

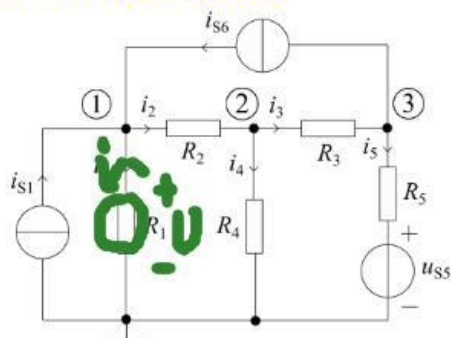
“胡思乱想”之二：对替代定理的担忧

作者：助教

原始问题：通过在第 K 条支路串联两个极性相反、电压相同的电压源 U_k ，来证明第 K 条支路可用一个 U_k 的电压源替代，这个证明过程反映了替代前后，第 K 条支路的电压确实没变，但是，该支路的电流 I_k 为什么没变？电压源 U_k 在电路中为什么不会产生电流呢？

回答：我在刚刚学习替代定理的时候，对它也不放心，跟题主的担心几乎是一样的。虽然 MOOC 课件里给了一个简要的证明过程，但是我还是怕万一替代成电压源之后，这条支路的电流变了呢？鉴于助教现有的水平，严格的证明还完成不了。但是找个电路来验证一下总是可以的，于是我找了课件里节点电压法里的一个电路来做实验。

2、 结点电压方程的列写



① 选定参考结点，标明 $(n-1)$ 个独立结点编号。

将方程整理得

把支路电流用结点电压表示

$$\begin{aligned}\frac{u_{n1}}{R_1} + \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_2} &= i_{S1} + i_{S6} \\ -\frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_2} + \frac{u_{n2} - u_{n3}}{R_3} + \frac{u_{n2}}{R_4} &= 0 \\ -\frac{u_{n2} - u_{n3}}{R_3} + \frac{u_{n3} - u_{S5}}{R_5} &= -i_{S6}\end{aligned}$$

② 列KCL方程：

$$\begin{aligned}i_1 + i_2 &= i_{S1} + i_{S6} \\ -i_2 + i_3 + i_4 &= 0 \\ -i_3 + i_5 &= -i_{S6}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_{n1} - \frac{1}{R_2}u_{n2} = i_{S1} + i_{S6}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{R_2}u_{n1} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n2} - \frac{1}{R_3}u_{n3} &= 0 \\ -\frac{1}{R_3}u_{n2} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)u_{n3} &= -i_{S6} + \frac{1}{R_5}u_{S5}\end{aligned}$$

我把这个电路里的 R_1 用一个电压源替代，电压源 $U = i_1 R_1$ 。现在我们来观察各个节点的电压有没有变化。我们假设替代之后，各个节点的电压为 u'_{n1} 、 u'_{n2} 、 u'_{n3} 。其中 $u'_{n1} = U = i_1 R_1$ 。

列出节点 2 和节点 3 的方程如下：

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R_2}u'_{n1} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u'_{n2} - \frac{1}{R_3}u'_{n3} &= 0 \\ -\frac{1}{R_3}u'_{n2} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right)u'_{n3} &= -i_{s6} + \frac{1}{R_5}U_{s5} \end{aligned}$$

对比新得到的两个方程和图片红框里两个方程，我发现 u'_{n2} 和 u'_{n3} 前面的系数都是一样的。而 $u_{n1} = u'_{n1} = i_1 R_1$ ，这样我认为由红框里的两个方程解得的 u_{n2} 、 u_{n3} 和由新得到的两个方程解得的 u'_{n2} 、 u'_{n3} 是相等的，不知道你同不同意这一点？

我假设你同意了这一点，那么我们再来观察替代之后所有电阻上电压。由于所有的节点电压和原来电路的节点电压相同，那么 R_2 、 R_3 、 R_4 、 R_5 上的电流和原来都是一样的。这样，撇开被替换的支路，剩下的所有支路上的电流都跟原来的相同，那么对节点 1 列 KCL 方程，我认为被替换的那条支路上的电流也和替换之前相同。

整个验证过程下来，不知道大伙对替代定理是不是多了一些信心？

另外，在验证的过程中，我发现定理的严格证明可能变成了一个数学问题：那就是两个线性方程组在什么情况下会有相同的解？另外我产生的问题是：怎么保证一个线性方程组是有解的？而且这个解又唯一？

这些问题不属于电路 MOOC 的讨论范围，就留在这里，让对数学有兴趣的同学考虑。