# 二重积分的性质

性质 1　设 $\alpha$ 与 $\beta$ 为常数，则

$$\iint_D \left[\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right] \mathrm{d}\sigma$$

$$= \alpha \iint_D f(x,y) \mathrm{d}\sigma + \beta \iint_D g(x,y) \mathrm{d}\sigma$$

性质 2　设闭区域 $D$ 可以分为两个闭区域 $D_1$ 与 $D_2$，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

性质 3　$\iint\limits_{D} 1\mathrm{d}\sigma = \sigma$，其中 $\sigma$ 表示 $D$ 的面积.

性质 4　若在 $D$ 上有 $f(x,y) \le g(x,y)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

特别地，　由于 $-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$，

又有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$$

性质 5　设 $M$ 与 $m$ 分别是 $f\left(x,y\right)$ 在 $D$ 上的最大值和最小值，

$\sigma$ 是 $D$ 的面积，则有

$$m\sigma \le \iint\limits_{D} f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

估值不等式

性质 6（中值定理） 设 $f\left(x,y\right)$ 在闭区域 $D$ 上连续，则在 $D$ 上至少存在一点 $\left(\xi,\eta\right)$，使得

$$\iint\limits_{D} f\left(x,y\right)\mathrm{d}\sigma = f\left(\xi,\eta\right)\sigma$$

二元函数的奇偶性：

若 $f(-x,y)=-f(x,y)$，称 $f(x,y)$ 关于 $x$ 为奇函数；

若 $f(x,-y)=-f(x,y)$，称 $f(x,y)$ 关于 $y$ 为奇函数；

若 $f(-x,y)=f(x,y)$ 或 $f(x,-y)=f(x,y)$，称 $f$ 关于 $x$ 或 $y$ 为偶函数.

二重积分的对称性定理：

1、设积分区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases} 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,-y)=f(x,y) \end{cases}$$

$D_1$ 为 $D$ 的对称部分中的一半.

二重积分的对称性定理：

2、设积分区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} \mathbf{0} & f(-x,y) = -f(x,y) \\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(-x,y) = f(x,y) \end{cases}$$

$D_1$ 为 $D$ 的对称部分中的一半.

二重积分的对称性定理：

3、设 $D$ 关于原点对称，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}0 & f(-x,-y)=-f(x,y)\\ 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma & f(-x,-y)=f(x,y)\end{cases}$$

$D_1$ 为 $D$ 的对称部分中的一半.

二重积分的对称性定理：

4、设 $D$ 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}\sigma$$

二重积分的对称性定理：

5、设 $D_1$ 与 $D_2$ 关于直线 $y = x$ 对称，则

$$\iint_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_2} f(y, x)\mathrm{d}\sigma$$

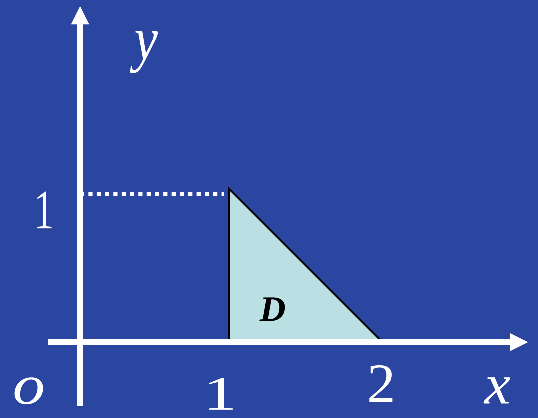
例　设区域 $D$ 是 $x^2+y^2\le 4$，求 $\iint\limits_D\left(1+\sqrt[3]{xy}\right)\mathrm{d}\sigma$

解　$D$ 关于 $x$ 轴对称，　$\sqrt[3]{xy}$ 关于 $y$ 为奇函数，

则 $\iint\limits_D\sqrt[3]{xy}\,\mathrm{d}\sigma=0$，　$\iint\limits_D(1+\sqrt[3]{xy})\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=4\pi$

例　设 $D$ 是三角形闭区域，　三顶点各为 $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$，　$I_1=\iint\limits_D (x+y)^4\,\mathrm{d}\sigma$，　$I_2=\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，

$I_3=\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$，则 $I_1$、$I_2$、$I_3$的大小顺序如何？




解　在 $D$ 上，$x+y>1$，

$$(x+y)^4 > (x+y)^2 > (x+y),$$

由此得

$$I_2 < I_3 < I_1 .$$