N1. Найти производные указанных функций

1) $y = x^3 \log_2 x$, $y' = 3x^2 \log_2 x + x^3 \cdot \frac{1}{x \ln 2} = x^2 \left(3 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right)$

2) $y = -10 \operatorname{arctg} x + 7e^x$, $y' = -\frac{10}{1+x^2} + 7e^x$

3) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^3} + \sqrt{7}x$, $y' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{6}{x^4} + \sqrt{7}$

4) $y = \cos \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $y' = -\sin \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right)' = -\sin \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{(1-\sqrt{x})^2}{1-x} \right)' =$

$= -\sin \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{2(1-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(1-x) + (1-\sqrt{x})^2}{(1-x)^2} \right) =$

$= -\sin \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{(1-\sqrt{x})^2}{(1-x)^2} \right) \left(1 - (1+\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \left(-\sin \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{(1-\sqrt{x})^2}{(1-x)^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}} \right) =$

$= \left(\sin \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$

5) $y = e^{\operatorname{sh}^2 5x}$, $y' = 5e^{\operatorname{sh}^2 5x} \cdot 2 \operatorname{sh} 5x \cdot \operatorname{ch} 5x = 5e^{\operatorname{sh}^2 5x} \cdot \operatorname{sh} 10x$

6) $y = \ln \frac{(x+1)(x+3)^3}{(x+2)^3(x+4)}$; $y' = \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x+3} - \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+4}$

7) $y = \frac{\sin^2 x}{\operatorname{ctg} x + 1} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{tg} x + 1}$

$y' = \frac{2 \sin x \cos x (\operatorname{ctg} x + 1) - \sin^2 x \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right)}{(\operatorname{ctg} x + 1)^2} + \frac{-2 \cos x \sin x (\operatorname{tg} x + 1) - \cos^2 x \frac{1}{\cos^2 x}}{(1 + \operatorname{ctg} x)^2} =$

$= \frac{\sin 2x (\operatorname{ctg} x + 1) + 1}{(\operatorname{ctg} x + 1)^2} - \frac{\sin 2x (\operatorname{tg} x + 1) + 1}{(\operatorname{tg}^2 x + 1)^2} = \frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg} x + 1} + \frac{1}{(\operatorname{ctg} x + 1)^2} -$

$- \frac{\sin 2x}{(\operatorname{tg} x + 1)} - \frac{1}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} = \sin 2x \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x + 1} - \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} \right) + \left(\frac{1}{(\operatorname{ctg} x + 1)^2} - \frac{1}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} \right) =$

$= \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x + 1} - \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} \right) \left(\sin 2x + \frac{1}{\operatorname{ctg} x + 1} + \frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} \right)$

№2. Найти производную данной функции в точке:

1) $y = \frac{\ln x}{x}$, $x_0 = e$

$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $y'(x_0) = y'(e) = 0$

2) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$, $x_0 = 9$

$y' = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{x}+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

$y'(9) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{96}$

№3 Используя логарифмическую производную, найти производные функций

1) $y = x^{\ln x}$

$\ln y = \ln^2 x$, $\frac{y'}{y} = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$, $y' = 2\, x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$

2) $y = \frac{(x^3-2)\sqrt[3]{(x-1)}}{(x+5)^4}$

$\ln y = \ln(x^3-2) + \frac{1}{3}\ln(x-1) - 4\ln(x+5)$

$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{x+5}$, $y' = \frac{(x^3-2)\sqrt[3]{x-1}}{(x+5)^4} \cdot \left(\frac{3x^2}{x^3-2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{x+5}\right)$

3) $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$

$\ln y = \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$

$\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -\sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\sin x}$

$y' = (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \left[\frac{1}{\sin x} - \sin x \ln(\operatorname{tg} x)\right]$

N4. Найти производную неявно заданной функции

1) $e^{xy} - \cos(x^2+y^2) = 0$

$e^{xy}(xy)' + \sin(x^2+y^2)(x^2+y^2)' = 0$

$e^{xy}(y + xy') + \sin(x^2+y^2)(2x+2y\cdot y') = 0$

$y'\left(e^{xy}\cdot x + \sin(x^2+y^2)2y\right) + \left(e^{xy}\cdot y + \sin(x^2+y^2)2x\right) = 0$

$y' = -\dfrac{ye^{xy} + 2x\sin(x^2+y^2)}{x\cdot e^{xy} + 2y\sin(x^2+y^2)}$

2) $x\sin y + y\sin x = 0$

$\sin y + x\cos y\cdot y' + y'\sin x + \cos x\cdot y = 0$

$y'(\sin x + x\cos y) + (y\cos x + \sin y) = 0$, $y' = -\dfrac{\sin y + y\cos x}{\sin x + x\cos y}$

N5 Найти производную для заданных параметрически функций

1) $\begin{cases} x = t^3+t \\ y = t^2+t+1 \end{cases}$ $\quad y'_t = 2t+1$ $\quad x'_t = 3t^2+1$ $\quad y'_x = \dfrac{2t+1}{3t^2+1}$

2) $\begin{cases} x = e^t\sin t \\ y = e^t\cos t \end{cases}$ $\quad x'_t = e^t\sin t + e^t\cos t$ $\quad y'_t = e^t\cos t - e^t\sin t$ $\quad y'_x = \dfrac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} = \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$

$t \neq \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

N6. Найти уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке x_0:

1) $y = e^x$, $x_0 = 0$ $\quad y' = f'(x) = e^x$

уравнение касательной

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, $y - 1 = 1\cdot x \Rightarrow y = x+1$

уравнение нормали

$y - y_0 = -\frac{1}{f(x_0)}(x - x_0)$, $y - 1 = -1\cdot x \Rightarrow y = -x+1$

№7. Найти производные указанных порядков для следующих функций

1) $y = -x\cos x$

$y' = -\cos x + x\sin x$

$y'' = \sin x + \sin x + x\cos x = 2\sin x + x\cos x$

2) $y = e^{2x}$

$y' = 2 e^{2x}$

$y'' = 2^2 e^{2x}$

$y^{(n)} = 2^n e^{2x} \Rightarrow y^{(V)} = 32 e^{2x}$

3) $y = \ln(1+x)$

$y' = \frac{1}{x+1}$

$y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$y''' = 2 \cdot \frac{1}{(1+x)^3}$

$\ldots$

$y^{(n)} = \frac{(n-1)!\,(-1)^{n+1}}{(1+x)^n}$