试题研究

天目春辉

2022 年 6 月 17 日

第一章　一般圆锥曲线的性质及应用

知识点 1

对于一般圆锥曲线 $f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，令 $\Delta=B^2-4AC$.

1. 若 $\Delta<0$，则 $f(x,y)=0$ 为椭圆型；
2. 若 $\Delta=0$，则 $f(x,y)=0$ 为抛物线型；
3. 若 $\Delta>0$，则 $f(x,y)=0$ 为双曲线型.

性质 1

直线 $y=kx+m$ 与圆锥曲线 $f(x,y)=0$ 若交于两个不同的点 A,B，则称线段 AB 为该曲线的一条弦，弦长由下载公式给出：

$$|AB|=\frac{1}{|a|}\sqrt{(1+k^2)(b^2-4ac)}.$$

其中 a,b,c 为 $y=kx+m$ 代入 $f(x,y)=0$ 中消去 y 所得二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的各次项系数.

性质 2

设 AB 是圆锥曲线过焦点 F 的弦，其长度记作 l，AB 相对于焦点所在对称轴的倾角为 $\theta\,(\theta\neq 90^\circ)$，$\tan\theta=k$，$e$ 为离心率，p 为焦点到相应准线的距离，则有 l 与 k 的关系：

$$l=\frac{2ep\left(1+k^2\right)}{(1+k^2)-e^2}\text{或}k^2=\frac{e^2l}{l-2ep}-1.$$

证明

由圆锥曲线统一的极坐标方程 $\varrho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，得 $|AF|=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，$|BF|=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$，从而 $l=|AF|+|BF|=\dfrac{2ep\left(1+k^2\right)}{(1+k^2)-e^2}$.

再注意到 $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+k^2}$，代入即证得.

注

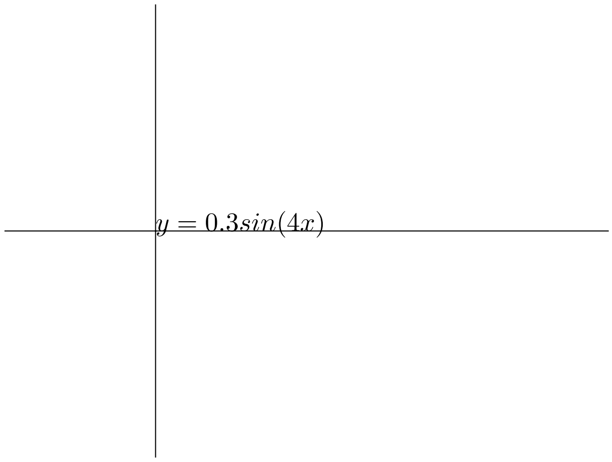
1. **$\theta=90^\circ$ 时，$l=\dfrac{2ep\left(1+k^2\right)}{(1+k^2)-e^2}=2ep$ 通径长)；**
2. **对于椭圆和双曲线 $p=\left|\dfrac{a^2}{c}-c\right|=\dfrac{b^2}{c}$.**

性质 3

设 F 为圆锥曲线焦点，其相应准线为 L，作一直线交圆锥曲线于 A,B，交 L 于 M，则 FM 平分 $\triangle AFB$ 的 $\angle AFB$ 的外角（即 BF,AF 与直线 MF 成等角）.

证明

如图，从 A,B 分别向 L 作垂线 AA' 与 BB'，垂足为 A',B'，由圆锥曲线定义，有



例题 1. 函数

已知函数 $f(x) = (x-2)e^2 + a(x-1)^2$ 有两个零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明 $x_1 + x_2 < 2$.

解答

这是一个解答

习题 1.0.1: Compute the derivative of the following function:

$$f(x) = \sin((\sin x)^2)$$

解答在 **??** 页

习题 1.0.2: It holds:

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}.$$

习题 ?? (??) 的解答:

The derivative is:

$$f'(x) = \big(\sin((\sin x)^2)\big)' = \cos((\sin x)^2) 2 \sin x \cos x.$$