实验报告
单摆法测量重力加速度

少年班学院

马天开 PB21000030（第三组）

2022 年 4 月 13 日

1 实验背景

重力加速度，也称自由落体加速度，表示物体受重力影响产生的加速度。20 世纪 70 年代初，国际上建立了国际标准重力网（IGSN）[1]。IGSN 的平均精度优于 $10^{-7}m/s^2$；近年来，也出现了一些更精确测量的办法 [2]。精确地测量 g 的值，对军工、卫星等有着重要的意义。

2 实验目的[3]

在给定器材和对重力加速度 g 的测量精度要求（$<10^{-2}$）下，根据单摆公式，进行简单的实验设计和实验基本方法的训练，学会实验器材的使用、测量方法和应用误差均分原理；分析误差的来源，提出修正和估算的方法。

3 实验器材

游标卡尺、米尺、电子秒表、支架、细线、小刚球、摆幅标尺

游标卡尺精度：$\Delta \approx 10^{-3}cm$，米尺精度：$\Delta \approx 0.05cm$，秒表精度：$\Delta \approx 10^{-2}s$，人的反应时间：$\Delta \approx 0.1s$

4 实验原理

根据牛顿第二定律：

$$m \cdot l \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{1}$$

简单整理之后，方程变为一个二阶微分方程：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{2}$$

将右侧 $\sin\theta$ 在 $\theta = 0$ 按 Maclaurin 展开：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \cdots) \tag{3}$$

考虑到 $\theta - \sin\theta < \frac{\theta^3}{6}$，在 $\theta < 10^\circ$ 时，$\Delta = (\theta - \sin\theta)/\theta < 0.005$，符合精度要求。因此将(??)中的 $\sin\theta$ 替换为 θ，近似为二阶线性微分方程，代入初值条件：

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt}\,|_{t=0} = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

解出：

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned} \tag{4}$$

这给出了一个计算 g 的方法 [4]：

$$g = l \cdot (\frac{2\pi}{T})^2 \tag{5}$$

5 实验方法

首先用游标卡尺测量小球的直径 d，尺寸约为 $2cm$，估算误差 $\Delta d/d \approx 0.5 \times 10^{-3}$ 在允许范围内。

接着测量摆线长度：用米尺测量从单摆的顶端开始，到小球的顶端的距离，尺寸约在 $60cm$，估算误差 $\Delta l'/l' \approx 1.2 \times 10^{-4}$ 在允许范围内。

注意这里测量的摆线长度并不等同于摆长，后续计算的摆长 $l = l' + d/2$

最后是测量摆动周期 T。这里值得注意的是，如果只测量一个周期的时间（估计为 $1s$），误差会达到 $\Delta t/t \approx 0.2$，远远超过实验允许的误差 10^{-3}。因此，选择测量 100 个周期所需时间，误差约为 $\Delta t/t \approx 2 \times 10^{-3}$，在允许范围内。与之相比，秒表测量时的误差可以忽略不记[5]。

总体的系统误差估计：

$$|\Delta g/g| \leq |\Delta l/l| + |2 \times \Delta t/t| \approx 2 \times 10^{-3}$$

6 实验数据[6]

l	θ	n	nT
$60.273cm$	10°	55	85.85
$60.172cm$	5°	55	85.81
$60.133cm$	15°	100	154.94
$49.878cm$	10°	100	141.93

签字的实验数据（复印件）在附件中。

7 数据处理

7.1 不确定度分析

实验中的系统误差主要来源于[7]：

- 测量 l 产生的误差：

  l 的标准差：

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2}{n-1}} = 0.072cm$$

  展伸不确定度：（Δ_b 是米尺的精度）

$$U_l = \sqrt{(t_{0.68}\frac{\sigma_l}{\sqrt{n}})^2 + (k_b\frac{\Delta_b}{C})^2} = 0.05cm,$$
$$P = 0.68$$

- 测量 T 产生的误差

  T 的标准差：

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(l_i - \bar{l})^2}{n-1}} = 0.006s$$

  展伸不确定度：（Δ_T 是秒表的精度）

$$U_T = \sqrt{(t_{0.68}\frac{\sigma_T}{\sqrt{n}})^2 + (k_b\frac{\Delta_T}{C})^2} = 0.013s,$$
$$P = 0.68$$

由以上内容可以得到 g 的展伸不确定度：

$$\frac{U_g}{\bar{g}} = \sqrt{(\frac{U_l}{\bar{L}}) + 2(\frac{U_T}{\bar{T}})^2} = 0.0094,$$
$$P = 0.68$$

其中 $U_g/\bar{g} = 0.0094 < 0.01$ 满足实验预期。

7.2 数值计算

按照(??)中给出的公式，计算 g 的值分别为：

$$\begin{cases} g_1 = 9.766m/s^2 \\ g_2 = 9.759m/s^2 \\ g_3 = 9.889m/s^2 \\ g_4 = 9.775m/s^2 \end{cases}$$

前三次测量结果取平均的结果：

$$\begin{cases} \bar{T} = 1.557s \\ \bar{l} = 0.602m \end{cases}$$

按这个结果计算得到：

$$\bar{g} = \bar{l} \cdot (\frac{2\pi}{\bar{T}})^2 = 9.803m/s^2$$

但这个办法并没有利用第四组数据，可以考虑下面的办法：

利用(??)进行线性回归分析，对(??)两侧取对数：

$$\ln l - 2\ln T = \ln g - 2\ln(2\pi) \tag{6}$$

以 $\ln l - \ln T$ 进行拟合，得到：

$$\ln l = 2.022 \cdot \ln T - 1.403$$

利用 $b = \ln g - 2 \cdot \ln(2\pi)$ 推算 $\tilde{g}$ 的值：

$$\tilde{g} = 9.71m/s^2$$

由于利用了四个测量值，采纳这个结果作为测量结果。

7.3 结论

综合上面的讨论，最终测量的结果为：

$$g = \tilde{g} \pm \bar{U}_g = 9.71 \pm 0.09m/s^2, P = 0.68$$

Notes

[1]abbr. for International Gravity Standardization Network

[2]Zong, B.C., Nie, C.H., 2013. Measuring the Gravitational Acceleration by Hydrostatics. Applied Mechanics and Materials 307, 271–274.. doi:10.4028/www.scientific.net/amm.307.271

[3]摘自实验要求：重力加速度的测量.pdf

[4]以上计算与实际情况的误差还会存在于：摆线可能的长度变化、摆线的质量、受空气的影响。以上修正项在精度 10^{-3} 以内可以忽略。

[5]约为 10^{-6} 量级

[6]实际测量时，出于时间上的考虑，前两次实验时并未测量 100 个周期，而是选用了 55 个周期，在保证精度的前提下完成了实验。

[7]按照(??) T 应该与 l 相关，因此只计算前三次的数据。