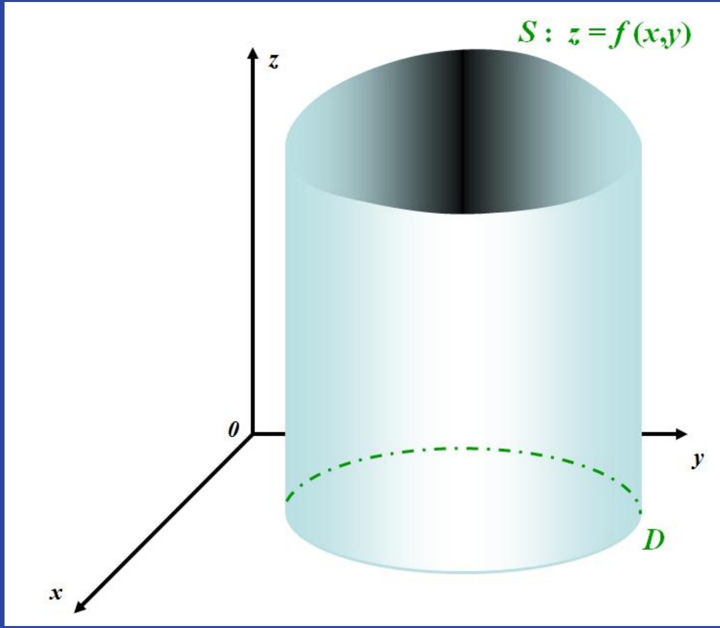
二重积分的概念与性质

二重积分的概念

二重积分的性质

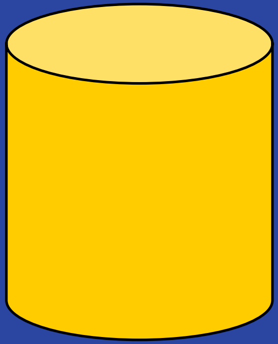
二重积分的概念

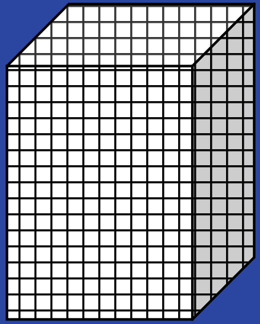
曲顶柱体的体积：



底是 xoy 面上的闭区域 D，侧面是以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面，顶面是曲面 $z=f\left(x,y\right)$（$f\left(x,y\right)\geq 0$）所构成的立体.

平顶柱体





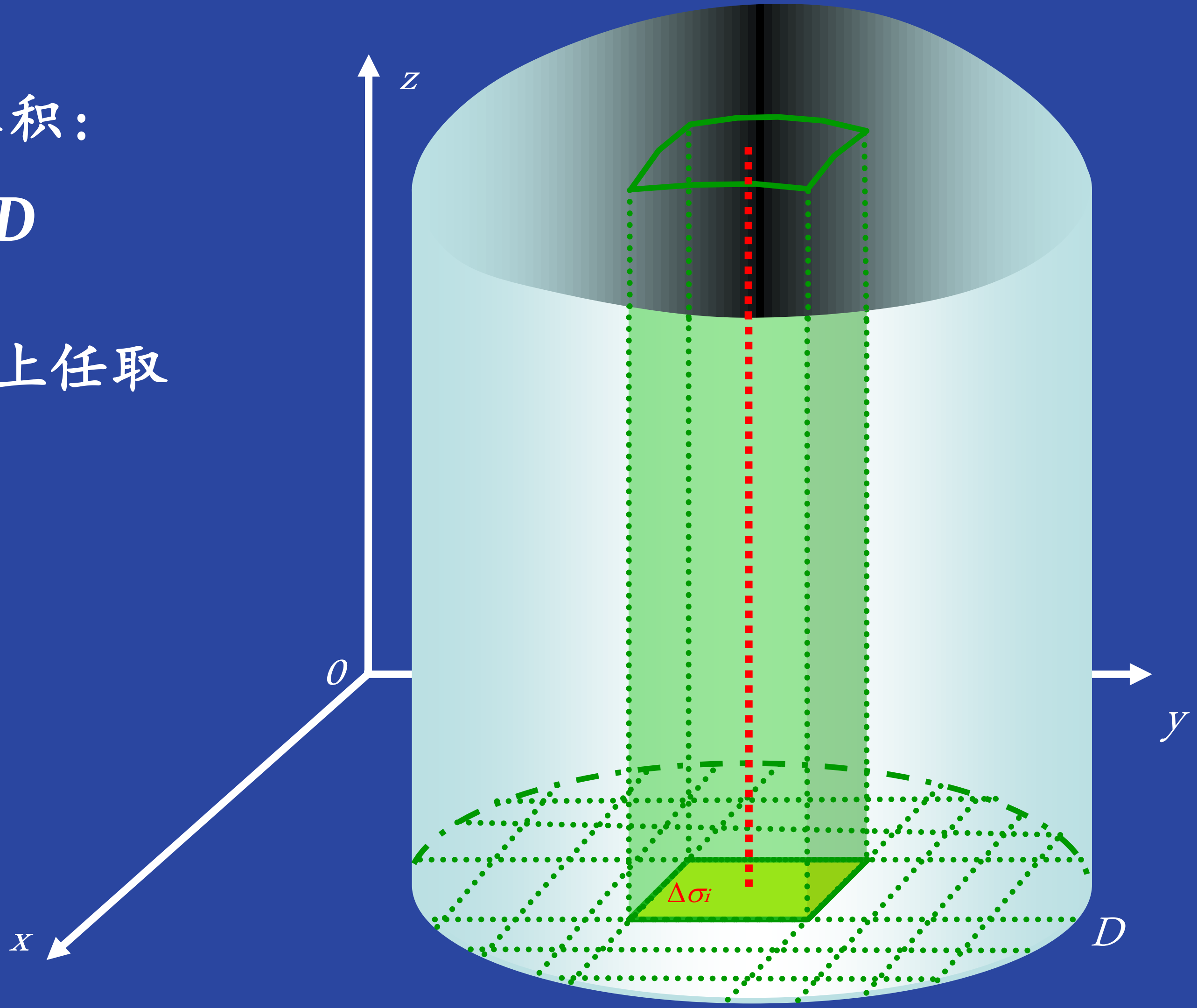
柱体体积=底面积×高

曲顶柱体的体积：

1、任意划分 D

2、每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取

$$(\xi_i,\eta_i),$$

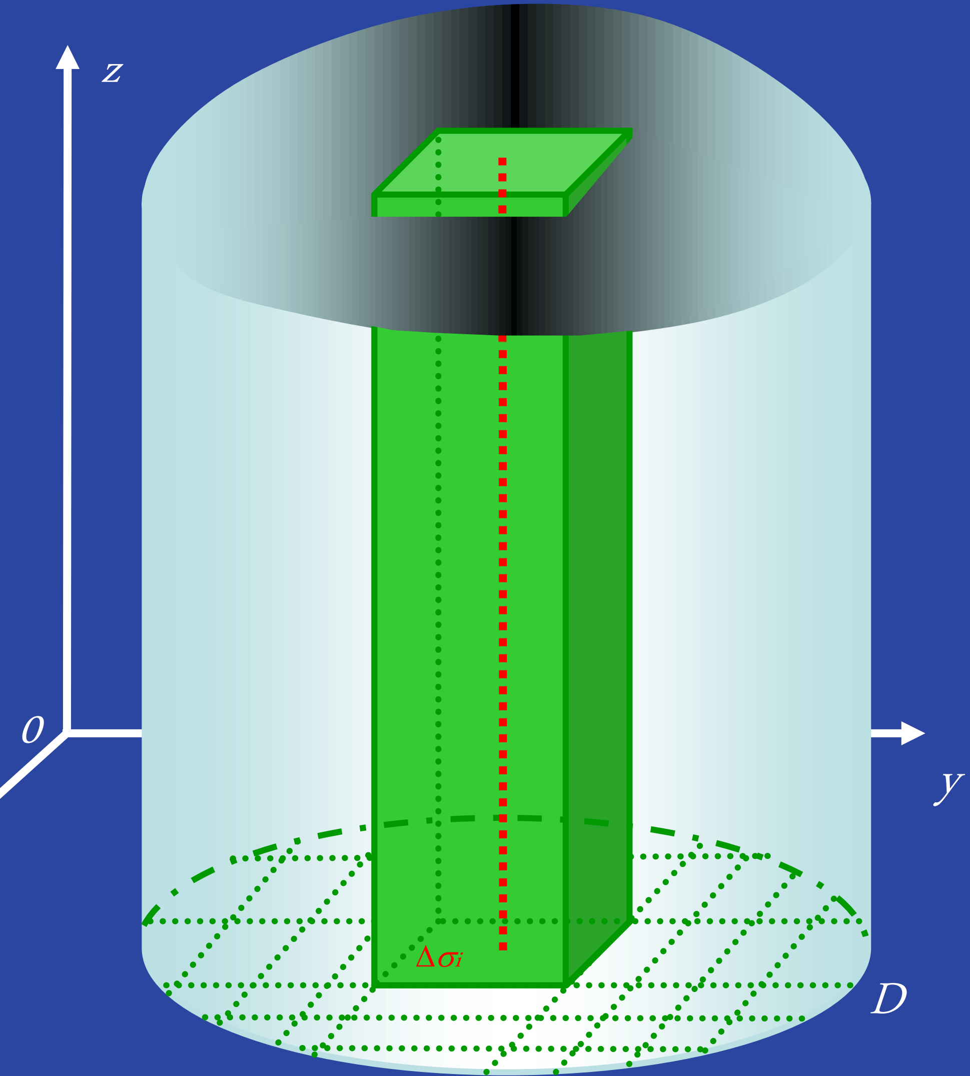


2、每个$\Delta\sigma_i$上任取

(ξ_i, η_i),

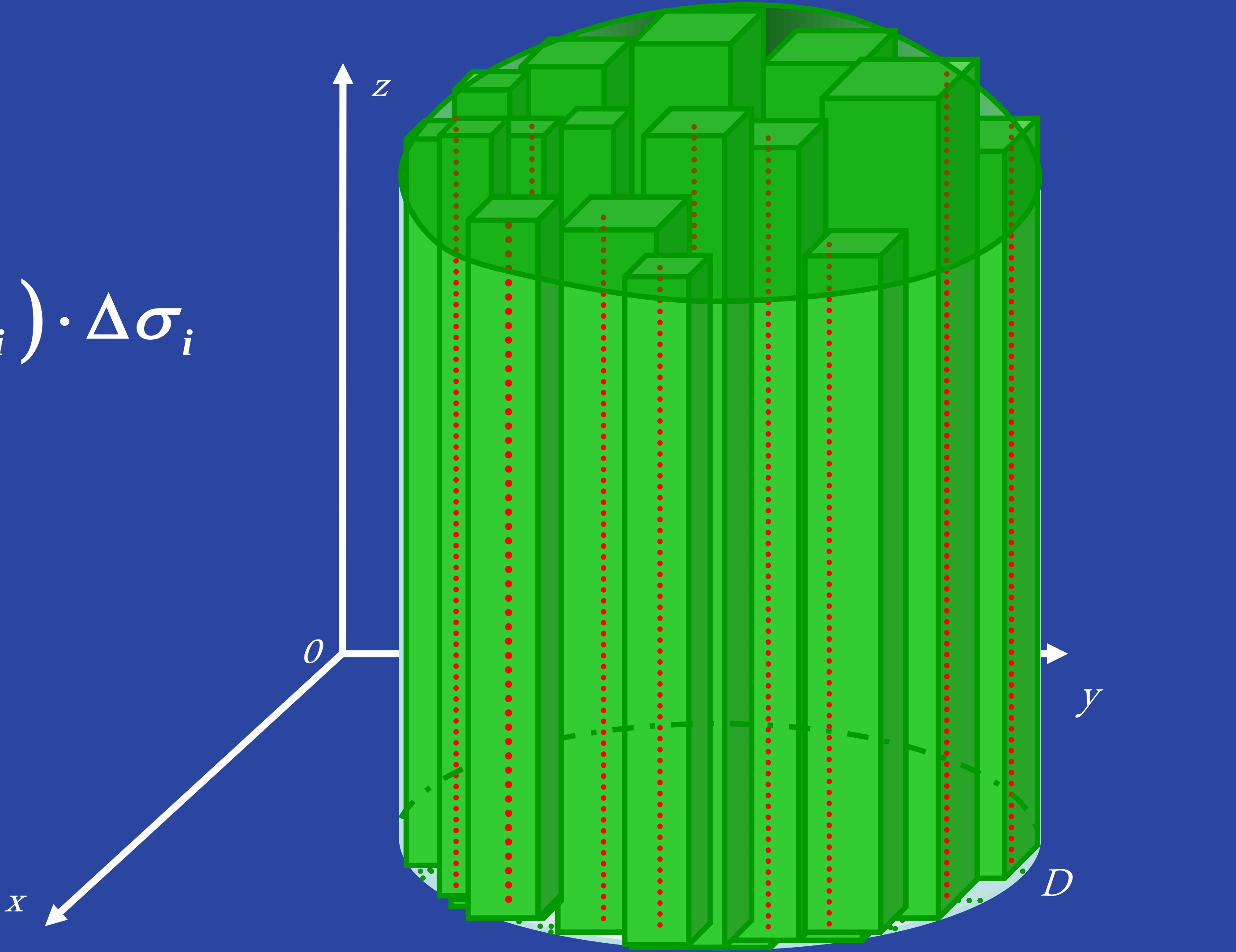
作近似计算

$$f(\xi_i, \eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$$



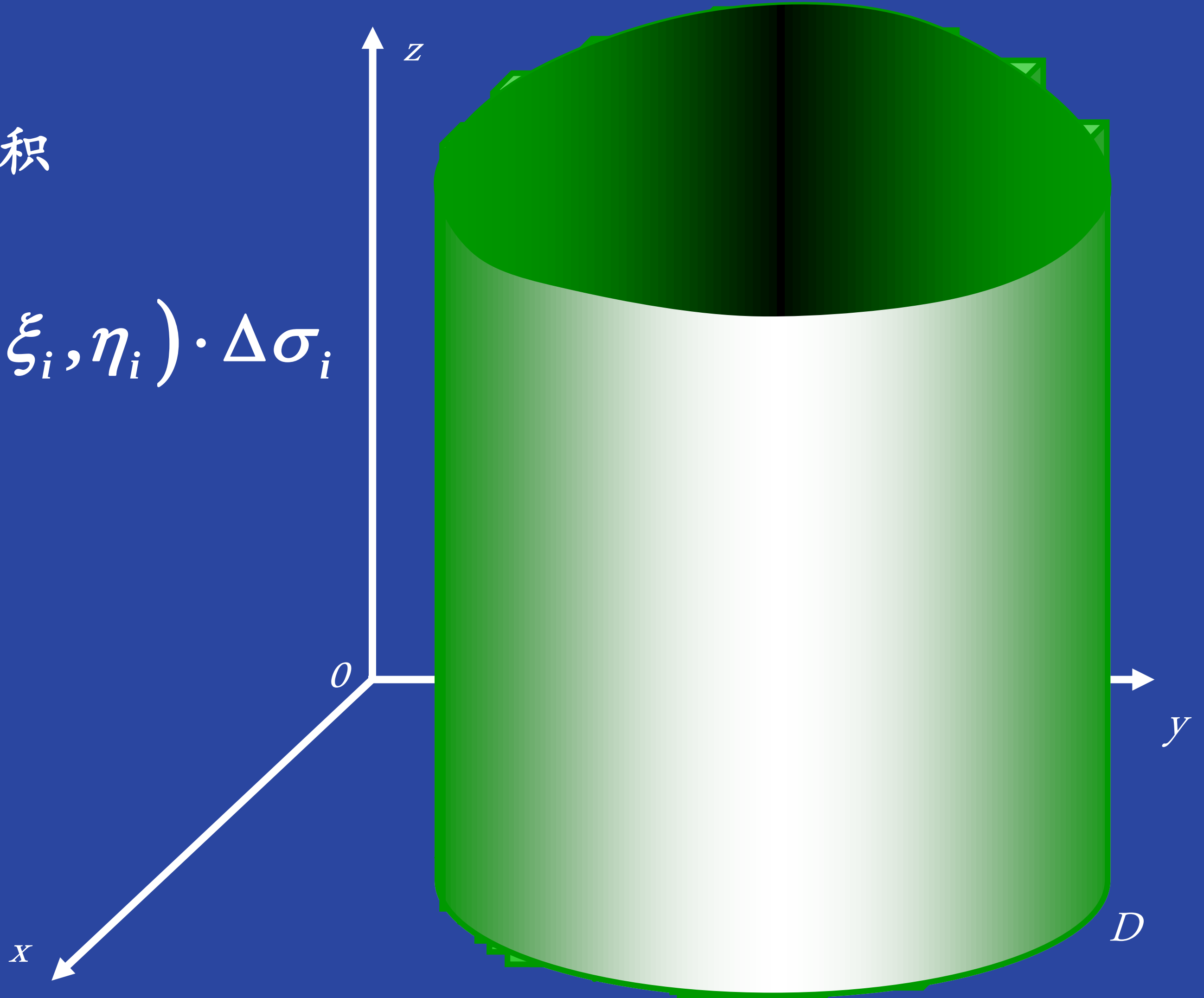
3、求和

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \cdot \Delta\sigma_i$$



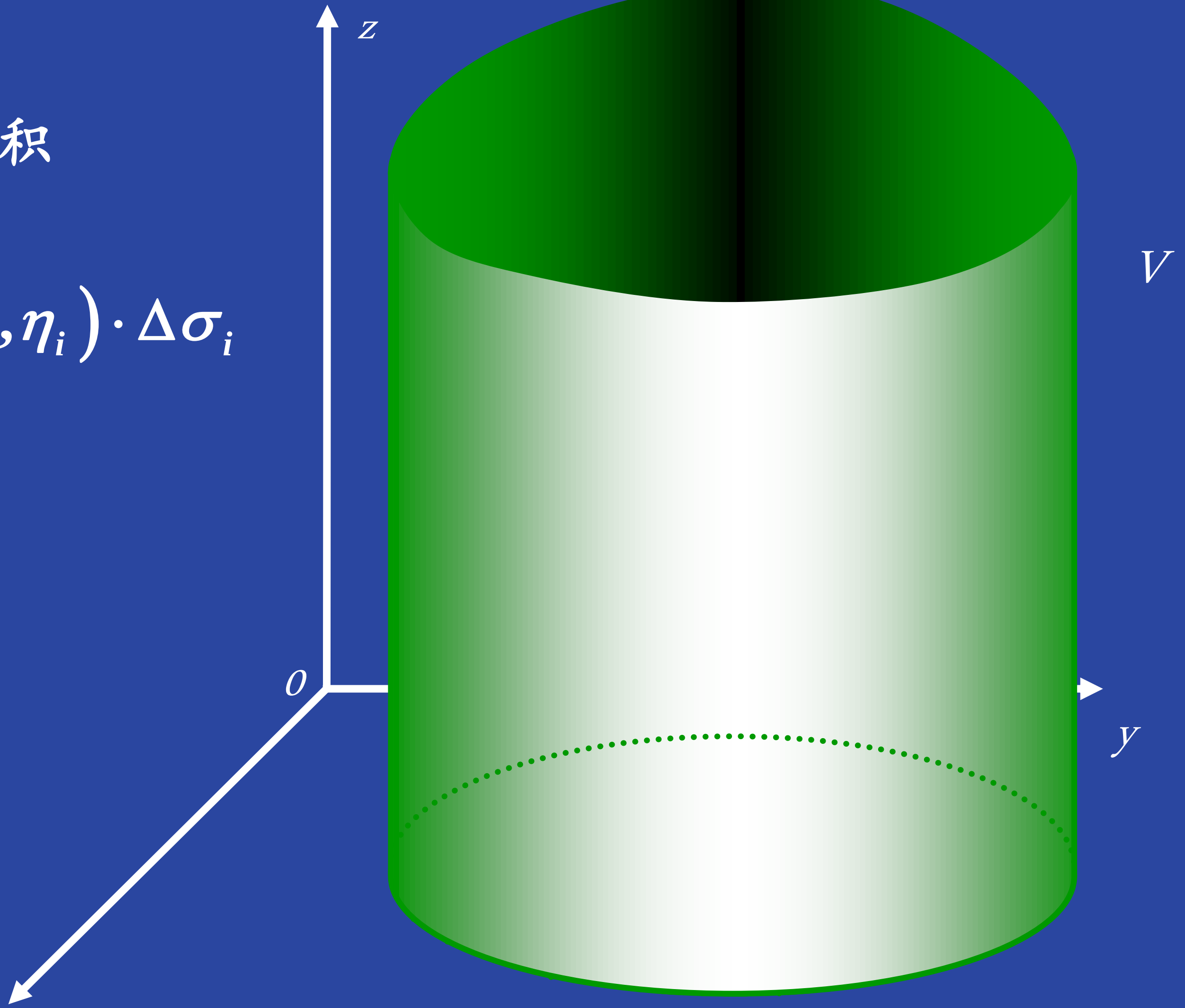
4、取极限得体积

$$V=\lim\sum_{i=1}^{n}f\left(\xi_i,\eta_i\right)\cdot\Delta\sigma_i$$



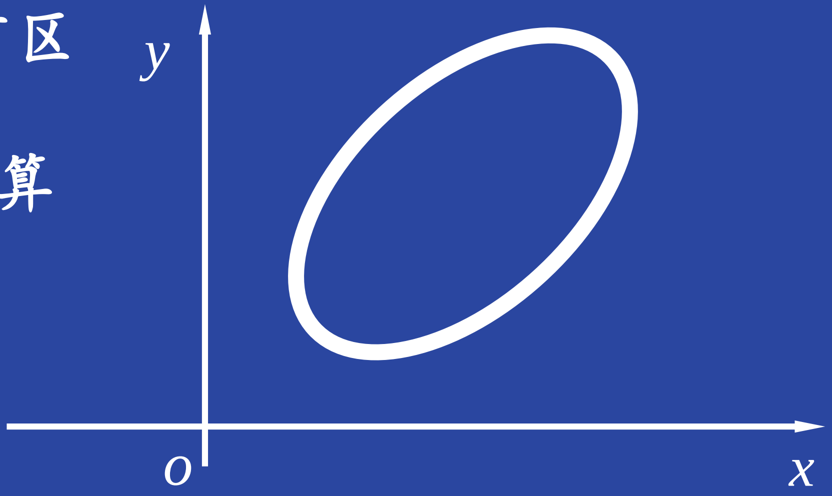
4、取极限得体积

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_i\right) \cdot \Delta\sigma_i$$



平面薄片的质量：

设平面薄片在 xoy 面上占有区域 D，其面密度为 $\mu(x,y)$，计算该薄片的质量 M



若 $\mu(x,y)=\mu$ 是常数，

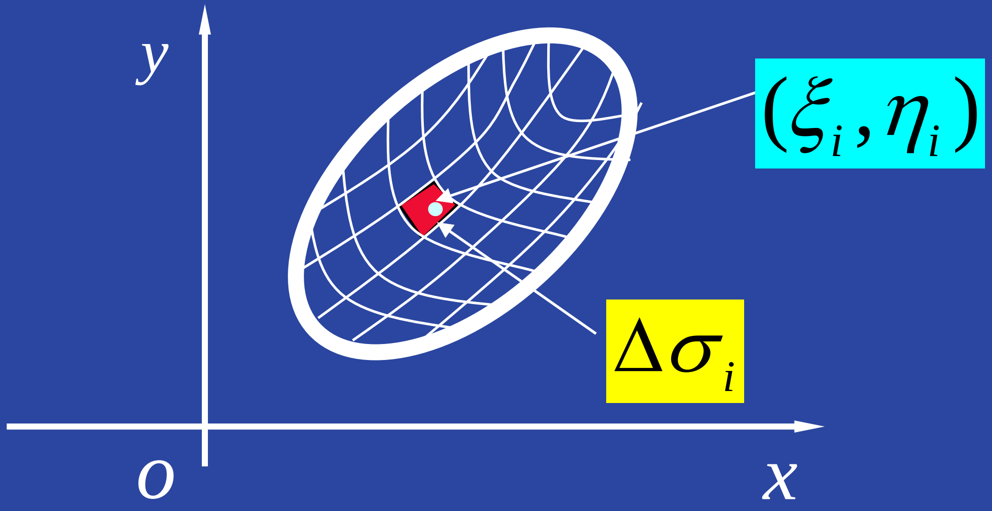
D 的面积是 σ，则 $M=\mu\cdot\sigma$

平面薄片的质量：

1、任意划分 D 为 n 个小部分；

2、作近似计算 $\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$

3、求和：$\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$



4、取极限得质量：

$$M=\lim\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$$

两个问题的共性：

（1） 解决问题的步骤相同

“分割，近似，求和，逼近”

（2） 所求量的结构式相同

曲顶柱体的体积 $V=\lim\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\cdot\Delta\sigma_i$

平面薄片的质量 $M=\lim\sum_{i=1}^{n}\mu\left(\xi_i,\eta_i\right)\cdot\Delta\sigma_i$

定义　设 $z=f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数．将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 代表第 i 个小闭区域，也表示它的面积．在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,\cdots n)$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$ ，

如果当各小区域的直径中的最大值 $\lambda \to 0$ 时. 这和的极限总存在，且与闭区域 D 的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关，那么此极限称为函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分. 记作 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$$

积分区域

被积函数

积分变量

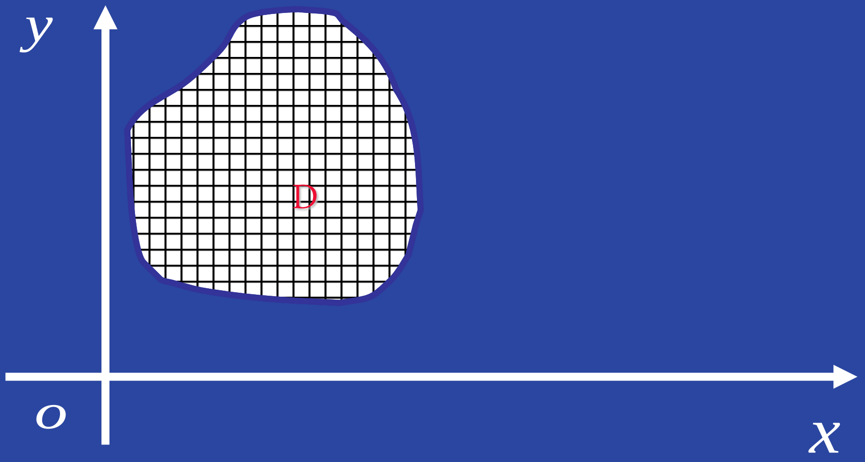
被积表达式

面积元素

积分和

在直角系下用平行于坐标轴的直线划分 D，则有

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$



于是有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

二重积分的几何意义：

1) 若 $f(x,y)\ge 0$, 则二重积分是曲顶柱体的体积

2) 若 $f(x,y)\le 0$, 则二重积分是曲顶柱体的体积的负值

3) 若 $f(x,y)$ 在 D 上有正, 有负, 则二重积分是曲顶柱体体积的代数和，即 xoy 面上方的体积减去 xoy 面下方的体积