第五次补交作业

1. $(x-x_*)^TA(x-x_*)-x_*^TAx_* = x^TAx-(Ax_*)^Tx - x^TAx_*$.

$= x^TAx - b^Tx - x^Tb$

$= \varphi(x)$.

2. 记 $x=x_{k-1}$. $\varphi(x)-\varphi(x_k) = \frac{(r^Tr)^2}{r^TAr}$. $r=b-Ax$.

$$\frac{x^TAx-2b^Tx}{k_2(A)} \le \frac{(r^Tr)^2}{r^TAr}.$$

正定~~对称阵~~ 对称阵的逆同样正定对称.

因 $x=A^{-1}(b-r)$. $\frac{r^TA^{-1}r-b^TA^{-1}b}{k_2(A)}\le\frac{(r^Tr)^2}{r^TAr}$.

$$\frac{r^TAr}{r^Tr}\,\frac{r^TA^{-1}r-b^TA^{-1}b}{r^Tr}\le \|A\|_2\|A^{-1}\|_2.$$

因 $b^TA^{-1}b\ge 0$. 只需说明对正定对称阵B与任何 x 都

$\underbrace{\frac{x^TBx}{x^Tx}}\le\|B\|_2$. 得证.

作特征值分解即可.

3. $\varphi(x_{k+1}) = -b^TA^{-1}b$.

记前一次为 x. $r=A-bx$.

$$x^TAx-2b^Tx+b^TA^{-1}b=\frac{(r^Tr)^2}{r^TAr}.$$

$x=A^{-1}(b-r)$.

$r^TA^{-1}r\,r^TAr=(r^Tr)^2$.

考虑A的正交相似对角化 P^TDP. $s=Pr$.

$s^TD^{-1}s\,s^TDs=(s^Ts)^2$.

利用Cauhy可证左≥右. 等号仅在 $s^TD^{-1}s \parallel s^TDs$ 成立

$\Downarrow$

s只能在D有相同对角元的位置非0

s是D的特征向量

$DPr=\lambda Pr$. 即 $P^TDPr=\lambda r$. 得证.

4. 只需说明系数矩阵可逆 (行列式非0)

直接计算行列式 $r_k^TAr_k\,p_{k-1}^TAp_{k-1}-(r_k^TAp_{k-1})^2$

记 $A=LL^T$. $a=L^Tr_k$. $b=L^Tp_{k-1}$.

左式化为 $\|a\|^2\|b\|^2-(a\cdot b)^2\ge 0$ (r_k, p_{k-1}线性无关. L可逆; a,b线性无关)

5. 若不然，不妨设 $p_1=\sum_{i=2}^{k}\lambda_i p_i$，$\lambda_i$ 不全为0.

$p_1^T A p_1=\sum_{i=2}^{k}\lambda_i p_i^T A p_i=0$. 与 p_1 非0矛盾.

6. $\varphi'(y_{i-1}+te_i)=2ta_{ii}+2y_{i-1}^T Ae_i-2b_i$

$t=\frac{y_{i-1}^T Ae_i-2b_i}{a_{ii}}$

归纳验证：若 y_{i-1} 是由 $(D-L)^{-1}Uy_0$ 的前 $i-1$ 与 y_0 的后……组成

$\Downarrow$

y_i $\quad$ ~~$(D-L)^{-1}U$~~

$L_1 y_0+(D-L)^{-1}b$. 前 i 行、与 y_0 的……

$\downarrow$

G-S 迭代矩阵.

$$y_i=\begin{pmatrix} I_i & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}(D-L)^{-1}(Uy_0+b)+\begin{pmatrix}0 & \\ & I_{n-i}\end{pmatrix}y_0$$

y_{i-1} 代入 $y_i=y_{i-1}+te_i$

考虑 y_0 部分的矩阵. $(y_{i-1}^T Ae_i)e_i\Rightarrow E_iAy_{i-1}$.

E_i 为第 i 列为1的矩阵

$$y_i=\left(I+\frac{E_iA}{a_{ii}}\right)y_{i-1}-2\frac{E_i}{a_{ii}}b.$$ 代入即可.

7. 利用相似对角化. A的特征值 $\lambda_1\cdots\lambda_k$.

$f(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)$. $f(A)=0$.

由于任何子空间向量可写为 $g(A)\cdot r$.

$g(A)\cdot r=q(A)r$. $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 余式

任何一个元素可以通过不超过 $k-1$ 次的 $q(A)$ 表示

$r, Ar, \ldots, A^{k-1}r$ 线性表示. 即.

8. Krylov 子空间最高维数 $=k$.

经过 k 步已经找到使 $\varphi(x)$ 全局最小的 x. 即为解.

9. $x=x_k-x_*$. $y=x_0-x_*$.

只需说明 $\frac{x^Tx}{x^TAx}\cdot\frac{y^TAy}{y^Ty}\le k_2(A)$.

下证 $\frac{x^Tx}{x^TAx}\le\|A^{-1}\|_2$.

对 A 相似对角化 $A=P^TDP$. $z=Px$.

$$\frac{x^Tx}{x^TAx}=\frac{z^Tz}{z^TDz}\le\frac{1}{\min_i D_{ii}}=\rho(D^{-1})=\|A^{-1}\|_2$$

11. 若 $x^T A y = 0$ $\|x\|_A^2 + \|y\|_A^2 = \|x+y\|_A^2$.

$r_k^T X = 0 \iff (x_k - A^{-1}b)^T A X = 0$

$\iff \forall x \in X.\ \|x - A^{-1}b\|_A^2 = \|x_k - A^{-1}b\|_A^2 + \|x_k - x\|_A^2$

$\geq \|x_k - A^{-1}b\|_A^2$. #

12. $p = rm_1 - A^T b$

$a = r^T r ./ (Ap)^T(Ap)$

$x = a * p$

$r = rm_1 - a(A^T A \cdot p)$.

while $r != 0$

$b = r^T r / rm_1^T rm_1$

$p = r + b * p$.

$a = r^T r / (Ap)^T(Ap)$

$x = x + a * p$

$rm_1 = r$

$r = r - a * (A^T A p)$.

end.