелен*** *прямой(плоскости), если* $\left[\begin{array}{l} A = B \\ A \neq B,\ (AB) \parallel \textit{прямой(плоскости)} \end{array}\right.$

Определение. *Направленные отрезки* $\vec{A_1B_1}, \vec{A_2B_2}, \vec{A_3B_3}$ *называются коллинеарными (компланарными), если существует прямая(плоскость), которой они параллельны.*

Замечание. Нулевой направленный отрезок коллинеарен и компланарен любому направленному отрезку.

Определение. *Два ненулевых направленных отрезка* $\vec{A_1B_1}$ *и* $\vec{A_2B_2}$ *называются* ***сонаправленными (противоположно направленными)****, если они коллинеарны и лучи* $[A_1; B_1)$ *и* $[A_2, B_2)$ *сонаправлены (противоположно направлены).*

Определение. *2 направленных отрезка* $\vec{AB}$ *и* $\vec{CD}$ *называются* ***равными****, если*

$$\left[\begin{array}{l} \vec{AB} = \vec{0},\ \vec{CD} = \vec{0} \\ \vec{AB} \neq \vec{0},\ \vec{CD} \neq \vec{0},\ |\vec{AB}| = |\vec{CD}|,\ \vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD} \end{array}\right.$$

Замечание. Можно дать компактное эквивалентное определение: 2 направленных отрезка называются равными, если середины обычных отрезков AD и BC совпадают.

Определение. ***Свободный вектор (просто вектор)*** *— множество всех равных между собой направленных отрезков. Если говорят, что вектор порождается направленным отрезком* $\vec{AB}$*, то пишут* $\bar{a} = \vec{AB}$ *и* $\bar{a} = \{\textit{все направленнык отрезки } \vec{CD} = \vec{AB}\}$*. Все нулевые направленные отрезки называются нулевым вектором и обозначаются* $\bar{0}$.
Для свободных векторов вводятся все термины, связанные с направленными отрезками: длина, параллельность прямой и плоскости, коллинеарность и компланарность, сонаправленность и противоположнонаправленность.

Глава 7

Линейные операции над векторами

7.1 Сложение

Определение. *Суммой $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется $\bar{c}$, определяемый по следующим правилам: (тут рисунок с правилом треугольника)*

Теорема 16. *Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:*

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}, \ \forall\ \bar{a}, \bar{b}$
2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$
3. $\forall\ \bar{a} \colon \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$
4. $\forall\ \bar{a}\ \exists\ (-\bar{a}) \colon \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$

Доказательство. Доказывается построением. □

Определение. ***Разностью*** *$\bar{b}$ и $\bar{a}$ называется $\bar{x} \colon \bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$*

Замечание. Для любых $\bar{a}, \bar{b}$ разность всегда существует и определена единственным образом.

Доказательство.

1. $\bar{x} = \bar{b} + (-\bar{a}) \colon \bar{a} + (\bar{b} + (-\bar{a})) = \bar{b}$
2. Пусть $\bar{c}$ — тоже разность $\bar{b}$ и $\bar{a}$
   $\bar{c} = \bar{c} + \bar{0} = \bar{c} + (\bar{a} + (-\bar{a})) = (\bar{c} + \bar{a}) + (-\bar{a}) = \bar{b} + (-\bar{a})$

□

7.2 Умножение на число

Определение. *Вектор $\bar{b} = \alpha\bar{a}$:*

1. $|\bar{b}| = |\alpha||\bar{a}|$
2. *Если $\bar{b} \neq \bar{0}$, то если $\alpha > 0 \colon \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$, иначе $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$*

Теорема 17. *Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:*

1. $\forall\ \bar{a} \colon 1\bar{a} = \bar{a}$
2. $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a}$
3. $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$
4. $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) + \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$

Доказательство. 1. По определению

2. По определению
3. По геометрическим соображениям
4. По геометрическим соображениям

□

7.3 Векторы как элементы вещественного линейного пространства

Пусть $\mathbb{V} \neq \varnothing$, и на $\mathbb{V}$ задано соответствие:
$\forall\ (a,b) \in \underbrace{\mathbb{V} \times \mathbb{V}}_{\text{Декартово произведение}} \longmapsto c \in \mathbb{V}$ называется алгебраической операцией или внутренним законом композиции.
$c = a * b$
$c = a \cdot b$
$c = a + b$ — абстрактное сложение.
$\forall\ \alpha \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{V} \longmapsto b \in \mathbb{V}$ — внешний закон композиции
$b = \alpha a$ — абстрактное умножение.

Определение. *Множество с введенными на нём внутренним и внешним законом композиции называется* ***вещественным линейным пространством*** $\mathbb{V}$*, если эти операции обладают следующими свойствами:*
$\forall\ a, b, c \in \mathbb{V}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $\exists\ \Theta \in \mathbb{V}:\ a + \Theta = a$
4. $\exists\ (-a) \in \mathbb{V}:\ a + (-a) = \Theta$
5. $1a = a$
6. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
7. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
8. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Определение. $\mathbb{V}$ — ***векторное пространство****, если*

- *элементы* $\mathbb{V}$ *— векторы*
- $\mathbb{V}$ *— вещественное линейное пространство*
- Θ *— нулевой вектор*
- $(-a)$ *— противоположный вектор*

Теорема 18. *Простейшие свойства:*

1. Θ *определен однозначно,* $\forall\ a \in \mathbb{V}\ (-a)$ *определен однозначно*
2. $\forall\ a \in \mathbb{V}$: $0a = \Theta$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha\Theta = \Theta$
3. *из равенства* $\alpha a = \Theta$ *следует :* $\left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ a = \Theta \end{array}\right.$
4. $\forall\ a \in \mathbb{V}:\ -a = (-1)a$

Доказательство. 1. Пусть $\exists\ \Theta_1, \Theta_2 \in \mathbb{V}$

$\forall\ a \in \mathbb{V}\colon a + \Theta_1 = a,\ a + \Theta_2 = a$

$\Theta_1 = \Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_2 + \Theta_1 = \Theta_2$

Пусть $\exists\ a \in \mathbb{V}\colon \exists\ (-a)_1, (-a)_2 \in \mathbb{V}$

$\Theta = a + (-a)_1 = a + (-a)_2$

$(-a)_1 + (a + (-a)_1) = (-a)_1 + (a + (-a)_2)$

$\underbrace{((-a)_1 + a)}_{\Theta} + (-a)_1 = \underbrace{((-a)_1 + a)}_{\Theta} + (-a)_2$

2. $a + 0a = 1a + 0a = (1+0)a = 1a = a$, т. о., $a + \underbrace{0a}_{\Theta} = a$

   $\alpha\Theta = \alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a = \Theta$

3. $\alpha a = \Theta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha \neq 0\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\alpha}(\alpha a) = \dfrac{1}{\alpha}\Theta \Rightarrow a = \Theta \end{array}\right.$

4. $(-1)a + a = (-1)a + 1a = (-1+1)a = 0a = \Theta$; по единственности $(-a)$ $(-1)a = -a$

$\square$

Глава 8

Линейная зависимость

Определение. *Рассмотрим линейную комбинацию элементов:*
$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$
*Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то эта линейная комбинация называется **тривиальной**. Если $\exists\ a_j \neq 0$, то эта линейная комбинация — **нетривиальная**.*

Определение. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{V}$ называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная Θ.*

Определение. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{V}$ называется **линейно независимой**, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна Θ.*

Замечание.

1. $k = 1$

   Система л/з $\Leftrightarrow a_1 = \Theta$

2. Если в системе векторов есть Θ, то эта система л/з.

8.1 Теоремы о линейной зависимости

Теорема 19. *Система из более, чем одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор линейно выражается через остальные (является их линейной комбинацией).*

Доказательство. $\Longleftarrow a_k = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-1} a_{k-1}$
$\underbrace{\beta_1 a_1 + \dots + \beta_{k-1} a_{k-1} + (-1) a_k}_{\text{нетривиальная ЛК}} = \Theta$
$\Longrightarrow \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R},\ a_j \neq 0$
$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_j a_j + \ldots + \alpha_k a_k = \Theta$
$a_j = \sum\limits_{i \neq j} (-\frac{\alpha_i}{\alpha_j}) a_i$ □

Теорема 20. *Если в системе $a_1, \ldots, a_k$ есть л/з подсистема, то и вся система л/з.*

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_s$ $(s < k)$ — л/з $\Rightarrow \exists$ нетривиальная л/к $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_s a_s + 0 a_{s+1} + \dots + 0 a_k = \Theta$
Следствие: если система $a_1, \ldots, a_k$ л/нез, то любая её подсистема л/нез. □

Теорема 21. *Система $a_1, \ldots, a_k$ л/нез тогда и только тогда, когда любой вектор, являющийся их линейной комбинацией, выражается через них единственным образом.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Предположим противное: $\exists\ b \in \mathbb{V}$: $b = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k$; $b = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_k a_k$ $(\exists\ \alpha_j \neq \beta_j)$
$\Rightarrow \Theta = (\alpha_1 - \beta_1) a_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k) a_k,\ \alpha_j - \beta_j \neq 0 \Rightarrow$ система л/з $\Rightarrow$ противоречие
$\Longleftarrow$ Нулевой вектор заведомо является линейной комбинацией этих векторов: $\Theta = 0\alpha_1 + \dots + 0\alpha_k$; это тривиальная комбинация $\Rightarrow$ система л/нез □

8.2 Геометрический смысл линейной зависимости

Теорема 22. *2 геометрических вектора л/з тогда и только тогда, когда они коллинеарны*

Доказательство. $\Longrightarrow \bar{a}_2 = \beta\bar{a}_1 \Rightarrow \bar{a}_1, \bar{a}_2$ — коллинеарны

$\Longleftarrow$ а) $\left[\begin{array}{l}\bar{a}_1 = \bar{0} \Rightarrow \bar{a}_1 = 0\bar{a}_2 \\ \bar{a}_2 = \bar{0} \Rightarrow \bar{a}_2 = 0\bar{a}_1\end{array}\right.$

б) $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \neq \bar{0}$

$\bar{a}_1 \upuparrows \bar{a}_2 \ \Rightarrow \ \dfrac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|} = \dfrac{\bar{a}_2}{|\bar{a}_2|} \Rightarrow \ \bar{a}_1 = \dfrac{|\bar{a}_1|}{|\bar{a}_2|}\bar{a}_2$

$\bar{a}_1 \uparrow\downarrow \bar{a}_2 \ \Rightarrow \ \dfrac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|} = -\dfrac{\bar{a}_2}{|\bar{a}_2|} \Rightarrow \ \bar{a}_1 = -\dfrac{|\bar{a}_1|}{|\bar{a}_2|}\bar{a}_2$ □

Теорема 23. *3 геометрических вектора л/з тогда и только тогда, когда они компланарны*

Доказательство. $\Longrightarrow \bar{a}_1 = \underbrace{\beta_2\bar{a}_2 + \beta_3\bar{a}_3}_{\text{параллелен плоскости, определяемой } \bar{a}_2 \text{ и } \bar{a}_3}$

$\Longleftarrow$ а) один вектор $\bar{0} = \bar{a}_1 \Rightarrow \bar{a}_1 = 0\bar{a}_2 + 0\bar{a}_3$

б) все вектора $\neq \bar{0}$

$\bar{a}_3 = \vec{AD} + \vec{AB} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 \Rightarrow \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ — л/з □

Теорема 24. *4 геометрических вектора всегда л/з*

Доказательство. а) $a_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ — компланарны $\Rightarrow$ они л/з $\Rightarrow$ вся система л/з

б) $a_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ — некомпланарны.

$\bar{a}_4 = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2 + \alpha_3\bar{a}_3 \Rightarrow a_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ — л/з □

Глава 9

Ранг матрицы

9.1 Арифметическое линейное пространство

Определение. *Элементами **арифметического линейного пространства** являются упорядоченные совокупности из n вещественных чисел. Обозначается это так: $\mathbb{R}^n$ Нетрудно убедиться, что арифметические линейные пространства — вещественные линейные пространства* $(\mathbb{R}^{1\times n}, \mathbb{R}^{n\times 1})$

9.2 Понятие ранга

Определение. *Рангом ненулевой матрицы A называется максимальный размер её ненулевых миноров. Нулевая матрица считается матрицей ранга 0. Обозначается так: $rang\ A = rk\ A = rg\ A$*

Определение. *В любой ненулевой матрице ранга r **базисный минор** — любой ненулевой минор порядка r.*

Определение. ***Базисные строки(столбцы)** — строки(столбцы) матрицы, в которых расположен базисный минор.*

9.3 Теорема о базисном миноре

Теорема 25. *(строчный вариант)*
В ненулевой матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

1. *базисные строки л/нез*

2. *любая строка матрицы A линейно выражается через базисные строки*

Замечание. Любая строка матрицы A $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ — элемент арифметического линейного пространства $\mathbb{R}^n$

Доказательство. $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$
Пусть базисный минор — M_r.

1. Предположим противное, т.е. $a'_1, a'_2, \ldots, a'_k$ — л/з $\Rightarrow \exists\ a'_k = \sum\limits_{i\neq k} \alpha_i a'_i \Rightarrow k$–я строка минора линейно выражается через другие строки базового минора $\Rightarrow M_r = 0$

2. Нужно показать: $a'_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i a'_i$

   (a) $1 \leq k \leq r$
   $a'_k = \underbrace{\cdots}_{\text{коэф}=0} +1a'_k + \underbrace{\cdots}_{\text{коэф}=0}$

(b) $k > r$

Окаймим минор:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \cdots & a_{kr} & a_{kj} \end{bmatrix} = 0 \text{ для } \forall\ j$$

Почему: если $1 \le j \le r$, то в матрице 2 одинаковых столбца; если $j > r$ и детерминант не равен нулю, то ранг равен $r + 1$, что противоречит условию.

$0 = \underbrace{a_{1j}A_1 + a_{2j}A_2 + \dots + a_{rj}A_r + a_{kj}M_r}_{\substack{\text{определяется только первыми r} \\ \text{столбцами вспомогательной матрицы,} \\ \text{а потому не зависит от j}}}$

$$a_{kj} = -\frac{A_1}{M_r}a_{1j} - \frac{A_2}{M_r}a_{2j} - \dots - \frac{A_r}{M_r}a_{rj}\ \forall\ j\colon 1 \le j \le n \Rightarrow a'_k = -\frac{A_1}{M_r}a'_1 - \frac{A_2}{M_r}a'_2 - \dots - \frac{A_r}{M_r}a'_r$$

□

9.4 Следствия из теоремы о базисном миноре

Определение. *Матрица называется **вырожденной**, если её* det *равен 0, и **невырожденной** — в противном случае.*

Теорема 26. ***Критерий невырожденности.***
Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда её строки (столбцы) л/нез.

Доказательство. $\Longrightarrow$ Пусть $|A| \neq 0$ и её строки л/з $\Rightarrow$ существует строка, линейно выражающаяся через другие $\Rightarrow |A| = 0$
$\Longleftarrow$ Пусть $|A| = 0 \Rightarrow rgA \le n-1 \Rightarrow$ базисными строками будут не все строки $A \Rightarrow$ существует строка, являющаяся линейной комбинацией остальных $\Rightarrow$ строки A л/з. □

Теорема 27. ***Основная теорема о линейной зависимости.***
Пусть $\mathbb{V}$ — ВЛП; рассмотрим 2 системы векторов: $\{a_1, \dots, a_k\}, \{b_1, \dots, b_m\}$, $m > k$. Тогда если любой b_j линейно выражается через векторы первой системы, то вторая система — л/з.
***Другая формулировка**: Если большая система линейно выражается через меньшую, то большая — л/з.*

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k \\ b_2 &= \beta_1 a_1 + \dots + \beta_k a_k \\ &\vdots \\ b_{m-1} &= \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_k a_k \\ b_m &= \delta_1 a_1 + \dots + \delta_k a_k \end{aligned}$$

$$m \left\{ \underbrace{\begin{matrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_k \\ \beta_1 & \dots & \beta_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_1 & \dots & \gamma_k \\ \delta_1 & \dots & \delta_k \end{matrix}}_{k} \right.$$

$m > k \Rightarrow$ базисных строк не больше $k \Rightarrow$ существует строка (пускай последняя), которая линейно выражается через остальные.
$(\delta_1, \dots, \delta_k) = \lambda_1(\alpha_1, \dots, \alpha_k) + \lambda_2(\beta_1, \dots, \beta_k) + \dots + \lambda_{m-1}(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$
$\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_{m-1} b_{m-1} = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \dots + \delta_k a_k = b_m \Rightarrow$ л/з. □

Теорема 28. ***Другое определение ранга***
Ранг ненулевой матрицы равен максимальному числу её л/нез строк и/или столбцов.

Доказательство. Пусть $rgA = r \geq 1$. Докажем, что r равно максимальному количеству л/нез строк, т.е.:

1. $\exists$ r л/нез строк
2. Любой набор из большего количества строк л/з.

1. r базисных строк л/нез по теореме о базисном миноре
2. Возьмём $k > r$ строк. Все они линейно выражаются через r базисных $\Rightarrow$ в силу основной теоремы о линейной зависимости выбранные k строк л/з.

$\square$

Следствие. $rg\ A^T = rg\ A$

Теорема 29. *Пусть A, B — две матрицы с одинаковым количеством столбцов (строк). Пусть любая строка B линейно выражается через строки A. Тогда $rg\ B \leq rg\ A$*

Доказательство. Пусть $rg\ A = r$ и $rg\ B > r$.
Рассмотрим в B базисные строки (их больше r). Они все линейно выражаются через строки A, а строки A линейно выражаются через r базисных строк $A \Rightarrow$ базисные строки B линейно выражаются через r базисных строк $A \Rightarrow$ базисные строки B л/з, что противоречит теореме о базисном миноре. $\square$

Теорема 30. $rg\ AB \leq min(rg\ A, rg\ B)$

Доказательство. $\begin{cases} \text{Столбцы } AB \text{ являются л/к столбцов } A \\ \text{Строки } AB \text{ являются л/к строк } B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} rg\ AB \leq rg\ A \\ rg\ AB \leq rg\ B \end{cases} \Rightarrow rg\ AB \leq min(rg\ A, rg\ B)$ $\square$

Теорема 31. *Если B — квадратная невырожденная матрица, то* $\begin{cases} rg\ AB = rg\ A \\ rg\ BA = rg\ A \end{cases} \forall\ A$

Доказательство. $rg\ AB \leq rg\ A$
$A = (AB)B^{-1}$
$rg\ [(AB)B^{-1}] \leq rg\ AB$
$rg\ AB = rg\ A$ $\square$

9.5 Метод Гаусса вычисления ранга

Теорема 32. *Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.*

Доказательство. $A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \tilde{A} = SA$
$A \xrightarrow[\text{столбцов}]{\text{ЭП}} \tilde{\tilde{A}} = AS$
Заметим, что S — невырожденная.
I тип: $|S| = -1$
II тип: $|S| = \lambda$
III тип: $|S| = 1$
S — невырожденная, квадратная $\Rightarrow$ ЭП не меняют ранг. $\square$

Метод Гаусса вычисления ранга.
$A \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} B$ — верхняя ступенчатая матрица, $rg\ A = rg\ B$
Ранг верхней ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.

Часть III

Системы линейных алгебраических уравнений

Глава 10

Постановка задачи

Определение. ***Системой линейных алгебраических уравнений(СЛАУ) с*** n ***неизвестными*** $x_1, \dots, x_n$ *будем называть систему:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Определение. ***Решение (1)*** *- это упорядоченная совокупность чисел* $(c_1, \dots, c_n)$*, которые после подстановки* $x_1 = c_1; \dots; x_n = c_n$ *обращают каждое уравнение в тождество.*

Определение. *Говорят, что система (1)* ***совместна****, если у неё есть хотя бы одно решение, и* ***несовместна*** *— в противном случае.*

Определение. *Говорят, что система (1)* ***определена****, если у неё ровно одно решение, и* ***неопределена****, если у неё несколько решений.*

Определение. ***Исследовать и решить систему (1)*** *значит*

1. *Выяснить, совместна ли она*
2. *В случае совместности описать множество всех решений*

$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$ — матрица коэффициентов

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$ — столбец неизвестных

$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b$ — столбец ответов

$Ax = b$ — матричная форма записи

$a_1x_1 + \dots + a_mx_m = b$ — векторная форма записи

Теорема 33. *(О структуре множества решений СЛАУ)*
СЛАУ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение, либо имеет бесконечное количество решений.

Доказательство. Пусть СЛАУ имеет более 1 решения. Значит, существуют как минимум 2 различных столбца $x^{(1)},\ x^{(2)}$, что $Ax^{(1)} = b,\ Ax^{(2)} = b$

$x = \alpha x^{(1)} + (1 - \alpha)x^{(2)},\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Покажем:

1. Этот вектор-столбец всегда является решением
2. При различных α его значения разные

1. $Ax = A(\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}) = \alpha A x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} = \alpha b + (1-\alpha)b = b$
2. $x' = \alpha' x^{(1)} + (1-\alpha')x^{(2)}$
   $x'' = \alpha'' x^{(1)} + (1-\alpha'')x^{(2)}$
   $x'' - x' = (\alpha'' - \alpha')x^{(1)} + (\alpha' - \alpha'')x^{(2)} = \underbrace{(\alpha' - \alpha'')}_{\neq 0}\underbrace{(x^{(2)} - x^{(1)})}_{\neq 0} \neq 0 \Rightarrow x'' \neq x'$

$\square$

Глава 11

Системы с квадратной матрицей

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (1) Пусть $|A| \neq 0$. Тогда существует A^{-1}.

1. Если x — решение (1), то $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$
2. Рассмотрим $x = A^{-1}b$: $A(A^{-1}b) \equiv b$

Теорема 34. *Если $|A| \neq 0$, то система (1) совместна и имеет ровно 1 решение: $x = A^{-1}b$.*

Доказательство. От противного. (Очевидно, на лекциях его не было) □

Теорема 35. *Если $|A| \neq 0$, то единственное решение (1) может быть найдено по следующим формулам (**формулам Крамера**): $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, где $x_i = \dfrac{|A_i|}{|A|}$, A_i получается из A заменой i–го столбца на столбец ответов.*

Доказательство. $x_i = \{A^{-1}b\}_i = \sum\limits_{j=1}^{n}\{A^{-1}\}_{ij}b_j = \dfrac{1}{|A|}\sum\limits_{j=1}^{n}\{\hat{A}\}_{ij}b_j = \dfrac{1}{|A|}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ji}b_j = \dfrac{|A_i|}{|A|}$ □

$|A| = 0 \vee A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \neq n$

Определение. *$Ax = 0$ - **однородная** СЛАУ.*

Однородные СЛАУ всегда совместны.

Определение. *$x = (0, \ldots, 0)^T$ — **тривиальное** решение однородной СЛАУ; $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\exists\ x_i \neq 0$ — **нетривиальное** решение однородной СЛАУ.*

Теорема 36. *Однородная СЛАУ с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $|A| = 0$*

Доказательство. $|A| = 0 \ \Leftrightarrow$ столбцы A л/з $\Leftrightarrow \exists\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},\ \exists\ c_j \neq 0:\ c_1a_1 + \cdots + c_na_n = 0$,
$x = (c_1, \ldots, c_n)^T$ — решение системы. □

Замечание. $Ax = \Theta,\ |A| = 0 \Rightarrow$ существует бесконечное количество решений.

Глава 12

Системы общего вида

$Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

12.1 Системы с верхней трапецевидной матрицей

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1r}x_r+ & \cdots+ & a_{1n}x_n = & b_1, & a_{11} \neq 0 \\
 & a_{22}x_2+ & \cdots+ & a_{2r}x_r+ & \cdots+ & a_{2n}x_n = & b_2, & a_{22} \neq 0 \\
 & & \ddots & & & & \vdots & \\
 & & & a_{rr}x_r+ & \cdots+ & a_{rn}x_n = & b_r, & a_{rr} \neq 0
\end{array}$$

а) Если среди $b_{r+1}, \ldots, b_m$ есть ненулевые, то эта СЛАУ несовместна.

б) Пусть $b_{r+1} = \ldots = b_m = \Theta$, тогда эта СЛАУ равносильна СЛАУ из первых r уравнений; более того, она имеет решение.

Если $r = n$, то

$a_{rr}x_r = b_r \Rightarrow x_r = \dfrac{b_r}{a_{rr}}$

$a_{r-1,r-1}x_{r-1} + a_{r-1,r}x_r = b_{r-1}$

$x_{r-1} = \dfrac{1}{a_{r-1,r-1}}\left(b_{r-1} - \dfrac{a_{r-1,r}}{a_{rr}}b_r\right)$

и т. д. Таким образом, построено решение. Если $r < n$, то перенесём во всех уравнениях слагаемые с $x_{r+1}, \ldots, x_n$ в правую часть. Тогда для $\forall$ наперёд заданных значений $x_{r+1}, \ldots, x_n$ остальные неизвестные определяются однозначно:

$x_1 = f_1\left(x_{r+1}, \ldots, x_n\right)$

$\vdots$

$x_r = f_r\left(x_{r+1}, \ldots, x_n\right)$

Определение. $x_{r+1}, \ldots, x_n$ — ***свободные неизвестные***

Определение. $x_1, \ldots, x_r$ — ***главные неизвестные***

12.2 Системы с верхней ступенчатой матрицей

x_{k_1} - номер первого ненулевого элемента в первой строчке;
...
x_{k_r} - номер первого ненулевого элемента в r-той строчке;
далее действуем аналогично прошлому пункту, только роль $x_1, \ldots, x_r$ играют $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$.

12.3 Случай общей матрицы

$Ax = b \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} (\text{ВСтупФ}) \tilde{A}x = \tilde{b}$

$Ax = b$ и $\tilde{A}x = \tilde{b}$ — эквивалентны, если они совместны. Множество их решений совпадает.
ЭП строк приводит к эквивалентной системе уравнений.
Метод Гаусса исследования и решения СЛАУ — очевидно.

12.4 Критерий совместности и определённости СЛАУ

$(A|b) \xrightarrow[\text{строк}]{\text{ЭП}} \left(\tilde{A}|\tilde{b}\right)$ $(*)$

1. ЭП строк расширенной матрицы приводят к эквивалентной системе.

   Совместна $Ax = b \iff$ совместна (*).

2. ЭП строк не меняют ранги основной и расширенной матриц.

   Таким образом, совместность системы может быть выражена следующим образом.

   Совместность (*) означает, что rg основной матрицы равен количеству ненулевых строк $\tilde{A}$ и равен rg расширенной матрицы $\rightarrow$ нет ненулевых элементов среди $b_{r+1}, \ldots, b_n$.

Теорема 37. *Кронекера-Капелли (критерий совместности)*
$Ax = b$ совместна $\iff$ $rg\ (A|b) = rg\ A$

Доказательство. См. выше □

Теорема 38. *Критерий определённости*
Совместная система $Ax = b$ имеет единственное решение $\iff$ $rg\ A = n$ - количество неизвестных

Доказательство. См. выше □

Следствие: система $Ax = b$ имеет единственное решение $\iff$ $rg\ (A|b) = rg\ A = n$
Рассмотрим $Ax = \Theta$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

а) Всегда совместна

б) Определена $\iff$ $rg\ A = n$

Информации о n и m недостаточно для того, чтобы сделать вывод о количестве решений системы.

Глава 13

Геометрические свойства решений систем

13.1 Однородные системы

$Ax = \Theta$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Теорема 39. *Множество решений однородной системы $Ax = \Theta$ образует линейное пространство арифметических векторов из $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = \Theta\}$*

Доказательство. $\mathbb{N}$ - вещественное линейной пространство. Сложение, умножение на число не выводят из $\mathbb{N}$. Аксиомы:

1. *
2. *
3. $\Theta \in \mathbb{N}$, так как $Ax = \Theta$ всегда имеет тривиальное решение.
4. если $x \in \mathbb{N}$ $Ax = \Theta \Rightarrow A(-x) = \Theta \Rightarrow A(-x) \in \mathbb{N}$
5. *
6. 1*x=x
7. *
8. *

* - аксиома не проверяется, так как множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ этим аксиомам удовлетворяет.
$x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{N} \Longrightarrow\ Ax^{(1)} = \Theta,\ Ax^{(2)} = \Theta \Longrightarrow\ A(x^{(1)} + x^{(2)}) = Ax^{(1)} + Ax^{(2)} = \Theta + \Theta = \Theta \Longrightarrow (x^{(1)} + x^{(2)}) \in \mathbb{N}$
$A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\Theta = \Theta \Longrightarrow (\alpha x) \in \mathbb{N}\ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ □

Замечание. Другими словами, в теореме показано, что множество $\mathbb{N}$ является линейным подпространством в $\mathbb{R}^n$

Пусть $Ax = \Theta$ имеет не только тривиальное решение. ($rg\ A \equiv r < n$)

Определение. *Упорядлченная совокупность $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{R}^n$ называется **фундаментальной системой решений (ФСР)**, если:*

1. $\forall\ j \in [1, k]\ Ae_j = \Theta$
2. *$e_1, \ldots, e_k$ линейно независимы*
3. *$\forall$ решение x: $Ax = \Theta$ линейно выражается через $e_1, \ldots, e_k$: $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k$*

Теорема 40. *Если в $Ax = \Theta$ $r \equiv rg\ A < n$, то для этой системы $\exists$ ФСР, причём она состоит из $(n - r)$ векторов.*

Доказательство. Не ограничивая общности будем считать, что $x_1, \dots, x_r$ – главные неизвестные, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ – свободные неизвестные. $(n - r > 0)$

$x_1 \dots x_r$	x_{r+1}	x_{r+2}	$\dots$	x_n	
$c_{11} \dots c_{1r}$	1	0	$\dots$	0	e_1
$c_{21} \dots c_{2r}$	0	1	$\dots$	0	e_2
$\dots$			$\dots$	0	$\dots$
$c_{k1} \dots c_{kr}$	0	0	$\dots$	1	e_k

$k \equiv n - r$

$\alpha_1 \dots \alpha_r, \alpha_{r+1} \dots \alpha_n$

1. $e_1, \dots, e_k$ линейно независимы, так как матрица в постоенной таблице имеет ранг, равный k.

2. рассмотрим $\forall$ решение $Ax = \Theta$

   По последним неизвестным $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n) x_{r+1}, \dots, x_n$ выполнено "равенство".

   $\alpha_{r+1} e_1 + \ldots + \alpha_n e_k = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv x$

   Покажем, что это равенство верно и по неизвестным $x_1, \dots, x_r$

   $y = x - (\alpha_{r+1} e_1 + \ldots + \alpha_n e_k) = (\dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r})$

   Множество решений - линейное пространство $\Rightarrow y$ – решение $Ax = 0$, в котором все свободные неизвестные равны нулю. Так как главные элементы определяются по свободным однозначно и Θ – решение, то y – тривиальное решение, а $x = \alpha_{r+1} e_1 + \ldots + \alpha_n e_k$

□

Замечание. Конец предыдущего доказательства я не вкурил, поэтому оно может быть неправильным. Уточню на консультации.

Геометрический смысл понятия ФСР

... становится ясен, если рассмотреть однородное решение $Ax = \Theta,\ n = 3$.
$rg\ A = 0, 1, 2, 3$

1. $rg\ A = 3 \Rightarrow$ есть только тривиальное решение

2. $rg\ A = 2 \Rightarrow \exists$ ФСР из $n - r = 1$ вектора $e_1 \colon e_1 \neq \Theta,\ e_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$; общее решение имеет вид $x = \alpha_1 e_1,\ \forall\ \alpha_1 \in \mathbb{R}$ — это уравнение прямой, проходящей через начало координат.

3. $rg\ A = 1 \Rightarrow \exists$ ФСР из $n - r = 2$ векторов e_1, e_2 – линейно независимы, т.е. компланарны; общее решение $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$, это уравнение плоскости, проходящей через начало координат.

4. $rg\ A = 0 \Rightarrow \Theta x = \Theta \iff$ множество решений – $\mathbb{R}^3$, т. е. все пространство.

13.2 Неоднородные системы

$Ax = b,\ A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \neq \Theta$, система совместна. Множество решений $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{R}^m | Ax = b\}$ не образует линейное пространство:
$x^{(1)}, x^{(2)} \colon Ax^{(1)} = b,\ Ax^{(2)} = b \Longrightarrow A(x^{(1)} + x^{(2)}) = Ax^{(1)} + Ax^{(2)} = b + b = 2b \neq b$

Теорема 41. $\mathbb{M} = \mathbb{N} + x_\star$ *— множество решений неоднородной СЛАУ;* $\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = \Theta\}$*;* $Ax_\star = b$

Доказательство. $x_\star + \mathbb{N} \subset \mathbb{M} \colon \forall\ x \in\ x_\star + \mathbb{N} \colon x_\star + \dot{x},\ A\dot{x} = \Theta,\ Ax = A(x_\star + \dot{x}) = Ax_\star + A\dot{x} = b + \Theta = b \implies x \in \mathbb{N}$
$M \subset x_\star + \mathbb{N} \colon \forall\ x \in \mathbb{M} \colon Ax = b \colon x = x_\star + (x - x_\star),\ A(x - x_\star) = Ax - Ax_\star = b - b = \Theta \Longrightarrow x - x_\star \in \mathbb{N}$ □

ФСР для неоднородной системы $Ax = b,\ b \neq \Theta$ вводить не имеет смысла.
Однако для описания множества $\{x|Ax = b\}$ можно использовать ФСР однородной системы $\{x|Ax = \Theta\}$
$\mathbb{M} = \mathbb{N} + x_\star \implies x = x_\star + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k;\ x$ – частное решение $Ax = b;\ \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_k e_k$ – линейная комбинация ФСР $Ax = \Theta$.

Часть IV

Остальные части выложены в группе в виде сканов Валиных лекций