Аннотация

Лекции по математическому анализу 2 семестра потока бакалавров ВМК МГУ.
Лектор — Фоменко Татьяна Николаевна.
Составитель — Андрей Тихонов (tiacorpo@gmail.com).

Оглавление

Глава 1

Определенный интеграл

1.1 Основные понятия

Определение. ***Разбиением отрезка*** $[a;b]$ *называется набор* $\underset{0\leq k\leq n}{\{x_k\}} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$*, где* $x_0 = a$*,* $x_n = b$*,* $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.

Определение. ***Диаметром,*** *или* ***мелкостью разбиения*** $\{x_k\}$ *называется число* $d = d(\{x_k\}) = \underset{1\leq k\leq n}{max}\{\Delta x_k\}$*,* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определение. ***Размеченным разбиением*** *называется разбиение, в котором зафиксированы точки* $\underset{1\leq k\leq n}{\{\xi_k\}}$*, где* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Определение. *Разбиение* $\{y_m\}$ *называется* ***измельчением разбиения*** $\{x_k\}$*, если* $\{x_k\} \subset \{y_m\}$.

Определение. *Разбиение* $\{z_j\}$ *называется* ***объединением разбиений*** $\{x_k\}$ ***и*** $\{y_m\}$*, если* $\{z_j\} = \{x_k\} \cup \{y_m\}$.

Определение. *Пусть на* $[a;b]$ *задана* $f(x)$*.* ***Интегральной суммой для*** $f(x)$ ***на отрезке*** $[a;b]$***, составленной по размеченному разбиению*** $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$ *называется выражение вида*

$$\sigma_f = \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Определение. *Число* A *наывается* ***пределом интегральных сумм*** $f(x)$ ***на*** $[a;b]$ ***при*** $d \mapsto 0$*, где* d *- мелкость разбиений, если* $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\epsilon) > 0$*, что для любого размеченного разбиения* $(\{x_k\}, \{\xi_k\})$*, мелкость которого* $d < \delta$*, выполнено неравенство:* $|\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A| < \epsilon$.

$$A = \lim_{d\mapsto 0} \sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\})$$

Определение. ***Определенным интегралом*** $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *называется предел интегральных сумм этой функции на этом отрезке при* $d \mapsto 0$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx := \lim_{d\mapsto 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Теорема 1. *Если у* $f(x)$ *существует предел интегральных сумм, то этот предел – единственный.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует 2 предела: $A_1 < A_2,\ A_2 - A_1 = \alpha > 0$. По определению предела, для $\forall\ \epsilon = \frac{\alpha}{3}\ \exists\ \delta_1, \delta_2$, что:

1. для $\forall\ (\{x_k\}, \{\xi_k\}),\ d < \delta_1 \colon |\sigma_f(\{x_k\}, \{\xi_k\}) - A_1| < \epsilon$

2. для $\forall$ $(\{x_k\},\{\xi_k\}),\ d<\delta_2\colon |\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})-A_2|<\epsilon$

Тогда для любого размеченного разбиения $(\{x_k\},\{\xi_k\})$, у которого $d\le min(\delta_1,\delta_2)$, будет выполнено и 1), и 2) $\Rightarrow \sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})$ попадает одновременно в 2 непересекающихся интервала. Противоречие. $\square$

Теорема 2. *Если существует $\int\limits_a^b f(x)dx$, то обязательно $f(x)$ ограничена на $[a;b]$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $f(x)$ неограничена на $[a;b]$. Тогда для любого разбиения $[a;b]$ $\{x_k\}$ $f(x)$ будет неограничена на хотя бы одном отрезке $[x_{k_0-1},x_{k_0}]$ этого разбиения. Выберем последовательность разбиений $\underset{0\le k\le n}{\{x_k^m\}}$ с мелкостью $d_m=d_m(\{x_k^m\})<\frac{1}{m}$. В каждом из этих разбиений выберем отрезок $[x_{k_0-1}^m,x_{k_0}^m]$, где $f(x)$ не ограничена. Теперь подберем разметку так, чтобы интегральные суммы $\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})$ были больше m. Выберем ξ_k на всех отрезках $[x_{k-1}^m,x_k^m]$, кроме $[x_{k_0-1}^m,x_{k_0}^m]$, произвольным образом. А на $[x_{k_0-1},x_{k_0}]$ выберем ξ_{k_0} так, чтобы $|f(\xi_{k_0})|>\frac{m+|\sum\limits_{k\ne k_0}f(\xi_k)\Delta x_k)|}{\Delta x_{k_0}^m}$. Тогда вспомним неравенство: $|a+b|\ge|a|-|b|$ $(|a|=|(a+b)-b|\le|a+b|+|b|\Rightarrow|a|-|b|\le|a+b|$, ЧТД).
$|\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})|=|f(\xi_k^m)x_{k_0}^m+\sum\limits_{k\ne k_0}f(\xi_k^m)\Delta x_k^m|\ge|f(\xi_k^m)x_{k_0}^m|-|\sum\limits_{k\ne k_0}f(\xi_k^m)\Delta x_k^m|>m\Rightarrow \underset{d<\frac{1}{m}}{\sigma_f}>m\Rightarrow$ при $m\mapsto\infty$ получим противоречие. $\square$

Определение. *Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, и задано размеченное разбиение $(\{x_k\},\{\xi_k\})\Rightarrow f(x)$ ограничена на каждом отрезке $[x_{k-1},x_k]\Rightarrow$ существует $\underset{x\in[x_{k-1},x_k]}{sup}\{f(x)\}=M_k$, $\underset{x\in[x_{k-1},x_k]}{inf}\{f(x)\}=m_k$.* ***Верхней (нижней) интегральной суммой (суммой Дарбу)*** *$f(x)$ по разбиению $\{x_k\}$ на $[a;b]$ называется выражение:*
$\overline{s}:=\sum\limits_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k$
$\underline{s}:=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k$

Теорема 3. *6 свойств сумм Дарбу.*

1. $\forall$ $(\{x_k\},\{\xi_k\})\underline{s}\le\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})\le\overline{s}$
2. $\forall\ \epsilon>0\ \exists$ *разметка* $\{\xi_k\}$ *данного разбиения* $\{x_k\}$, *что* $\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})-\underline{s}<\epsilon$, $\overline{s}-\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})<\epsilon$
3. *При ризмельчении разбиения $\underline{s}$ не может уменьшиться, $\overline{s}$ – увеличиться.*
4. *При добавлении к разбиению $\{x_k\}$ q новых точек $\overline{s}$ может уменьшиться не более чем на $(M-m)qd$, d – мелкость $\{x_k\}$. Аналогично для $\underline{s}$.*
5. *Пусть $\{x_k\}$, $\{y_j\}$ – 2 разбиения $[a;b]$. $\overline{s}$, $\underline{s}$ и $\overline{s}'$, $\underline{s}'$ – их суммы Дарбу. Тогда $\underline{s}\le\overline{s}'$, $\overline{s}\ge\underline{s}'$.*
6. *В силу 5), $\exists$ $sup\{\underline{s}\}=\underline{I}$ – нижний интеграл Дарбу, $\exists$ $inf\{\overline{s}\}=\overline{I}$ – верхний интеграл Дарбу, причем $\underline{s}\le\underline{I}\ \le\ \overline{I}\le\overline{s}$.*

Доказательство.

1. Для любого разбиения $\{x_k\}$ и любой разметки $\{\xi_k\}$ $m_k\le f(\xi_k)\le M_k\Rightarrow\underline{s}=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k\le\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sigma_f(\{x_k\},\{\xi_k\})\le\sum\limits_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k=\overline{s}$
2. По определению sup, $\forall\ \epsilon>0$ на каждом $[x_{k-1},x_k]\ \exists\,\xi_k$, что $M_k-f(\xi_k)<\frac{\epsilon}{b-a}$, $1\le k\le n\Rightarrow\overline{s}-\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(M_k-f(\xi_k))\Delta x_k<\frac{\epsilon}{b-a}\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta x_k=\epsilon$. Аналогично для $\underline{s}$.
3. Достаточно доказать, что $\overline{s}$ не увеличивается, а $\underline{s}$ не уменьшается, при добавлении к разбиению $\{x_k\}$ 1 новой точки.

   Пусть новая точка η добавлена между x_{k_0-1} и x_{k_0}. Расмотрим суммы Дарбу.

$\overline{s} = M_{k_0}\Delta x_{k_0} + \sum\limits_{k\neq k_0} M_k \Delta x_k$

$\overline{s}' = M^1_{k_0}(\eta - x_{k_0-1}) + M^2_{k_0}(x_{k_0} - \eta) + \sum\limits_{k\neq k_0} M_k\Delta x_k$

Сравним эти два выражения. Заметим, что $M_{k_0}\Delta x_{k_0} = M_{k_0}(\eta - x_{k_0-1}) + M_{k_0}(x_{k_0} - \eta)$. Причём очевидно, что $M_{k_0} \geq \underset{x\in[x_{k_0-1};\eta]}{sup}\{f(x)\} = M^1_{k_0}$ и $M_{k_0} \geq \underset{x\in[\eta;x_{k_0}]}{sup}\{f(x)\} = M^2_{k_0} \Rightarrow \overline{s} \geq \overline{s}'$. Аналогично для $\underline{s}$.

4. Докажем, что при добавлении 1 новой точки к разбиению $\{x_k\}$ $\overline{s}$ может уменьшиться не более, чем на $(M - n)d$, где $M = \underset{x\in[a;b]}{sup}\{f(x)\},\ m = \underset{x\in[a;b]}{inf}\{f(x)\},\ d$ – мелкость разбиения $\{x_k\}$.

   Аналогично доказательству 3), пусть добавлена новая точка η между x_{k_0-1} и x_{k_0}. Рассмотрим разность $\overline{s} - \overline{s}'$:

   $\overline{s} - \overline{s}' = M_{k_0}\Delta x_{k_0} - (M^1_{k_0}(\eta - x_{k_0-1}) + M^2_{k_0}(x_{k_0} - \eta)) = (M_{k_0} - M^1_{k_0})(\eta - x_{k_0-1}) + (M_{k_0} - M^2_{k_0})(x_{k_0} - \eta) \leq (M - m)((\eta - x_{k_0-1}) + (x_{k_0} - \eta)) = (M - m)\Delta x_{k_0} \leq (M - m)d$

5. Пусть даны 2 любых разбиения: $\{x_k\},\ \{y_j\};\ \{z_m\} = \{x_k\} \cup \{y_j\}$. Пусть $\overline{s}, \underline{s}$ – суммы Дарбу для $\{x_k\}$, $\overline{s}', \underline{s}'$ – для $\{y_j\}$, $\overline{s}'', \underline{s}''$ – для $\{z_m\}$.

   $\underline{s} \leq \underline{s}'' \leq \overline{s}'' \leq \overline{s}'$, $\underline{s}' \leq \underline{s}'' \leq \overline{s}'' \leq \overline{s}$.

6. Докажем, что $\underline{s} \leq \underline{I}\ \leq\ \overline{I} \leq \overline{s}$.

   Предположим противное. $\overline{I} < \underline{I},\ \underline{I} - \overline{I} = \alpha > 0$. По определению $sup,\ inf$ для $\frac{\alpha}{3}$ $\exists\ \underline{s}$, что $\underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \leq \underline{I}$; $\exists\ \overline{s}$, что $\overline{I} \leq \overline{s} < \overline{I} + \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \overline{s} < \overline{I} + \frac{\alpha}{3} < \underline{I} - \frac{\alpha}{3} < \underline{s} \Rightarrow$ противоречие.

□

Определение. *$f(x)$ называется* ***интегрируемой по Риману на*** *$[a;b]$, если $\exists \int\limits_a^b f(x)dx$. Также используется запись $f \in R[a;b]$.*

1.2 2 критерия интегрируемости функции по Риману.

Теорема 4. *Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу.*
Для того, чтобы $f(x)$, ограниченная на $[a;b]$, была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \{x_k\}$, что $\overline{s}_f - \underline{s}_f < \epsilon$.

Доказательство. **Необходимость.**
Пусть $\exists\ I = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d\mapsto 0}$ □