第二次书面作业

①

正定性、齐次性显然。

三角不等式：$x' \triangleq (a_1x_1 \cdots a_nx_n)$

$y' \triangleq (a_1y_1 \cdots a_ny_n)$

由 Cauchy 不等式显然有 $\|x'\|_2 + \|y'\|_2 \geqslant \|x'+y'\|_2$. #

② $\|x+y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 \Longleftrightarrow \underbrace{x^Ty}_{\Downarrow} = \|x\|\|y\| \geqslant 0$

$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots y_n^2)$

$\Updownarrow$

$\sum (x_iy_j - x_jy_i)^2 = 0 \Leftrightarrow (\frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j})$. #

③. $\|A\|_F^2 = (\sum a_{ij}^2) = (\sum_{j=1}^{n} \sum_i a_{ij}^2) = \sum_{j=1}^{n} \|a_j\|_2^2$

④ $\|A\|_2 \geqslant \frac{\|Ab_i\|_2}{\|b_i\|_2}$. $B \triangleq (b_1 \cdots b_n)$.

$\|A\|_2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\|b_i\|_2^2}{\|B\|_F^2} \cdot \frac{\|Ab_i\|_2^2}{\|b_i\|_2^2}$

$\Longrightarrow \underline{\|A\|_2 \|B\|_F \geqslant \sum_{i=1}^{n} \|Ab_i\|_2^2 = \|AB\|_F^2}$ ①

$\|AB\|_F \leq \|B\|_2 \|A\|_F$ ②

$\Longrightarrow \|B^TA^T\|_F \leq \underline{\|B^T\|_2 \|A^T\|_F}$. $\Rightarrow$ $\cancel{\|BA\|_F}$

$\le \max(|a_{ij}|+|b_{ij}|)$.

⑤ 正定 齐次是显然的.

三角不等式: $\max\limits_{i,j}|a_{ij}+b_{ij}| \le \max|a_{ij}| + \max|b_{ij}|$.

相容性: $\max\limits_{i,j}\left|\sum a_{ik}b_{kj}\right| \le \max\sum\limits_{k}|a_{ik}||b_{kj}|$

$\le n\max_{ij}|a_{ij}|\max_{ij}|b_{ij}|$

∨ 不满足相容: $a_{ij}=1$. $b_{ij}=1$ $\Rightarrow \boxed{a_{ij}=n}$

$n>1$ 时 不满足 相容性

cholesky 分解

⑥ A正定 $A=LL^T$ $f(x)=\|L^Tx\|_2$

L^T可逆 $\Rightarrow$ $f(x)$ 正定 齐次 是范数 $L^T(x+y)=L^Tx+L^Ty$

$\Rightarrow$ 三角不等式

若 A不正定 $\exists x\ne0$ $x^TAx\le0$.

$f(x)$ 定义 不良

⑦. rank $A=n$ $\Rightarrow$ $Ax=0$ 有n个独立方程 $x\in R^n \Rightarrow x=0$

$\|Ax\|=0 \Leftrightarrow Ax=0 \Leftrightarrow x=0$. 正定性

齐次性: $\|\lambda x\|_A=\|A\lambda x\|=\lambda\|Ax\|$. 得证.

三角: $\|Ax\|+\|Ay\| \ge \|A(x+y)\|$

⑧ $I-A$ 可逆: $\|A\|<1$. $\|A^n\|\le\|A\|^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}A^n=0$ ($\|\ \|$ 意义下)

$\Rightarrow \rho(A)<1$

考虑 A的 Jordan 标准型. J 对角线元素模长小于1

右侧次高对角线上元素模长 ≤1.

J^k的任意元素 不超过 $C_k^n\rho(A)^k$. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛.

$(I-A)\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=I \Rightarrow (I-A)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$

$1+\|(I-A)^{-1}\|\|A\| \ge \|I+\|A-I\|\| \ge \|(I-A)^{-1}(I-A)+(I-A)^{-1}A\|$

$=\|(I-A)^{-1}\|$

$\Rightarrow \|(I-A)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1-\|A\|}$

9. A可逆 $\{Ax \mid x\in\mathbb{R}^n\}=\mathbb{R}^n$

$$\|A^{-1}\|=\max_{\|x\|=1}\|A^{-1}x\|=\max_{\|Ax\|=1}\|x\|=\max_{x}\frac{\|x\|}{\|Ax\|}$$

$$=\min\left(\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right)^{-1}$$

$$=\left(\min_{\|x\|=1}\|Ax\|\right)^{-1}$$

10. L下三角 U上三角 $a_{ij}=\sum_{k=1}^{n} l_{ik}u_{kj}$

$k\le\min i,j$ $l_{ik}u_{kj}=0$ $\Rightarrow a_{ij}=\sum_{k=1}^{i} l_{ik}u_{kj}$

$$a_{ij}-u_{ij}=\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}.$$

$$\Rightarrow u_i^T=a_i^T-\sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}u_j^T$$ 对 $j<i$ 成立

两侧取1范数 $|l_{ij}|\le 1$ $\|a_i^T\|_1+\sum_{j=1}^{i-1}\|u_j^T\|_1\ge\|u_i^T\|_1$

$$\Rightarrow \|u_i^T\|_1\le\sum_{j=1}^{i-1}2^{i-1-j}\|a_j^T\|_1+\|a_i^T\|_1$$

$$\le 2^{i-1}\|A\|_\infty.$$

$$\Rightarrow \forall i\ \|u_i^T\|_1\le 2^{n-1}\|A\|_\infty.$$

$$\|U\|_\infty\le 2^{n-1}\|A\|_\infty$$

11. ① $A^{-1}=\begin{pmatrix}375 & -187\\ -376 & \frac{375}{2}\end{pmatrix}$

$$K_\infty(A)=(752+750)(376+\tfrac{375}{2})=846377$$

② $b=(1,1)^T$ $x=(188,\ \frac{375}{2})^T.$

$b=(1,1.1)^T$ $x=(169.3,-169.75)^T.$

③ $x=(1,-1)^T.$ $b=(1,2)^T$

$x=(1.1,-1)^T.$ $b=(38.5,77.2)^T$

12. $\|I\|\|I\|\ge\|I\|.$ $\|I\|\ge 1$ $k(A)=\|A\|\|A^{-1}\|\ge\|AA^{-1}\|\ge 1$

13. $\|A^{-1}\|\|(A+E)-A\|\|(A+E)^{-1}\|\ge\|A^{-1}-(A+E)^{-1}\|=\|(A+E)^{-1}-A^{-1}\|$

14. $fl(\prod x_i)=\prod x_i(1+\delta_{i-1})$.

$\delta_0=0.$ $\{\delta\}$ 的上界为 $(1+u)^{n-1}-1$.

$(n-1)u<0.01$ 时 不超过 $1.01(n-1)u$

15. $fl(\sum x_i)=\sum x_i\prod(1+\delta_j).$ $\forall i\ x_i$

因 $nu\le 0.01$ $ku\le 0.01$ 对 $k\le n$ 成立. 考虑 $(1+\delta_i)$ 个数即可.

16. a_i^T $A=\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$.

$fl(Ax_i)=fl(a_i^Tx)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(1+\lambda_{ij})\prod_{k=j}^{n}(1+\delta_{ik})$.

$\delta_{1k}=0$. a_{ij} 被乘了 $\begin{cases} n & j=1 \\ n-j+2 & j\neq 1 \end{cases}$

相对误差限. ⇒结论成立.

17. $fl(x^Tx)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2(1+\lambda_i)\prod_{j=i}^{n}(1+\delta_j)$.

最多 n 项 $(1-u)^n \sim (1+u)^n$

x_i 均为正数.

$\Rightarrow \frac{fl(x^Tx)}{x^Tx}\in[(1-u)^n,(1+u)^n]$ $\gamma\le nu+O(u^2)$

18. A为上三对角阵. 其他项均为0. $u_i^T=a_i^T-l_{i,i-1}u_{i-1}^T$ $i\ge 2$

$|l_{ij}|\le 1$ $|a_{ij}|\ge|u_{ij}|$ $|a_{ij}|+|u_{j-2,j}|=|a_{j-1,j}|$

$|u_{ii}|\le|a_{ii}|+|u_{i-1,i}|\le|a_{i-1,i}|+|a_{ii}|$

⇒U中任何元素不超过 $2\max|a_{ij}|$

19. $a_{ij}-u_{ij}=\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$.

A的右下角子矩阵 列对角占优 $\sum_{k=1}^{i-1}|l_{ik}|<1$

$|u_{ij}|\le|a_{ij}|+\max_{k<i}|u_{kj}|$.

$\Rightarrow |u_{ij}|\le|a_{ij}|$ $\xrightarrow{i\le j}$ $|u_{ij}|\le\sum_{k=1}^{j}|a_{kj}|\le\sum_{k=1}^{j}|a_{kj}|\le 2|a_{jj}|$

$i<j$ 时恒为0 （上三角阵）

$\Rightarrow \rho\le 2$.

20. 计算 LU 时至多产生 m次减法 m次乘法 1次除法.

误差至多 $(2m+1)u+O(u^2)$.

计算回A的部分 m次乘法 m-1次加法.

$(2m-1)(2m+1)u+O(u^2)$.

$u\sim 0$. 从 $4mu^2$ 为上界

$m=3$时 $=36u^2$.

21. 计算L时 n次减法 n次乘法 1次除法1开方

回A. n次乘法 n-1次加法

$\prod_{i=1}^{4n^2-1}(1+\delta_i)$ 可用 $4.09n^2u$ 控制.