Chapter 7:

1. 对应单位特征向量: α. $A\alpha=\lambda\alpha$.

由对称可知 $\alpha^TA=\lambda\alpha^T$. 亦为左特征向量. 且 $\alpha^T\alpha=1$.

由条件数定义可知为 1.

2. 利用定理 7.1.3. 计算知将 A 的第 i 行、列

除对角元外变为 0 的对称矩阵 B 有特征值 a_{ii}.

而 $A-B$ 只有第 i 行/列非 0.

将其第 i 行列为 α. 可知 $A-B=e_i\alpha^T+\alpha e_i^T$

(由于 $\alpha_i=0$).

从而 $\|(A-B)x\|=\sqrt{(\alpha^Tx)^2+(\|\alpha\|x_i)^2}$

利用 Cauchy 不等式, $x^Tx=1$ 时

$\alpha_i=0 \Rightarrow (\alpha^Tx)^2+(\|\alpha\|x_i)^2\le\alpha^T\alpha(1-x_i^2)+\alpha^T\alpha x_i^2$

$=\alpha^T\alpha$.

$\|(A-B)x\|$ 的最大值为 $\sqrt{\alpha^T\alpha}$.

而此即为二范数. 因此 A 必然有一特征值在

B 的特征值 a_{ii} 的周围 $\sqrt{\alpha^T\alpha}$ 范围中, 从而得证.

3. 由于同时正交相似对角化不改变结果。

可不妨设 A 为对角阵。

此时记 $t^{-1}=\|A^{-1}\|_2$，为最小对角元的倒数。

t 即代表 A 的最小对角元。

而对非 0 的 x，$x^TAx+x^TEx \geq t x^Tx-\|x\|\|Ex\|$

$$> t x^Tx-\|x\|(t\|x\|)=0.$$

4. $A=P\Sigma Q$. $\underline{A^TA}=Q^T\underline{\Sigma^T\Sigma}Q$. Σ 对角元非负.

A^TA ↓ 特征值 ⟷ $\Sigma^T\Sigma$ ↓ 对角元；Σ 对角元非负 ↓ Σ^2 非负。

AA^T 类似。

5. $A^TA=A^2$. $\Rightarrow A^2$ 对应特征值^2.

奇异值平方对应特征值平方相同。

奇异值非负。

6. 设奇异值分解

$A=P\Sigma Q$. P,Q 正交 $\Rightarrow \|A\|_2=\max_x \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$$=\max_{y=Qx} \frac{\|P\Sigma y\|}{\|Q^Ty\|}=\max_y \frac{\|\Sigma y\|}{\|y\|}.$$

利用正交对角阵 可直接计算出 $\|A\|_2 = \sigma_1$.

同理可计算出 $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n}$.

7. rmk. 对于n的 k-1元子集 I　$V\in G_k^n$. $\exists\, x\neq 0$. $x_i=0\ \forall i\in I$

证：不妨设 I 为前 k-1个分量. 其余同理.

考虑 V 的一组基 $\{x_i\}$ 排成 $n\times k$ 矩阵.

对其上面的 $k-1\times k$ 矩阵可右乘可逆矩阵 P 成为上三角阵

(多出一列阶梯的).

由基线性无关, P可逆. 右乘P仍达满秩.

因此前 k-1 分量全为0, 但后面其余分量不全为0.

从而得证.

不妨设 A 已经是Σ形式:

非负对角元从大到小排列的对角阵.

由引理可知 G_i^n 中一定存在非零向量使得前 $i-1$ 分量全为0.

此时 $\frac{\|\Sigma u\|}{\|u\|}\le\sigma_i$　因此对所有子空间取最大值

不超过 σ_i.

而取前 i 个单位向量生成的子空间可以取到 σ_i.

从而第一个等号得证.

对右侧，由于 G_{n-j+1}^{n} 中一定存在非0向量

使得后 $n-j$ 个分量为0. 此时

$$\frac{\|\Sigma u\|}{\|u\|} \geq \sigma_j.$$ 因此对所有子空间取最小值

不依于 σ_j. 而取后 $n-j+1$ 个单位向量

生成的子空间可以取到 σ_j.

第二个等号得证.

8. $$O\left(\frac{(x+t)^TA(x+t)}{(x+t)^T(x+t)}-\lambda\right)=O\big((x+t)^TA(x+t)x^Tx$$
$$-x^TAx\,(x+t)^T(x+t)\big).$$

$$=O(t^TAt\,x^Tx)=O(t^TAt).$$

9. $$T=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n\end{pmatrix}.$$ $$Aq_i=\beta_{i-1}q_{i-1}+\alpha_i q_i+\beta_i q_{i+1}$$

任取 $\|q_1\|=1$. $Aq_1-\alpha_1q_1=\beta_1q_2$. $q_2^Tq_1=0$.

α_1 以表为 Aq_1 在 q_1 上的投影长度.

$$\alpha_1=\frac{q_1^TAq_1}{q_1^Tq_1}$$ q_m. s,t: $x-sq_{m-1}=tq_m$.

s 为投影长度 $$\frac{x^Tq_{m-1}}{q_{m-1}^Tq_{m-1}}$$ $\Rightarrow t, q_m$. 重复操作.

10. 将每次循环中第一个 U 与 beta 累计左乘到左侧的 U 上。第二个累计右乘到右侧的 V 上。$UAV=B$ 的形式。再分别取转置即可。

11. 直接计算 α_2 为位移时结果为 $-\frac{\varepsilon^2}{(\alpha_1-\alpha_2)^2+\varepsilon^2}=O(\varepsilon^2)$.

由 Wilkinson 位移的特征：$T-\mu I$ 不可逆。

QR 分解后的 R 第二行为 0，RQ 第二行为 0。

$T(2,1)$ 一定为 0。

12. $(7.3.4)\Rightarrow \beta_{qq}+\beta_{pp}=(c^2+s^2)(\alpha_{pp}+\alpha_{qq})$

$$=\alpha_{pp}^2+\alpha_{qq}^2 \Rightarrow (7.3.15).$$

13. $c\alpha_{12}+s\alpha_{22}=-s\alpha_{11}+c\alpha_{21}$.

$m^2=(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2+(\alpha_{12}-\alpha_{21})^2$

$c=\frac{\alpha_{11}+\alpha_{22}}{m}$. $s=\frac{\alpha_{21}-\alpha_{12}}{m}$.

对矩阵先化为对称，Jacobi 方法对角化。

对角元取模即为奇异值。(可由对角元为 1/-1 的对角阵调整符号)。

14. 由习题13得到 $\theta_0 \Longrightarrow \theta_2$
对称矩阵。

$J(p, \theta, -\theta_2)AJ(p, \theta, \theta_2)$ 对称. 取 $\theta_1 = \theta_0 - \theta_2$ 即可

由正交降阶值 $\sum \beta_i^2 = \sum \alpha_{ij}^2 \Rightarrow E(B).\ E(A)$ 之和.

15. 利用 Householder $\Rightarrow \min(m,n) \times \min(m,n)$ 的矩阵

$\downarrow$ 习题14.

不断两个列运算. $\Rightarrow$ 对换列序.

调整完了.

16. $cs(x^Tx - y^Ty) + (c^2 - s^2)x^Ty = 0.$

$(x^Tx - y^Ty)\sin 2\theta + 2x^Ty\cos 2\theta = 0.$

$\varphi = 2\theta$, 有 $c = \cos\frac{\varphi}{2}$, $s = \sin\frac{\varphi}{2}$

17. 考虑 $\sum_{i<j} (a_i^Ta_j)^2$. $A = (a_1 \dots a_n)$.

每次操作 p, q 使得减少 $(a_p^T a_q)^2$.

不断选取两列,如此操作可最终收敛至相互正交.

18. 由条件可知. α_i 满足 $\dfrac{\gamma_i \alpha_j}{\alpha_{i+1}} = \dfrac{\beta_i \alpha_{i+1}}{\alpha_i}$

由于 $\gamma_i \beta_i > 0$. 取 $\alpha_{i+1} = \sqrt{\dfrac{\gamma_i \alpha_i^2}{\beta_i}}$

不妨设 $\alpha_1=1$. $\Rightarrow$ 归纳出 α_i.

19. (1) 若 $z_1=0$ $\alpha_1 z_1+\beta_2 z_2=\lambda z_1$. 由不可约得 $\beta_2\neq 0$.

$z_2=0$. $\Rightarrow z=0$ 矛盾.

(2) 设左侧为 t_i, $i=1$ 时记为 1, $i=2$. $\lambda-\alpha_1$.

$$\beta_i z_{i-1}+\alpha_i z_i+\beta_{i+1} z_{i+1}=\lambda z_i$$

$$\beta_i^2\beta_{i+1}t_{i-1}+\alpha_i\beta_{i+1}t_i+\beta_{i+1}t_{i+1}$$
$$=\lambda\beta_{i+1}t_i.$$

由不可约消去 β_{i+1}. $\Rightarrow$ 差值为 $(-1)^{i-1}p_{i-1}(\lambda)$ 下同

20. (7.4.1) $\Rightarrow$ 不可约对称三对角阵只有单特征值.

若有 k 重特征值至少有 $k-1$ 个为 0 的次对角元.

21 (a). 7.4.1. $\Rightarrow$ 顺序主子式都>0. 实对称 $\Leftrightarrow$ 正定.

(b). 由定理 $S_n(-2)$ 可知有两个落在指定范围内.

22. 每次计算 $(T-\tilde{\lambda}I)y_k=z_{k-1}$. 令 z_k 为 y_k 按最大分量的归一化.

由于对称三对角阵. $T-\tilde{\lambda}I$ 利用 Gauss 消元.

有 $O(n)$ 复杂度的LU分解. 求解复杂度为 $O(n)$.

每次迭代共需 $O(n)$ 复杂度.

23. 即用二分法求 B^TB 特征值.

每步二分法计算复杂度 $O(n)$,

可直接递推计算.

27. $C^* = C \Leftrightarrow A^T - iB^T = A + iB \Leftrightarrow M^T = M$.

$$M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}A\alpha - B\beta = \lambda\alpha \\ B\alpha + A\beta = \lambda\beta\end{cases}$$

$\Leftrightarrow C(\alpha + \beta i) = \lambda(\alpha + \beta i)$.

$\begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}$ 亦为 λ 的特征向量,

M 对应特征值均是 C 两倍.

$\alpha + \beta i \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ & $\begin{pmatrix}\beta\\ -\alpha\end{pmatrix}$.