|  |  |
| --- | --- |
| 序号 |  |
| 1 | 根据Gauss’ theorem    Ω是一个有界的分段连续曲面包围的区域 |
| 2 | 使用格林第二定理 |
| 3 |  |
| 4 | 为了获得边界积分方程，要对公式3做如下改动：   1. 将公式3中的替换成kelvin基础解，其中y是奇异点，也称源点（source point，collect point），也是**网格上的顶点**（vertex），x是场点（field point）。**Source point =** **Collect point = mesh vertex** 2. 在y点出建立边界积分方程域：和 3. 进行积分：x趋于y   最终，得到  3D ***displacement*** BIE:    ，注意：**法线指的是场点处的法线，引入场点处的法线是由格林公式造成的**  3D ***traction*** BIE:  与此同时，对于dual 方程，将U对源点y求导数（注意T(y,x)与W(y,x)是不同的）得到，将W带入公式3，得到：    ，  **The singular point y can be located at corners,vertices**, etc.  **注意：T 和 U ， V 和 W 之间是法线导数关系，而且这个法线是X处的法线**.  ， **引入场点处的法线是由格林公式造成的** |
| 5 | Kelvin foundation solutions:      ,注意最后的法线是**源点的法线**. 公式中的指的是在场点x处的法线，只有在W,V的外侧会乘上源点y处的法线，这是由于中红色部分决定的，其中s等同于源点y。    ,E is Young’s Modulus and ν Poisson’s ratio.  ,法线导数要服从爱因斯坦求和约定 |
| 6 | 得到向量形式的边界积分方程  Displacement BIEs：    Traction BIEs：    积分区域： |
| 7 | 我们假设位移u在源点y处满足Holder 连续条件： |
| 8 | 对于积分区域，有    将公式5的积分区域拆分，有：  ，带入      公式左侧，加上，减去，有：    将其中的减去项，与上式第二项合并，得到：    其中，第二项在极限过程中，趋近于零，即：    第三项，变成了free term 或者 jump term  ，其中  The free-term coefficient only depends upon the local geometry at y. As well known, at smooth boundary points it is c(y) = 1/2.自由项只和源点y处的几何相关（2D,3D）. |
| 9 | 最终，对于标量函数的边界积分方程，可以表示成（**半解析结果**）：    向量函数的边界积分方程，可以表示为：    引入柯西主值积分（Cauchy principal value，CPV），公式18可以写成 |
| 10 | 对于超奇异边界积分方程（Hypersingular boundary integral equations，HBIE）  将位移和受力进一步展开，得到：    同样的，在公式5，加上，减去，    得到半解析边界积分方程：    可知，公式21的第二行，在极限情况下趋于零：    公式21，第三行的第一部分为free term：    公式21，第三行的第二部分可以忽略  ，其中b会被抵消掉，a对于直线边的情况下为0.  最终，对于标量函数的超奇异边界积分方程为：    注意：自由项乘以的是位移或施力的**导数**。  对于向量函数的超奇异边界积分方程为：    其中，a在直线边的情况下为0，b由于采用球域，导致最终被抵消了。 |
|  | **6 Direct evaluation of singular integrals** |
|  | The method is semi-analytical in the sense that all singular integrations are performed analytically and the limiting process is performed exactly. Therefore, numerical integration has only to deal with regular integrals.  办解析方法是将奇异的被积函数进行级数分解，变成非奇异函数，然后使用一般的积分方法进行积分运算。  边界元素的类型对积分只有极轻微影响。  对于公式26，我们需要计算极限部分（在本文中，q和t是等价的），    这里的假设是，极限是存在的，而且、、已经获得。  假设，剔除区域为“球”， |
|  | 为了简化，这里之半解析公式40中的超奇异被积函数V，至于强奇异被积函数W只是一个简化处理。于是有公式41    这里说的是，公式41的使用范围，考虑到简洁，公式41去掉了W项，而去掉的前提是W的极限是存在的，否则不能去掉。又因为W项存在的前提是通过分子分母相互抵消效应达到的，所以不适用于场点（field point）在边界和顶点处的情况。如果场点在边界或者顶点处，就不能使用公式41,转而使用公式40求解。  **注意：源点y在顶点处是普遍现象，所以，在我的应用中公式41是不可能使用的，而是全部使用公式40**. |
|  | 定义，是包含奇异点（就是源点y）的面片，如果是**不连续元**，奇异点在元的内部  连续的元奇异点在元的顶点处，所以有相邻元的问题 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |