

## LU分解

求解 $Ax = b$ 时，可以先将矩阵 $A$ 分解为 $LU$ ，原式变为 $LUx = b$ 再另 $Ux = y$ 将原式变换为 $Ly = b$

先求 $y$ 再求 $x$  因为 $doolittle$ 分解默认 $L$ 的对角线元素均为1

求解顺序： $U$ 第一行， $L$ 第一列， $U$ 第二行， $L$ 第二列， $U$ 第三行.....

例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \quad b = [2 \ 3 \ 3 \ 2]^T$$

$$A = LU$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$Ly = b \rightarrow y = [2 \ 1 \ 2 \ 5]^T$$

$$Ux = y \rightarrow x = [1 \ 1 \ 1 \ -1]^T$$

## Hermite插值

方法：

1. 写差商表（重复的几次导数就写几次）
2. 差商乘以节点
3. 整理结果
4. 写截断误差

例：

构造三次多项式 $p_3(x)$ ，使曲线 $y = p_3(x)$ 满足如下表格所示的插值条件，求出插值多项式 $p_3(x)$ 的截断误差（不需证明）。

$x$	0	1	3
$f(x)$	1	0	-2
$f'(x)$		1	

写差商表如下：

0	1	-1	2	-1
1	0	1	-1	
1	0	-1		
3	-2			

$$P_3(x) = 1 + (-1)(x - 0) + 2(x - 0)(x - 1) + (-1)(x - 0)(x - 1)^2$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x - 1)^2(x - 3)$$

## 最小二乘法

### 方法

1. 整理公式
2. 写出矛盾方程组
3. 转置左乘
4. 解出未知变量
5. 代回原式

例：

用最小二乘法求解一个形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式，使它与下列的数据拟合，计算误差平方和。

$x_i$	-1.0	0	1.0	2
$x_i^2$	1	0	1	4
$y_i$	1.91	1.05	2.08	5.21

$$a + bx^2 = y$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.91 \\ 1.05 \\ 2.08 \\ 5.21 \end{bmatrix}$$

转置左乘，有：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.91 \\ 1.05 \\ 2.08 \\ 5.21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.25 \\ 24.83 \end{bmatrix}$$

解得  $a = 0.9867$ ,  $b = 1.0506$ ,  $y = 0.9867 + 1.0506x^2$

## 不动点迭代和牛顿迭代法

### 不动点迭代法的全局收敛定理：

设方程  $x = \varphi(x)$  满足

1. 迭代函数  $\varphi(x)$  在区间  $[a, b]$  上导函数存在且连续；
2. 当  $x \in [a, b]$  时,  $\varphi(x) \in [a, b]$ ；(封闭性)
3. 存在常数  $0 < L < 1$ , 使对任意  $x \in (a, b)$  有  $|\varphi'(x)| \leq L$ . (压缩性)

### 不动点迭代格式：

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

### 不动点迭代法的误差估计：

$$\begin{aligned} |x^* - x_k| &\leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}| \\ &\leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

### 收敛速度：

$$s = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i}, \quad e_i = |x_i - r|$$

其中  $r$  是该不动点格式的精确解。

### Newton迭代法的全局收敛性

设有  $f(x) = 0$  且  $f(x) \in C^2[a, b]$ , (二阶导数存在) 且满足：

1.  $f(a)f(b) < 0$
2.  $f'(x) \neq 0$ ,  $f''(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$  ( $f'(x), f''(x)$  不变号)
3. 取  $x_0 \in [a, b]$ , 使  $f(x_0)f''(x_0) > 0$

则 (1)  $f(x) = 0$  在  $[a, b]$  内有唯一的根  $x^*$

(2) 由Newton迭代式产生的序列  $x_k$  收敛于  $x^*$ , 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

**Newton迭代格式：**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

**Newton迭代法的误差估计：**

$$x_{k+1} - x^* = \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2$$

**例：**

设有迭代格式  $x_{n+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3}x_n^2$

1. 若该格式收敛，试求所收敛到的收敛值；
2. 在该极限值附近，试确定此格式的局部收敛阶是几阶。

**解：**

1. 两边取极限： $x = \frac{3}{4} + \frac{1}{3}x$ ，解得极限值  $x = 1.5$ 。

$$2. \quad \frac{x_{n+1} - 1.5}{(x_n - 1.5)^p} = \frac{\frac{1}{3}x_n^2 - 0.75}{(x_n - 1.5)^p} = \frac{x_n^2 - 2.25}{3(x_n - 1.5)^p} = \frac{(x_n - 1.5)(x_n + 1.5)}{3(x_n - 1.5)^p}$$

当  $p = 1$  时，原式  $= \frac{x_n + 1.5}{3}$  取极限等于 1，所以  $p = 1$ ，一阶收敛。

## 误差

### 1. 绝对误差

**定义：**

$$x^* - x = e(x^*)$$

在不引起混淆时，简记  $e(x^*)$  为  $e^*$ 。

**绝对误差限：**

如果存在正数  $\varepsilon^* = \varepsilon(x^*)$ ，使得有绝对误差  $|e^*| = |x^* - x| \leq \varepsilon^*$ ，

则称  $\varepsilon^*$  为  $x^*$  近似  $x$  的一个**绝对误差限**。  $x \in [x^* - \varepsilon^*, x^* + \varepsilon^*]$ ,  $x = x^* \pm \varepsilon^*$ 。

通常计算中所要求的误差，是指估计尽可能小的绝对误差限。

### 2. 相对误差

定义：

设 $x^*$ 是对准确值 $x(\neq 0)$ 的一个近似，则称

$$e_r(x^*) = \frac{x^* - x}{x} = \frac{e(x^*)}{x}$$

为 $x^*$ 近似 $x$ 的相对误差，不引起混淆时，简记 $e_r(x^*)$ 为 $e_r^*$

### 3. 有效数字

定义：

设 $x$ 的近似值 $x^*$ 有如下标准形式

$$x^* = \pm 10^m \times \underbrace{0.x_1x_2x_3 \cdots x_nx_{n+1} \cdots x_p}_{\text{有效数字}}$$

其中 $m$ 为整数， $\{x_i\} \subset \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 且 $x_i \neq 0$ ， $p \geq n$ 。如果有

$$|e^*| = |x - x^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

则称 $x^*$ 为 $x$ 的具有 $n$ 位有效数字的近似数，或称 $x^*$ 准确到 $10^{m-n}$ 位，其中数字 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 分别称为 $x^*$ 的第1, 2,  $\dots$ ,  $n$ 个有效数字。

例：

$$x = \pi, x_1^* = 3.141, x_2^* = 3.142$$

$$|x - x_1^*| = 0.00059 \cdots \leq 0.005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-3}$$

3位有效数字，非有效数

$$|x - x_2^*| = 0.00040 \cdots \leq 0.0005 = \frac{1}{2} \cdot 10^{1-4}$$

4位有效数字，有效数

### 4. 二元函数算术运算误差传播规律

绝对误差限：

$$\begin{aligned}\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) &\approx \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) \\ \varepsilon(x_1^* x_2^*) &\approx |x_2^*| \varepsilon(x_1^*) + |x_1^*| \varepsilon(x_2^*) \\ \varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) &\approx \frac{|x_2^*| \varepsilon(x_1^*) + |x_1^*| \varepsilon(x_2^*)}{|x_2^*|^2} \quad (x_2^* \neq 0)\end{aligned}$$

相对误差限：

$$\begin{aligned}\varepsilon_r(x_1^* + x_2^*) &\approx \max\{\varepsilon_r(x_1^*), \varepsilon_r(x_2^*)\} & (x_1^* x_2^* > 0) \\ \varepsilon_r(x_1^* x_2^*) &\approx \varepsilon_r(x_1^*) + \varepsilon_r(x_2^*) & (x_1^* x_2^* \neq 0) \\ \varepsilon_r\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) &\approx \varepsilon_r(x_1^*) + \varepsilon_r(x_2^*) & (x_1^* x_2^* \neq 0)\end{aligned}$$

例1：

设近似数 $x_1^* = 2.1567$ 是有效数， $x_2^* = -3.5017$ 是由准确数四舍五入所得的数，则相对误差 $|e_r(x_1^* x_2^*)| \leq ?$

$$|e_r(x_1^* x_2^*)| = |e_r(x_1^*)| + |e_r(x_2^*)| \leq \left| \frac{0.5 \times 10^{1-5}}{2.1567} \right| + \left| \frac{0.5 \times 10^{1-5}}{-3.5017} \right| \approx 3.75 \times 10^{-5}$$

例2：

近似数 $x^* = 2.453800$ 具有7位有效数字？

近似数代表最后一位数字是近似出来的，所以有  $0.000005 = \frac{1}{2} \times 10^{1-6}$

所以是6位有效数字

## 迭代法解线性方程组

### 简单迭代法的收敛性（适用于所有迭代法）

**定理：** 简单迭代法 $\bar{x}^{(k+1)} = B\bar{x}^{(k)} + \bar{g}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ 对任意初始向量 $\bar{x}^{(0)}$ 都收敛的充要条件是：**迭代矩阵的谱半径** $\rho(B) < 1$  or  $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$

$\rho(B) < 1$ 是判定收敛的根本法则；

当 $\rho(B) \geq 1$ 时，有可能存在某个初始向量 $\bar{y}^{(0)}$ 使简单迭代法收敛。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

$$Ax = b \Rightarrow A = D + L + U \Rightarrow (D + L + U)x = b$$

### 1. Jacobi迭代法

$$Dx_{k+1} = -(L + U)x_k + bx_{k+1} = -D^{-1}(L + U)x_k + D^{-1}b$$

能够写成如下格式：

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})$$

## 2. Gauss-Seidel迭代法

$$(D + L)x_{k+1} = -Ux_k + bx_{k+1} = -(D + L)^{-1}Ux_k + (D + L)^{-1}b$$

能够写成如下格式：

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)})$$

### Gauss-Seidel迭代法与Jacobi迭代法的区别：

GS迭代法逐次更新变量，Jacobi迭代法完成一轮才更新变量。

## 3. Sor迭代法

超松弛迭代法是由Gauss-Seidel迭代法改写得到的：

$$(D + L)x_{k+1} = -Ux_k + b$$

$$x_{k+1} = (1 - \omega)x_k + \omega[-(D + L)^{-1}Ux_k + (D + L)^{-1}b]$$

or

$$Dx_{k+1} + Lx_{k+1} = -Ux_k + b$$

$$Dx_{k+1} = (1 - \omega)Dx_k + \omega(b - Lx_{k+1} - Ux_k)$$

即：

$$x_{k+1} = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U)x_k + \omega(D + \omega L)^{-1}b$$

	Jacobi	Gauss-Seidel	Sor
A严格对角占优	收敛	收敛	$0 < \omega \leq 1$ 时收敛

	Jacobi	Gauss-Seidel	Sor
A对称正定	未必收敛	收敛	$0 < \omega < 2$ 时收敛

严格对角占优： $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

对称正定： $A_{ij} = A_{ji}$ ,  $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$

## 数值积分

### 求积公式

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R[f] = I_n + R[f]$$

其中 $R[f]$ 称为**求积公式的余项**， $x_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 称为**求积节点**， $A_k (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ 称为**求积系数**。 $A_k$ 仅与求积节点 $x_k$ 的选取有关，而不依赖于被积函数 $f(x)$ 的具体形式。

### 代数精度

衡量一个求积公式好坏的标准。

**定义：** 如果求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$ 对于一切不高于 $m$ 次的代数多项式准确成立，而对于某个 $m + 1$ 次多项式并不准确成立，则称上述求积公式具有 **$m$ 次代数精确度**，或称为具有 **$m$ 次代数精度**。

1. 代数精度越高，求积公式的适应性越强。
2. 凡至少具有零次代数精度的求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

一定满足

$$\int_a^b 1dx = \sum_{k=0}^n A_k \cdot 1$$

从而有

$$\sum_{k=0}^n A_k = b - a$$

即求积系数之和等于积分区间长度，这是求积系数的一个**基本特性**。

例：



设用函数值 $f(0)$ ,  $f(1)$ 和导数值 $f'(0)$ ,  $f'(1)$ 的线性组合近似表达积分 $\int_0^1 f(x)dx$ , 试求:

(1) 求四个组合系数 $A_0, A_1, B_0, B_1$ 的值

(2) 求该数值求积公式的截断误差 $E(f)$ .

$$1. \quad \int_0^1 f(x)dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0) + B_1 f'(1)$$

另 $f(x)$ 分别等于 $1; x; x^2; x^3$ , 可以解得

$$A_0 = \frac{1}{2}, A_1 = \frac{1}{2}; B_0 = \frac{1}{12}, B_1 = -\frac{1}{12}.$$

可以知道其有3次代数精度, 因为当 $f(x) = x^4$ 时, 该求积公式不再准确。

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_0^1 f(x)dx - [A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0) + B_1 f'(1)] \\ &= \int_0^1 f(x)dx - [A_0 H_3(0) + A_1 H_3(1) + B_0 H_3'(0) + B_1 H_3'(1)] \quad (\text{使用插值条件}) \\ 2. \quad &= \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 H_3(x)dx = \int_0^1 (f - H_3)dx \quad (\text{三次代数精度}) \\ &= \int_0^1 \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^2 (x-1)^2 dx = \frac{1}{720} f^{(4)}(\eta) \quad (\text{使用积分中值定理}) \end{aligned}$$

## 收敛性与稳定性

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) = \int_a^b f(x)dx$ , ( $\lim_{h \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} R[f] = 0$ )其中

$h = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ , 则称该求积公式是**收敛的**。如果求积公式对舍入误差不敏感(误差能够控制), 则称该求积公式是**稳定的**。

一个求积公式首先应该是收敛的, 其次应该是稳定的。

当系数 $A_k$ 全为正时, 求积公式是稳定的。

## Newton-Cotes公式

节点等间距分布的插值型求积公式即为**Newton-Cotes求积公式**。当 $n \leq 7$ 时, N-C公式是稳定的;  $n \geq 7$ 时则是不稳定的。

对于 $n+1$ 个节点的N-C公式, 当 $n$ 为奇数时, 其代数精度至少为 $n$ 次;  $n$ 为偶数时, 其代数精度至少为 $n+1$ 次。

该求积公式可以写为

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} f(x_0 + kh)$$

$$c_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k)\cdots(t-n)dt$$

其中 $c_k^{(n)}$ 称为**柯特斯系数**，上式称为**Newton-Cotes公式**。可以证明 $c_k^{(n)} = c_{n-k}^{(n)}$ 。

### 梯形公式 (n=1)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)]$$

上式称为**梯形公式**。

### Simpson公式 (n=2)

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{1}{6}f(a) + \frac{4}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6}f(b)\right]$$

上式称为**Simpson公式或抛物线公式**。

### Cotes公式 (n=4)

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\left[\frac{7}{90}f(x_0) + \frac{32}{90}f(x_1) + \frac{12}{90}f(x_2) + \frac{32}{90}f(x_3) + \frac{7}{90}f(x_4)\right]$$

其中 $x_k = a_0 + kh$  ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ )，这个公式特别称为**柯特斯公式**。

### 复化梯形公式

$$T(n) = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k) + f(b)\right]$$

截断误差：

$$R_{T(n)}[f] = I - T(n) = -\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\eta_k) = -\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)$$

若取9个节点，其步长以及与9个节点所对应的求积系数分别是多少？

复化梯形公式： $n = 8, h = \frac{b-a}{8}$ ，对应的求积系数为：

1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1。

### 复化Simpson公式

$$S(n) = \frac{h}{6}\left[f(a) + 4\sum_{k=0}^{n-1}f\left(x_{k+\frac{1}{2}}\right) + 2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k) + f(b)\right]$$

截断误差：

$$R_{S(n)}[f] = I - S(n) = -\frac{b-a}{2880}h^4 f^{(4)}(\eta)$$

若取9个节点，其步长以及与9个节点所对应的求积系数分别是多少？

复化Simpson公式： $n = 4, h = \frac{b-a}{4}$ ，对应的求积系数为：

1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 1。

### 复化公式的收敛性

当 $h \rightarrow 0$ 时上述复化公式均收敛到所求积分值 $I$ 。

### Gauss型求积公式

把具有 $2n + 1$ 次代数精度的求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

称为**Gauss型求积公式**，节点 $x_k (k = 0, 1, \dots, n)$ 称为**高斯点**，系数 $A_k$ 称为**Gauss求积系数**。

构造Gauss型求积公式的关键在于确定**高斯点**，再由 $n + 1$ 个高斯点构造**基函数**进行插值求积，从而得到高斯系数 $A_k$ 。

在求积节点个数一定的情形下，高斯型求积公式一定是代数精度最高的求积公式 $(2n + 1)$ 次，且一定稳定。

**例：**

定义内积 $(f, g) = \int_{-1}^1 |x|f(x)g(x)dx$ 。(1) 试建立首项系数为1的正交多项式系 $\{g_i\}_{i=0}^{+\infty}$ 中的前三项 $\{g_i\}_{i=0}^2$  (2) 建立两点Gauss型求积公式

$$\int_{-1}^1 |x|f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

(1) 建立首项为1的正交多项式的前三项：(令 $g_0 = 1$ )

$$(g_0, g_1) = \int_{-1}^1 |x|g_0g_1dx = \int_{-1}^1 |x|(x+a)dx = 0$$

$$(g_0, g_2) = \int_{-1}^1 |x|g_0g_2dx = \int_{-1}^1 |x|(x^2 + bx + c)dx = 0$$

$$(g_1, g_2) = \int_{-1}^1 |x|g_1g_2dx = \int_{-1}^1 |x|(x+a)(x^2 + bx + c)dx = 0$$

可以解得 $a = 0, b = 0, c = -\frac{1}{2}$ ,所以 $g_1 = x, g_2 = x^2 - \frac{1}{2}$

(2) 令最高次数多项式等于零，零点即为高斯点。令 $g_2 = 0$ ,得

$$x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

设所求Gauss型求积公式为 $\int_{-1}^1 |x|f(x)dx \approx A_0f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + A_1f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ ，其中 $A_0, A_1$ 为待求Gauss系数，取 $f(x) = 1, x$ 使上式精确相等，有

$$A_0 + A_1 = \int_{-1}^1 |x|dx \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}A_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}A_1 = \int_{-1}^1 |x|x dx$$

解得 $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$ ，故所求Gauss型求积公式为

$$\int_{-1}^1 |x|f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{2}f(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

## 拉格朗日插值

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x_i) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega_{n+1}(x_i)}$$

上式是不超过 $n$ 次的多项式，且满足所有的插值条件，因而就是我们需要构造的插值多项式，称之为**Lagrange插值多项式**。

当 $n = 1$ 时，有

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_1}{x_1-x_0}y_1$$

当 $n = 2$ 时，有

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

其插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

**定理：** 如果 $f^{(n)}(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续， $f^{(n+1)}(x)$ 在 $(a, b)$ 内存在， $L_n(x)$ 为在节点 $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ 上满足插值条件的 $n$ 次**Lagrange插值多项式**，则对任一 $x \in (a, b)$ ，其插值余项为：

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\xi \in (a, b)$ 且依赖于 $x$ 。上式给出的余项通常称为 **Lagrange型余项**。

一般情况下，余项表达式中的 $\xi \in (a, b)$ 的具体数值无法知道，但是如果能求出 $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$ ，则可以得出插值多项式的截断误差限为：

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|$$

例：

设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上具有二阶连续导数，且  $f(a) = f(b) = 0$ 。证明如下不等式成立：

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

1. 写出插值函数：

$$L(x) = \frac{x-a}{b-a} f(a) + \frac{x-b}{a-b} f(b) = 0$$

2. 考虑余项：

$$R(x) = f(x) - L(x) = \frac{f''(x)}{2!} (x-a)(x-b)$$

3. 求余项的最大值：

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |f(x)| &= \max_{x \in [a, b]} \left| \frac{f''(x)}{2!} (x-a)(x-b) \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \frac{(b-a)^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{8} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \end{aligned}$$

证毕。