Урок 6

1) Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -2 \end{array}\right)$$

$x_1 = -2 - 3x_1 = -2 - 6d$

$x_2 = \frac{13}{2} x_4 = 13d$

$x_3 = -2 + 3d$

$x_4 = 2d$

$$x = \begin{pmatrix} -2-6d \\ 13d \\ -2+3d \\ 2d \end{pmatrix}, d \in R$$

2) Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь СЛАУ:

а) $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -3 & -19 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & -3 & -19 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A = 3 \Rightarrow$$ система совместна и имеет единственное решение

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

б) $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

т.к. есть строка вида $(0\ 0 \ldots 0 | \lambda)$ и $\lambda \neq 0$, то система не имеет решений

в) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -5 & -23 & -14 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{23}{5} & \frac{14}{5} \end{array}\right)$$

$$x_2 = \frac{14}{5} - \frac{23}{5}x_3$$

$$x_1 = 4 - 5x_3 - 2x_2 = 4 - 5x_3 - \frac{28}{5} + \frac{46}{5}x_3 = -\frac{8}{5} + \frac{21}{5}x_3$$

$$x_3 = 5c, \quad x_2 = \frac{14}{5} - 23c, \quad x_1 = -\frac{8}{5} + 21c$$

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} + 21c \\ \frac{14}{5} - 23c \\ 5c \end{pmatrix}, \quad c \in R$$

система совместная и имеет бесконечное число решений

3) Проверить на совместность и выяснить, сколько решений имеет система лин. уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ система имеет единственное решение

$$x_4 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{3}{10}, \quad x_1 = 3 - \frac{9}{10} + \frac{8}{3} - 2 = \frac{83}{30}$$

4) Дана СЛАУ, заданная расширенной матрицей $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$,
Найти соотношение между параметрами a, b и c, при которых система является несовместной.

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-3a \\ 0 & -6 & -12 & c-7a \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & c-7a-2(b-3a) \end{array}\right)$$

система не имеет решений при условии, что $c-7a-2(b-3a) \neq 0$.

$\Rightarrow c-7a-2b+6a \neq 0 \Rightarrow \underline{c-a-2b \neq 0}$

Урок 7

1) Решить СЛАУ методом Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$

Решение:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4+6 = 2$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 3 = 4, \quad x_1 = \frac{10}{2} = 5, \quad x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 13 + 7 + 5\cdot 2 = 43$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10\cdot 13 + 1\cdot 1 + 5\cdot(-9) = 86$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 10\cdot 7 + 5\cdot 5 = -43$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 9 + 1\cdot 5 + 10\cdot 2 = 43$$

$$x_1 = \frac{86}{43} = 2, \quad x_2 = -\frac{43}{43} = -1, \quad x_3 = \frac{43}{43} = 1$$

2) Найти L-матрицу LU-разложение для матрицы коэффициентов

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$

Решение

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 & 0 \\ 4 & l_{42} & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 21 & 11 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & l_{43} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Решить СЛАУ методом LU-разложение

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 11x_1 + 7x_2 + 5x_3 = -6 \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 = -5 \end{cases}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 11 & 7 & 5 \\ 9 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad U^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{23}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{19}{2} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{11}{2} & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -6 - \frac{11}{2} = -\frac{23}{2}, \quad y_3 = -5 - \frac{9}{2} - \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{23}{2}\right) =$$
$$= -\frac{19 \cdot 3}{6} + \frac{7 \cdot 23}{6} = \frac{52}{3}$$

$$Ux = y, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & \frac{52}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{23}{2} \\ \frac{52}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 1, \quad \frac{3}{2} x_2 - \frac{23}{2} x_3 = -\frac{23}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} x_2 - \frac{23}{2} = -\frac{23}{2} \Rightarrow x_2 = 0$$

$$2x_1 + 3 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) Решить СЛАУ методом Холецкого

$$\begin{cases} 81 x_1 - 45 x_2 + 45 x_3 = 531 \\ -45 x_1 + 50 x_2 - 15 x_3 = -460 \\ 45 x_1 - 15 x_2 + 38 x_3 = 193 \end{cases}$$

Решение:

$$Ax = LL^T x = Ly = b$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 9, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-45}{9} = -5$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{45}{9} = 5, \quad l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{50-25} = 5$$

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}} \left(a_{32} - l_{21} \cdot l_{31} \right) = \frac{1}{5} \left(-15 - 5(-5) \right) = 2$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{38 - 25 - 4} = 3$$

$$L = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b : \quad \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 531 \\ -460 \\ 193 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{531}{9} = 59, \quad y_2 = \frac{-460 + 5 \cdot 59}{5} = -33,$$

$$y_3 = \frac{193 - 5 \cdot 59 + 2 \cdot 33}{3} = \frac{-36}{3} = -12$$

$$L^T x = y : \quad \begin{pmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ -33 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = -4, \quad x_2 = \frac{-33 + 8}{5} = -5, \quad x_1 = \frac{59 + 5 \cdot (-5) - 5 \cdot (-4)}{9} = 6$$

$$x = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Задача 5

Написать на Python программу с реализацией одного из изученных алгоритмов решения СЛАУ.

Реализация метода Крамера.

Ввод [1]:
```
import copy
# функция расчета определителя матрицы
def det(A):
    n = len(A)
    if n == 1:
        return A[0][0]
    else:
        sum = 0
        B = copy.deepcopy(A)
        B.pop(0)
        for j in range(n):
            C = copy.deepcopy(B)
            for line in C:
                line.pop(j)
            sum += A[0][j] * (-1)**(j) * det(C)
        return sum
```

Ввод [2]:
```
# метод Крамера
def kramer(A, b):
    det_A = det(A)
    print(f'det(A) = {det_A}')
    if det_A != 0:
        n = len(b)
        x = []
        for i in range(n):
            B = copy.deepcopy(A)
            for j in range(n):
                B[j][i] = b[j]
            x.append(det(B)/det_A)
        return x
    else:
```

```
        return 'Система не определена'
```

Ввод [3]:
```
A = [[1, 1, 3],
     [2, 1, 8],
     [2, 1, 7]]
b = [5, 4, 10]

print(f'x = {kramer(A, b)}')
```

```
det(A) = 1
x = [29.0, -6.0, -6.0]
```