

Grundlagenpraktikum: Rechnerarchitektur

Gruppe 140 – Abgabe zu Aufgabe A208
Wintersemester 2023/24

Tianhao Gu

Zhongfang Wang

Julien Escaig

1 Einleitung

Das Ziel dieser Projektarbeit ist es, einen Algorithmus in C zu entwickeln, der ein farbiges Bild in ein Graustufenbild umwandelt und anschließend die Helligkeit des Graustufenbilds mithilfe der Gammakorrektur anpasst.

Als Eingabe akzeptiert unser Programm nur PPM-Dateien [7] des Typs P6. P6 bezieht sich dabei auf das Binärformat der Pixeldaten. Diese besteht aus einem Header mit Metadaten, worauf die Pixel-Informationen folgen. Im Datenteil der PPM Datei gibt es für jeden Pixel genau drei Werte, die jeweils die Stärke der Farben Rot, Grün und Blau speichern. Je größer der Wert desto stärker ist die Farbe in einem bestimmten Pixel vertreten. Unterhalb ist ein einfaches Beispiel eines solchen Bildes.

```
p6
4
2
255
0,0,0    255,0,0    0,255,0    0,0,255
255,255,0 255,0,255 0,255,255. 255,255,255
```



Abbildung 1: ein Beispiel für P6 PPM

Abbildung 2: erzeugt durch den Beispielcode

Die erste Phase des Projekts ist die Graustufenkodierung. Dafür verwenden wir die Formel (1) unten. Dabei wird der gewichtete Durchschnitt der Rot-, Grün- und Blau-Werte jedes Pixels ermittelt. Ein Beispiel der Graustufenkodierung ist in Abbildung 3 zu sehen.

$$D(x, y) = \frac{a * R + b * G + c * B}{a + b + c} \quad (1)$$



Abbildung 3: Graustufen Konvertierung von Abbildung2

Im zweiten Teil der Aufgabe befassen wir uns nun mit einem anderen Aspekt des menschlichen visuellen Systems (HVS) und zwar der Helligkeit [8]. Diese hat einen großen Einfluss darauf, wie natürlich ein Bild auf uns Menschen wirkt. Die Gammakorrektur ändert die Helligkeit bzw. den Kontrast eines Bildes, und hängt von der Wahl des γ Parameters ab. Bei diesem Algorithmus wird die Gammakorrektur durch folgende mathematische Formel (2) bestimmt. Die Werte $D'(x,y)$ ergeben die Intensität der Graustufenkodierung für alle Pixel (x,y) . Ein kleinerer Gammawert führt zu einem helleren Bild, während ein größerer Gammawert zu einem dunkleren Bild führt. Bei Gamma gleich 1 ist die Gammakorrektur entsprechend linear, der übliche Gamma-Wert liegt bei 2,2, und bei Gamma 3 ist das Bild sehr dunkel.[2]

$$D'(x, y) = \left(\frac{D(x, y)}{255} \right)^\gamma * 255 \quad (2)$$

Um den Effekt der Gammakorrektur zu visualisieren, betrachten wir nochmal die Abb.3. Unterhalb in Abb4. kann man 3 verschiedene „Helligkeits-Versionen“ von Abb.3 vergleichen.



Abbildung 4: Gamma=0.1



Abbildung 5: Gamma=1



Abbildung 6: Gamma=10

Die Hauptfunktion unseres Programms erhält 6 Parameter. Zwei davon sind `input_file_name` und `output_file_name`, welche die Pfade des Eingabebildes und des Ausgabebildes repräsentieren. Der Parameter `version` vom Datentyp `int` gibt die Version an. Der Parameter `benchmark_number` repräsentiert die Anzahl der Benchmark-Zyklen. Die Parameter `a`, `b`, und `c` vom Datentyp `float` stellen die RGB-Gewichte für die Graustufenumwandlung dar. Schließlich erhält die Funktion noch einen Parameter `_gamma` vom Datentyp `float`, der für den Gammawert steht.

Obwohl die oben genannten Parameter zusätzlich zu den Ein- und Ausgängen standardmäßig mit sinnvollen Defaultwerten besetzt sind, kann der Nutzer diese Parameter auch selbst mit spezifischen und sinnvollen Werten ersetzen. Wenn die gesetzten Werte nicht sinnvoll sind, wird eine Fehlermeldung ausgegeben und das Programm wird beendet. Hier ist eine Übersicht an Optionen, die der Nutzer beim Aufrufen des Programms setzen kann:

- Option `-V<Zahl>` Die Option `-V 0` ist die Standardimplementierung. `-V 1` steht für die Implementierung V1 mit Taylorreihe. `-V 2` steht für die Implementierung V2 mit SIMD. Andere Werte sind nicht erlaubt.
- Option `-B<Zahl>` Falls gesetzt, wird die Laufzeit der angegebenen Implementierung gemessen und ausgegeben. Das Argument gibt die Anzahl an Wiederholungen an.

gen des Funktionsaufrufs an. Es darf nicht kleiner als 1000 sein.

- Positionales Argument *<Dateiname>* Der Pfad zur Eingabedatei ist ein obligatorischer Parameter. Falls dieser ungültig ist, wird eine Fehlermeldung ausgegeben und das Programm wird beendet.
- Option *-o<Dateiname>* Der Pfad zur Ausgabedatei ist ein obligatorischer Parameter. Falls dieser ungültig ist, wird eine Fehlermeldung ausgegeben und das Programm wird beendet.
- Option *--coeffs<FP Zahl>,<FP Zahl>,<FP Zahl>* Die drei Argumente müssen stets nicht-negativ sein und dürfen nicht den Wert Infinity und NaN annehmen. Ihre Summe darf auch nicht 0 betragen.
- Option *--gamma<Floating Point Zahl>* Der Gammawert kann nicht negativ sein. Wenn diese Option nicht gesetzt wird, wird standardmäßig der Wert 1 verwendet.
- Option *-h | --help* Eine Beschreibung aller Optionen des Programms und Verwendungsbeispiele werden ausgegeben und das Programm danach beendet.

2 Lösungsansatz

Nun wird die Implementierung des Programms betrachtet. Zu Beginn erhält das Programm die Optionen und ihre Argumente von der Eingabe des Nutzers durch die Methode `getopt_long[4]`. Nach erfolgreichem Einlesen der Eingabe wird die Funktion `check_values` aufgerufen, um zu überprüfen, ob alle Argumente für das Programm legal sind. Bei illegalen Argumenten wird das Programm mit einer Fehlermeldung beendet.

Die Versionsnummer der Implementierung kann entweder 0, 1 oder 2 sein. Bei den Versionen 0 und 1 werden lediglich sequenzielle Anweisungen verwendet. Version 2 wiederum verwendet SIMD-Instruktionen zur Berechnung der Graustufenkonvertierung.

In allen aufgerufenen Funktionen wird zunächst die Eingabedatei gelesen. Gemäß der Netpbm-Dateibeschreibung ist die ppm-Datei in zwei Teile unterteilt: Metadaten und Pixelbereich. Es wird darauf geachtet, dass in den Metadaten ein Kommentar an beliebiger Stelle eingefügt werden kann. Daher wird beim Lesen der Metadaten in der ppm-Datei ein Zustandsautomat entworfen, um alle möglichen Randfälle abzufangen und zu behandeln. Abb. 7 zeigt, dass der ppm-Leser P6 in den Metadaten liest und mögliche Kommentare verarbeitet. Der Zustand N in der Abbildung zeigt an, dass ein Kommentar eingegeben wurde. Der Zustand N kann nur durch Lesen eines LF oder CR verlassen werden. Der in Abb. 8 dargestellte Zustandsautomat wird zum Lesen von `width`, `height` und `maxval` und zur Behandlung möglicher Kommentare verwendet. state N in der Abbildung zeigt an, dass ein Kommentar eingegeben wurde. state N kann nur durch das Lesen eines LF oder CR verlassen werden.

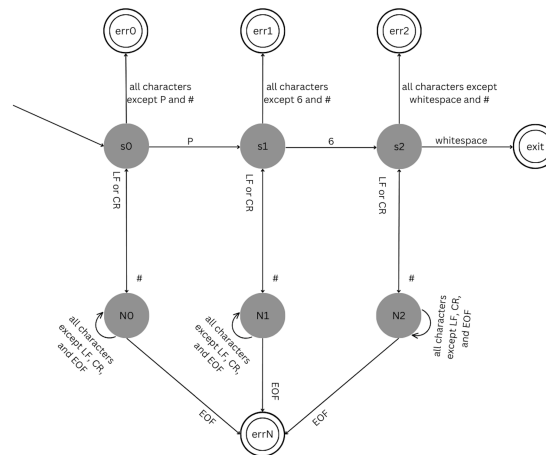


Abbildung 7: Erste Zustandsautomat

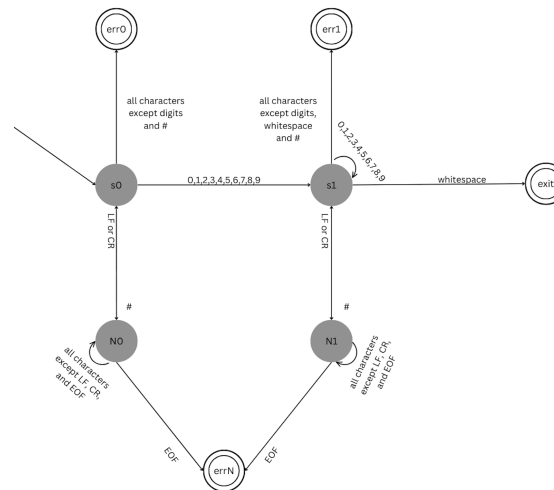


Abbildung 8: Zweite Zustandsautomat

Der Speicher für die Eingabedaten und Ausgabedaten wird basierend auf den Metadaten der Eingabedatei allokiert. Bei der Implementierung von V0 und V1 werden die drei Farben jedes Pixels beim Lesen der Eingabedatei in der originalen Reihenfolge gespeichert. Bei der Implementierung von V2 werden beim Einlesen die drei Farben jedes Pixels getrennt gespeichert. Dadurch werden drei Speicherbereiche im Heap erstellt, die jeweils für eine bestimmte Farbe alle Pixel-Werte in fortlaufender Reihenfolge speichern. In der main-Funktion wird eine Switch-Anweisung verwendet, um verschiedene Funktionen gemäß der gewählten Versionen aufzurufen.

In V2, der SIMD-Implementierung, wird `aligned_alloc[3]` verwendet, um Speicher zu reservieren. Die Startadresse des Speichers wird auf ein Vielfaches von 16 ausgerichtet und erhöht damit die Geschwindigkeit des Ladens und Zurückschreibens von und aus dem Speicher in die xmm-Register. Anschließend wird die ausgewählte Versi-

on von `gamma_correct` aufgerufen. In V0 und V1 wird die Graustufenkonvertierung für jeden Pixel sequentiell berechnet. V2 verwendet SIMD-Anweisungen, welche es ermöglichen die Graustufenwerte von vier Pixeln gleichzeitig zu berechnen. Hier noch eine Bemerkung: Wir setzen die Standardwerte von a , b , c wie folgt fest: $a = 0.299$ $b = 0.587$ $c = 0.114$. Diese Gewichtungungen werden häufig verwendet[10], da sie in der Praxis gute Ergebnisse liefern und die Luminanzeigenschaften der Farben natürlich für das menschliche Auge wirken. Nachdem die Graustufenwerte der Pixel berechnet wurden, verwenden V0 und V2 die `pow`-Funktion der `math.h` Bibliothek, um die Graustufenwerte nach der Gammakorrektur für jedes Pixel sequentiell zu berechnen. V1 verwendet keine Bibliotheksfunktionen. Im nächsten Teil werden wir sehen, wie V1 grundlegende mathematische Operationen verwendet um die `pow` Funktion durch die Taylor-Entwicklung zu approximieren.

Die Taylor Entwicklung [9] dient der lokalen Approximation eines Funktionswertes und hat die allgemeine Form $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$ Wir verwenden den Fall $a = 1$ und erhalten dann folgende Formel:

$$f(x) = 1 + \frac{(x-1)^1}{1!}(\gamma) + \frac{(x-1)^2}{2!}(\gamma)(\gamma-1) + \dots + \frac{(x-1)^n}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (\gamma - i) + R_n(x) \quad (3)$$

Betrachten wir zunächst drei mögliche Grenzfälle:

1. Wenn die Basis kleiner oder gleich 0.5 ist und Gamma größer oder gleich 150 ist, ist das Ergebnis immer 0 (**Underflow** für `float`).
2. Wenn die Basis 1.0 beträgt, ist das Ergebnis immer 1.
3. Wenn Gamma größer ist als die magische Zahl 75464577, ist das Zwischenergebnis kleiner als 0,5 und muss nach dem Runden des endgültigen PGM 0 sein für alle positive Basis kleiner als 1.

Eine weitere logische Schlussfolgerung für Formel (2) ist, dass die Basis $D(x, y)/255$ immer eine Zahl zwischen 0 und 1 ist. (255 ist `maxValue`) *Gamma* ist laut Angabe so zu wählen, dass es größer als 0 und nicht *Infinity* oder *NaN* ist. Bei der Entwicklung haben wir festgestellt, dass die Berechnung von $\prod_{i=0}^{n-1} (\gamma - i)$ bei größeren Gammawerten leicht zu einem **Overflow** führt. Um dieses Problem zu lösen, zerlegt V2 *Gamma* in eine ganze Zahl und eine Dezimalzahl und berechnet diese separat.

Für den Ganzzahlanteil ist unser Design Gedanke, den Exponenten in eine binäre Zahl umzuwandeln und dann zu zerlegen. Im folgenden Beispiel wird die 29. Potenz von 0,79 berechnet

$$29 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$$

$$0.79^{29} = 0.79^{2^0} \cdot 0.79^{2^2} \cdot 0.79^{2^3} \cdot 0.79^{2^4}$$

Da Gamma kleiner als 67075968 ist, also zwischen 2^{25} und 2^{26} liegt, benötigen wir unabhängig vom Exponenten höchstens 26 Schleifen.

Danach verwenden wir Formel (3) für den Dezimal-Anteil, und die Akkumulation endet, wenn der Expansionsterm klein genug ist. Hier ist zu beachten, dass wir das Ergebnis des i -ten Expansionsterms zur Berechnung des $(i+1)$ -ten Expansionsterms verwenden können.

Die Graustufenwerte nach der Gammakorrektur werden über einen weiteren Funktionsaufruf im Format von PGM in die Ausgabedatei geschrieben. PGM (Portable Gray Map) Format[7] wird zur Speicherung von Graustufenbildern verwendet, weil es ein einfaches, leicht umsetzbares Bildformat ist. Im Vergleich zu anderen komplexen Bilddateiformaten ist das PGM-Format sehr einfach. Es speichert die Pixelwerte des Bildes und kann leicht in Textform bearbeitet und gelesen werden. Dieses Format erfordert keine komplizierten Dekodierer oder zusätzliche Datenkompression, was es ideal für die schnelle Speicherung und Verarbeitung von Graustufenbilddaten macht. Bevor alle Ressourcen freigegeben werden, wird `gamma_correct()` wiederholt ausgeführt, wenn der Benutzer die Option `-B` in den Optionen aktiviert hat. Die Zeit wird zu Beginn und am Ende des Zyklus aufgezeichnet. Diese Laufzeit des Zyklus wird später für die Leistungsanalyse verwendet.

Am Ende des Programms müssen alle Ressourcen freigegeben werden. Zusätzlich wird an sämtlichen Stellen im Programm, an denen eine Allocation oder eine IO-Operation durchgeführt wird, überprüft, ob sie erfolgreich war.

Das Programm verteilt alle Funktionen sinnvoll auf die verschiedenen Funktionen. Jede Funktion ist angemessen groß, logisch korrekt, leicht zu warten und vermeidet Blob Muster.

3 Genauigkeit

In diesem Teil der Ausarbeitung beschäftigen wir uns mit der Genauigkeit unserer Implementierung.

Um die Genauigkeit des gesamten Verfahrens zu studieren, untersuchen wir die Graustufenkonvertierung und die Gammakorrektur separat. Im Schritt der Graustufenkonvertierung werden wir den Unterschied zwischen den Ergebnissen von `v0` und der offiziellen `netpbm`-Funktion `ppmtopgm` untersuchen, und im Schritt der Gamma-Korrektur analysieren wir sie unter dem Gesichtspunkt der mathematischen Konvergenz, bzw. unter dem Gesichtspunkt des realen Fehlers des Programmlaufs.

Die analytischen Ergebnisse der Graustufenumrechnung lauten wie folgt.

pic by zhongfang

Schauen wir uns die Ungenauigkeit bei Gammakorrektur von dem mathematischen Perspektive an, die entstanden wäre, wenn das Programm in Version 2 anstelle von `pow` in `std::lib` die Formel (3) verwendet hätte. Dies liegt daran, dass wir lediglich eine beschränkte Anzahl von Termen der Taylorreihe berechnen können. Dadurch werden Terme ab dem $(n+1)$ -ten vernachlässigt, was zu Genauigkeitsverlusten führt. Zur Schätzung der Präzision ziehen wir das Peano'sche Restglied[6] heran.

$$o((x-1)^n)$$

Es zeigt sich, dass das Restglied bei einem Wert von x nahe null langsam und bei x nahe eins schneller konvergiert. Eine präzisere Beschreibung ermöglicht das Lagrange'sche Restglied[1], insbesondere da der Exponent ein Bruchteil des Gammas ist und wir uns auf Werte zwischen 0 und 1 konzentrieren. Wir setzen einen Anpassungspunkt von 1 ein und vereinfachen die Lagrangesche Restglied wie folgt:

$$\frac{\prod_{i=0}^n (\gamma - i) \cdot (x - 1)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Wir haben zunächst das Gamma oder x fixiert und die Auswirkungen der Änderung der anderen Variablen auf die Anzahl der Iterationen analysiert. Die Ergebnisse wurden mit der Software Wolframalpha berechnet. Die Schlussfolgerungen sind in den Abbildungen 8 und 9 dargestellt.

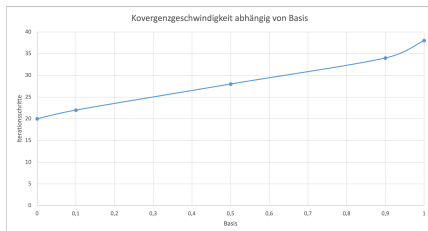


Abbildung 9: Anzahl der erforderlichen Iterationen für verschiedene x , wenn gamma auf 0,5 festgelegt ist

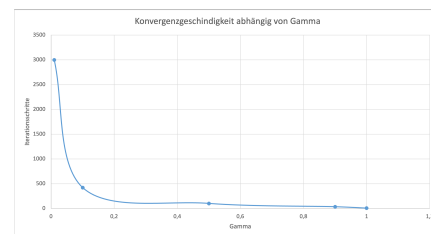


Abbildung 10: Für verschiedene Gamma, wenn x auf 0,9 festgelegt ist

Daraus folgt, dass die Auswirkung von Gamma linear und die von der Basis krummlinig ist. Wir haben festgestellt, dass bei $x=0,0001$ mehr als 300.000 Iterationen erforderlich sind. Wenn also die Basis nahe bei Null liegt, wird die Konvergenz langsam sein, was auch zu einem Anstieg des Fehlers führt.

Wir haben eben die Genauigkeitsberechnungen vom mathematischen Standpunkt aus geschätzt, und im Folgenden sehen wir, ob das Programm ebenfalls dieser Schlussfolgerung folgt. Das folgende Bild zeigt den Unterschied zwischen den Ergebnissen der verschiedenen (γ, x) -Berechnungen und der pow -Funktion von math.h . Die Schlussfolgerung ist in Abbildung 10 dargestellt. Die Ergebnisse der Ausführung unseres Programms bestätigen auch die Schlussfolgerungen der mathematischen Berechnungen, d.h. der Wert von Gamma hat einen geringen Einfluss auf den Fehler, während x sehr nahe bei 0 zu einem großen Fehler führt.

pic by zhongfang

Als Nächstes vergleichen wir den Gamma-Korrekturschritt - wir haben 255 mögliche Pixelpunkte, für die wir die offiziellen V0-, V1- bzw. netpbm-Methoden verwenden, und die Ergebnisse sind in der Abbildung dargestellt.

pic by zhongfang

Aber wirkt sich das sehr negativ auf unsere Ergebnisse aus? In Anwendungen tatsächlich nicht wirklich schlimm. Begründen ist wie folgt:

1. Die Wahrscheinlichkeit ist sehr gering, wenn die Basis kleiner als 0,0001 ist.
2. Wenn die Basis klein und gleichzeitig Gamma groß ist, wird dies bereits als Grenzfall berücksichtigt.
3. Wenn das Gamma einen ganzzahligen Teil enthält, ist das Ergebnis des ganzzahligen Teils kleiner als 1, weil die Basis kleiner als 1 ist. Der absolute Fehler aus dem gebrochenen Teil der Berechnung wird reduziert, wenn wir das Ergebnis mit dem ganzzahligen Teil multiplizieren.

In der Grafik1 sehen wir das Resultat der Laufzeitanalyse für die 3 verschiedenen Versionen bei unterschiedlichen Benchmarking-Zyklen.

GRAFIK1 - TODO

Die Version 2 war wie zu erwarten langsamer als Version 1, da sie nicht die Pow-Funktion der Library benutzt, sondern selbst die Taylorreihe implementiert. Durch das Verwenden von SIMD Anweisungen konnte die Laufzeit des Programms um etwa 30 Prozent verbessert werden.

Bei der Analyse des Speicherbedarfs verwenden wir das Tool "Valgrind". Dabei handelt es sich um eine Sammlung von Programmierwerkzeugen, die unter anderem die Speichernutzung eines Programms protokollieren kann. Beim Ausführen unseres Programms mit 9 verschiedenen Eingabe-Bildern unterschiedlicher Größe kamen wir zu folgenden Ergebnissen (Abb.10).

Für alle 3 Implementierungen kann man einen linearen Zusammenhang zwischen Bildgröße und Speichernutzung beobachten. V0 und V1 haben jeweils sehr ähnliche Resultate geliefert, weshalb sie in der Grafik zusammengefasst wurden. Beide Implementierungen haben ungefähr eine Speichernutzung von 3,7 KB pro 1000 Pixel. Die Implementierung V2 verbraucht mit 16 KB pro 1000 Pixel im Vergleich deutlich mehr Speicher.

Diese Unterschiede in der Speichernutzung stimmen mit unseren theoretischen Überlegungen überein. Beim Laden des PPM-Bildes für die SIMD Version werden die uint_8 Werte der Pixel als float Werte gespeichert. Dadurch kommt es zu einer 4x größeren Speicherallokation. Zusätzlich wird bei Version 2 ein Zwischenergebnis für die Pixel als float Werte gespeichert. Daher sollte der Speicherbedarf insgesamt um den Faktor 4.25 größer sein.

4 Performanzanalyse

Im vorletzten Teil der Ausarbeitung untersuchen wir nun die Leistung unserer verschiedenen Implementierungen. Dabei analysieren wir bezogen auf die Laufzeit und den Speicherbedarf.

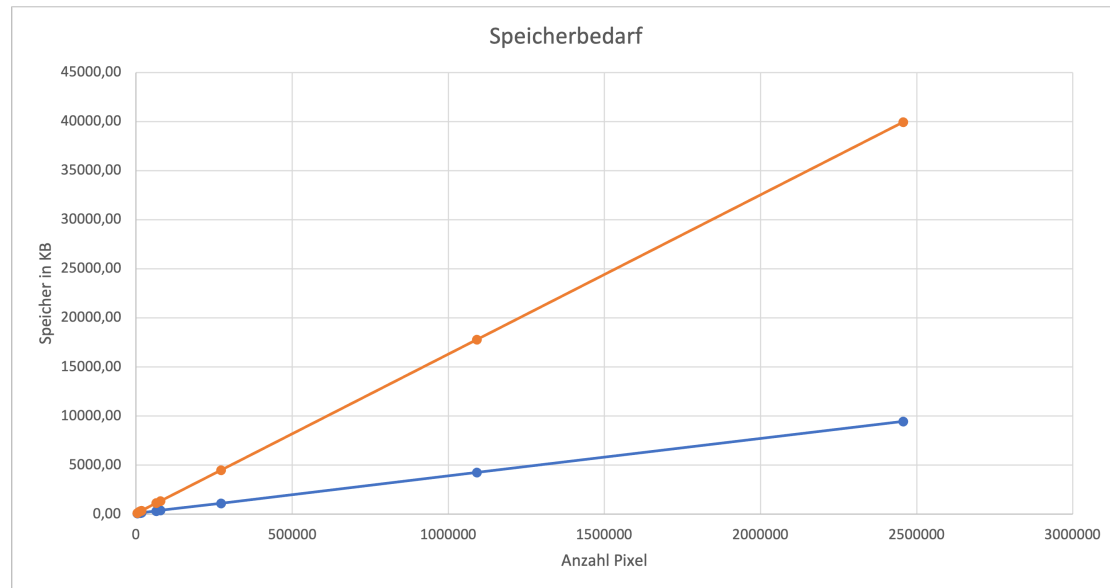


Abbildung 11: Speicherbedarf für V0/V1 (blau) und V2 (orange)

Eine theoretische Laufzeitanalyse ist für keine der drei Implementierungen praktisch umsetzbar. Bei Version 0 und Version 2 wird die `pow()`-Funktion der `Math.h` - Bibliothek verwendet. Dabei handelt es sich um eine Blockbox-Funktion, deren Laufzeit wir nicht theoretisch bestimmen können. Bei Version 1 findet eine Approximation durch die Taylorreihe statt. Dabei wird die Reihe abgebrochen, sobald das neueste Reihenglied betragsmäßig kleiner als ein bestimmtes Epsilon ist. Dies hat zur Folge, dass es praktisch nicht möglich ist vorherzusagen, wie viele Glieder im Durchschnitt berechnet werden müssen, da die Größe und Entwicklung der Reihenglieder stark von Basis und Exponent abhängen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Bei diesem Projekt ging es darum, eine Graustufen-Kodierung und Gammakorrektur selber zu programmieren. Das Umsetzen der Graustufen-Kodierung war relativ einfach, genau wie die Implementierung mit der `Pow`-Funktion. Die Aufgabe erhielt eine neue Stufe an Komplexität, sobald es zur Implementierung mit der Taylorreihe und der SIMD Implementierung kommt. Die Taylorreihe führt zu einer geringeren Genauigkeit. Die SIMD-Funktion hat zu einer höheren Performanz von etwa ... Prozent geführt. Abschließend kann man sagen, dass dieses Projekt einen interessanten Einblick in verschiedene Bildformate, das Approximieren mit Hilfe der Taylorreihe und das Optimieren mit Hilfe von SIMD-Intrinsics geliefert hat.

Außerdem erörterten die Diskussionsteilnehmer, wie das Problem der langsamen Iteration gelöst werden kann, wenn x klein ist; eine Lösung ist die Verwendung von

Lookup Table[5], nämlich speichern wir die genaue Berechnung von kleine x und häufig verwendetem Gamma (Gamma nahe 2,2) in LUT.

todo by zhongfang: explain how to use lookup table to solve the problem of slow convergence when x is small

Für die praktische Analyse der Laufzeit wurden die 3 Versionen des Algorithmus auf einem Gerät mit folgender Spezifikation evaluiert:

- AMD Ryzen 5 3600 6-Core Processor 3.59 GHz
- 8.00 GB DDR4 RAM
- ...

Literatur

- [1] biancahoegel.de. Taylor-formel. <https://www.biancahoegel.de/mathe/analysis/taylor-formel.html>, visited 2024-02-02, January 2021.
 - [2] Cambridge in Colour. Understanding gamma correction, 2020.
 - [3] GNU. aligned_alloc(3) - linux man page. https://man7.org/linux/man-pages/man3/aligned_alloc.3.html, visited 2024-01-25, March 2008.
 - [4] GNU Project. *GNU C Library: getopt_long(3)*. GNU, December 2022. https://man7.org/linux/man-pages/man3/getopt_long.3.html, visited 2024-02-01.
 - [5] Jungck, P. and Dencan, R. and Mulcahy, D. *packetC Programming*. Apress, 2011.
 - [6] Mathematik.net. Reihen und taylor-polynome. <https://www.mathematik.net/reihen-taylor-polynome/tp3s20.htm>, visited 2024-02-01, December 2009.
 - [7] Netpbm community. Netpbm: Open-source graphics tools and file formats. <https://netpbm.sourceforge.net/doc/>, visited 2024-02-02, August 2020.
 - [8] Stefan H.Westin. Gamma correction, December 2011.
 - [9] Wolfram Research. Taylor series — from wolfram mathworld. <https://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html>, visited 2022-02-01, January 2024.
 - [10] World Wide Web Consortium (W3C). srgb color space. <https://www.w3.org/Graphics/Color/sRGB>, visited on 2024-02-02, November 1996.
-