第三次书面作业

1. $C=\begin{pmatrix}35 & 44\\ 44 & 56\end{pmatrix}$. $d=\begin{pmatrix}9\\ 12\end{pmatrix}$. $x=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.

2. $C=\begin{pmatrix}6 & 3 & 1 & 1\\ 3 & 9 & 3 & 3\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $d=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

$u=(0,-1,0,3)^T$ $v=(0,0,1,-1)^T$ $x_0=(\frac{3}{5},\frac{2}{15},0,0)^T$

通解 $x_0+au+bv$.

3. $\alpha=5$ $H=I-2\omega\omega^T$. $2\omega\omega^T(1,0,4,6,3,4)^T=(0,5,0,0,3,4)$

$\omega=\frac{\sqrt{2}}{10}(0,5,0,0,3,4)$

4. $5c+12s=-5s+12c$. $17s=7c$.

$s=\frac{7\sqrt{2}}{26}$ $c=\frac{17\sqrt{2}}{26}$ $\alpha=\frac{13}{2}\sqrt{2}$

5. $-\bar{s}x_1+cx_2=0$.

$s=a+bi$.

$x_i=a_i+b_i i$

$\rightarrow\begin{cases}-a_1a+b_1b+bx_2=0\\ -b_1a-a_1b+ax_2=0\end{cases}$

$|x_1|=0$ 取 $s=1$. $c=0$.

否则 a.b 线相关. $c=1\Rightarrow$ 代解

归一即可

6. $a_j\neq0$. 构造 Givens 方阵 $Q$ $(Q\begin{pmatrix}a_i\\ a_j\end{pmatrix})^{(1)}=0$

记角度为 $\theta$. $a_i, a_j$ 在 $\alpha$ 的第 $i, j$ 行 用以计算 $Q(i,j,\theta)\alpha\Rightarrow a_j=$

算法. 对 $x$ 除第一行外各 0 $\Rightarrow$ 2 求出

同理 $y$

$Q(1,j,\theta_j)$

同样地, 对 $y$ 消…… $P(1,k,\theta_k)$

$\prod_{k=n} P(1,k,\theta_k)$ 于 $Q(1,j,\theta_k)$.
$j>1$

$Q\triangleq\prod_{j=1}^{n}Q(1,j,\theta_j)$

$P\triangleq\prod_{k=1}^{n}P(1,k,\theta_k)$. $Qx=Py=\theta_1$.

每个 Givens 方阵为负转置 $\theta\Rightarrow-\theta$

$P^{-1}=\prod_{k=n}^{1}P(1,k,\theta_k)$. $P^{-1}Qx=y$

7. 计算 $\alpha=\frac{\|x\|_2}{\|y\|_2}$

$H=I-2\omega\omega^T$. $2(\omega^Tx)\omega=x-\alpha y$.

令 $\omega_0=\alpha y-x$

计算 $\omega=\frac{\omega_0}{\|\omega_0\|_2}$. $\Rightarrow H$

8. 旧结构：$H_k$操作后，前$k-1$列满足要求，

$(0,\dots 0, a_{n-k+1}, \dots a_n, a_{n+1} \dots a_m)^T$

$\Downarrow$

$(0, 0 \dots 0, 2, a_{n-k+2}, \dots a_n, 0 \dots 0)^T$

$w_k$只有$n-k+1$与后$m-n$项非0。

前$k-1$项均为0。

$x, w$有非零分量不重合 $(I-2ww^T)x = x - 2(w^Tx)w = x$

不会破坏已满足要求的部分。

9. $L^TLz = L^Tpb$. $L$下三角，列满rank. $\Rightarrow$ 有唯一解

$H\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $L_1^TL_1z = L^Tpb$

$\rightarrow$ 解 $\begin{cases} L_1^Tz_0 = L^Tpb. \\ L_1z = z_0 \end{cases}$ 即可。

$Ux = z$. $z$满足$L^TLz = L^Tpb$. $L^TLUx = L^Tpb$

$U^TL^TLUx = U^TL^Tpb$

$A^TAx = A^Tpb$.

$(3.1.4) \Rightarrow$ 四

10. $(3.1.4)$ $A^TAXb = A^Tb$ $(\forall b)$.

取$b=e_i$. $\underline{A^TAX}I = \underline{A^T}I$.

$\Rightarrow X^TA^TA = A$.

$A^TAX = A^T \Rightarrow X^TA^TAX = X^TA^T$

$AX = \cdots \rightarrow$ ② 三

$A = X^TA^TA = (AX)^TA = AXA$. ①

11. $g(a,b) \triangleq \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

用于生成左乘$(a,b)^T$使$b$成为0的$\theta$. ~~下三角化~~

```
QR(A,Q):
  Q=I
  for i=n:3
    if A[i][1]!=0
      Q = Q * G(i-1,i,-g(A[i-1][1],A[i][1]))
      A = G(i-1,i, ...)*A.
  for i = 2:n.
    if A[i][i-1]!=0.
```

$Q = Q * G(i-1, i, -g(A[i-1][i-1], A[i][i-1]))$

$A = G(i-1, i, g(A[i-1][i-1], A[i][i-1])) * A.$

12. pf: $\|x\|_2^2 = x^T x$. 展开

$\|Ax-b\|_2 = \min\limits_{y \in \mathbb{R}^n} \|Ay+b\|_2$

$\|A(x+\alpha w)-b\|_2 \geqslant \|Ax-b\|_2$

$2\alpha w^T A^T(Ax-b) + \alpha^2 \|Aw\|^2 \geqslant 0$ $\forall \alpha, w$.

~~同理可得~~ 不妨设 $\alpha > 0$

$\Rightarrow 2w^T A^T(Ax-b) + \alpha \|Aw\|^2 \geqslant 0$ 恒成立

若 $A^T(Ax-b) \neq 0$. 设 $(A^T(Ax-b))^{(i)} \neq 0$.

取 $w \in [\pm e_i]$. $2w^T A^T(Ax-b) < 0$

令 $\alpha \to 0$ 矛盾.

$\Rightarrow A^T(Ax-b) = 0$. $A^T A x = A^T b$.