

实验报告

切变模量的测量

少年班学院
马天开 PB21000030 (1 号)

2022 年 5 月 21 日

1 实验目的

利用扭摆测量金属丝的切变模量, 根据公式进行简单的实验设计和实验基本方法训练, 学会实验仪器的使用、测量方法和应用误差均分原理; 分析误差的来源, 提出修正和估算的方法。

2 实验器材

扭摆、金属悬盘、金属环、待测金属丝、螺旋测微仪、游标卡尺、米尺、秒表

螺旋测微仪精度 $\Delta = 0.01mm$, 游标卡尺精度 $\Delta = 0.02mm$, 米尺精度 $0.1cm$, 秒表精度 $0.01s$ (人的反应时间: $0.2s$)

3 实验原理

待测金属丝是一根均匀细长的钢丝, 近似为一个半径为 R , 长度为 L 的圆柱体, 按照剪切胡克定律:

$$\tau = G\gamma \quad (1)$$

其中, γ 为切应变, τ 为切应力, G 为材料的切变模量。切应变又可以表示为:

$$\gamma = R \frac{d\varphi}{dl} \quad (2)$$

在钢丝内部 $r = \rho$ 的位置, 切应变为:

$$\gamma_\rho = \rho \frac{d\varphi}{dl} \quad (3)$$

在此位置会产生切应力, 大小为

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho \frac{d\varphi}{dl} \quad (4)$$

产生的回复力矩为:

$$\tau \cdot \rho \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi G\rho^3 \frac{d\varphi}{dl} \cdot \rho \quad (5)$$

对 ρ 积分, 得到恢复力矩:

$$\int_0^R 2\pi G\rho^3 d\rho \cdot \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\pi}{2} GR^4 \frac{d\varphi}{dl} \quad (6)$$

因此, 总恢复力矩 ($\varphi = L \frac{d\varphi}{L}$):

$$M = \frac{\pi}{2} GR^4 \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\pi}{2} GR^4 \frac{\varphi}{L} \quad (7)$$

$$\therefore G = \frac{2ML}{\pi R^4 \varphi} \quad (8)$$

根据转动定律:

$$M = I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (9)$$

又有 $M = D\varphi$, 因此:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I_0} \varphi = 0 \quad (10)$$

上述方程是一个简谐运动方程, 周期为:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad (11)$$

注意到单独计算 I_0 有困难, 因此在圆盘上增加一个金属环 (金属环转动惯量记为 $I_1 = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$ 可以计算), 测新周期为:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + I_1}{D}} \quad (12)$$

由此, 可以计算:

$$G = \frac{4\pi Lm(r_1^2 + r_2^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)} \quad (13)$$

4 实验方法

- 调整装置, 使得钢丝与圆盘相垂直, 且钢丝保持悬置。
- 用螺旋测微器测钢丝直径 (上、中、下各三组), 用游标卡尺分别测量圆环的内外径 (各三组)、用米尺测量钢丝的有效长度 (上夹具最下端到下夹具最上端, 测三组)。
- 考虑到人读秒时的反应时间, 估算合适的测量周期数 (40)。
- 计算切变模量 G 和扭转模量 D , 分析误差。

5 实验数据

螺旋测微器 0 示数: $-0.005mm$

d_1	0.776	0.778	0.778
d_2	0.773	0.777	0.776
d_3	0.781	0.782	0.784

游标卡尺:

$2r_1$	9.988	9.984	9.988
$2r_2$	7.948	7.932	7.958

米尺:

L	44.32	44.38	44.39
-----	-------	-------	-------

秒表:

$40T_0$	91.48	91.32	91.58
$40T_1$	142.47	142.80	142.00

天平:

$$m = 512.0g$$

6 数据处理

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R} = \frac{1}{18}(0.776 + 0.778 + 0.778 + \dots) = 0.394 \\ 2\bar{r}_1 = \frac{1}{3}(9.988 + 9.984 + 9.988) = 9.987 \\ 2\bar{r}_2 = \frac{1}{3}(7.948 + 7.932 + 7.958) = 7.946 \\ \bar{L} = \frac{1}{3}(44.32 + 44.38 + 44.39) = 44.36 \\ \bar{T}_0 = \frac{1}{120}(91.48 + 91.32 + 91.58) = 2.2865 \\ \bar{T}_1 = \frac{1}{120}(142.47 + 142.80 + 142.00) = 3.561 \\ m = 512.0 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\text{得到: } \bar{G} = \frac{4\pi Lm(r_1^2 + r_2^2)}{R^4(T_1^2 - T_0^2)} = 6.47 \times 10^{10}$$

各值的 A 类不确定度分别计算为:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{aR} = 0.000947mm \\ u_{ar_1} = 0.000675cm \\ u_{ar_2} = 0.00375cm \\ u_{aL} = 0.0187cm \\ u_{aT_0} = 0.00501s \\ u_{aT_1} = 0.00581s \end{array} \right. \quad (15)$$

按照测量仪器的不同, 各值的 B 类不确定度分别为:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{bR} = 0.00289mm \\ u_{br_1} = 0.00115cm \\ u_{br_2} = 0.00115cm \\ u_{bL} = 0.0577cm \\ u_{bT_0} = 0.00577s \\ u_{bT_1} = 0.00577s \\ u_{bm} = 0.0577g \end{array} \right. \quad (16)$$

综合 16, 17, 可以计算展伸不确定度为 (取 $P = 0.997$):

$$\left\{ \begin{array}{l} U_R = 0.00304mm \\ U_{r_1} = 0.00133cm \\ U_{r_2} = 0.00392cm \\ U_L = 0.0607cm \\ U_{T_0} = 0.00764s \\ U_{T_1} = 0.00819s \\ U_m = 0.0577g \end{array} \right. \quad (17)$$

得到 G 的展伸不确定度为:

$$U_G/G = \sqrt{(U_L/L)^2 + 2(U_{r_1}/r_1)^2 + \dots} = 0.00873 \quad (18)$$

7 实验结论

7.1 结果

$$\left\{ \begin{array}{l} G = 6.47 \pm 0.06 \times 10^{10} \\ D = 2.29 \pm 0.01 \times 10^{11} \\ P = 0.997 \end{array} \right. \quad (19)$$

7.2 思考题

$$1. \gamma = R \frac{\varphi}{L} = 1.392 \times 10^{-3} \ll 1$$

2. 实验中主要提升精度的办法是测多个周期取平均值, 进而降低了误差的主要来源——人的反应时间; 在具体测量时, 更要仔细观察托盘是否水平, 在转动扭摆时注意不能产生水平方向的摆动, 以免影响测量精度。