|  |  |
| --- | --- |
| 序号 |  |
| 1 | 根据Gauss’ theorem    Ω是一个有界的分段连续曲面包围的区域 |
| 2 | 使用格林第二定理 |
| 3 |  |
| 4 | 为了获得边界积分方程，要对公式3做如下改动：   1. 将公式3中的替换成kelvin基础解，其中y是奇异点，也称源点（source point，collect point），也是**网格上的顶点**（vertex），x是场点（field point）。**Source point =** **Collect point = mesh vertex** 2. 在y点出建立边界积分方程域：和 3. 进行积分：x趋于y   最终，得到  3D ***displacement*** BIE:    ，注意：**法线指的是场点处的法线，引入场点处的法线是由格林公式造成的**  3D ***traction*** BIE:  与此同时，对于dual 方程，将U对源点y求导数（注意T(y,x)与W(y,x)是不同的）得到，将W带入公式3，得到：    ，  **The singular point y can be located at corners,vertices**, etc.  **注意：T 和 U ， V 和 W 之间是法线导数关系，而且这个法线是X处的法线**.  ， **引入场点处的法线是由格林公式造成的** |
| 5 | Kelvin foundation solutions:      ,注意最后的法线是**源点的法线**. 公式中的指的是在场点x处的法线，只有在W,V的外侧会乘上源点y处的法线，这是由于中红色部分决定的，其中s等同于源点y。    ,E is Young’s Modulus and ν Poisson’s ratio.  ,法线导数要服从爱因斯坦求和约定 |
| 6 | 得到向量形式的边界积分方程  Displacement BIEs：    Traction BIEs：    积分区域： |
| 7 | 我们假设位移u在源点y处满足Holder 连续条件： |
| 8 | 对于积分区域，有    将公式5的积分区域拆分，有：  ，带入      公式左侧，加上，减去，有：    将其中的减去项，与上式第二项合并，得到：    其中，第二项在极限过程中，趋近于零，即：    第三项，变成了free term 或者 jump term  ，其中  The free-term coefficient only depends upon the local geometry at y. As well known, at smooth boundary points it is c(y) = 1/2.自由项只和源点y处的几何相关（2D,3D）. |
| 9 | 最终，对于标量函数的边界积分方程，可以表示成（**半解析结果**）：    向量函数的边界积分方程，可以表示为：    引入柯西主值积分（Cauchy principal value，CPV），公式18可以写成 |
| 10 | 对于超奇异边界积分方程（Hypersingular boundary integral equations，HBIE）  将位移和受力进一步展开，得到：    同样的，在公式5，加上，减去，    得到半解析边界积分方程：    可知，公式21的第二行，在极限情况下趋于零：    公式21，第三行的第一部分为free term：    公式21，第三行的第二部分可以忽略  ，其中b会被抵消掉，a对于直线边的情况下为0.  最终，对于标量函数的超奇异边界积分方程为：    注意：自由项乘以的是位移或施力的**导数**。  对于向量函数的超奇异边界积分方程为：    其中，a在直线边的情况下为0，b由于采用球域，导致最终被抵消了。 |
|  | **6 Direct evaluation of singular integrals** |
|  | The method is semi-analytical in the sense that all singular integrations are performed analytically and the limiting process is performed exactly. Therefore, numerical integration has only to deal with regular integrals.  办解析方法是将奇异的被积函数进行级数分解，变成非奇异函数，然后使用一般的积分方法进行积分运算。  边界元素的类型对积分只有极轻微影响。  对于公式26，我们需要计算极限部分（在本文中，q和t是等价的），    这里的假设是，极限是存在的，而且、、已经获得。  假设，剔除区域为“球”， |
|  | 为了简化，这里之半解析公式40中的超奇异被积函数V，至于强奇异被积函数W只是一个简化处理。于是有公式41    这里说的是，公式41的使用范围，考虑到简洁，公式41去掉了W项，而去掉的前提是W的极限是存在的，否则不能去掉。又因为W项存在的前提是通过分子分母相互抵消效应达到的，所以不适用于场点（field point）在边界和顶点处的情况。如果场点在边界或者顶点处，就不能使用公式41,转而使用公式40求解。  **注意：源点y在顶点处是普遍现象，所以，在我的应用中公式41是不可能使用的，而是全部使用公式40**. |
|  | 定义，是包含奇异点（就是源点y）的面片，如果是**不连续元**，奇异点在元的内部  连续的元奇异点在元的顶点处，所以有相邻元的问题。当元(element)是不连续的，那么Γ中只包含奇异点y的元（一个三角面片）；当元是连续的，那么Γ中包含多个共享奇异点y的三角面片。    **需要考虑的是**http://latex.codecogs.com/gif.latex?%7B%7BN%5Ea%7D%5Cleft%28%20%5Ceta%20%5Cright%29%7D在连续元（顶点共享三角面片）情况下，取值是多少？在线性基函数情况下，应该都为1.  公式42与公式41的区别在于：~~公式41在~~**~~节点坐标~~**~~下（nodal coordinates）~~，公式42是在**局部坐标**下（intrinsic coordinates）。**具体说来**，要看http://latex.codecogs.com/gif.latex?%7Bd%5CGamma%20%7D没有变化，所以还是在**节点坐标**下，即，虽然公式42已经有局部坐标的形式了，但是还没有把http://latex.codecogs.com/gif.latex?%7Bd%5CGamma%20%7D转换成为局部坐标的表达形式。  此外，还要注意公式42中间的加号（“+”），**左边的极限不包括y的**。 |
|  | Na **要注意**，    Notice that the shape functions M c(ξ) employed for the geometric description need not be the same used to represent the unknown functions on the boundary.    M,N这两个形函数是可以不相同的，N是插值顶点位移的，M是插值模型表面的。  **两个形函数的阶数可以不同的**，例如：位移插值是线性的，几何插值是二次的。 |
|  | 转换成局部坐标，，**注意，形函数是在投影到局部坐标之前得到的，也就是说，它是定义在全局坐标系下的**。 |
|  | 在局部坐标系下（），定义极坐标      是**超奇异**的被积函数，是在全局坐标中被剔除的圆域在局部坐标中投影的变形临域（the distorted neighbourhood，），是投影区域的外边界（一般是直线）。  **注意**，公式45主要是体现了极限变量在被积函数中的作用（积分下限） |
|  | 分析超奇异被积函数，对其进行(Laurent) series expansion，得到：    分析积分下标，泰勒展开，得到      对公式45减去，再加上公式46，得到公式48      其中，是规范的积分，是奇异积分，是强奇异积分。      其中，    因此，通过半隐式分析，，，**都是**规范的积分。 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |