# DAG计算一般方式

设 G=(I,E)表示一个DAG，其中 I 是图形中所有节点的集合， E 是所有有向边的集合，函数 pa(x) 表示从子节点x到父节点的映射。

“DAG” 是 **Directed Acyclic Graph** 的缩写，中文称为 **有向无环图**。这是图论中的一种重要类型的图。具体解释如下：

**定义**

1. **有向图（Directed Graph）**：
   * 图中的边是有方向的，表示从一个节点指向另一个节点的关系。
   * 用数学表示，即对于图 𝐺=(𝐼,𝐸)*G*=(*I*,*E*)，其中 𝐼*I* 是节点集合，𝐸*E* 是有向边的集合，每条边 (𝑢,𝑣)(*u*,*v*) 表示从节点 𝑢*u* 指向节点 𝑣*v*。
2. **无环图（Acyclic Graph）**：
   * 图中不存在任何从某个节点出发经过若干条边又回到该节点的路径，换句话说，没有任何环路。

结合起来，有向无环图（DAG）就是一个边有方向且没有任何环路的图。

**特性**

* **拓扑排序**：DAG具有拓扑排序，即可以将所有节点排序成一个线性序列，使得对于图中的每一条有向边 (𝑢,𝑣)(*u*,*v*)，在排序中节点 𝑢*u* 都在节点 𝑣*v* 之前。
* **广泛应用**：DAG在许多领域都有应用，例如任务调度、版本控制系统中的变更记录、数据流分析、表达式解析等。

**函数 pa(x) 的解释**

在DAG中，**pa(x)** 表示节点 𝑥*x* 的父节点集合，即所有指向 𝑥*x* 的节点集合。如果 (𝑢,𝑥)(*u*,*x*) 是图中的一条有向边，那么节点 𝑢*u* 就是节点 𝑥*x* 的父节点。

**例子**

考虑一个简单的DAG：



* **节点集合 𝐼*I***：{A, B, C, D}
* **边集合 𝐸*E***：{(A, B), (B, C), (B, D)}

在这个DAG中：

* **pa(B) = {A}**
* **pa(C) = {B}**
* **pa(D) = {B}**

这些父节点集合反映了图中节点之间的依赖关系。

在一组DAG关系中，R节点是H和L节点的父节点。R和H节点是F节点的父节点。



P(R=0|H=0)=P(H=0|R=0)\*P(R=0)/P(H=0)=P(H=0|R=0)\*P(R=0)/(P(H=0|R=0)\*P(R=0) + P(H=0|R=1)\*P(R=1))

求P(R=0|F=0)的计算公式:

**目标公式： 𝑃(𝑅=0∣𝐹=0)**

根据贝叶斯定理：

𝑃(𝑅=0∣𝐹=0) = 𝑃(𝐹=0∣𝑅=0) ⋅ 𝑃(𝑅=0) / 𝑃(𝐹=0)

我们需要逐项计算这些概率。

**1. 计算 𝑃(𝐹=0∣𝑅=0)**

因为 𝐹 有两个父节点 𝑅 和 𝐻，我们可以进行边缘化：

𝑃(𝐹=0∣𝑅=0) = ∑*H*(​*P*(*F*=0∣*R*=0, *H*)⋅*P*(*H*∣*R*=0))

由于 𝐻只能取0或1：

𝑃(𝐹=0∣𝑅=0)=*P*(*F*=0∣*R*=0,*H*=0)⋅*P*(*H*=0∣*R*=0)+*P*(*F*=0∣*R*=0,*H*=1)⋅*P*(*H*=1∣*R*=0)

**2. 计算 𝑃(𝐹=0)**

边缘化 𝑅 和 𝐻：

𝑃(𝐹=0)=∑*R*​∑*H*​*P*(*F*=0,*R*,*H*)

使用联合概率公式：

𝑃(𝐹=0) =∑*R*​∑*H*​ (*P*(*F*=0∣*R*, *H*)⋅*P*(*H*∣*R*)⋅*P*(*R*))

具体计算：

考虑 𝑅=0 和 𝑅=1 的情况：

𝑃(𝐹=0)= P(R=0) ⋅ (P(F=0 ∣ R=0 , H=0) ⋅ P(H=0∣R=0) + P(F=0∣R=0,H=1)⋅P(H=1∣R=0)) +

P(R=1) ⋅ (P(F=0 ∣ R=1 , H=0) ⋅ P(H=0∣R=1) + P(F=0∣R=1,H=1)⋅P(H=1∣R=1))

**最终公式**

将上面的所有部分结合起来，得到 𝑃(𝑅=0∣𝐹=0)的公式：

𝑃(𝑅=0∣𝐹=0)=𝑃(𝐹=0∣𝑅=0)⋅𝑃(𝑅=0)/𝑃(𝐹=0)

将具体的值带入公式：

𝑃(𝐹=0∣𝑅=0)= *P*(*F*=0∣*R*=0,*H*=0)⋅*P*(*H*=0∣*R*=0)+*P*(*F*=0∣*R*=0,*H*=1)⋅*P*(*H*=1∣*R*=0)

𝑃(𝐹=0)=*P*(*R*=0)⋅(*P*(*F*=0∣*R*=0,*H*=0)⋅*P*(*H*=0∣*R*=0)+*P*(*F*=0∣*R*=0,*H*=1)⋅*P*(*H*=1∣*R*=0))+*P*(*R*=1)⋅(*P*(*F*=0∣*R*=1,*H*=0)⋅*P*(*H*=0∣*R*=1)+*P*(*F*=0∣*R*=1,*H*=1)⋅*P*(*H*=1∣*R*=1))

代入后得到完整的公式：

𝑃(𝑅=0∣𝐹=0)=[𝑃(𝐹=0∣𝑅=0,𝐻=0)⋅𝑃(𝐻=0∣𝑅=0)+𝑃(𝐹=0∣𝑅=0,𝐻=1)⋅𝑃(𝐻=1∣𝑅=0)]⋅𝑃(𝑅=0)/

𝑃(𝑅=0)⋅(𝑃(𝐹=0∣𝑅=0,𝐻=0)⋅𝑃(𝐻=0∣𝑅=0)+𝑃(𝐹=0∣𝑅=0,𝐻=1)⋅𝑃(𝐻=1∣𝑅=0))+𝑃(𝑅=1)⋅(𝑃(𝐹=0∣𝑅=1,𝐻=0)⋅𝑃(𝐻=0∣𝑅=1)+𝑃(𝐹=0∣𝑅=1,𝐻=1)⋅𝑃(𝐻=1∣𝑅=1))

对于有向无环图来说，在样本集确定的情况下，任意条件下的任意事件概率应该是确定的。对吗？

是的，在有向无环图（DAG）中，给定样本集后，任意条件下的任意事件概率是确定的。这是因为：

1. **样本集确定性**：
   * 样本集包含了所有节点的观测值或已知的概率分布，这意味着所有节点的状态和它们之间的依赖关系都是已知的。
2. **DAG结构的性质**：
   * DAG 具有无环性，这意味着没有循环依赖，每个节点的状态仅依赖于它的父节点集合。
   * 通过DAG中的条件独立性，可以分解联合概率分布为每个节点的条件概率的乘积。

### 具体说明

#### 联合概率分布的分解

在DAG中，联合概率分布 𝑃(𝑋1,𝑋2,…,𝑋𝑛)*P*(*X*1​,*X*2​,…,*Xn*​) 可以分解为每个节点的条件概率分布的乘积：

𝑃(𝑋1,𝑋2,…,𝑋𝑛)=∏𝑖=1𝑛𝑃(𝑋𝑖∣pa(𝑋𝑖))*P*(*X*1​,*X*2​,…,*Xn*​)=∏*i*=1*n*​*P*(*Xi*​∣pa(*Xi*​))

其中，pa(𝑋𝑖)pa(*Xi*​) 表示节点 𝑋𝑖*Xi*​ 的父节点集合。

#### 确定性概率

在给定样本集的情况下，所有条件概率 𝑃(𝑋𝑖∣pa(𝑋𝑖))*P*(*Xi*​∣pa(*Xi*​)) 都是已知的或可以从样本集中估计出来。因此，可以计算任意条件下的任意事件概率。例如，给定事件 𝐴*A* 在条件 𝐵*B* 下的概率 𝑃(𝐴∣𝐵)*P*(*A*∣*B*) 可以通过以下方式计算：

1. **贝叶斯定理**：
   * 使用贝叶斯定理计算条件概率： 𝑃(𝐴∣𝐵)=𝑃(𝐵∣𝐴)⋅𝑃(𝐴)𝑃(𝐵)*P*(*A*∣*B*)=*P*(*B*)*P*(*B*∣*A*)⋅*P*(*A*)​
2. **边缘化和求和**：
   * 通过对DAG结构中的各个条件概率进行边缘化和求和，得到所需的条件概率。

### 例子

假设在一个简单的DAG中，节点 𝑅*R*、𝐻*H*、和 𝐹*F* 有如下依赖关系：

* 𝑅是 𝐻和 𝐿的父节点。
* 𝑅和 𝐻是 𝐹的父节点。

我们可以表示联合概率分布为： 𝑃(𝑅,𝐻,𝐿,𝐹)=𝑃(𝑅)⋅𝑃(𝐻∣𝑅)⋅𝑃(𝐿∣𝑅)⋅𝑃(𝐹∣𝑅,𝐻)*P*(*R*,*H*,*L*,*F*)=*P*(*R*)⋅*P*(*H*∣*R*)⋅*P*(*L*∣*R*)⋅*P*(*F*∣*R*,*H*)

如果样本集中提供了所有这些条件概率，我们就可以计算任意条件下的任意事件概率。

### 确定性条件

在给定样本集（包含所有节点的观测数据或条件概率）后，任意条件下的任意事件概率都是确定的，因为：

* 所有必要的条件概率都是已知的。
* 可以使用贝叶斯定理和联合概率分布进行推断。

综上所述，给定样本集后，在有向无环图（DAG）中，任意条件下的任意事件概率是确定的。这是因为DAG结构中的条件独立性允许我们分解联合概率分布并使用样本集中的数据进行精确的概率计算。