Урок 1

1) Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x+1$, $f_4(x) = x - e^x$

Решение:

$f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x) \Rightarrow f_1, f_2, f_3, f_4$ - линейно зависимо

2) Исследовать на линейную зависимость

$f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = (x+1)^2$

Решение:

$f_4(x) = x^2 + 2x + 1 = f_3(x) + 2 f_2(x) + \frac{1}{2} f_1(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ линейно зависимы

3) Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in R^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

Решение:

$x = b_2 + 3 b_3 + \frac{1}{2} b_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$ в базисе b_1, b_2, b_3

4) Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in R^3[x]$:

а) в базисе $1, x, x^2$

б) в базисе $x^2, x-1, 1$

Решение:

а) $3x^2 - 2x + 2 = 2 - 2x + 3x^2 = (2, -2, 3)$ в базисе $1, x, x^2$

б) $3x^2 - 2x + 2 = 3x^2 - 2(x-1) = (3, -2, 0)$ в базисе $x^2, x-1, 1$

5) Установить, является ли линейным пространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю.

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

Решение:

а) $(0, b_1, c_1) + (a_2, 0, c_2) = (a_2, b_1, c_1 + c_2) \notin L \Rightarrow$

$\quad \in L \qquad\qquad \in L$

$\Rightarrow$ данная совокупность векторов не является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^3$

б) $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n \quad \in L$

$x_1 + x_2 = \alpha_1^1 u_1 + \alpha_2^1 u_2 + \ldots + \alpha_n^1 u_n + \alpha_1^2 u_1 + \alpha_2^2 u_2 + \ldots + \alpha_n^2 u_n =$

$= (\alpha_1^1 + \alpha_1^2) u_1 + (\alpha_2^1 + \alpha_2^2) u_2 + \ldots + (\alpha_n^1 + \alpha_n^2) u_n = \alpha_1^3 u_1 + \alpha_2^3 u_2 + \ldots + \alpha_n^3 u_n \in L$

$\lambda x = \lambda \alpha_1 u_1 + \lambda \alpha_2 u_2 + \ldots + \lambda \alpha_n u_n = \alpha_1' u_1 + \alpha_2' u_2 + \ldots + \alpha_n' u_n \in L$

$\Rightarrow$ данная совокупность векторов является линейным подпространством

Урок 2

1) Найти скалярное произведение векторов $x, y \in R$:

а) $x = (0, -3, 6)$, $y = (-4, 7, 9)$

б) $x = (7, -4, 0, 1)$, $y = (-3, 1, 11, 2)$

Решение:

а) $(x, y) = 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 0 - 21 + 54 = 33$

б) $(x, y) = 7 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 11 + 1 \cdot 2 = -21 - 4 + 0 + 2 = -23$

2) Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол между ними.

Решение:

$\|x\| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$

$\|y\| = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$

$\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \dfrac{4 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{6 \cdot 13} = \dfrac{70}{6 \cdot 13} = \dfrac{35}{39} \approx 0{,}897$

3) Будет ли линейное пространство эвклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов;

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов

Решение:

а) $(x,y) = \|x\| \cdot \|y\|$

1) $(x,y) = \|x\| \cdot \|y\| = \|y\| \cdot \|x\| = (y,x)$

2) $(\lambda x, y) = \|\lambda x\| \cdot \|y\| = |\lambda| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = |\lambda| (x,y)$

$(\lambda x, y) \neq \lambda (x,y)$ для $\lambda < 0$ $\Rightarrow$ линейное пространство не является евклидовым

б) $(x,y) = 3(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)$

1) $(x,y) = 3(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n) = 3(b_1 a_1 + b_2 a_2 + \ldots + b_n a_n) = (y,x)$

2) $(\lambda x, y) = 3(\lambda a_1 b_1 + \lambda a_2 b_2 + \ldots + \lambda a_n b_n) = \lambda \cdot 3 \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n) = \lambda (x,y)$

3) $(x_1 + x_2, y) = 3((a_{11} + a_{21}) b_1 + (a_{12} + a_{22}) b_2 + \ldots + (a_{1n} + a_{2n}) b_n) =$
$= 3(a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + \ldots + a_{1n} b_n) + 3(a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + \ldots + a_{2n} b_n) =$
$= (x_1, y) + (x_2, y)$

4) $(x,x) = 3(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \geq 0$

$(x,x) = 0$ при $x = (0,0,0,\ldots,0)$

$\Rightarrow$ линейное пространство является евклидовым

4) Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве R^3?

а) $(1,0,0), (0,0,1)$

б) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,0,1)$

в) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), (0, 1/2, 1/2), (0,0,1)$

г) $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

Решение:

а) $(1,0,0), (0,0,1)$ не является базисом линейного пространства R^3

б) $(e_1, e_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$, $(e_1, e_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 = 0$,
$(e_1, e_3) = 0 + 0 + 0 = 0$, $(e_2, e_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$

$(e_2, e_3) = 0 + 0 + 0 = 0$, $(e_3, e_3) = 1$

$\Rightarrow$ e_1, e_2, e_3 образуют ортонормированный базис

в) $(e_1, e_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ базис не ортонормированный

г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

$(e_1, e_1) = 1$, $(e_2, e_2) = 1$, $(e_3, e_3) = 1$, $(e_1, e_2) = 0$, $(e_2, e_3) = 0$,

$(e_1, e_3) = 0$ $\Rightarrow$ базис ортонормированный.