

MAK 524 *Modal Analiz*

I. Ödev Çözümleri

Burak ER

13 Aralık 2013

## Hareket Denklemlerinin Çıkarılması

### Taşıt gövdesi kinematik analizi

Hareket denklemlerinin çıkarılması için taşıtin iki eksende de yaptığı dönmenin tarif edilmesi gereklidir. Küçük açılar için dönmenin sırasının değişebileceği bilindiğinden; dönme hareketi ard arda dönme matrisleri ile ifade edilirse bu matrislerin çarpımı sırası değiştirilebilir. Bu nedenle:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] &= [\mathbf{A}]_x [\mathbf{A}]_y \\ [\mathbf{A}] &= [\mathbf{A}]_y [\mathbf{A}]_x \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \\ [\mathbf{A}]_x &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

küçük açılar için transformasyon matrisleri

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\phi \\ 0 & \phi & \phi \end{bmatrix} \\ [\mathbf{A}]_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Küçük açılar için  $\phi \theta \approx 0$  alınırsa taşıt gövdesindeki noktaların sabit takıma transformasyonlarının matrisi

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix}$$

taşıt üzerindeki herhangi bir noktanın konumu sabit takımda

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + [\mathbf{A}] \bar{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{r} = z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Burada sabit takım ile araca gömülü takım başlangıçta çakışık alınmıştır.

Araç üzerindeki süspansiyon bağlantı noktalarının yer değiştirmeleri bulunmak istenirse:

1 numaralı bağlantı noktasının son konumu:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ z + \phi \bar{u}_y - \theta \bar{u}_x \end{bmatrix}\end{aligned}$$

aynı şekilde diğer yaylar için:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_2 &= z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ z + \phi \bar{u}_y + \theta \bar{u}_x \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3 &= z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{u}_x \\ -\bar{u}_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\bar{u}_x \\ -\bar{u}_y \\ z - \phi \bar{u}_y + \theta \bar{u}_x \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_4 &= z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\phi \\ -\theta & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ -\bar{u}_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ -\bar{u}_y \\ z - \phi \bar{u}_y - \theta \bar{u}_x \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dolayısıyla her bir noktanın deplasmanları

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z + \phi \bar{u}_y - \theta \bar{u}_x \end{bmatrix} & \mathbf{u}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z + \phi \bar{u}_y + \theta \bar{u}_x \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z - \phi \bar{u}_y + \theta \bar{u}_x \end{bmatrix} & \mathbf{u}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z - \phi \bar{u}_y - \theta \bar{u}_x \end{bmatrix}\end{aligned}$$

bulunur. Yalnızca  $z$  bileşenleri alırsak deplasmanlar

$$\begin{aligned} u_1 &= z + \phi \bar{u}_y - \theta \bar{u}_x \\ u_2 &= z + \phi \bar{u}_y + \theta \bar{u}_x \\ u_3 &= z - \phi \bar{u}_y + \theta \bar{u}_x \\ u_4 &= z - \phi \bar{u}_y - \theta \bar{u}_x \end{aligned} \quad (1)$$

bulunur. Her iki tarafı zamana göre türeterek bu deplasmanların hızları da aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \dot{z} + \dot{\phi} \bar{u}_y - \dot{\theta} \bar{u}_x \\ \dot{u}_2 &= \dot{z} + \dot{\phi} \bar{u}_y + \dot{\theta} \bar{u}_x \\ \dot{u}_3 &= \dot{z} - \dot{\phi} \bar{u}_y + \dot{\theta} \bar{u}_x \\ \dot{u}_4 &= \dot{z} - \dot{\phi} \bar{u}_y - \dot{\theta} \bar{u}_x \end{aligned} \quad (2)$$

Hareket denklemleri için gerekli lokal takımada taşıt açısal hızının skew-symmetric ifadesi:

$$\tilde{\omega} = \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}}$$

buradan, küçük açıların çarpımların sıfır kabul edilmesiyle lokal takımada açısal hız

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Aynı şekilde açısal hız

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

### Taşıt kinetik analizi

Taşıt hareketi 7 adet bağımsız hareket denklemleri ile incelenebilir. Bunlar taşıt gövdesinin 2 adet dönmeye, 1 adet ötelenmeye, 4 adet lastiğin ötelenmeye hareket denklemleridir. Bunlar;

Taşıt dönmeye ve ötelenmeye hareket denklemi:

$$\sum_{i=0}^n \bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{I}} \dot{\bar{\omega}} - \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{I}} \bar{\omega}$$

$$\sum_{i=0}^n F_z = m \ddot{z}$$

Tekerlek ötelenme hareket denklemleri:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n F_{t1} &= m\ddot{u}_{t1} \\ \sum_{i=0}^n F_{t2} &= m\ddot{u}_{t2} \\ \sum_{i=0}^n F_{t3} &= m\ddot{u}_{t3} \\ \sum_{i=0}^n F_{t4} &= m\ddot{u}_{t4}\end{aligned}$$

Sistemdeki tüm kuvvetler

$$\begin{aligned}F_1 &= -k(z + \phi\bar{u}_y - \theta\bar{u}_x - u_{t1}) - b(\dot{z} + \dot{\phi}\bar{u}_y - \dot{\theta}\bar{u}_x - \dot{u}_{t1}) \\ F_2 &= -k(z + \phi\bar{u}_y + \theta\bar{u}_x - u_{t2}) - b(\dot{z} + \dot{\phi}\bar{u}_y + \dot{\theta}\bar{u}_x - \dot{u}_{t2}) \\ F_3 &= -k(z - \phi\bar{u}_y + \theta\bar{u}_x - u_{t3}) - b(\dot{z} - \dot{\phi}\bar{u}_y + \dot{\theta}\bar{u}_x - \dot{u}_{t3}) \\ F_4 &= -k(z - \phi\bar{u}_y - \theta\bar{u}_x - u_{t4}) - b(\dot{z} - \dot{\phi}\bar{u}_y - \dot{\theta}\bar{u}_x - \dot{u}_{t4}) \\ F_{t1} &= k(z + \phi\bar{u}_y - \theta\bar{u}_x - u_{t1}) + b(\dot{z} + \dot{\phi}\bar{u}_y - \dot{\theta}\bar{u}_x - \dot{u}_{t1}) - k_t(u_{t1} - z_{r1}) \\ F_{t2} &= k(z + \phi\bar{u}_y + \theta\bar{u}_x - u_{t2}) + b(\dot{z} + \dot{\phi}\bar{u}_y + \dot{\theta}\bar{u}_x - \dot{u}_{t2}) - k_t(u_{t2} - z_{r2}) \\ F_{t3} &= k(z - \phi\bar{u}_y + \theta\bar{u}_x - u_{t3}) + b(\dot{z} - \dot{\phi}\bar{u}_y + \dot{\theta}\bar{u}_x - \dot{u}_{t3}) - k_t(u_{t3} - z_{r3}) \\ F_{t4} &= k(z - \phi\bar{u}_y - \theta\bar{u}_x - u_{t4}) + b(\dot{z} - \dot{\phi}\bar{u}_y - \dot{\theta}\bar{u}_x - \dot{u}_{t4}) - k_t(u_{t4} - z_{r4})\end{aligned}$$

$F_1$  ,  $F_2$  ,  $F_3$  ,  $F_4$  kuvvetlerinin momentleri ve onların araç koordinat takımındaki ifadeleri, moment alırken aracın dönmesi ihmali edilirse(küçük açılar için):

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_1 &= \begin{bmatrix} \bar{u}_y \left( k(u_{t1} - z - \phi\bar{u}_y + \theta\bar{u}_x) + b(\dot{u}_{t1} - \dot{z} - \dot{\phi}\bar{u}_y + \dot{\theta}\bar{u}_x) \right) \\ -\bar{u}_x \left( k(u_{t1} - z - \phi\bar{u}_y + \theta\bar{u}_x) + b(\dot{u}_{t1} - \dot{z} - \dot{\phi}\bar{u}_y + \dot{\theta}\bar{u}_x) \right) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{M}_2 &= \begin{bmatrix} -\bar{u}_y \left( k(z - u_{t2} + \phi\bar{u}_y + \theta\bar{u}_x) + b(\dot{z} - \dot{u}_{t2} + \dot{\phi}\bar{u}_y + \dot{\theta}\bar{u}_x) \right) \\ -\bar{u}_x \left( k(z - u_{t2} + \phi\bar{u}_y + \theta\bar{u}_x) + b(\dot{z} - \dot{u}_{t2} + \dot{\phi}\bar{u}_y + \dot{\theta}\bar{u}_x) \right) \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} -\bar{u}_y \left( k(u_{t3} - z + \phi \bar{u}_y - \theta \bar{u}_x) + b(\dot{u}_{t3} - \dot{z} + \dot{\phi} \bar{u}_y - \dot{\theta} \bar{u}_x) \right) \\ \bar{u}_x \left( k(u_{t3} - z + \phi \bar{u}_y - \theta \bar{u}_x) + b(\dot{u}_{t3} - \dot{z} + \dot{\phi} \bar{u}_y - \dot{\theta} \bar{u}_x) \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} -\bar{u}_y \left( k(u_{t4} - z + \phi \bar{u}_y + \theta \bar{u}_x) + b(\dot{u}_{t4} - \dot{z} + \dot{\phi} \bar{u}_y + \dot{\theta} \bar{u}_x) \right) \\ -\bar{u}_x \left( k(u_{t4} - z + \phi \bar{u}_y + \theta \bar{u}_x) + b(\dot{u}_{t4} - \dot{z} + \dot{\phi} \bar{u}_y + \dot{\theta} \bar{u}_x) \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tüm kuvvetler hareket denklemlerine konur ve denklemler  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$  formunda Yazılırsa,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & \dots & & 0 \\ & I_{xx} & 0 & \dots & \vdots \\ & & I_{yy} & 0 & \dots \\ & & & m_{t1} & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & m_{t2} \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & m_{t3} \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & m_{t4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4b & 0 & 0 & -b & -b & -b & -b \\ 0 & 4b\bar{u}_y^2 & 0 & -b\bar{u}_y & -b\bar{u}_y & b\bar{u}_y & b\bar{u}_y \\ 0 & 0 & 4b\bar{u}_x^2 & b\bar{u}_x & -b\bar{u}_x & -b\bar{u}_x & b\bar{u}_x \\ -b & -b\bar{u}_y & b\bar{u}_x & b & 0 & 0 & 0 \\ -b & -b\bar{u}_y & -b\bar{u}_x & 0 & b & 0 & 0 \\ -b & b\bar{u}_y & -b\bar{u}_x & 0 & 0 & b & 0 \\ -b & b\bar{u}_y & b\bar{u}_x & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4k & 0 & 0 & -k & -k & -k & -k \\ 0 & 4k\bar{u}_y^2 & 0 & k\bar{u}_y & k\bar{u}_y & -k\bar{u}_y & -k\bar{u}_y \\ 0 & 0 & 4k\bar{u}_x^2 & k\bar{u}_x & -k\bar{u}_x & -k\bar{u}_x & k\bar{u}_x \\ -k & -k\bar{u}_y & k\bar{u}_x & k + k_t & 0 & 0 & 0 \\ -k & -k\bar{u}_y & -k\bar{u}_x & 0 & k + k_t & 0 & 0 \\ -k & k\bar{u}_y & -k\bar{u}_x & 0 & 0 & k + k_t & 0 \\ -k & k\bar{u}_y & k\bar{u}_x & 0 & 0 & 0 & k + k_t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_t z_{r1} \\ k_t z_{r2} \\ k_t z_{r3} \\ k_t z_{r4} \end{bmatrix}$$

bulunur. Verilen değerler  $m = 1000kg$ ,  $b = 16000\frac{Ns}{m}$ ,  $k = 16000\frac{N}{m}$ ,  $k_t = 160000\frac{N}{m}$  yerine konursa örnek taşıt için kütle, sönüüm ve katılık matrisleri:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & \cdots & 0 \\ & 2300 & 0 & \cdots & \vdots \\ & & 5300 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 45 & 0 & \vdots \\ & & & & 45 & 0 \\ & & & & & 45 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4000 & 0 & 0 & -1000 & -1000 & -1000 & -1000 \\ 0 & 16000 & 0 & -1000 & -1000 & 1000 & 1000 \\ 0 & 0 & 4000 & 2000 & -2000 & -2000 & 2000 \\ -1000 & -1000 & 2000 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ -1000 & -1000 & -2000 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 1000 & -2000 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ -1000 & 1000 & 2000 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 64000 & 0 & 0 & -16000 & -16000 & -16000 & -16000 \\ 0 & 256000 & 0 & -16000 & -16000 & 16000 & 16000 \\ 0 & 0 & 64000 & 32000 & -32000 & -32000 & 32000 \\ -16000 & -16000 & 32000 & 176000 & 0 & 0 & 0 \\ -16000 & -16000 & -32000 & 0 & 176000 & 0 & 0 \\ -16000 & 16000 & -32000 & 0 & 0 & 176000 & 0 \\ -16000 & 16000 & 32000 & 0 & 0 & 0 & 176000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 160000z_{r1} \\ 160000z_{r2} \\ 160000z_{r3} \\ 160000z_{r4} \end{bmatrix}$$

## Cözümler

### 1. Sönümlü ve Sönümsüz hal için doğal frekansları ve titreşim modlarını bulunuz.

Kolaylaştırma açısından vizkoz sönüüm yapışal sönüüm olarak alınırsa, hareket denklemleri

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + i\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{F}$$

olarak elde edilir.

Çok serbestlik dereceli sistem halinde özdeğer problemi

$$(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_c - \lambda^2) \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

olarak ifade edilebilir.

Sönümsüz hal doğal frekansları:

Sönümsüz halde  $\mathbf{B} = 0$  alınarak özdeğer problemi çözülürse, taşıt modeli için özdeğerler ve öz vektörler *Matlab* programı yardımıyla

$$\Omega = \begin{bmatrix} 7.6219 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 62.586 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.426 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 62.56 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.7705 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62.539 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 62.574 \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} -0.98339 & 0.0083049 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98296 & 0.003659 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.93958 & 0 & 0.0030935 \\ -0.090747 & -0.49998 & 0.091914 & -0.5 & -0.17117 & -0.5 & 0.5 \\ -0.090747 & -0.49998 & 0.091914 & -0.5 & 0.17117 & 0.5 & -0.5 \\ -0.090747 & -0.49998 & -0.091914 & 0.5 & 0.17117 & -0.5 & -0.5 \\ -0.090747 & -0.49998 & -0.091914 & 0.5 & -0.17117 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sönümlü hal doğal frekansları:

Sönüüm matrisi  $\mathbf{B}$  modelde bulunan matris olarak alınıp  $\mathbf{K}_c = \mathbf{K} + i\mathbf{B}$  olmak üzere özdeğer problemi yazılsırsa

$$\Omega = \begin{bmatrix} 7.6 + 0.22i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 63.0 + 0.18i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.0 + 0.32i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 63.0 + 0.18i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.8 + 0.041i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 63.0 + 0.18i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 63.0 + 0.18i \end{bmatrix}$$

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 0.98 \\ 0 \\ 0 \\ 0.091 + 5.2 \cdot 10^{-3} i \end{bmatrix} \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} -8.3 \cdot 10^{-3} - 4.8 \cdot 10^{-4} i \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.98 \\ 0 \\ 0.092 + 5.4 \cdot 10^{-3} i \\ 0.092 + 5.4 \cdot 10^{-3} i \\ -0.092 - 5.4 \cdot 10^{-3} i \\ -0.092 - 5.4 \cdot 10^{-3} i \end{bmatrix} \quad \Psi_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.7 \cdot 10^{-3} + 2.1 \cdot 10^{-4} i \\ 0 \\ -0.5 - 8.9 \cdot 10^{-14} i \\ -0.5 - 5.9 \cdot 10^{-14} i \\ 0.5 + 1.4 \cdot 10^{-13} i \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.94 \\ -0.17 - 9.7 \cdot 10^{-3} i \\ 0.17 + 9.7 \cdot 10^{-3} i \\ 0.17 + 9.7 \cdot 10^{-3} i \\ -0.17 - 9.7 \cdot 10^{-3} i \end{bmatrix} \quad \Psi_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.1 \cdot 10^{-3} - 1.8 \cdot 10^{-4} i \\ -0.5 - 4.8 \cdot 10^{-14} i \\ 0.5 + 8.4 \cdot 10^{-14} i \\ 0.5 \\ -0.5 - 4.0 \cdot 10^{-14} i \end{bmatrix}$$

$$\Psi_7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5 - 2.2 \cdot 10^{-14} i \\ 0.5 \\ -0.5 + 1.3 \cdot 10^{-14} i \\ 0.5 + 8.5 \cdot 10^{-15} i \end{bmatrix}$$

Göründüğü üzere doğal frekanslar ve mod şekilleri sanal sayılar olarak bulunmuştur. Özdeğerler için sanal kısımlar sönüm miktarını ifade etmektedir.

## 2.Titreşim modlarının ortogonalilik şartlarını sağladığını gösteriniz.

Titreşim modlarının ortogonalilik şartını sağlaması için

$$\begin{aligned} \Psi_r^T \mathbf{M} \Psi_s &= \mathbf{0} & r \neq s \\ \Psi_r^T \mathbf{K} \Psi_s &= \mathbf{0} & r \neq s \end{aligned}$$

eşitliğini sağlaması gereklidir. Bu nedenle;

$$\begin{aligned} \Psi^T \mathbf{M} \Psi &= \mathbf{m} \\ \Psi^T \mathbf{K} \Psi &= \mathbf{k} \end{aligned}$$

ifadelerinde  $\mathbf{m}$  ve  $\mathbf{k}$  matrisleri diagonal olmalıdır. Hesaplamalar yapılmırsa,

Sönümsüz hal için

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 988.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.7 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45.0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 5.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

diagonal matrisleri bulunur. Sönümsüz hal için modlar ortogonaldir denir.

Sönümlü hal için

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 5.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 5.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.9 \cdot 10^{-16} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4 \cdot 10^{-14} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.0 \cdot 10^{-15} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.8 \cdot 10^{-13} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.8 \cdot 10^{-15} i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 \cdot 10^{-25} i \end{bmatrix}$$

diagonal matrisleri bulunur. Sönümlü hal için de modlar ortogonaldir.

**3. Modal kütle ve katkıları hesaplayınız bunlara bakarak bulduğunuz modların normalize olup olmadığını gösteriniz.**

Modal kütler ve rijitlikler

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{m}} &= \Psi^T \mathbf{M} \Psi \\ \bar{\mathbf{k}} &= \Psi^T \mathbf{K} \Psi\end{aligned}$$

eşitliklerinden bulunmak istenirse,

Sönümsüz hal için

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{m}} &= \begin{bmatrix} 988.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.7 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45.0 \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{k}} &= \begin{bmatrix} 5.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Her bir mod için doğal frekanslar bulunursa

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\bar{k}_i}{\bar{m}_i}}$$

bunların daha önce bulunan doğal frekanslara eşit oldukları görülür.

Sönümlü hal için

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 5.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 5.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8.9 \cdot 10^{-16} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4 \cdot 10^{-14} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.0 \cdot 10^{-15} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.8 \cdot 10^{-13} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.8 \cdot 10^{-15} i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2.1 \cdot 10^{-25} i \end{bmatrix}$$

bulunur.

**4. Sönümsüz hal için serbest titreşim hareket denklemlemini  $\mathbf{x} = \Psi \mathbf{q}$  şeklinde bir dönüşümle ayıriklaştırınız. Yeni oluşacak denklemlerini birbirinden bağımsız olduğunu gösteriniz.**

Dönüşüm

$$\mathbf{x} = \Psi \mathbf{q}$$

kullanılırsa, hareket denklemleri

$$\mathbf{M}\Psi\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\Psi\mathbf{q} = \mathbf{F}$$

olarak elde edilir. Her iki taraf mod şekil matrisi transpozu ile çarpılırsa ve

$$\begin{aligned} \Psi^T \mathbf{M} \Psi &= \bar{\mathbf{m}} \\ \Psi^T \mathbf{K} \Psi &= \bar{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

için son halde hareket denklemleri

$$\bar{\mathbf{m}}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{k}}\mathbf{q} = \Psi^T \mathbf{F}$$

olarak elde edilir. İşlemeler yapılrsa

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{bmatrix} 988.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.2 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.7 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45.0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 5.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.6 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$\Psi^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -(1.5 \cdot 10^3) zr_1 - (1.5 \cdot 10^3) zr_2 - (1.5 \cdot 10^3) zr_3 - (1.5 \cdot 10^3) zr_4 \\ -(8.0 \cdot 10^3) zr_1 - (8.0 \cdot 10^3) zr_2 - (8.0 \cdot 10^3) zr_3 - (8.0 \cdot 10^3) zr_4 \\ (1.5 \cdot 10^3) zr_1 + (1.5 \cdot 10^3) zr_2 - (1.5 \cdot 10^3) zr_3 - (1.5 \cdot 10^3) zr_4 \\ (8.0 \cdot 10^3) zr_3 - (8.0 \cdot 10^3) zr_2 - (8.0 \cdot 10^3) zr_1 + (8.0 \cdot 10^3) zr_4 \\ (2.7 \cdot 10^3) zr_2 - (2.7 \cdot 10^3) zr_1 + (2.7 \cdot 10^3) zr_3 - (2.7 \cdot 10^3) zr_4 \\ (8.0 \cdot 10^3) zr_2 - (8.0 \cdot 10^3) zr_1 - (8.0 \cdot 10^3) zr_3 + (8.0 \cdot 10^3) zr_4 \\ (8.0 \cdot 10^3) zr_1 - (8.0 \cdot 10^3) zr_2 - (8.0 \cdot 10^3) zr_3 + (8.0 \cdot 10^3) zr_4 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylelikle denklemler ayrıstırılmış olmaktadır.

**5. Dinamik katılık matrisinin elemanlarını aynı grafikte çizdiriniz.  
(Yatay eksen frekans( $\frac{rad}{s}$ ), düşey eksen dinamik katılık( $\frac{N}{m}$ ) olmalıdır.)**

#### Sönümsüz hal

Dinamik katılık matrisinin ifadesi

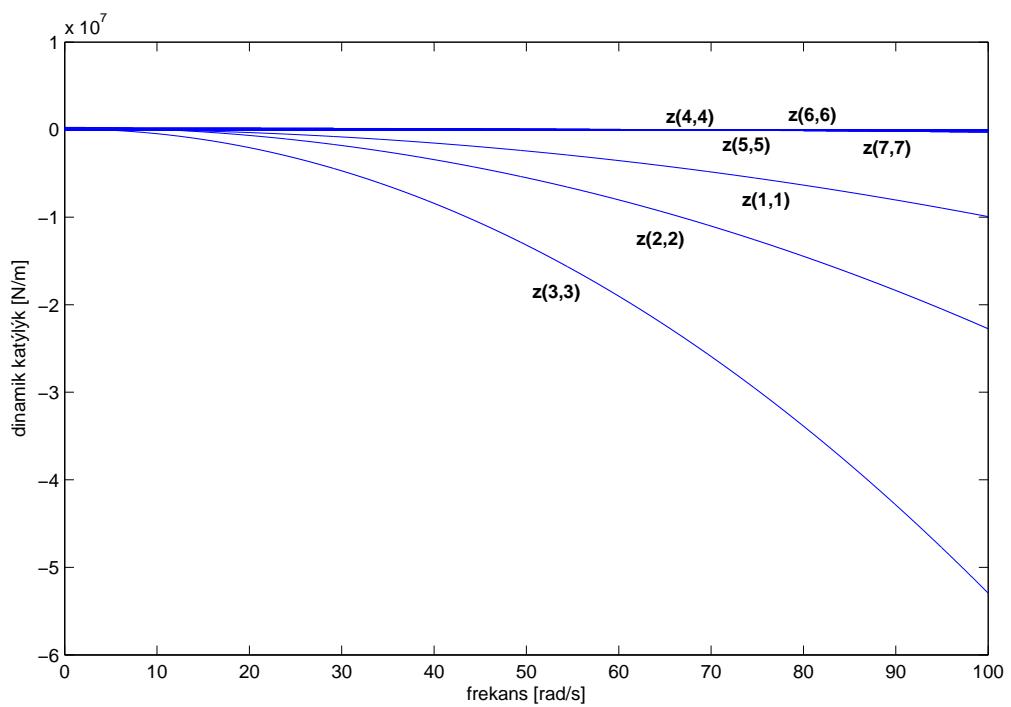
$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\omega) &= \frac{\mathbf{F}(\omega)}{\mathbf{X}(\omega)} \\ &= \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \end{aligned}$$

Sönümsüz halde  $\mathbf{Z}$  matrisi elemanları aynı grafikte çizdirilmesiyle Şekil 1'teki grafik elde edilmiştir.

#### Sönümlü hal

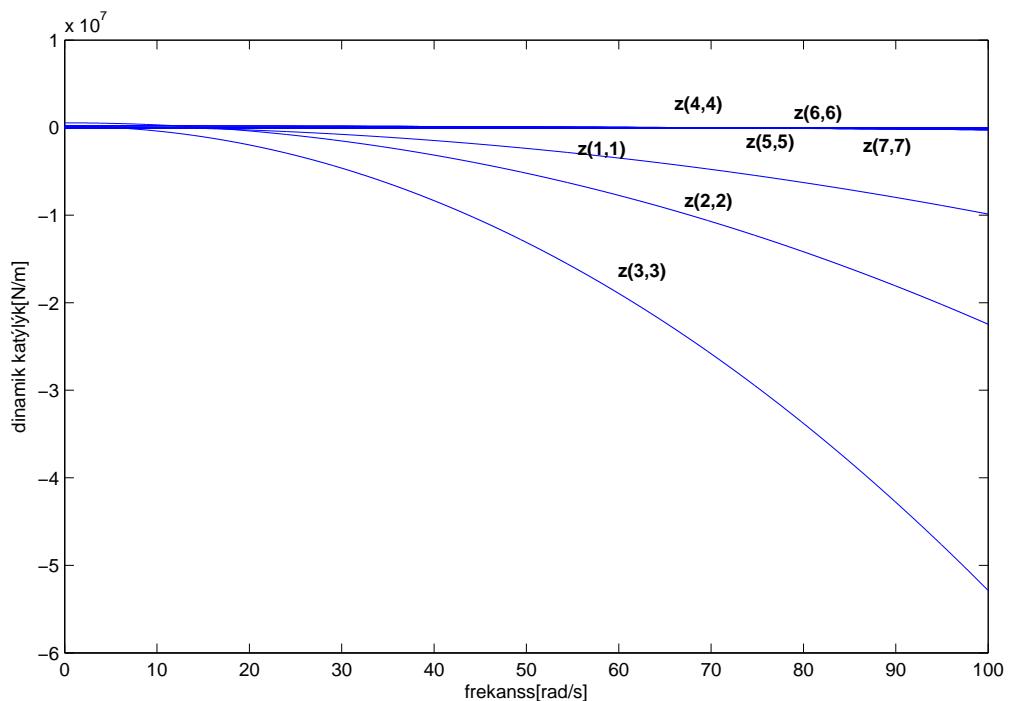
Sönümlü halde sistem katılığı  $\mathbf{K}_c = \mathbf{K} + i\mathbf{B}$  yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\omega) &= \frac{\mathbf{F}(\omega)}{\mathbf{X}(\omega)} \\ &= \mathbf{K}_c - \omega^2 \mathbf{M} \end{aligned}$$



Şekil 1: Sönümsüz hal dinamik katılık elemanlarının çizimi

elde edilir. Grafiği çizildiğinde Şekil 2 elde edilmiştir.



Şekil 2: Sönümlü hal dinamik katılık elemanlarının çizimi

**6. Reseptans matrisinin tüm elemanlarını aynı grafikte çizdiriniz.a) Tüm reseptansların mutlak değerleri aynı grafikte çizilecek.b) Tüm reseptansların mutlak değerlerinin logaritması aynı grafikte çizdirilecek.**

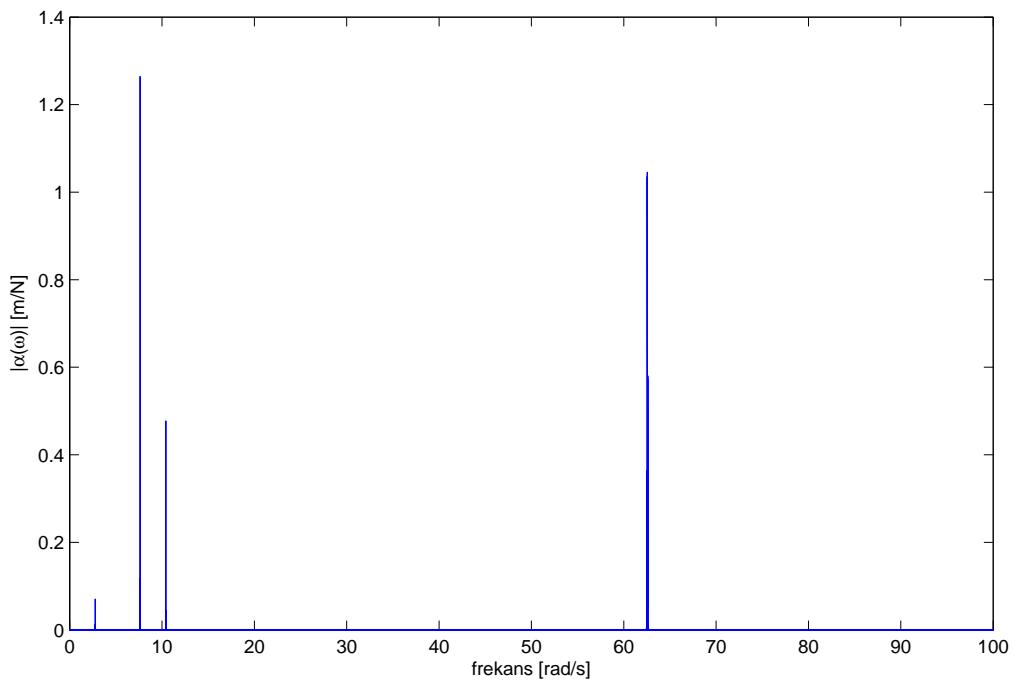
Sönümsüz hal için:

Reseptans dinamik katılığın tersi olduğundan

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \frac{\mathbf{X}(\omega)}{\mathbf{F}(\omega)} \\ &= (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}\end{aligned}$$

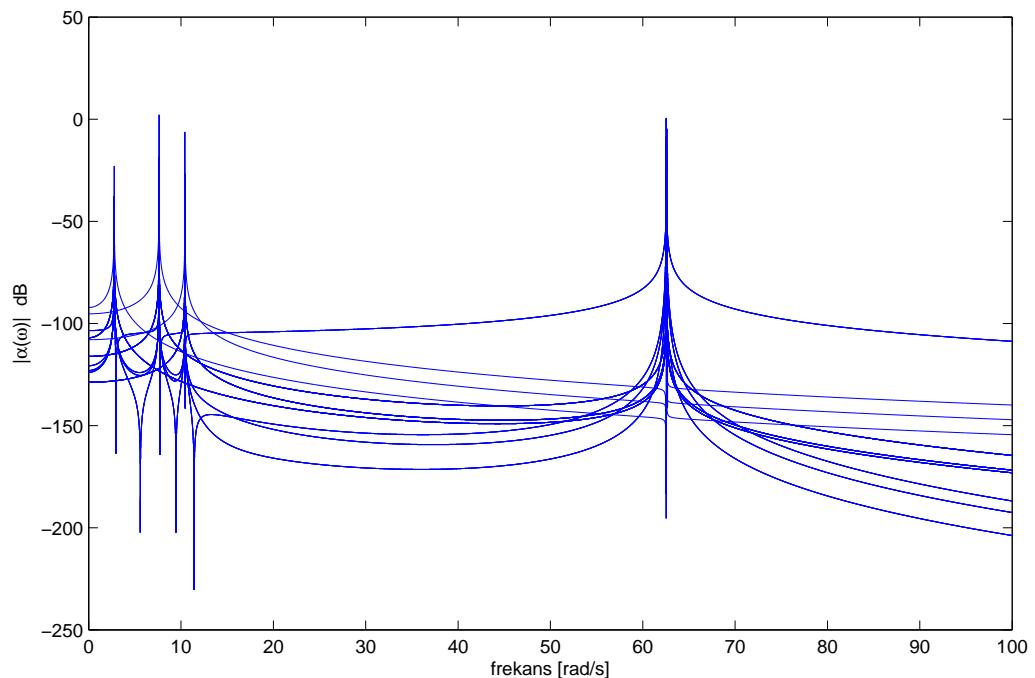
yazılabilir.

Reseptans matrisinin bileşenlerinin yatay eksen *rad/s* ve dikey eksen de *m/N* olacak şekilde çizdirilmesiyle Şekil 3 elde edilmiştir.



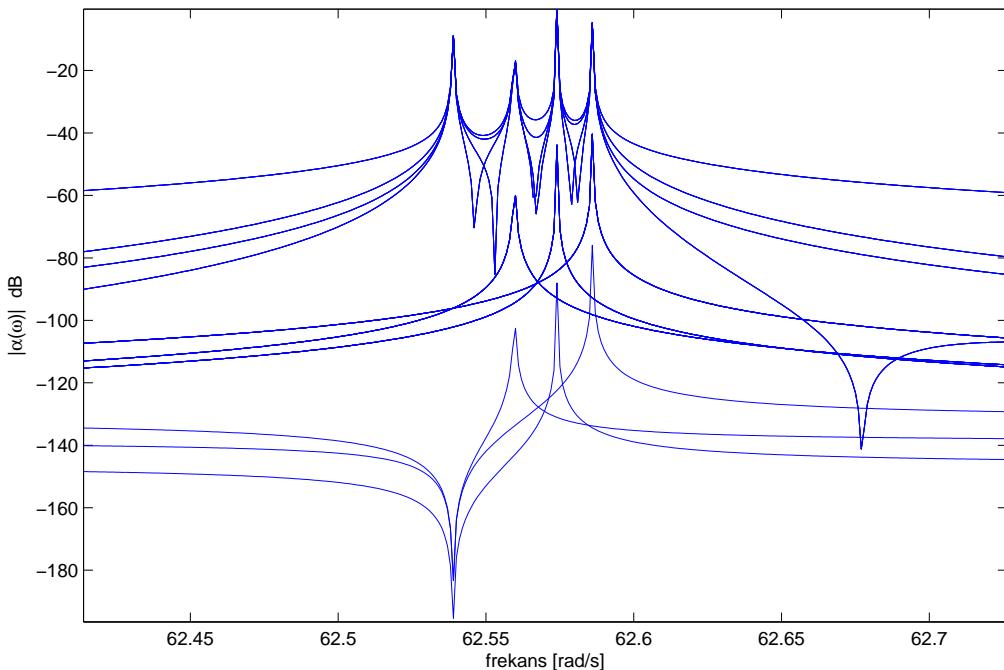
Şekil 3: Reseptans matrisi elemanları yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $m/N$

Reseptans matrisinin bileşenlerinin yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen de  $dB$  olacak şekilde çizdirilmesiyle Şekil 4 elde edilmiştir.



Şekil 4: Reseptans matrisi elemanları yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

Şekillerden görüldüğü üzere maksimum 4 adet mod belirgindir. Ancak frekansın  $\omega \approx 62 - 63\text{rad/s}$  olduğu bölgede birbirine yakın olan modlar bulunmaktadır. Bu bölge daha yakından Şekil 5' de verilmiştir.



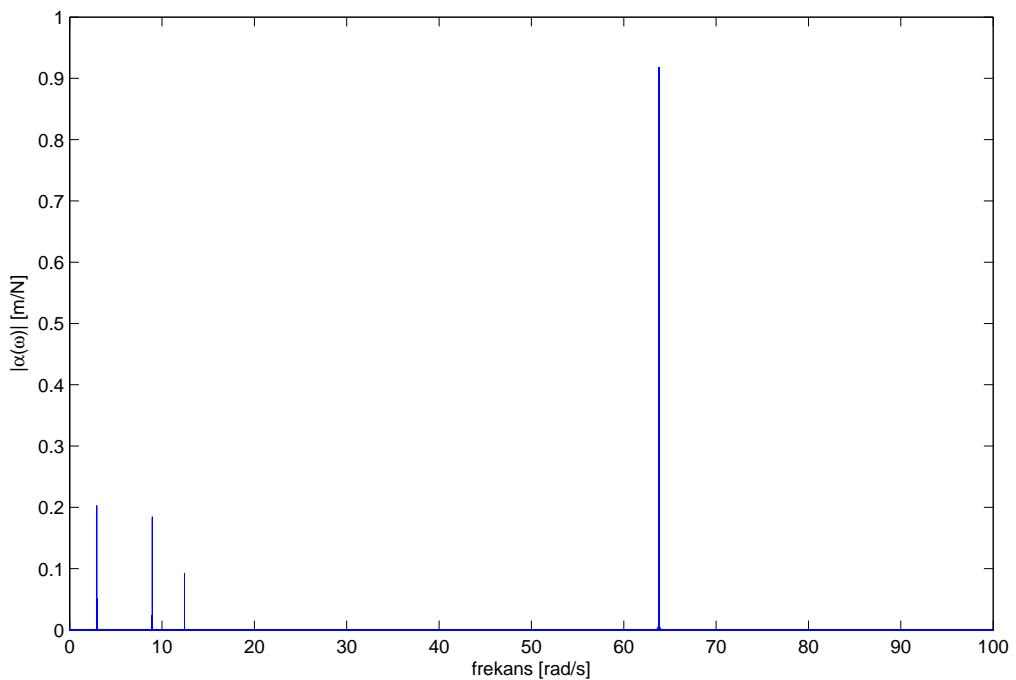
Şekil 5: Reseptans matrisi elemanlarının  $\omega \approx 62 - 63\text{rad/s}$  civarındaki çizgileri.

Dolayısıyla beklenildiği üzere 7 serbestlik dereceli sistem için 7 adet rezonans noktası bulunmaktadır.

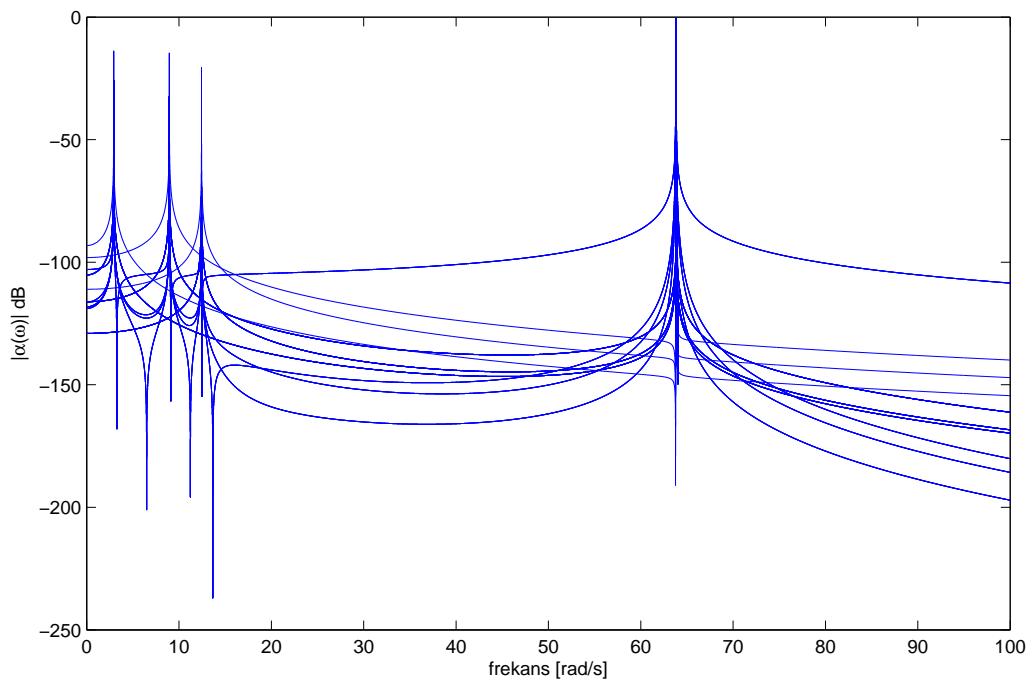
Sönümlü hal için:

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \frac{\mathbf{X}(\omega)}{\mathbf{F}(\omega)} \\ &= (\mathbf{K}_c - \omega^2 \mathbf{M})^{-1}\end{aligned}$$

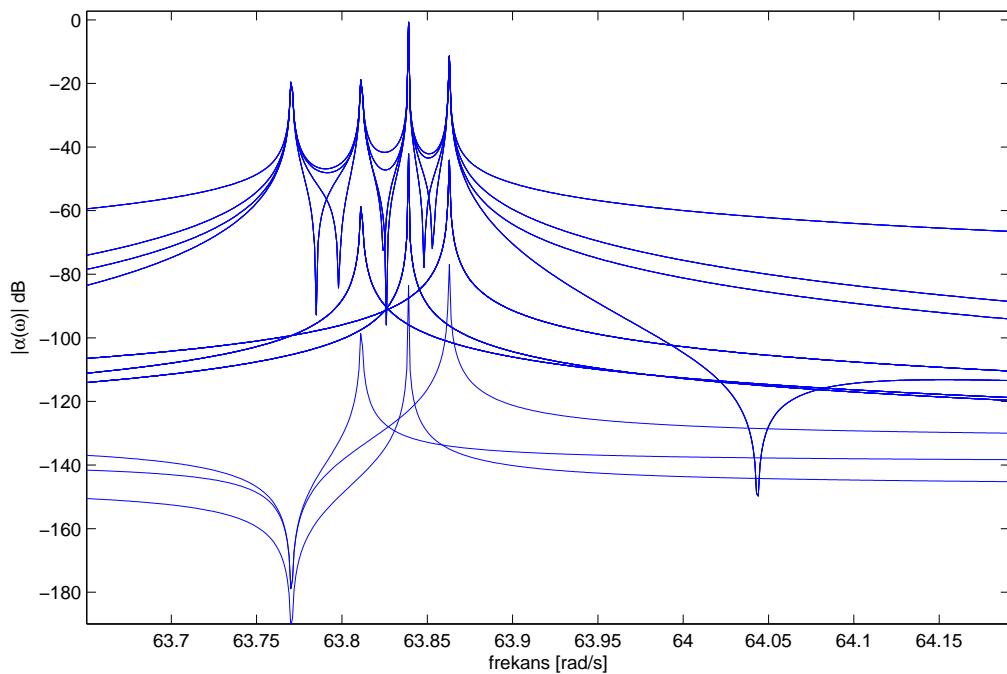
bulunur. Sönümsüz halde çizilen reseptans grafiklerinin sökümlü hal için olanları Şekil 6-8'de verilmiştir.



Sekil 6: Sönümlü hal reseptans matrisi elemanları yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $m/N$



Şekil 7: Sönümlü hal reseptans matrisi elemanları yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$



Şekil 8: Sönümlü hal reseptans matrisi elemanlarının  $\omega \approx 62 - 63 \text{ rad/s}$  civarındaki çizgileri.

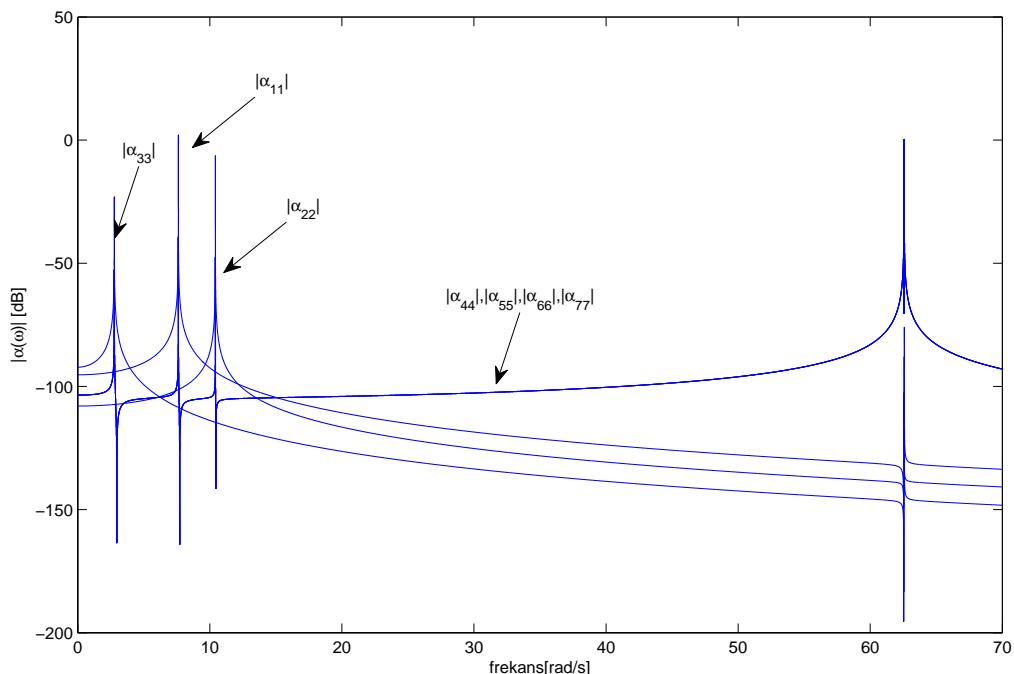
**7. Nokta FRF'leri çizdiriniz.Belirgin özelliklerini bu grafikler yardımıyla izah ediniz.**

Nokta FRF'ler reseptans matrisi diagonal elemanlarıdır. Bunların çizdirilmesiyle;

#### Sönümsüz Nokta FRF'ler

##### Tüm modlar:

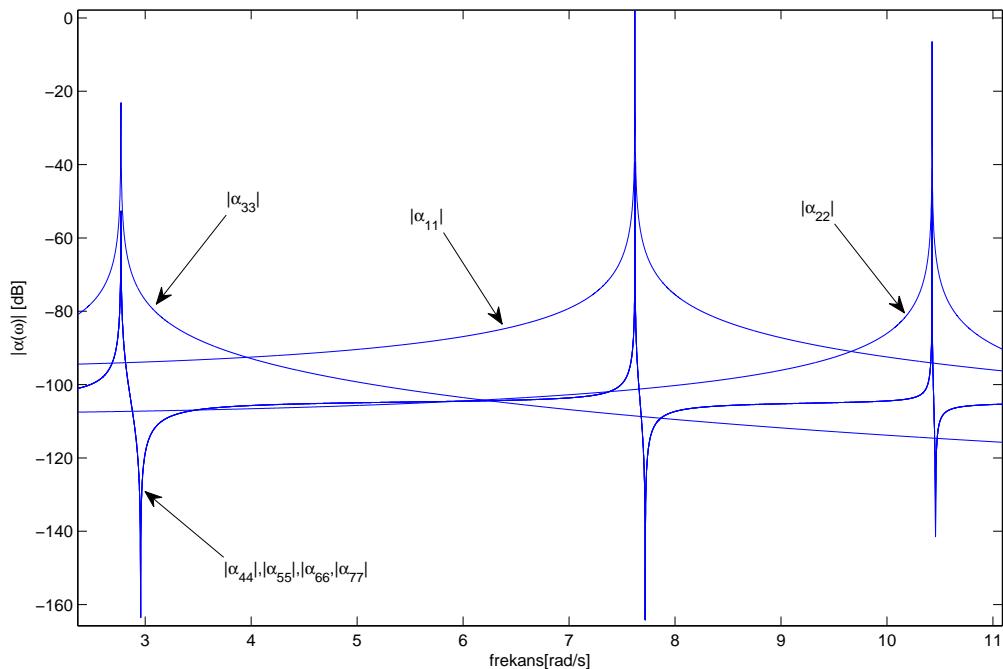
Tüm modların grafiği Şekil 15 'de verilmiştir. Şekilden görüldüğü üzere modlar iki ayrı grup olmak üzere düşük frekans ve yüksek frekansta yoğunlaşmışlardır. Ayrıca  $|\alpha(\omega)_{11}|, |\alpha(\omega)_{22}|, |\alpha(\omega)_{33}|$  lerin düşük frekanslarda tek bir doğal frekansları yakalanmıştır. Bu düşük frekanslarda ilgili serbestlikleri rezonansa sokmanın diğer ilgili serbestlikleri etkilemeyeceğini göstermektedir.



Şekil 9: Sönümsüz hal nokta FRF'ler, tüm modlar; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

İlk üç mod:

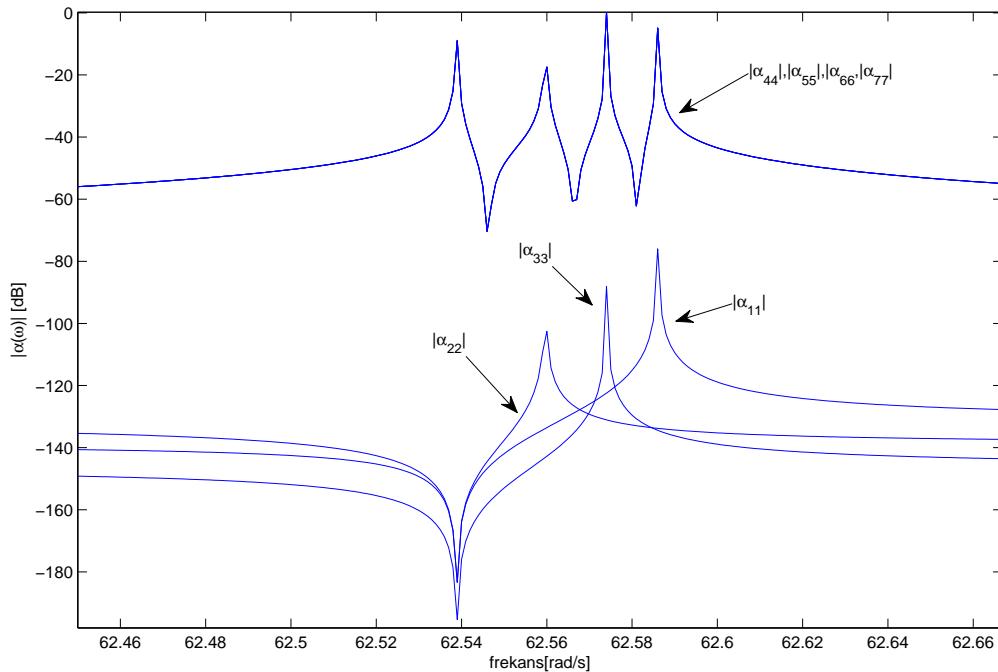
Bu grafikten görülmektedir ki her iki rezonans noktası arasında bir antirezonans bulunmaktadır.



Sekil 10: Sönümsüz hal nokta FRF'ler ilk 3 mod; yatay eksen *rad/s* ve dikey eksen *dB*

4-7. modlar:

Grafikten görülmektedir 4.,5.,6.,7. serbestliklere uygulanacak rezonans tahlikleri bir frekans hariç 1.,2.,3. nolu serbestlikleri de rezonansa sokacaktır. O bir adet frekansta da 1.,2.,3. nolu serbestlikler anti rezonans özelliği göstermektedir.

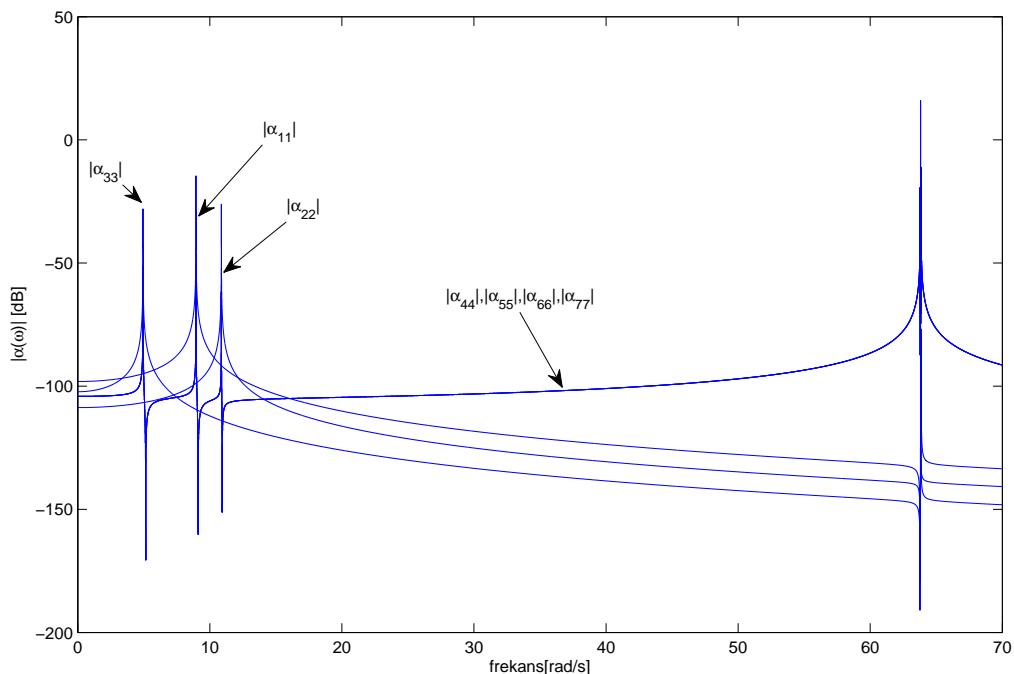


Sekil 11: Sönümsüz hal nokta FRF'ler 4-7. modlar; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

### Sönümlü Nokta FRF'ler:

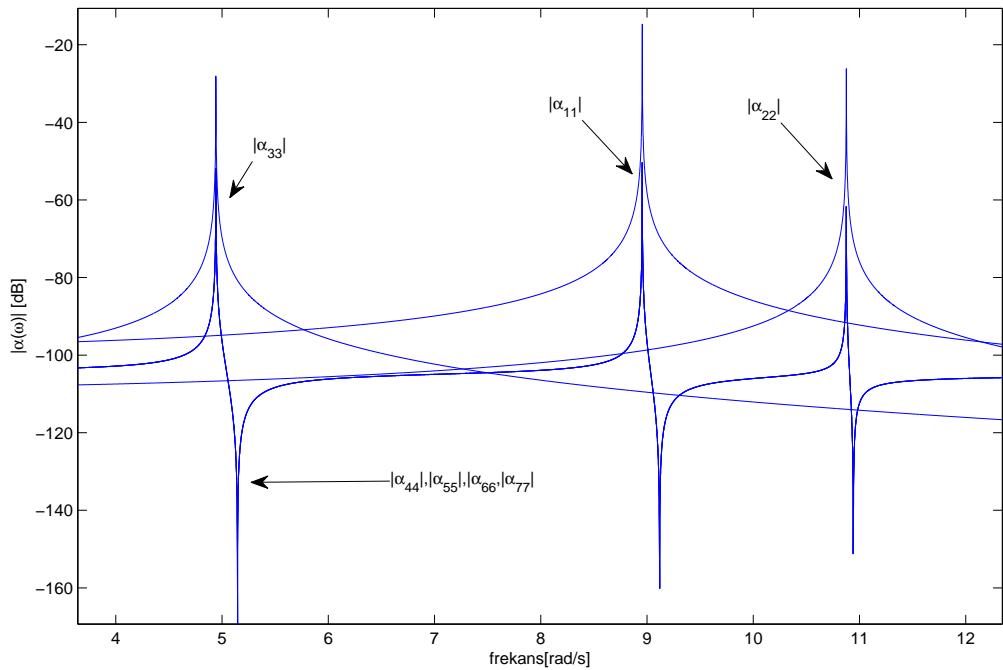
Sönümlü halde görüldüğü üzere doğal frekanslar x ekseninde ötelenmiştir. Onun haricinde doğal frekanslar daha yumuşak bir şekilde pik yapmaktadır.

### Tüm modlar:



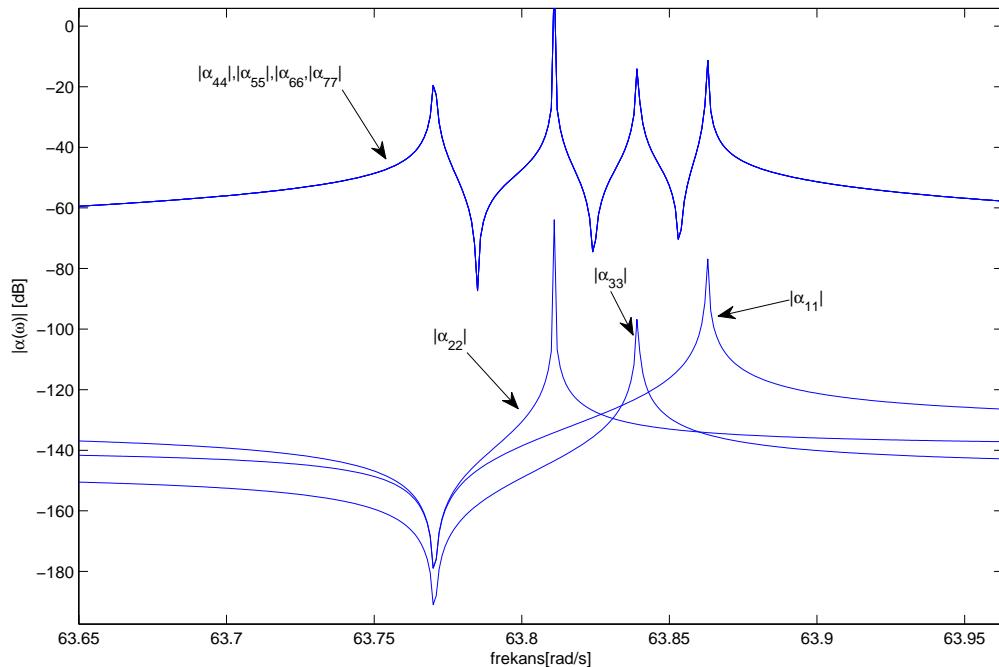
Şekil 12: Sönümlü hal nokta FRF'ler, tüm modlar; yatay eksen *rad/s* ve dikey eksen *dB*

İlk üç mod:



Şekil 13: Sönümlü hal nokta FRF'ler ilk 3 mod; yatay eksen *rad/s* ve dikey eksen *dB*

4-7. modlar:



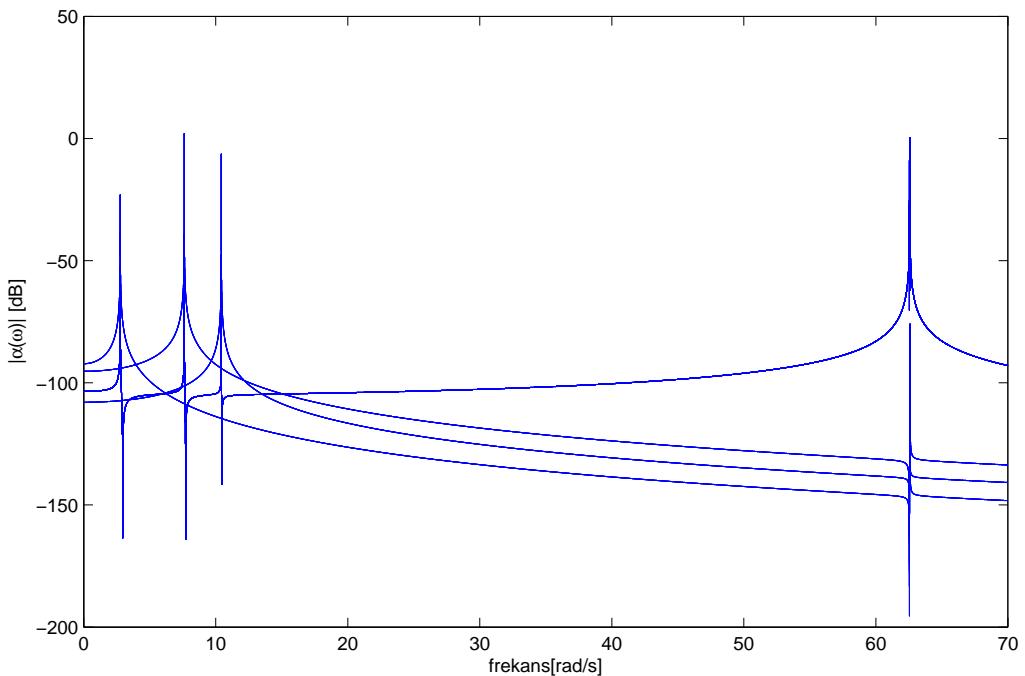
Şekil 14: Sönümlü hal nokta FRF'ler 4-7. modlar; yatay eksen *rad/s* ve dikey eksen *dB*

**8. Transfer FRF'leri çizdiriniz. Belirgin özelliklerini bu grafikler yardımıyla izah ediniz.**

Transfer FRF'ler reseptans matrisinin diagonal olmayan elemanlarıdır. Bunların grafikleri Nokta FRF'ler ile benzer olacaktır. Transfer FRF'lerin çizdirilmesiyle;

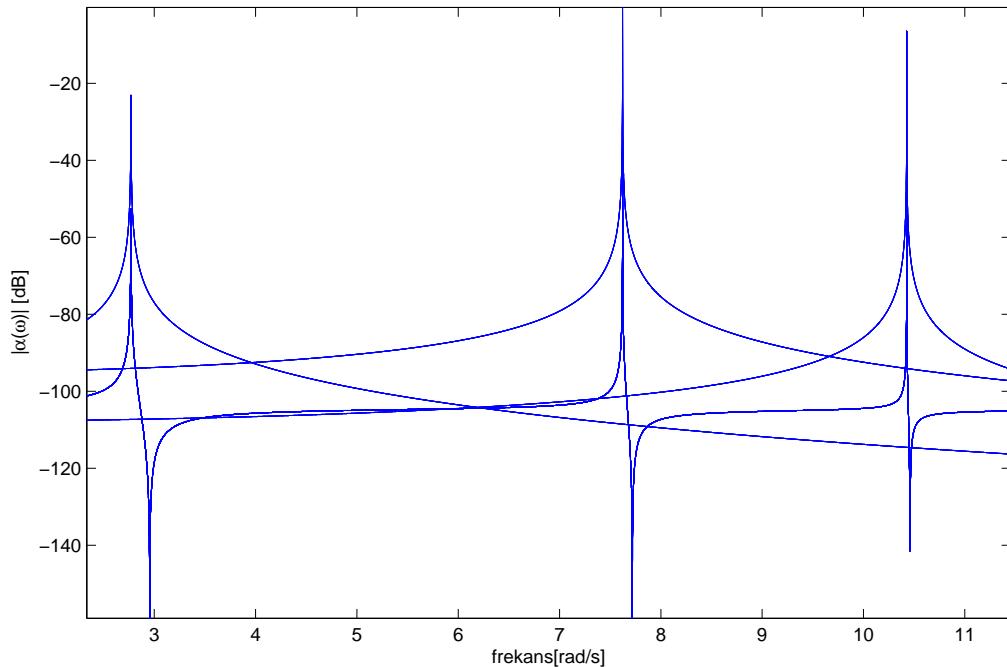
Sönümsüz Transfer FRF'ler

Tüm modlar:



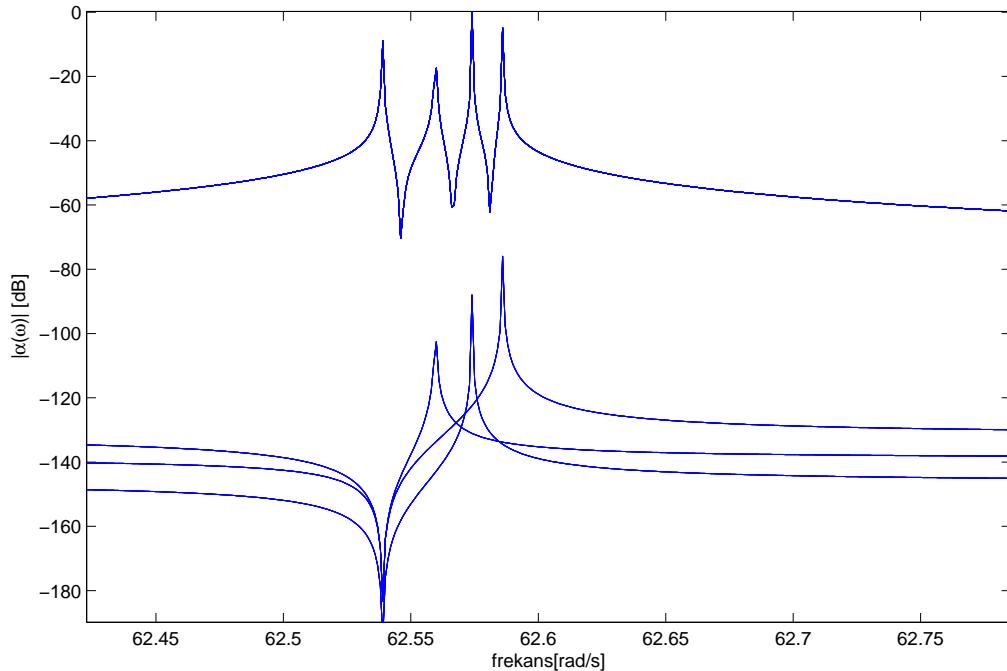
Sekil 15: Sönümsüz hal nokta FRF'ler, tüm modlar; yatay eksen  $\text{rad}/\text{s}$  ve dikey eksen  $\text{dB}$

İlk üç mod:



Şekil 16: Sönümsüz hal nokta FRF'ler ilk 3 mod; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

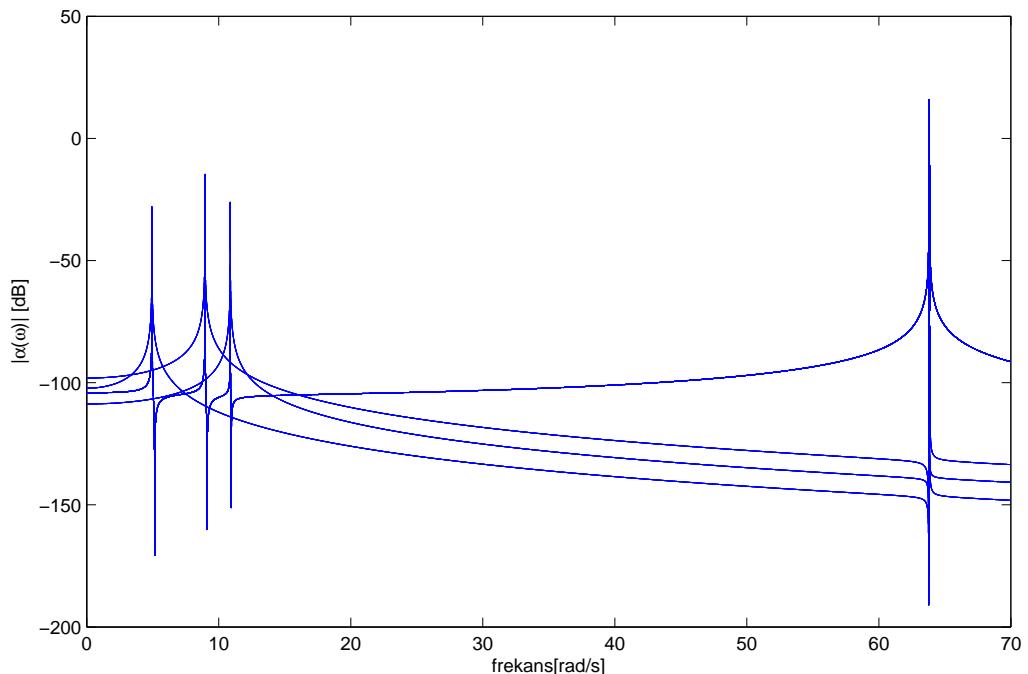
4-7. modlar:



Sekil 17: Sönümsüz hal nokta FRF'ler 4-7. modlar; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

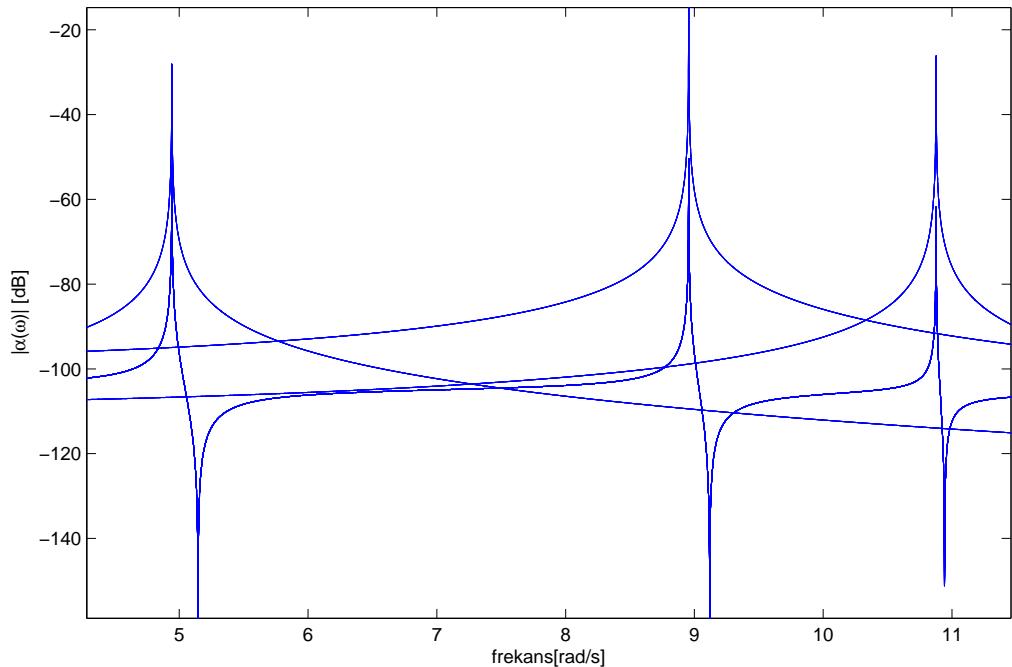
Sönümlü Nokta FRF'ler:

Tüm modlar:



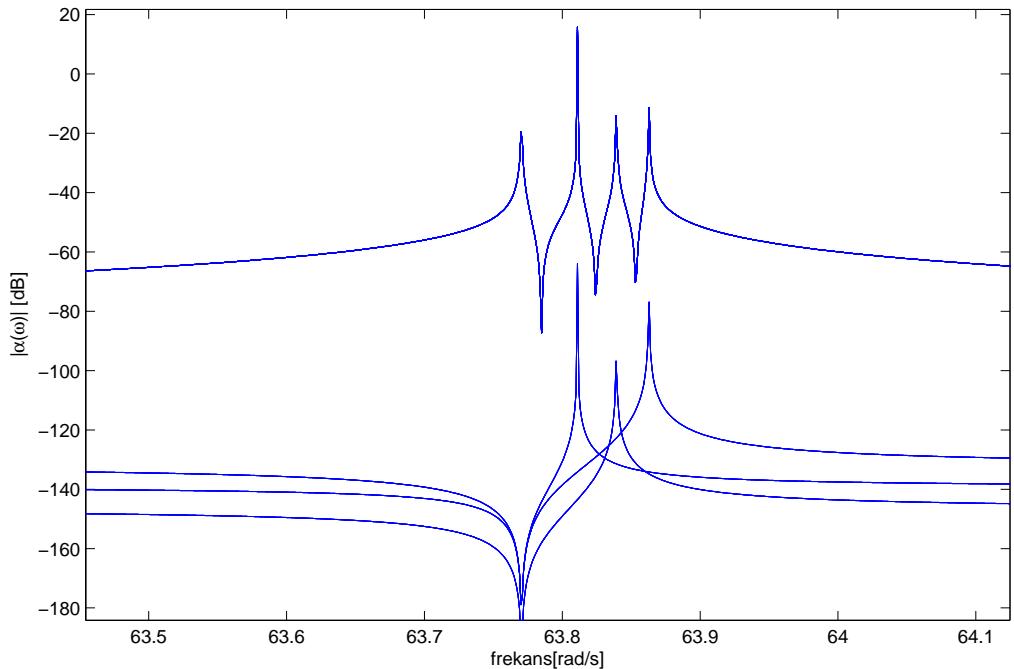
Şekil 18: Sönümlü hal nokta FRF'ler, tüm modlar; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

İlk üç mod:



Sekil 19: Sönümlü hal nokta FRF'ler ilk 3 mod; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

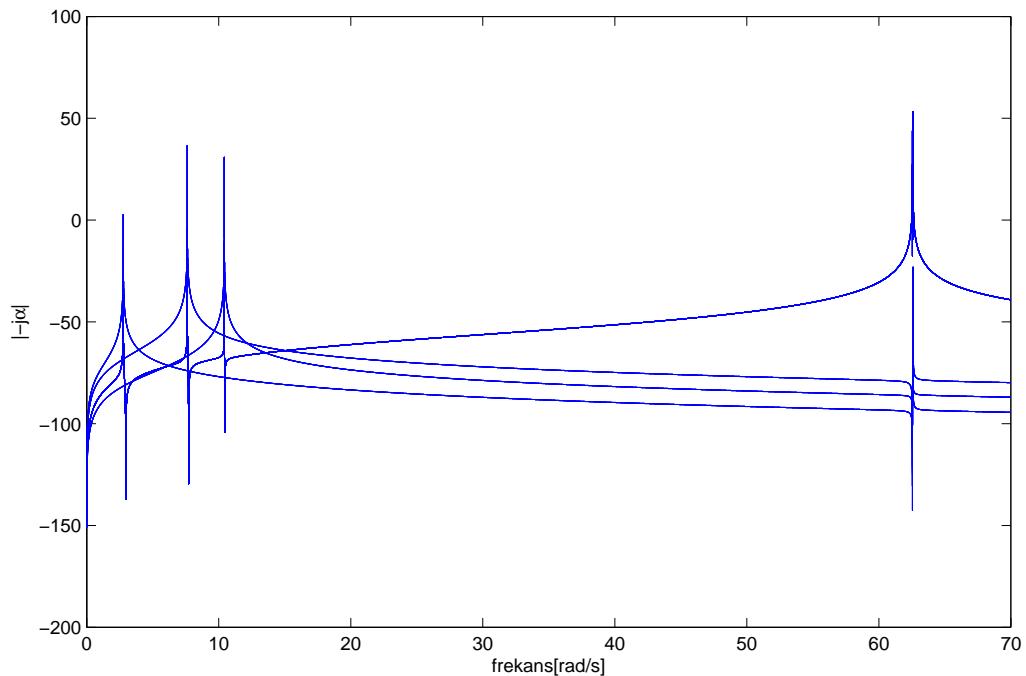
4-7. modlar:



Sekil 20: Sönümlü hal transfer FRF'ler 4-7. modlar; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

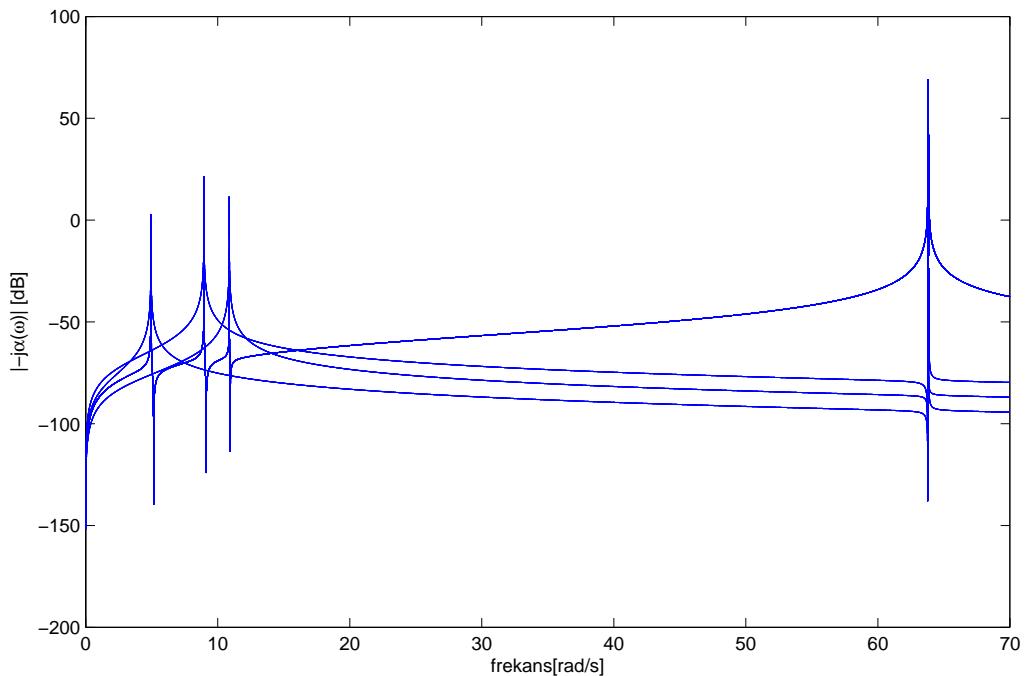
**9. Tüm mobilite eğrilerini tek bir grafikte topluca çizdiriniz.**

Sönümsüz hal mobilite eğrileri:



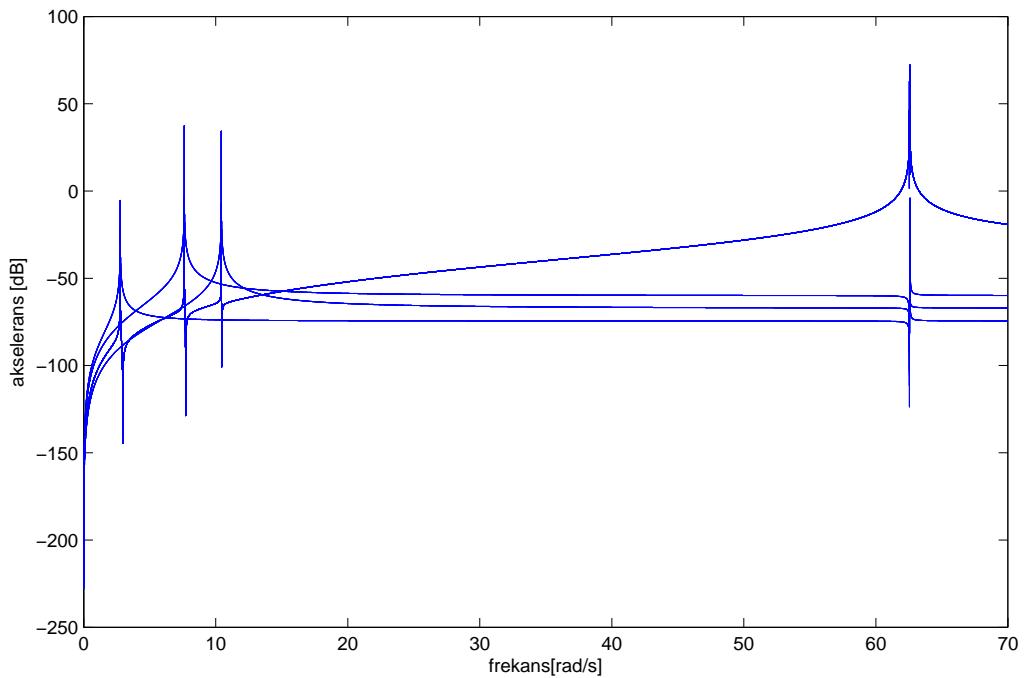
Şekil 21: Sönümsüz hal tüm mobilite eğrileri; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

Sönümlü hal mobilite eğrileri:



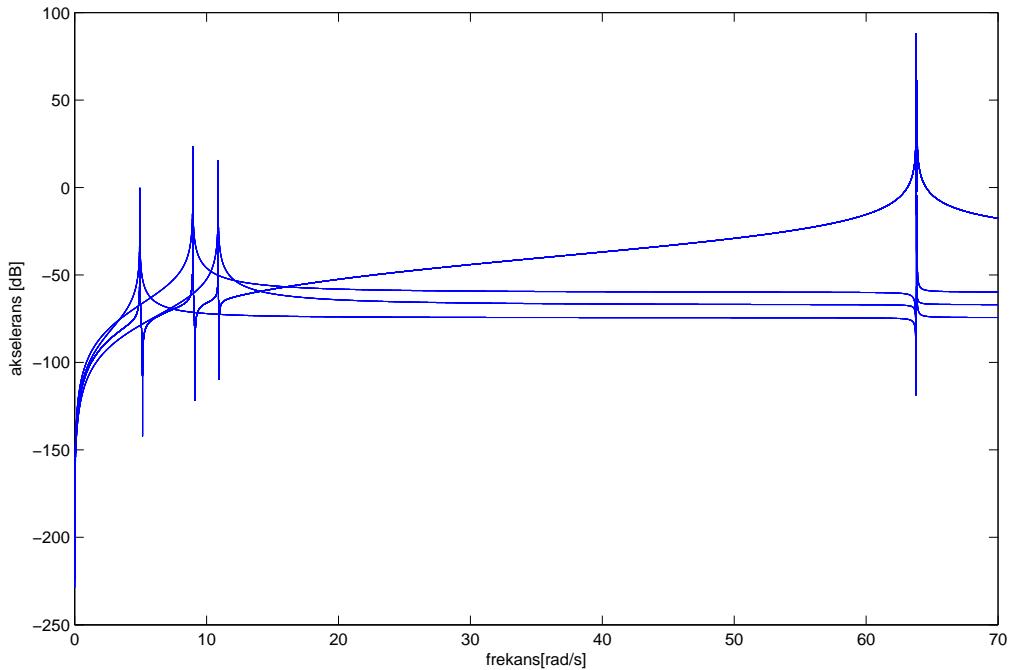
Sekil 22: Sönümlü hal tüm mobilirte eğrileri; yatay eksen  $\text{rad/s}$  ve dikey eksen  $\text{dB}$

Sönümsüz hal akselerans eğrileri:



Sekil 23: Sönümsüz hal tüm mobilite eğrileri; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$

Sönümlü hal akselerans eğrileri:



Şekil 24: Sönümlü hal tüm mobilirte eğrileri; yatay eksen  $rad/s$  ve dikey eksen  $dB$