数字图像处理

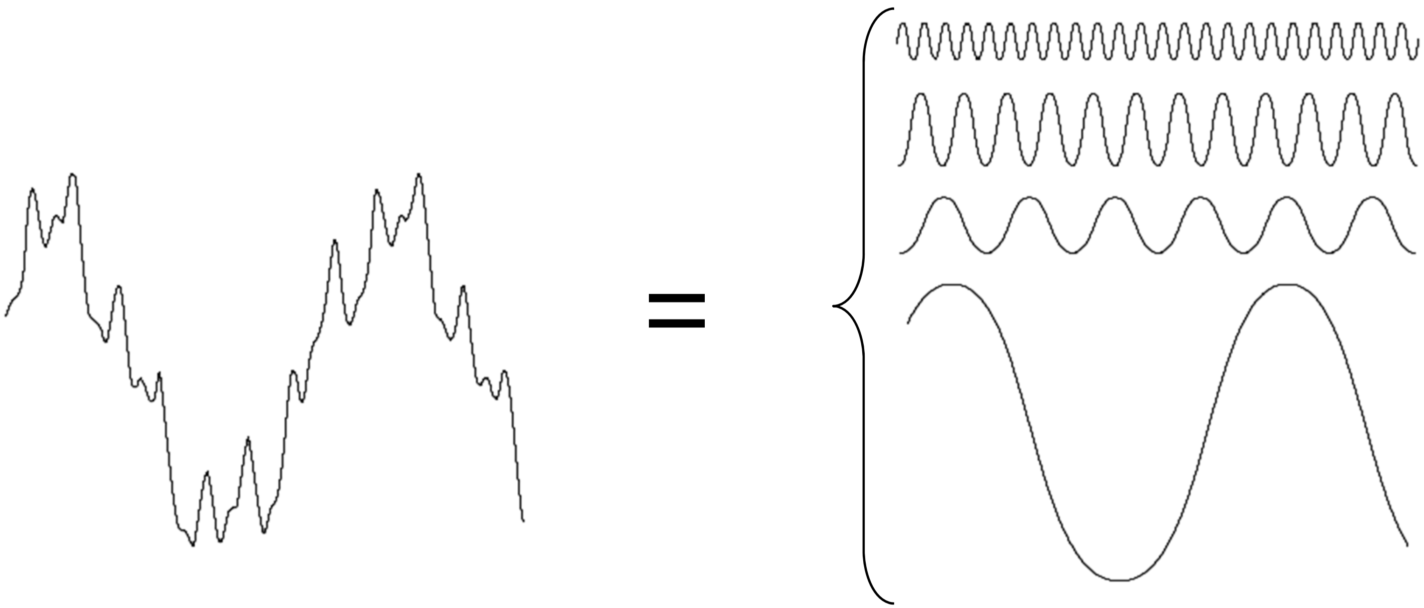
Digital Image Processing

信息工程学院
School of Information Engineering

4.2 离散傅立叶变换

郭志强 主讲

4.2 离散傅立叶变换



4.2 离散傅立叶变换

4.2.1 一维离散傅里叶变换

设$f(x)$是在时域上等距离采样得到的N点离散序列，x是离散实变量，u为离散频率变量，则离散傅里叶变换对定义为：

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\exp\left[-\frac{j2\pi xu}{N}\right] \quad , \quad u=0,1,\cdots,N-1 \qquad (4.20)$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{u=0}^{N-1}F(u)\exp\left[\frac{j2\pi ux}{N}\right] \quad , \quad x=0,1,\cdots,N-1 \qquad (4.21)$$

其中，$F(u)$为正变换，$f(x)=f^{-1}\left[F(u)\right]$ 为反变换；

$e^{-j\frac{2\pi}{N}xu}$ 是正变换核，$e^{j\frac{2\pi}{N}xu}$ 是反变换核。

4.2.1 一维离散傅里叶变换

根据欧拉公式 $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ **有**

$$\exp(-j2\pi xu) = \cos 2\pi ux - j\sin 2\pi ux \qquad (4.22)$$

所以，$F(u)$一般是复数，并可以写成

$$F(u) = R(u) + jI(u) \qquad (4.23)$$

4.2.1 一维离散傅里叶变换

其中，$R(u)$和$I(u)$分别为$F(u)$的实部和虚部，指数形式为

$$F(u) = |R(u)| + \exp[-j\phi(u)] \tag{4.24}$$

且 $|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$ ， $\varphi(u) = \arctan\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right]$ （4.25）

其中，$|F(u)|$称为$f(x)$的傅里叶频谱，反映了$f(x)$的幅频特性；$\Phi(u)$称为相位角，反映了$f(x)$的相频特性。

4.2.2 二维离散傅里叶变换

1、二维离散傅里叶变换(2D-DFT)

设$f(x,y)$是在空间域上等间隔采样得到的$M\times N$的二维离散信号，x和y是离散实变量，u和v为离散频率变量，则二维离散傅里叶变换对一般地定义为：

$$F(u,v)=\sqrt{\frac{1}{MN}}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[-j2\pi(\frac{xu}{M}+\frac{yv}{N})]$$

$$(u=0,1,\dots,M-1\text{；}v=0,1,\dots,N-1)\qquad \textbf{(4.26)}$$

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{1}{MN}}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})]$$

$$(x=0,1,\dots,M-1\text{；}y=0,1,\dots,N-1)\qquad \textbf{(4.27)}$$

4.2.2 二维离散傅里叶变换

1、二维离散傅里叶变换

在图像处理中，有时为了讨论上的方便，取$M = N$，并考虑到正变换与反变换的对称性，就将二维离散傅里叶变换对定义为：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[-\frac{j2\pi(xu+yv)}{N}] \quad (4.28)$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[\frac{j2\pi(ux+vy)}{N}] \quad (4.29)$$

其中， $x,y,u,v = 0,1,\dots,N-1$；

4.2.2 二维离散傅里叶变换

1、二维离散傅里叶变换

与一维时的情况类似，可将二维离散傅里叶变换的频谱和相位角定义为：

$$P(u,v)=|F(u,v)|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v) \quad (4.30a)$$

$$\phi(u,v)=\arctan[I(u,v)/R(u,v)] \quad (4.30b)$$

将二维离散傅里叶变换的频谱的平方定义为$f(x,y)$的功率谱，记为：

$$P(u,v)=|F(u,v)|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v) \quad (4.31)$$

反映了二维离散信号的能量在空间频率域上的分布情况。

4.2.2 二维离散傅里叶变换

2、图像傅里叶变换的意义

（1）简化计算，也即傅里叶变换可将空间域中复杂的卷积运算转化为频率域中简单的乘积运算。

（2）对于某些在空间域中难于处理或处理起来比较复杂的问题，利用傅里叶变换把用空间域表示的图像映射到频率域，再利用频域滤波或频域分析方法对其进行处理和分析，然后再把其在频域中处理和分析的结果变换回空间域，从而可达到简化处理和分析的目的。

（3）某些只能在频率域处理的特定应用需求，比如在频率域进行图像特征提取、数据压缩、纹理分析、水印嵌入等。

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

1、基图像

由二维离散傅里叶反变换式（4.29）：

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[\frac{j2\pi(ux+vy)}{N}]$$

可知，由于u和v均有$0,1,\ldots,N-1$的N个可能的取值，所以$f(x,y)$由N^2个频率分量组成，所以每个频率分量都与一个特定的(u,v)值相对应；且对于某个特定的(u,v)值来说，当(x,y)取遍所有可能的值($x=0$，1，…，$N-1$；$y=0$，1，…，$N-1$）时，就可得到对应于该特定的(u,v)值的一幅基图像。

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

1、基图像

$$f_{u,v}=\frac{1}{N}\begin{bmatrix} exp\left[j2\pi\left(\frac{0u+0v}{N}\right)\right] & \cdots & exp\left[j2\pi\left(\frac{0u+(N-1)v}{N}\right)\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ exp\left[j2\pi\left(\frac{(N-1)u+0v}{N}\right)\right] & \cdots & exp\left[j2\pi\left(\frac{(N-1)u+(N-1)0v}{N}\right)\right] \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

课堂问题： 对应于不同（u,v）值的基图像共有多少幅？

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

2、可分离性

式(4.28)和式(4.29)的二维离散傅里叶变换对可写成如下的分离形式：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\exp[\frac{-j2\pi xu}{N}](\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[\frac{-j2\pi yv}{N}]) \qquad \textbf{(4.33)}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\exp[\frac{j2\pi ux}{N}](\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[\frac{j2\pi vy}{N}]) \qquad \textbf{(4.34)}$$

上述的可分离表示形式说明，可以连续运用两次一维DFT来实现一个二维DFT。

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

2、可分离性

以式(4.33)： $F(u,v)=\dfrac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}F(x,v)\exp[\dfrac{-j2\pi ux}{N}]$

为例，可先沿y轴方向进行一维的(列)变换而求得：

$$F(x,v)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[\frac{-j2\pi vy}{N}] \qquad (4.35)$$

然后再对$F(x,v)$沿x方向进行一维的(行)变换而得到最后结果：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}F(x,v)\exp[\frac{-j2\pi ux}{N}] \qquad (4.36)$$

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

3、平均值

一幅图像的灰度平均值可表示为：

$$\overline{f} = \frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \qquad (4.37)$$

如果将$u = v = 0$代入式(4.28)：

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp[-\frac{j2\pi(xu+yv)}{N}]$$

可得：

$$F(0,0) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \qquad (4.38)$$

所以，一幅图像的灰度平均值可由DFT在原点处的值求得，即：

$$F(0,0) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \qquad (4.39)$$

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

4、周期性

对于$M \times N$的图像和二维离散傅里叶变换对的一般定义式(4.26)和(4.27)，$F(u,v)$的周期性定义为：

$$F(u,v) = F(u+mM, v+nN)$$

$$(m,n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \qquad (4.40)$$

5、共轭对称性

设$f(x,y)$为实函数，则其傅里叶变换$F(u,v)$具有共轭对称性：

$$F(u,v) = F^*(-u,-v) \qquad (4.41)$$

$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)| \qquad (4.42)$$

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

6、平移性(shift property)

对于$M \times N$的图像$f(x,y)$和二维离散傅里叶变换对的一般定义式(4.26)和(4.27)，若设用符号 表示函数与其傅里叶变换的对应性，则傅里叶变换的平移性可表示为：

$$f(x,y)\exp[j2\pi(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N})] \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0) \qquad \textbf{(4.43)}$$

$$F(u,v)\exp[-j2\pi(\frac{x_0 u}{M}+\frac{y_0 v}{N})] \Leftrightarrow f(x-x_0, y-y_0) \qquad \textbf{(4.44)}$$

其中，式(4.43)说明，给函数乘以一个指数项，就相当于把其变换后的傅里叶频谱在频率域进行平移。式(4.44)说明，给傅里叶频谱乘以一个指数项，就相当于把其反变换后得到的函数在空间域进行平移。


谢 谢
THANK YOU