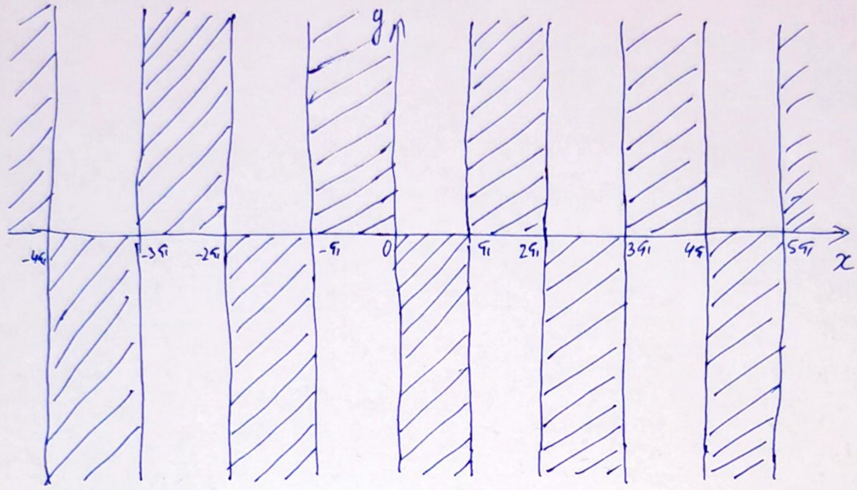
№1 Найти и изобразить области определения следующих функций

1) $z = \sqrt{y \sin x}$

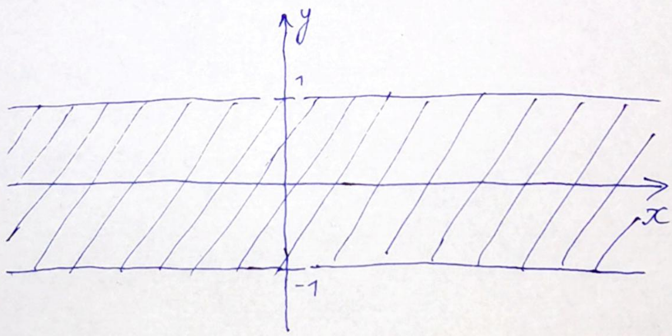
$y \sin x \geq 0$

$$\begin{cases} y > 0, \sin x \geq 0 \\ y < 0, \sin x \leq 0 \\ y = 0, x \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0, x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} [(2k-1)\pi, 2k\pi] \\ y < 0, x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ y = 0, x \in R \end{cases}$$



2) $z = x + \arccos y$

$y \in [-1, 1], x \in R$



№2 Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \underbrace{(x+y)}_{\text{б.м.}} \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{\cos \frac{1}{y}}_{\text{огр.}} = 0$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \frac{2(x-1)(y-2)}{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \left| \begin{matrix} x-1 = r\cos\varphi \\ y-2 = r\sin\varphi \end{matrix} \right| = \lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ \varphi \to \alpha}} \frac{2r\sin\varphi\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi} =$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\to\alpha}} \sin 2\varphi = \sin 2\alpha \Rightarrow$$ предела не существует, поскольку его значение зависит от направления приближения к точке (1, 2).

3) $$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = \left[\frac{xy}{x^2+y^2} \le \frac{xy}{2xy} = \frac{1}{2} \text{ для } x>0, y>0\right] \le \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$$

4) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{б.м.}} \underbrace{\sin^3\frac{1}{xy}}_{\text{огр.}} = 0$$

5) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \left|\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}\right| = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\to\alpha}} \frac{r^2\cos^2\varphi\cdot r^3\sin^3\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\to\alpha}} \underbrace{r^3}_{\text{б.м}} \cdot \underbrace{\cos^2\varphi\cdot\sin^3\varphi}_{\text{огр.}} = 0$$

№3 Найти частные и полное приращения данной функции в данной точке и при данных приращениях аргументов

$$z = x^2y;\ M_0(1;2);\ \Delta x = 0{,}1;\ \Delta y = -0{,}2$$

$$\Delta_x z = (x_0+\Delta x)^2 y_0 - x_0^2 y_0 = y_0(2x_0\Delta x + \Delta x^2) =$$
$$= 2\cdot(2\cdot 0{,}1 + 0{,}01) = 0{,}42$$

$$\Delta_y z = x_0^2(y_0+\Delta y - y_0) = x_0^2\Delta y = 1\cdot(-0{,}2) = -0{,}2$$

$$\Delta z = (x_0+\Delta x)^2(y_0+\Delta y) - x_0^2 y_0 = 1{,}1^2\cdot 1{,}8 - 2 = 0{,}178$$

N4 Найти частные производные данных функций

1) $z = e^{x^2+y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$

2) $u = x^y + (xy)^z + z^{xy}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot x^{y-1} + y^z \cdot z\, x^{z-1} + (z^y)^x \cdot y \ln z$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x^y \cdot \ln x + x^z \cdot z\, y^{z-1} + z^{yx}\, x \ln z$

$\frac{\partial u}{\partial z} = (xy)^z \cdot \ln(xy) + xy\, z^{xy-1}$

N5 Вычислить приближенно.

1) $1{,}04^{2{,}03}$

$f(x,y) = x^y$, $x = 1{,}04$, $y = 2{,}03$

$f(1,2) = 1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$

$\Delta x = 0{,}04$, $\Delta y = 0{,}03$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y\, x^{y-1}$, $f'_x(1,2) = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$, $f'_y(1,2) = 0$

$df(1,2) \approx 2 \cdot 0{,}04 + 0 \cdot 0{,}03 = 0{,}08$

$1{,}04^{2{,}03} \approx 1 + 0{,}08 = 1{,}08$

2) $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{90}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}\right)$

$f(x,y) = \sin x \cos y$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{90}$, $\Delta y = \frac{\pi}{180}$

$f'_x = \cos x \cos y$, $f'_y = -\sin x \sin y$

$f'_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $f'_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

$df\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{\pi}{90}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\pi}{180} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi}{60}$

$\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\pi}{60} \approx 0{,}228$

3) $\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8\,e^{0{,}015})^5}$

$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

$f(x,y) = \sqrt{(\sin^2 x + 8\,e^{y})^5}$

$x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 0, \quad \Delta x = -0{,}02, \Delta y = 0{,}015$

$f'_x = \frac{5}{2}\sqrt{(\sin^2 x + 8\,e^{y})^3}\; 2\sin x\cos x$

$f'_y = \frac{5}{2}\sqrt{(\sin^2 x + 8\,e^{y})^3} \cdot 8\,e^{y}$

$f'_x\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{5}{2}\sqrt{(1+8)^3} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$f'_y\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{5}{2}\sqrt{(1+8)^3} \cdot 8 = \frac{5}{2} \cdot 27 \cdot 8 = 540$

$df\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0 \cdot (-0{,}02) + 540 \cdot 0{,}015 = 8{,}1$

$f\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \sqrt{(1+8)^5} = 243$

$\sqrt{(\sin^2 1{,}55 + 8\,e^{0{,}015})^5} \approx 243 + 8{,}1 = 251{,}1$