LU分解

求解$Ax=b$时，可以先将矩阵A分解为LU，原式变为$LUx=b$再另$Ux=y$将原式变换为$Ly=b$

先求y再求x 因为 ***doolittle*** 分解默认L的对角线元素均为1

求解顺序：U第一行，L第一列，U第二行，L第二列，U第三行……

例：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&5\\2&1&4&4\\2&3&2&5\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}x_1\ x_2\ x_3\ x_4\end{bmatrix}^Tb=\begin{bmatrix}2\ 3\ 3\ 2\end{bmatrix}^T$$

$$A=LU$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&-3&1&0\\2&-1&-3&1\end{bmatrix}U=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&-5\end{bmatrix}$$

$$Ly=b\rightarrow y=\begin{bmatrix}2&1&2&5\end{bmatrix}^T$$

$$Ux=y\rightarrow x=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\end{bmatrix}^T$$

Hermite插值

0.1. 方法：

1. 写差商表（重复的几次导数就写几次）
2. 差商乘以节点
3. 整理结果
4. 写截断误差

例：

构造三次多项式$p_3(x)$，使曲线$y=p_3(x)$满足如下表格所示的插值条件，求出插值多项式$p_3(x)$的截断误差（不需证明）。

x	0	1	3
$f(x)$	1	0	-2
$f'(x)$		1	

写差商表如下：

0	1	-1	2	-1
1	0	1	-1	
1	0	-1		
3	-2			

$$P_3(x) = 1 + (-1)(x-0) + 2(x-0)(x-1) + (-1)(x-0)(x-1)^2$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-1)^2(x-3)$$

最小二乘法

0.1. 方法

1. 整理公式
2. 写出矛盾方程组
3. 转置左乘
4. 解出未知变量
5. 代回原式

例：

用最小二乘法求解一个形如$y = a + bx^2$的经验公式，使它与下列的数据拟合，计算误差平方和。

x_i	**-1.0**	**0**	**1.0**	**2**
x_i^2	1	0	1	4
y_i	1.91	1.05	2.08	5.21

$$a + bx^2 = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.91 \\ 1.05 \\ 2.08 \\ 5.21 \end{bmatrix}$$

转置左乘，有：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.91 \\ 1.05 \\ 2.08 \\ 5.21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.25 \\ 24.83 \end{bmatrix}$$

解得$a = 0.9867$，$b = 1.0506$，$y = 0.9867 + 1.0506x^2$

不动点迭代和牛顿迭代法

0.1. 不动点迭代法的全局收敛定理：

设方程$x = \varphi(x)$满足

1. 迭代函数$\varphi(x)$在区间 **[a,b]** 上导函数存在且连续；
2. 当$x \in [a, b]$时，$\varphi(x) \in [a, b]$；（封闭性）
3. 存在常数 $0 < L < 1$，使对任意$x \in (a, b)$有$|\varphi'(x)| \leq L$.（压缩性）

不动点迭代格式：

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

收敛速度:

$$s=\lim_{i\to\infty}\frac{e_{i+1}}{e_i},\ e_i=|x_i-r|$$

其中r是该不动点格式的精确解。

0.1. Newton迭代法的全局收敛性

设有$f(x)=0$且$f(x)\in C^2[a,b]$，（二阶导数存在）且满足：

1. $f(a)f(b)<0$
2. $f'(x)\neq 0$，$f''(x)\neq 0$，$\forall x\in[a,b]$（$f'(x),f''(x)$不变号）
3. 取$x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)f''(x_0)>0$

   则（1）$f(x)=0$在$[a,b]$内有唯一的根x^*

   （2）由Newton迭代式产生的序列x_k收敛于x^*，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f^*(x^*)}{2f'(x^*)}$$

Newton迭代格式：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},k=0,1,2,\cdots$$

例：

设有迭代格式$x_{n+1}=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}x_n^2$

1. 若该格式收敛，试求所收敛到的收敛值；
2. 在该极限值附近，试确定此格式的局部收敛阶是几阶。

解：

1. 两边取极限：$x=\frac{3}{4}+\frac{1}{3}x$，解得极限值$x=1.5$.
2. $$\frac{x_{n+1}-1.5}{(x_n-1.5)^p}=\frac{\frac{1}{3}x_n^2-0.75}{(x_n-1.5)^p}=\frac{x_n^2-2.25}{3(x_n-1.5)^p}=\frac{(x_n-1.5)(x_n+1.5)}{3(x_n-1.5)^p}$$

当$p=1$时，原式= $\frac{x_n+1.5}{3}$ 取极限等于1，所以$p=1$，一阶收敛.

误差

1. **绝对误差**

   定义：

   $x^* - x = e(x^*)$

   在不引起混淆时，简记$e(x^*)$为e^*.

   绝对误差限：

   　如果存在正数$\varepsilon^* = \varepsilon(x^*)$，使得有绝对误差$|e^*| - |x^* - x| \le \varepsilon^*$，

   则称ε^*为x^*近似x的一个**绝对误差限**。$x \in [x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*]$, $x = x^* \pm \varepsilon^*$.

   通常计算中所要求的误差，是指估计尽可能小的绝对误差限。

2. **相对误差**

   定义：

   设x^*是对准确值$x(\neq 0)$的一个近似，则称

   $$e_r(x^*) = \frac{x^* - x}{x} = \frac{e(x^*)}{x}$$

   为x^*近似x的相对误差，不引起混淆时，简记$e_r(x^*)$为e_r^*

3. **有效数字**

   定义：

   设x的近似值x^*有如下标准形式

   $$x^* = \pm 10^m \times 0.\underline{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n x_{n+1} \cdots x_p}$$

   其中m为整数，$\{x_i\} \subset \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$且$x_i \neq 0$，$p \geq n$.如果有

   $$|e^*| = |x - x^*| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

   则称x^*为x的具有n位有效数字的近似数，或称x^*准确到10^{m-n}位，其中数字$x_1, x_2, \cdots, x_n$分别称为x^*的第$1, 2, \cdots, n$个有效数字。

   例：

   $$x = \pi, x_1^* = 3.141, x_2^* = 3.142$$

$$|x - x_1^*| = 0.00059 \cdots \le 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-3}$$

3位有效数字，非有效数

$$|x - x_2^*| = 0.00040 \cdots \le 0.0005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-4}$$

4位有效数字，有效数

4. **二元函数算术运算误差传播规律**

   绝对误差限：

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) \approx \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx |x_2^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_1^*|\varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(\frac{x_1^*}{x_2^*}) \approx \frac{|x_2^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_1^*|\varepsilon(x_2^*)}{|x_2^*|^2} \quad (x_2^* \neq 0)$$

   相对误差限：（可能要考）

$$\varepsilon_r(x_1^* + x_2^*) \approx max\{\varepsilon_r(x_1^*), \varepsilon_r(x_2^*)\} \quad (x_1^* x_2^* > 0)$$

$$\varepsilon_r(x_1^* x_2^*) \approx \varepsilon_r(x_1^*) + \varepsilon_r(x_2^*) \quad (x_1^* x_2^* \neq 0)$$

$$\varepsilon_r(\frac{x_1^*}{x_2^*}) \approx \varepsilon_r(x_1^*) + \varepsilon_r(x_2^*) \quad (x_1^* x_2^* \neq 0)$$

例1：

设近似数$x_1^* = 2.1567$是有效数，$x_2^* = -3.5017$是由准确数四舍五入所得的数，则相对误差$|e_r(x_1^* x_2^*)| \le$ ？

$$|e_r(x_1^* x_2^*)| = |e_r(x_1^*)| + |e_r(x_2^*)| \le |\frac{0.5 \times 10^{1-5}}{2.1567}| + |\frac{0.5 \times 10^{1-5}}{-3.5017}| \approx 3.75 \times 10^{-5}$$

例2:

近似数$x^* = 2.453800$具有7位有效数字？

近似数代表最后一位数字是近似出来的，所以有 $0.000005 = \frac{1}{2} \times 10^{1-6}$

所以是6位有效数字

迭代法解线性方程组

0.1. 简单迭代法的收敛性（适用于所有迭代法）

定理： 简单迭代法$\overline{x}^{(k+1)}=B\overline{x}^{(k)}+\overline{g}, \quad k=0,1,2,\cdots$对任意初始向量$\overline{x}^{(0)}$都收敛的充要条件是：**迭代矩阵的谱半径**$\rho(B)<1\ or\ \lim_{k\to\infty}B^k=0$

$\rho(B)<1$**是判定收敛的根本法则；**

当$\rho(B)\geq 1$**时，有可能存在某个初始向量**$\overline{y}^{(0)}$**使简单迭代法收敛。**

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}.$$

$$Ax=b$$
$$A=D+L+U$$
$$(D+U+L)x=b$$

0.1. 1. Jacobi迭代法

$$Dx_{k+1}=-(L+U)x_k+b$$
$$x_{k+1}=-D^{-1}(L+U)x_k+D^{-1}b$$

能够写成如下格式：

$$x_1^{(k+1)}=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(k)}-a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)}=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(k)}-a_{23}x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)}=\frac{1}{a_{33}}(b_3-a_{31}x_1^{(k)}-a_{32}x_2^{(k)})$$

0.1. 2.Gauss-Seidel迭代法

$$(D+L)x_{k+1}=-Ux_k+b$$
$$x_{k+1}=-(D+L)^{-1}Ux_k+(D+L)^{-1}b$$

能够写成如下格式：

$$x_1^{(k+1)}=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(k)}-a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)})$$

Gauss-Seidel迭代法与Jacobi迭代法的区别：

GS迭代法逐次更新变量，Jacobi迭代法完成一轮才更新变量。

0.1. 3.Sor迭代法

超松弛迭代法是由Gauss-Seidel迭代法改写得到的：

$$(D+L)x_{k+1} = -Ux_k + b$$

$$x_{k+1} = (1-\omega)x_k + \omega[-(D+L)^{-1}Ux_k + (D+L)^{-1}b]$$
$$or$$
$$Dx_{k+1} + Lx_{k+1} = -Ux_k + b$$

$$Dx_{k+1} = (1-\omega)Dx_k + \omega(b - Lx_{k+1} - Ux_k)$$

即：

$$x_{k+1} = (D+\omega L)^{-1}((1-\omega)D - \omega U)x_k + \omega(D+\omega L)^{-1}b$$

	Jacobi	**Gauss-Seidel**	**Sor**
A严格对角占优	收敛	收敛	$0 < \omega \leq 1$时收敛
A对称正定	未必收敛	收敛	$0 < \omega < 2$时收敛

严格对角占优：$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$

对称正定：$A_{ij} = A_{ji}$，$\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$

数值积分

0.1. 求积公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R[f] = I_n + R[f]$$

其中$R[f]$称为**求积公式的余项**，$x_k(k=1,2,\cdots,n)$称为**求积节点**，$A_k(k=0,1,2,\cdots,n)$称为**求积系数。**A_k仅与求积节点x_k的选取有关，而不依赖与被积函数$f(x)$的具体形式。

0.1. 代数精度

衡量一个求积公式好坏的标准。

定义： 如果求积公式$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$对于一切不高于$m$次的代数多项式准确成立，而对于某个$m+1$次多项式并不准确成立，则称上述求积公式具有 m**次代数精确度，** 或称为具有 m**次代数精度。**

1. 代数精度越高，求积公式的适应性越强。
2. 凡至少具有零次代数精度的求积公式

   $$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

   一定满足

   $$\int_a^b 1dx = \sum_{k=0}^n A_k \cdot 1$$

   从而有

   $$\sum_{k=0}^n A_k = b-a$$

   即求积系数之和等于积分区间长度，这是求积系数的一个**基本特性**。

例：

设用函数值$f(0),f(1)$和导数值$f'(0),f'(1)$的线性组合近似表达积分$\int_0^1 f(x)dx$，试求：(1) 求四个组合系数A_0,A_1,B_0,B_1的值

(2) 求该数值求积公式的截断误差$E(f)$.

1. $$\int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0) + B_1 f'(1)$$

   另$f(x)$分别等于$1;x;x^2;x^3$，可以解得

   $$A_0=\frac{1}{2},A_1=\frac{1}{2};B_0=\frac{1}{12},B_1=-\frac{1}{12}.$$

可以知道其有3次代数精度，因为当$f(x)=x^4$时，该求积公式不再准确。

2. $$E(f)=\int_0^1 f(x)dx-[A_0f(0)+A_1f(1)+B_0f'(0)+B_1f'(1)]$$

$$=\int_0^1 f(x)dx-[A_0H_3(0)+A_1H_3(1)+B_0H_3'(0)+B_1H_3'(1)]$$（使用插值条件）

$$=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 H_3(x)dx=\int_0^1 (f-H_3)dx$$（三次代数精度）

$$=\int_0^1 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-1)^2dx=\frac{1}{720}f^{(4)}(\eta)$$（使用积分中值定理）

0.1. 收敛性与稳定性

如果$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n A_kf(x_k)=\int_a^b f(x)dx$, $(\lim_{h\to\infty n\to\infty} R[f]=0)$其中$h=\max_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$，则称该求积公式是**收敛的。** 如果求积公式对舍入误差不敏感（误差能够控制），则称该求积公式是**稳定的。**

一个求积公式首先应该是收敛的，其次应该是稳定的。

当系数A_k全为正时，求积公式是稳定的。

0.1. Newton-Cotes公式

节点等间距分布的插值型求积公式即为**Newton-Cotes求积公式。**当$n\le 7$时，N-C公式是稳定的；$n\ge 7$时则是不稳定的。

对于$n+1$个节点的N-C公式，当n为奇数时，其代数精度至少为n次；n为偶数时，其代数精度至少为$n+1$次。

该求积公式可以写为

$$\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)\sum_{k=0}^n c_k^{(n)}f(x_0+kh)$$

$$c_k^{(n)}=\frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k)\cdots(t-n)dt$$

其中$c_k^{(n)}$称为**柯特斯系数，** 上式称为**Newton-Cotes公式。** 可以证明$c_k^{(n)}=c_{n-k}^{(n)}$。

0.1. 梯形公式（n=1）

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$$

上式称为**梯形公式。**

0.1. Simpson公式（n=2）

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)[\frac{1}{6}f(a)+\frac{4}{6}f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{6}f(b)]$$

上式称为**Simpson公式或抛物线公式。**

0.1. Cotes公式（n=4）

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)[\frac{7}{90}f(x_0)+\frac{32}{90}f(x_1)+\frac{12}{90}f(x_2)+\frac{32}{90}f(x_3)+\frac{7}{90}f(x_4)]$$

其中$x_k = a_0 + kh\ (k=0,1,2,3,4)$，这个公式特别称为**柯特斯公式。**

0.1. 复化梯形公式

$$T(n) = \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

截断误差：

$$R_{T_{(n)}}[f] = I - T(n) = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1} f^n(\eta_k) = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

若取9个节点，其步长以及与9个节点所对应的求积系数分别是多少？

复化梯形公式：$n=8, h=\frac{b-a}{8}$，对应的求积系数为：

1，2，2，2，2，2，2，2，1。

0.1. 复化Simpson公式

$$S(n) = \frac{h}{6}[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

截断误差：

$$R_{S(n)}[f]=I-S(n)=-\frac{b-a}{2880}h^4f^{(4)}(\eta)$$

若取9个节点，其步长以及与9个节点所对应的求积系数分别是多少？

复化Simpson公式：$n=4,h=\frac{b-a}{4}$，对应的求积系数为：

1，4，2，4，2，4，2，4，1。

0.0.1. 复化公式的收敛性

当$h\to 0$时上述复化公式均收敛到所求积分值I。

0.1. Gauss型求积公式

把具有$2n+1$次代数精度的求积公式

$$\int_a^b\rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^n A_kf(x_k)$$

称为**Gauss型求积公式，** 节点$x_k\ (k=0,1,...,n)$称为**高斯点，** 系数A_k称为**Gauss求积系数。**

构造Gauss型求积公式的关键在于确定**高斯点，** 再由$n+1$个高斯点构造**基函数**进行插值求积，从而得到高斯系数A_k.

在求积节点个数一定的情形下，高斯型求积公式一定是代数精度最高的求积公式$(2n+1)$次，且一定稳定。

例：

定义内积$(f,g)=\int_{-1}^1|x|f(x)g(x)dx$. (1) 试建立首项系数为1的正交多项式系$\{g_i\}_{i=0}^{+\infty}$中的前三项$\{g_i\}_{i=0}^2$ (2) 建立两点Gauss型求积公式

$$\int_{-1}^1|x|f(x)dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

(1) 建立首项为1的正交多项式的前三项：(令$g_0=1$)

$$(g_0,g_1)=\int_{-1}^1|x|g_0g_1dx=\int_{-1}^1|x|(x+a)dx=0$$

$$(g_0,g_2)=\int_{-1}^1|x|g_0g_2dx=\int_{-1}^1|x|(x^2+bx+c)dx=0$$

$$(g_1,g_2)=\int_{-1}^{1}|x|g_1g_2dx=\int_{-1}^{1}|x|(x+a)(x^2+bx+c)dx=0$$

可以解得$a=0,b=0,c=-\frac{1}{2}$,所以$g_1=x,g_2=x^2-\frac{1}{2}$

(2) 令最高次数多项式等于零，零点即为高斯点。令$g_2=0$,得

$$x_0=-\frac{\sqrt{2}}{2},\,x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

设所求Gauss型求积公式为$\int_{-1}^{1}|x|f(x)dx\approx A_0f(-\frac{\sqrt{2}}{2})+A_1f(\frac{\sqrt{2}}{2})$，其中$A_0,A_1$为待求Gauss系数，取$f(x)=1,x$使上式精确相等，有

$$A_0+A_1=\int_{-1}^{1}|x|dx$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}A_0+\frac{\sqrt{2}}{2}A_1=\int_{-1}^{1}|x|xdx$$

解得$A_0=A_1=\frac{1}{2}$，故所求Gauss型求积公式为

$$\int_{-1}^{1}|x|f(x)dx\approx\frac{1}{2}f(-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{1}{2}f(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

拉格朗日插值

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)l_i(x_i)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega_{n+1}(x_i)}$$

上式是不超过n次的多项式，且满足所有的插值条件，因而就是我们需要构造的插值多项式，称之为**Lagrange插值多项式。**

当$n=1$时，有

$$L_1(x)=\frac{x-x_0}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

当$n=2$时，有

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

其插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

定理： 如果$f^{(n)}(x)$在区间$[a,b]$上连续，$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)内存在，$L_n(x)$为在节点$0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$上满足插值条件的$n$次**Lagrange插值多项式，** 则对任一$x \in (a,b)$，其插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中$\xi \in (a,b)$且依赖于x。上式给出的余项通常称为**Lagrange型余项。**

一般情况下，余项表达式中的$\xi \in (a,b)$的具体数值无法知道，但是如果能求出$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$，则可以得出插值多项式的截断误差限为：

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|$$

例：

设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上具有二阶连续导数，且$f(a) = f(b) = 0$. 证明如下不等式成立：

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

1. 写出插值函数：

$$L(x) = \frac{x-a}{b-a}f(a) + \frac{x-b}{a-b}f(b) = 0$$

2. 考虑余项：

$$R(x) = f(x) - L(x) = \frac{f''(x)}{2!}(x-a)(x-b)$$

3. 求余项的最大值：

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |\frac{f''(x)}{2!}(x-a)(x-b)|$$

$$\leq \frac{1}{2} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$$

证毕。