N 1

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(x+3)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]=\ln 1=0$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+o(x)}{x+o(x^2)}=2$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-1}{3^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\ln 7+o(x)-1}{1+x\ln 3+o(x)-1}=\log_3 7$

4) $\lim\limits_{a\to 0}\frac{(x+a)^3-x^3}{a}=\lim\limits_{a\to 0}\frac{x^3\left(1+\frac{a}{x}\right)^3-x^3}{a}=\lim\limits_{a\to 0}\frac{x^3\left(1+3\frac{a}{x}+o(a)-1\right)}{a}=\frac{3x^3}{x}=$

$=3x^2$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{5x^2+1}-\frac{x^2}{5x-3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3(5x-3)-x^2(5x^2+1)}{(5x^2+1)(5x-3)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x^4-3x^3-5x^4-x^2}{25x^3+5x-15x^2-3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-3x^3-x^2}{25x^3-15x^2+5x-3}\right)=-\frac{3}{25}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\,\mathrm{tg}\,2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{16x^2}{2}+o(x^2)\right)}{2x\left(x+o(x)\right)}=4$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right]=\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\sin 2t\right)=2 \quad \Big|\, t=\frac{1}{x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{ctg}\,x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}}=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$

$\Big|\, t=\mathrm{ctg}\,x$

9) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2\sin^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=e^{-2}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-1}{x^2\left(\sqrt{1+x\sin x}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2\left(\sqrt{1+|\sin x|x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x\left(\sqrt{1+x\sin x}+1\right)}=\frac{1}{2}$

№ 2

Установить характер разрыва в точке x_0:

1) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$, $x_0 = -4$

$$\lim_{x\to -4-0} \frac{x^2-16}{x+4} = \lim_{x\to -4+0} \frac{x^2-16}{x+4} = \lim_{x\to -4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x+4)} = -8 \Rightarrow$$

x_0 - точка устранимого разрыва

2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$$

x_0 - точка устранимого разрыва

№ 3

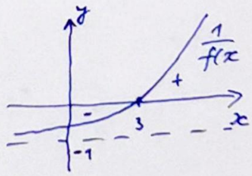
Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2}{x-1}$, $x_0 = 1$

$A_1 = \lim\limits_{x\to 1-0} \operatorname{arctg} \dfrac{2}{x-1} = -\dfrac{\pi}{2}$, $A_2 = \lim\limits_{x\to 1+0} \operatorname{arctg} \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{\pi}{2}$

$A_1 \neq A_2 \neq \infty \Rightarrow$ x_0 - точка разрыва 1-го рода

2) $f(x) = \dfrac{1}{2^{x-3}-1}$, $x_0 = 3$



$$\lim_{x\to 3-0} \frac{1}{2^{x-3}-1} = -\infty$$

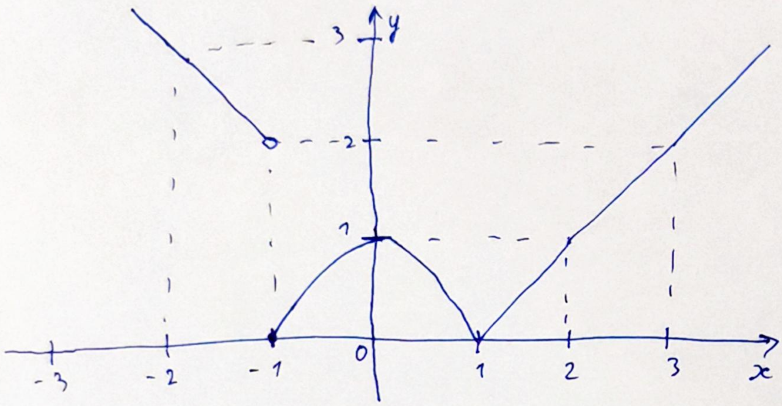
$$\lim_{x\to 3+0} \frac{1}{2^{x-3}-1} = +\infty$$

x_0 - точка разрыва 2-го рода

N 4*

Исследуйте функцию на непрерывность, укажите тип точек разрыва и постройте график функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), & \text{при } |x| \le 1 \\ |x-1|, & \text{при } |x| > 1 \end{cases}$$



функция непрерывна всюду, кроме $x_0 = -1$.

$x_0 = -1$ – точка разрыва 1-го рода

N 5*

Вычислить:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sin tg(x^2/2)}{\ln\cos 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin\sin\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\ln\left(1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{9}$$