数值代数作业 Chapter 6.

1. $\det(\lambda I-BA)=\det\begin{pmatrix}\lambda I-BA & \\ B & I\end{pmatrix}$

$=\det\begin{pmatrix}I & -B\\ & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & \\ \lambda^{-1}A & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda I & B\\ & I-\lambda^{-1}AB\end{pmatrix}$

$=\lambda^{m}\det(I-\lambda^{-1}AB)$

$=\lambda^{m-n}\det(\lambda I-AB).$ 得证.

2. 由于 Q_k 每个模不超过 1

有界收敛 $\Rightarrow$ 存在收敛子列

显然 $\underbrace{Q^*AQ}_{\text{上三角阵}} \Leftarrow \underbrace{=\lim_{i\to\infty} Q_{k_i}^*AQ_{k_i}}_{\text{上三角阵}}$

3. 记 $C=Q^*BQ$.

$CT=TC$. T 为上三角阵 对角元互不相同

$\sum_{k\le j} c_{ik}t_{kj}=\sum_{k\ge i} t_{ik}c_{kj}$.

考虑所有 $i>j$ 的部分. 通过 $i-j$ 可归纳 $c_{ij}=0$.

4. $\|Ax-\mu x\|_2^2 = (Ax-\mu x)^*(Ax-\mu x)$

$= x^*A^*Ax - x^*(\mu^*A+\mu A^*)x + \mu^*\mu x^*x$

$= x^*A^*Ax + (-\mu^*R(x) - \mu R(x)^* + \mu^*\mu)x^*x$

$= x^*A^*Ax - R(x)^*R(x)x^*x + \|\mu - R(x)\|_2^2 x^*x.$

5. $\lambda=\alpha$. 单位特征向量 $(1,0)^T$.

左特征向量 $(1, \frac{\gamma}{\alpha-\beta})^T$

条件数. $(1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2})^{\frac{1}{2}}$

$\lambda=\beta$. 单位特征向量 $(1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2})^{-\frac{1}{2}}(\frac{\gamma}{\alpha-\beta}, 1)^T$.

右特征向量. $(0, \sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}})^T$

条件数. $\sqrt{1+\frac{\gamma^2}{(\alpha-\beta)^2}}$.

6. $B=QAQ^*$ 若x为特征值λ对应的单位特征向量.

$QAQ^*Qx = \lambda Qx$

Qx 为 B模1的特征向量. 类似 $\bar{Q}y$ 为对应的左特征向量.

$\|\bar{Q}y\|_2 = \|y^TQ\|_2 = \|y^T\|_2$

由于相似，D_2, A_2 不变 $\Rightarrow$ Σ^{-1} 不变

对应的特征向量条件数不变。

7. $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ & \lambda^n \end{pmatrix}$

由归一化，A^n 等同于 $\begin{pmatrix} \lambda & n \\ & \lambda \end{pmatrix}$.

分第二个分量是否为 0 讨论知一定收敛到 $(1,0)^T$

计算可知 $B^{2k} = \lambda^{2k} I$. B 偶次方与 I 等同。

奇次方与 B 等同。若开始时不为特征向量，不能收敛。

8. 计算知 $A^n u_0 = (C_n^2, n, 1)^T$. 归一化后为 $(1, \frac{2}{n-1}, \frac{2}{n^2-n})^T$

精确到 5 位需要 $2(n-1)^{-1} < 10^{-5} \Rightarrow n > 200001$

9. 第二大的特征值必在 λ_2, λ_n 中。

需要 $\frac{|\lambda_1 - \mu|}{\max(|\lambda_2 - \mu|, |\lambda_n - \mu|)}$ 尽量大。

$\lambda_1 - \mu > \lambda_2 - \mu > 0$ 时有

$\frac{\lambda_1 - \mu}{\lambda_2 - \mu} > \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. 讨论正负，最优时必须 $\lambda_1 - \mu > \lambda_2 - \mu \geq 0 \geq \lambda_n - \mu$.

后两者模长相等。得证。

10. 构造友方阵

$$\begin{pmatrix} & & & -a_n \\ 1 & & & -a_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$ 特征多项式 $p(\lambda)$.

模的最大特征值

$\Rightarrow p(\lambda)$ 的最大根. 便用幂法计算.

11. $(1, -0.7321, 0.2679)^T$

12. 取 E: $Ev=u$.

$(A+E)v = \lambda I v = \lambda v$.

$Ev=u. \Rightarrow \sum e_{ij} v_j = u_j$

利用 Cauchy 不等式 $\sum v_j^2 \sum e_{ij}^2 \geq u_j^2$. 可以取等.

存在 $e_{ij}^2 = \sum \frac{u_j}{\sum v_i^2}$ 的解

对 j 求和, $\Rightarrow \|E\|_F^2 = \frac{\|u\|_2^2}{\|v\|_2}$

13. 取 v 为 $A+E$ 对应 λ 的特征向量.

类似(12). $Ev=u$.

从而 $\frac{\|u\|_2}{\|v\|_2} = \frac{\|Ev\|_2}{\|v\|_2} \leq \|E\|_2$. 得证.

14. $\begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 与 $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 友替相似. 不相似.

15. 若 $a_{21}-a_{n1}$ 均为0、则已结束.

否则可左乘P. 将其中非零元素置换到 a_{21}.

再用左乘M进行行变换将整列剩下元素、减去 a_{21} 的倍数.

(P. M. 针对 $n-1$ 行进行行变换).

这时 右乘 P^T. M^T 有限对 $n-1$ 列进行操作的列变换.

不影响第一列的结果. 从而得证.

16. 使用归纳法. $n=1.2$ 时成立.

否则 可利用 $M_1.P_1$ 将其相似为引理15的对应形式

记作 $\begin{pmatrix} a_{11} & u_1 \\ u_2 & A_2 \end{pmatrix}$. u_2 只有一个分量可能非0.

再构造 $M_2.P_2$ 使得 $M_2P_2A_2(M_2P_2)^{-1}$

将 A_2 化为对应形式.

注意到 引理15的过程中未改变第一行第一列

因此 $M_2.P_2$ 的第一行第一列 只有对角元为1.

从而

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & M_2P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & u_1 \\ u_2 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & P_2^TM_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

不会改变 u_2 除第一个分量均为0的性质.

重复此操作即得证。

17. 注意到 $X^{-1}A^{t-1}x=e_t$.

AX 的第 i 列为 $A^{i}x$.

$X^{-1}AX$ 的前 $n-1$ 列为 e_2-e_n. $\Rightarrow$ 上 Hessenberg.

18. 由条件可知，对任何 λ，$\lambda I-H$ 的左下角 $n-1$ 阶子矩阵可逆. 特征值几何重数小等为1. 代数重数 $=1$

可对角化.

$\Rightarrow$ 无重特征值.

19. $d_{11}=1$. $d_{i+1,i+1}=\dfrac{d_{ii}}{h_{i+1,i}}$

计算可知成立.

$d_{ii}\,d_{n-i,n-i}=\prod_{j=1}^{n-1}h_{j+1,j}$.

$\|D\|_2$, $\|D^{-1}\|_2$ 分别为特征值、特征值倒数中最大者.

$\Rightarrow \prod_{j=1}^{k}|h_{k,k+1}|$ 中最大的除以最小的。

20. 存在 Householder 变换 H_0 使得 $H_0 a = \|a\| e_1$

满足 H_0^2 的第一列是 e_1. H_0 的第一列即为 $\frac{a}{\|a\|}$

计算可发现 $H_0^T A H_0$ 的第一列为 λe_1.

再将右下角的部分类似 6.4.1 处理 $\Rightarrow H_2$.

取 $Q = H_0 H_2$ 即可

21. 上 Hessenberg 不可约. 可从上往下通过 $n-1$ 个 Givens. 实现 QR 分解.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \cos\theta, & \sin\theta \\ -\sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta, & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b'' \\ 0 & d'' \end{pmatrix}.$$

也即 $Q^{-1}HQ$ 左乘右侧的 Q^{-1} 形式

有零对角元的上三角矩阵后.

乘右侧 Q 后此对角元仍然为 0. 得证.

22. 归纳. $U_0 R_0 = H_0 - \mu_0 I$. 小于等于 $j-1$ 时均成立.

考虑 j. 左侧 $= U_0 \cdots U_{j-1}(H_j - \mu_j I) R_{j-1} \cdots R_0$

$$= U_0 \cdots U_{j-1} H_j R_j \cdots R_0 - \prod_{i=0}^{j}(H - \mu_i I)\mu_j I.$$

由右侧归纳假设.

只需证明 $U_0 \cdots U_{j-1} H_j R_{j-1} \cdots R_0 = U_0 \cdots U_{j-1} R_{j-1} \cdots R_0 H$.

$\Rightarrow H_t R_{t-1} = R_{t-1} H_{t-1}$. 反复利用可证.

23. 设第 i 个对角元为 λ_i.

考虑 $(A-\lambda_i I)x=0$. 假设 $x_i=0$.

利用剩下 $i-1$ 个方程独立性可以推出 x 必须全为 0,

矛盾.

可设 $x_i=1$. $B \in \mathbb{F}^{n-1 \times n-1}$ $b \in \mathbb{F}^{n-1 \times 1}$.

```
function find-eigen(A, result)
    for i = 1:n,
        for j = 1:n-1
            for k = j:n-1
                B[j][k] = A[j<i ? j : j+1][k<i ? k : k+1]
            end
            b[j] = -A[j<i ? j : j+1][i]
            b[j][j] = -A[i][i].
        end
        for j = 1:n.
            result[i][j<i ? j : j+1] = Uppersolve(B,b)[i]
        end.
        result[i][i] = 1
```

end.

end,

24. 将 Householder 定义中的 ww^T 推广为 ww^H.

对复向量仍有 3.3.2 结论.

将定理 3.3.1 从第一列开始上三角化变为从

最后一列开始下三角化 $\Rightarrow$ QL分解.

类似地 LU的分解可变为UL分解.

考虑 $A_{n-1}=Q_nL_n$. $A_n=L_nQ_n$ 的迭代.

将定理 6.4.1 的过程中 LU分解替换为 UL分解

QR　　　　QL.

仍有UL分解 $\longrightarrow$ 对角线以上趋于0.

对角线上趋于特征值.

25. $P^TL=(L_{n-1}P_{n-1}\cdots L_1P_1)^T$.

由于上 Hessenberg 阵的形式.

每个 L_i 除对角线上的1外至多有一个元素 $l_{i+1,i}$ 非0.

P_i 则或为单位阵 / 交换 $i, i+1$ 两行的矩阵.

(右乘时为列交换).

利用P_i, L_i的形式知其逆依然有此性质.

按照$1\sim n-1$的顺序右乘上消除阵L_i后

L_i作用完后下三角元素$u_{21}, u_{32}, \ldots, u_{t+1,t}$非零.

于是作用完后仍为上Hessenberg阵.

由$\tilde{H}=(P^TL)^{-1}HP^TL$. 可知相似.

26. 设x是A对λ_{11}的单位左特征向量.

$Q=(U \quad x)$是正交方阵. 计算可发现满足要求.

λ_{11}是实特征值. 可使x是实向量.

寻找x: 直接由条件列方程求解.

可不妨设$x_1=1$解. 因为下方构造正交阵阵的过程包含了单位化. 构造正交矩阵:

类似习题20. 用Householder变换构造即可.

27. 对于实特征值可直接利用反幂法。

复特征值：

设2阶方阵对角块对应的一对复特征值是 $a\pm bi$。

反幂法的迭代步骤：$(A-aI-biI)v_k=z_{k-1}$.

拆分为实向量 $v_{rk}+iv_{ik}$，$z_{rk}+iz_{ik}$.

可知

$$\begin{cases}(A-aI)v_{rk}+bv_{ik}=z_{rk-1}\\(A-aI)v_{ik}-bv_{rk}=z_{ik-1}\end{cases}$$

得：

$$\begin{cases}((A-aI)^2+b^2)v_{rk}=(A-aI)z_{rk-1}-bz_{ik-1}\\((A-aI)^2+b^2)v_{ik}=bz_{rk-1}+(A-aI)z_{ik-1}\end{cases}$$

另一迭代可写为：

$$\begin{cases}l_k=\sqrt{\|v_{rk}\|^2+\|v_{ik}\|^2}\\z_{rk}=v_{rk}/l_k\\z_{ik}=v_{ik}/l_k\end{cases}$$

计算可合并，将 $b\to -b$ 后，迭代只是将 z_r, z_i 变为相反数。只需取 $z_r\pm iz_i$，即可得到特征值。

提取 a, b 的近似值，+上述迭代可得到
复特征值的特征向量。
结合实特征值的特征向量计算可得到估计

28. 幂法中每步 $y_k = A^TAu_{k-1}$ 即可。
无需显式计算矩阵乘积。
最后得到的特征值开根号得到最大奇异值。

29. 左奇异向量即为 AA^T 的特征向量。
右 A^TA.
得到奇异值利用算法计算。

30. $A^n u = X\Lambda^n X^{-1}u_0$.
归一化后与 $X\,diag(e^{in\theta}, 1, \frac{\lambda_3^n}{\lambda_2^n} \cdots \frac{\lambda_n^n}{\lambda_2^n})X^{-1}u_0$
相同。提取类似定理6.2.1计算 n 充分大时
$u_n \to e^{in\theta}(y_1^* u_0)x_1 + (y_2^* u_0)x_2$.
代入 θ 得表达式即可知有 2 个对应的收敛子数列。