№ 1 Найти интервалы возрастания и убывания функций

1) $f(x) = x + e^{-x}$, $f' = 1 - e^{-x}$

$f' = 0$ при $x = 0$ – стационарная точка

$f'(x)$: $-$ | $+$
$f(x)$: $\searrow$ 0 $\nearrow$

$(-\infty, 0)$ – функция убывает (интервал убывания)

$(0, +\infty)$ – интервал возрастания

2) $f(x) = x \ln x$, $f' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f' = 0$ при $x = \frac{1}{e}$ – стационарная точка

$f'(x)$: $-$ | $+$
$f(x)$: 0 $\searrow$ $\frac{1}{e}$ $\nearrow$

$(0, \frac{1}{e})$ – интервал убывания

$(\frac{1}{e}, +\infty)$ – интервал возрастания

3) $y = \frac{1}{1-x^2}$, $y' = \frac{-1}{(1-x^2)^2}(-2x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

$y' = 0$ при $x = 0$ – стационарная точка

y': $-$ | $-$ | $+$ | $+$
y: $\searrow$ -1 $\searrow$ 0 $\nearrow$ 1 $\nearrow$

$x = \pm 1$ – критические точки

$(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ – интервалы убывания

$(0, 1) \cup (1, +\infty)$ – интервалы возрастания

№2 Найти экстремумы функций

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $f' = 3x^2 - 3$

экстремумы: $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$f'(x)$: $+$ | $-$ | $+$
$f(x)$: $\nearrow$ -1 $\searrow$ 1 $\nearrow$

$x = -1$ – точка локального максимума

$x = 1$ – точка локального минимума

2) $y = e^{x^2-4x+5}$, $y' = e^{x^2-4x+5} \cdot (2x-4) = 2(x-2)e^{x^2-4x+5}$

экстремумы: $y' = 0 \Rightarrow x = 2$

y': $-$ | $+$
y: $\searrow$ 2 $\nearrow$

$x = 2$ – точка локального минимума

3) $y = x - \operatorname{arctg} x$, $y' = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

экстремумы : $y' = 0 \Rightarrow x = 0$ - стационарная точка

y' : $-$ | $+$

y : $\searrow$ 0 $\nearrow$

$x = 0$ - точка локального минимума

N3 Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций

1) $f(x) = e^{-x^2}$, $f'(x) = e^{-x^2}(-2x) = -2x e^{-x^2}$

$f'(x) = 0$ при $x = 0$

$f''(x) = (-2x)^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$

$f'' = 0$ при $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x)$: $+$ | $-$ | $+$

$f(x)$: $\cup$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cap$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cup$

точки перегиба: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

интервалы выпуклости вниз: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$

интервалы выпуклости вверх: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

2) $y = \cos x$, $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ - точки перегиба

y'' : $-$ $+$ $-$ $+$ $-$

$\dots$ $-\frac{5\pi}{2}$ $-\frac{3\pi}{2}$ $-\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$ $\frac{5\pi}{2}$ $\dots$

y : $\cap$ $\cup$ $\cap$ $\cup$ $\cap$

интервалы выпуклости вверх: $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$

интервалы выпуклости вниз: $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$

3) $y = x^5 - 10x^2 + 7x$, $y' = 5x^4 - 20x + 7$, $y'' = 20x^3 - 20 = 20(x^3 - 1)$

точки перегиба: $x = 1$.

y'' : $-$ | $+$

y : $\cap$ 1 $\cup$

интервалы выпуклости вверх: $(-\infty, 1)$

интервалы выпуклости вниз: $(1, +\infty)$

N4 Найти асимптоты графиков функций

1) $y = \frac{3x}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{(x+2)x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x}{x+2} = 3$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{(x+2)x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x}{x+2} = 3$

$y=3$ – горизонтальная асимптота

$x=-2$ – вертикальная асимптота

2) $y = e^{-\frac{1}{x}}$

$x=0$ – вертикальная асимптота

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

$y=1$ – горизонтальная асимптота

N5 Провести полное исследование и построить графики функций

1) $y = \ln(1-x^2)$

Область определение: $1-x^2>0 \Rightarrow -1<x<1$ $(O = (-1;1))$

Функция четная, не периодичная.

функция непрерывна на всей области определения.

$x=\pm1$, – точки разрыва второго рода

Точки пересечение с осями координат:

$\ln(1-x^2)=0 \Rightarrow x=0$; $y=0$. одна точка: $(0;0)$

Интервалы знакопостоянства:

$(-1;0) \cup (0;1)$

Асимптоты:

вертикальные: $x=\pm1$

Интервалы возрастания и убывания:

$y' = \frac{1}{1-x^2}\cdot(-2x) = -\frac{2x}{1-x^2}$

$$\begin{array}{c|cccccc} f' & & + & & + & \\ \hline f & -1 & \nearrow & 0 & \searrow & 1 \end{array}$$

функция возрастает на интервале $(-1,0)$, а убывает на – $(0,1)$.

$x=0$ – точка локального максимума (стационарная точка)

$x=\pm1$ – критические точки

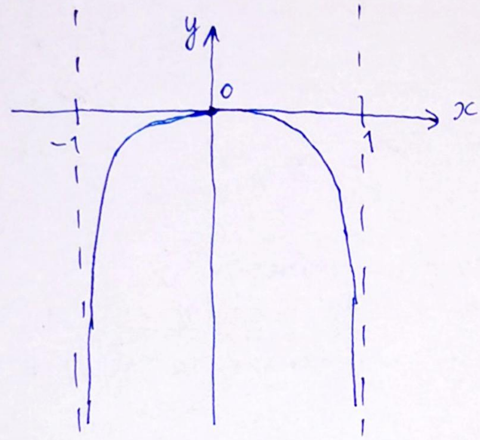
Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба:

$$y'' = -\frac{2}{1-x^2} + \frac{2x}{(1-x^2)^2}(-2x) = \frac{-2(1-x^2)-4x^2}{(1-x)^2} = -\frac{2(x^2+1)}{(1-x^2)^2} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $y(x)$ выпуклая вверх на всей области определения

f'': $-$ $-$

f: -1 $\frown$ 0 $\frown$ 1



2) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$, $D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$y(-x) = y(x) \Rightarrow$ функция чётная

Точки разрыва: $x = \pm 1$ – разрывы второго рода

Участки непрерывности: $D(y)$

Точки пересечения графика с осями координат:

Y: $x = 0, y = 0$

X: $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow$ Одна точка пересечения $(0, 0)$

Интервалы знакопостоянства:

f: $-$ -1 $+$ 0 $+$ 1 $-$

$(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$

Асимптоты: вертикальные – $x = \pm 1$

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0 \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) = -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = -1$$ – горизонт. асимптота

Интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции:

$$y' = -\frac{x^2}{(1-x^2)^2}(-2x) + \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x^3+(1-x^2)2x}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

y'	$-$		$-$		$+$		$+$
y	$\searrow$	-1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$

$y'=0 \Rightarrow x=0$ – точка локального минимума

$x=\pm 1$ – критические точки

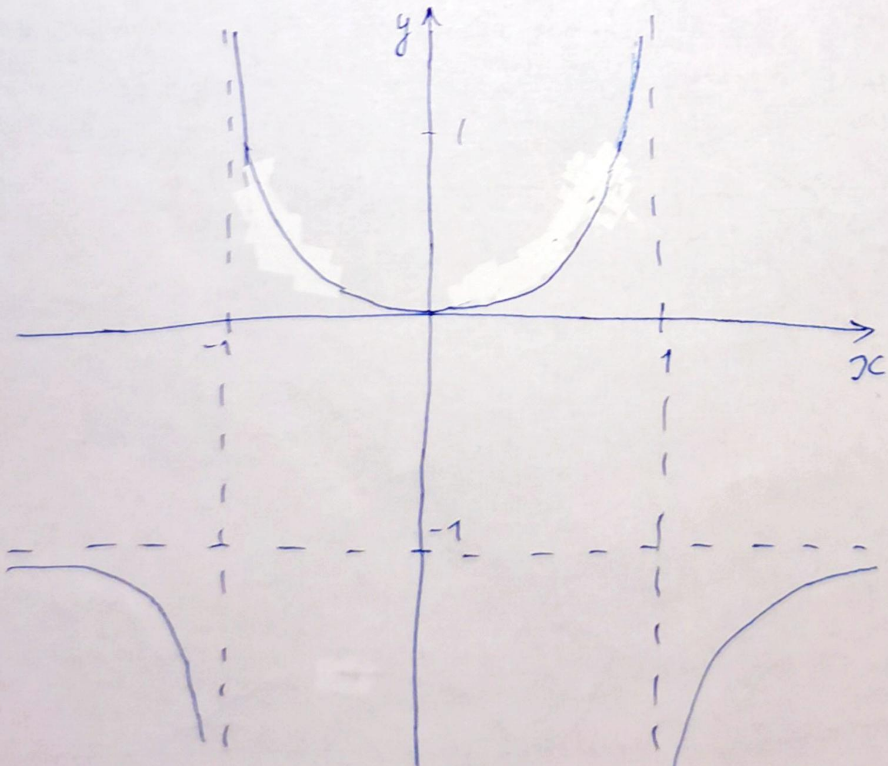
Интервалы возрастания: $(0,1), (1,+\infty)$

Интервалы убывания: $(-\infty,-1), (-1,0)$

$$y'' = \frac{2}{(1-x^2)^2} - \frac{2(2x)}{(1-x^2)^3}(-2x) = \frac{2(1-x^2)+8x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{2(3x^2+1)}{(1-x^2)^3} \neq 0$$

$\Rightarrow$ нет точек перегиба.

f''	$-$		$+$		$+$		$-$
f	$\cap$	-1	$\cup$	0	$\cup$	1	$\cap$



3) $y = x^2 \cdot e^{-x}$, $D(y) = (-\infty, +\infty)$

Функция непрерывна на $D(y)$.

Точки пересечения с осями координат:

$x=0, y=0$.

Функция положительна на всей области определения кроме $x=0$.

Асимптоты:

$k_1 = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^{-x} = -\infty$

$k_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$, $b_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow y = 0$ - горизонт. асимптота

$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

экстремумы функции: $x=0, x=2$ - стационарные точки

$$\begin{array}{cccccc} y' & - & & + & & - \\ \hline y & \searrow & 0 & \nearrow & 2 & \searrow \end{array}$$

$x=0$ - точка лок. минимума

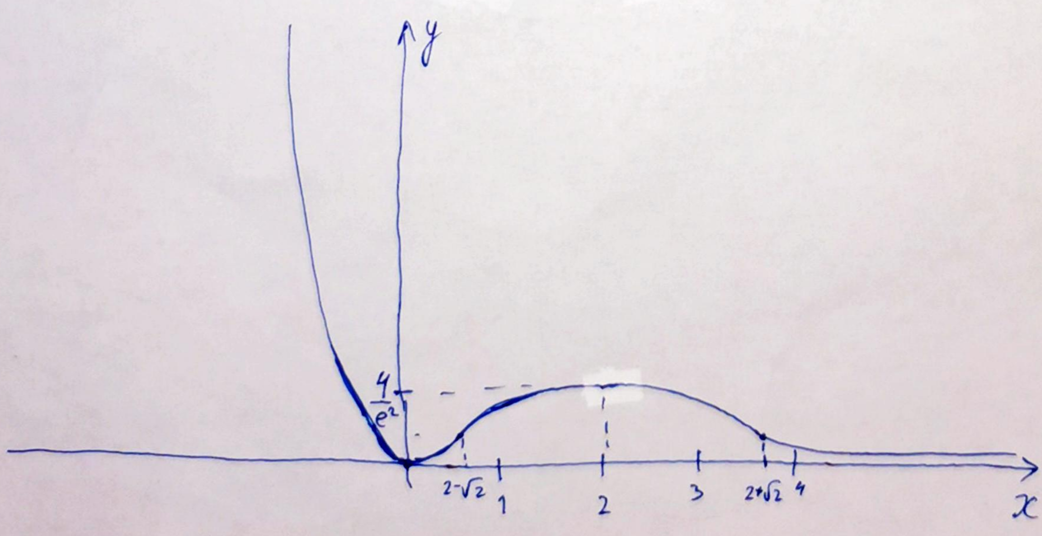
$x=2$ - точка лок. максимума

$y'' = (x(2-x)e^{-x})' = -e^{-x} \cdot x(2-x) + e^{-x}(2-2x) = e^{-x}(2(1-x) - x(2-x)) =$

$= e^{-x}(2 - 2x - 2x + x^2) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

точки перегиба: $x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$$\begin{array}{cccccccccc} f'' & + & & + & & - & & - & & + \\ \hline f & \cup & 0 & \cup & 2-\sqrt{2} & \cap & 2 & \cap & 2+\sqrt{2} & \cup \end{array}$$



4) $y = x - \ln x$, $D(y) = (0, +\infty)$

Функция непрерывна на $D(y)$;

Точки пересечения с осями координат:

$x - \ln x = 0 \Rightarrow \varnothing$

функция положительна на всей области определения.

Асимптоты: $x = 0$ - вертикальная асимптота

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - k \cdot x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-\ln x\right) = -\infty$$

наклонная асимптота отсутствует.

$y' = 1 - \frac{1}{x}$

y'		$-$		$+$
y	0	$\searrow$	1	$\nearrow$

$y' = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$ - стационарная точка, точка лок. минимума

$y'' = \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow$ точек перегиба нет

y''	$+$		$+$
y	$\cup$	1	$\cup$