Урок 5

1) Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)(6-\lambda) + 2\cdot 6 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda-6)+12=0$$

$$\lambda^2+\lambda-6\lambda-6+12=0 \Rightarrow \lambda^2-5\lambda+6=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$

$\lambda_1=2$: $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x_1-6x_2 \\ 2x_1+6x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x_1-6x_2=0 \\ 2x_1+4x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1=-2x_2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2a \\ a \end{pmatrix},\ a\in R$$

$\lambda_2=3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1-6x_2=3x_1 \\ 2x_1+6x_2=3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1-6x_2=0 \\ 2x_1+3x_2=0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2$$

$$x = \begin{pmatrix} -3b \\ 2b \end{pmatrix},\ b\in R$$

$$\lambda = 2;3;\quad x = \begin{pmatrix} -2a \\ a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3b \\ 2b \end{pmatrix},\ a,b\in R$$

2) Дан оператор поворота на $180°$, заданной матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Показать, что любой вектор является для него собственным.

Решение:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1=\lambda x_1 \\ -x_2=\lambda x_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Для оператора A любой вектор собственный.
(т.к. изначально $x=(x_1, x_2)$ выбран произвольно).

3) Пусть линейной оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 1 = \lambda \\ -1 + 3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow$$ $(1, 1)$ является собственным вектором оператора A.

4) Пусть линейной оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases} \Rightarrow$$ $(3, -3, -4)$ не является собственным вектором оператора A.