N1 Решить уравнения:

1) $y' - y = 2x - 3$

$y' = y + 2x - 3$

$z = y + 2x - 3$

$z' = y' + 2 = z + 2$

$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx \Rightarrow \ln|z+2| - x + C_1 = 0$

$\ln|y + 2x - 1| - x + C_1 = 0$

$y + 2x - 1 = Ce^x$

$y = Ce^x - 2x + 1$

2) $x^2 y' + xy + 1 = 0$

$x^2 y' + xy = -1$

$x^2 y' + xy = 0$

$(xy' + y)x = 0$

$xy' + y = 0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$

$\ln|xy| = C_1 \Rightarrow y = \frac{C_2}{x}, \; y = \frac{C_2(x)}{x}$

$x^2\left(\frac{C_2' \cdot x - C_2}{x^2}\right) + x \cdot \frac{C_2}{x} + 1 = 0$

$C_2' \cdot x - C_2 + C_2 + 1 = 0$

$C_2' = -\frac{1}{x}, \; C_2 = -\ln|x| + C$

$y = -\frac{\ln|x|}{x} + \frac{C}{x}$

N2 Исследовать ряд на сходимость

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$

$a_n = \frac{n+2}{n^2+n+1} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$ – расходится

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ – расходится

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}=$$

$$=\frac{1}{e}<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$ - сходится по признаку Даламбера

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-\ln n}$

Признак Лейбница

1) $\frac{1}{2n-\ln n}>\frac{1}{2(n+1)-\ln(n+1)}\quad\forall n\geq 1$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-\ln n}=0$

$\Rightarrow$ ряд сходится

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^{n-1}(n+1)}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n(n+2)}{3^{n-1}(n+1)}\right|=3$$

Интервал сходимости : $(-1, 5)$