Урок 3

1) Установить, какие произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ определены, и найти размерности полученных матриц:

а) A - матрица 4×2, B - матрица 4×2;

б) A - матрица 2×5, B - матрица 5×3;

в) A - матрица 8×3, B - матрица 3×8;

г) A - квадратная матрица 4×4, B - квадратная матрица 4×4.

Решение:

а) $A \cdot B$ - не определено, BA - не определено

б) $A \cdot B$ - матрица 2×3, BA - не определено

в) $A \cdot B$ - матрица 8×8, BA - матрица 3×3

г) $A \cdot B$ - матрица 4×4, BA - матрица 4×4.

2) Найти сумму и произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -2-1 \\ 3+0 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

3) Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить линейную комбинацию $3A - 2B + 4C$ для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$3A - 2B + 4C = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-0+8 & 21-10-16 \\ 9-4+4 & -18+2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

4) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислить $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$.

Решение:

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2+1^2 & 4\cdot 5+1(-2) & 4\cdot 2+1\cdot 3 \\ 5\cdot 4-2\cdot 1 & 5^2+(-2)^2 & 5\cdot 2-2\cdot 3 \\ 2\cdot 4+3\cdot 1 & 2\cdot 5+3(-2) & 2^2+3^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^2+5^2+2^2 & 4\cdot 1+5\cdot(-2)+2\cdot 3 \\ 1\cdot 4-2\cdot 5+3\cdot 2 & 1^2+(-2)^2+3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Задача 5

Написать на Python функцию для перемножения двух произвольных матриц, не используя NumPy.

Решение

Ввод [1]:
```
def multiply(A, B):
    C = []
    n = len(A)
    m = len(B[0])
    if len(A[0]) == len(B):
        for i in range(n):
            line = []
            for j in range(m):
                A_i = A[i]
                B_j = [B[row][j] for row in range(len(B))]
                c_ij = sum([A_i[num] * B_j[num] for num in range(len(B))])
                line.append(c_ij)
            C.append(line)
        return C
    else:
        return 'Произведение матриц не определено.'
```

Ввод [2]:
```
A = [[2, 3, 6],
     [7, 1, 2]]

B = [[2, 0],
     [6, 9],
     [6, 5]]

print(multiply(A, B))
```

```
[[58, 57], [32, 19]]
```

Урок 4

1) Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - (-\cos x)\cos x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

2) Определитель матрицы A равен 4. Найти

а) $\det(A^2) = (\det A)^2 = 4^2 = 16$

б) $\det(A^T) = \det A = 4$

в) $\det(2A) = \det\begin{pmatrix} 2a_{11} & \dots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & \dots & 2a_{2n} \\ \vdots & & \\ 2a_{n1} & \dots & 2a_{nn} \end{pmatrix} = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 2a_{21} & \dots & 2a_{2n} \\ \vdots & & \\ 2a_{n1} & \dots & 2a_{nn} \end{pmatrix} =$

$= 2^2 \cdot \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ 2a_{n1} & \dots & 2a_{nn} \end{pmatrix} = 2^n \det A = 2^{n+2}$, n - порядок матрицы A.

3) Доказать, что матрица $\begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ вырожденная.

Решение:

$\begin{vmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -14 & 70 \\ 0 & 7 & -35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -16 \\ 0 & -14 & 70 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ матрица вырожденная.

4) Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} A_1 + A_2 = A_3 \\ A_i - i\text{-я строка} \\ \text{матрицы } A \end{matrix} \right| = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2$

б) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \left| A_1 + A_2 = A_3 \right| = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$

$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$