数字图像处理

Digital Image Processing

信息工程学院
School of Information Engineering

4.3 图像的离散余弦变换

郭志强 主讲

4.4 离散余弦变换

Discrete Cosine Transform，简写为DCT

- 函数的偶对称性使DCT只有实数域变换结果，不再涉及复数运算，运算简单，费时少；
- 又保持了变换域的频率特性；
- 与人类视觉系统特性相适应；
- 得到了更加广泛的应用。

4.4 离散余弦变换

4.4.2 二维偶DCT(2D-DCT)

基本思想：

把一个$N \times N$的图像数据矩阵延拓成二维平面上的偶对称阵列。延拓方式有两种：

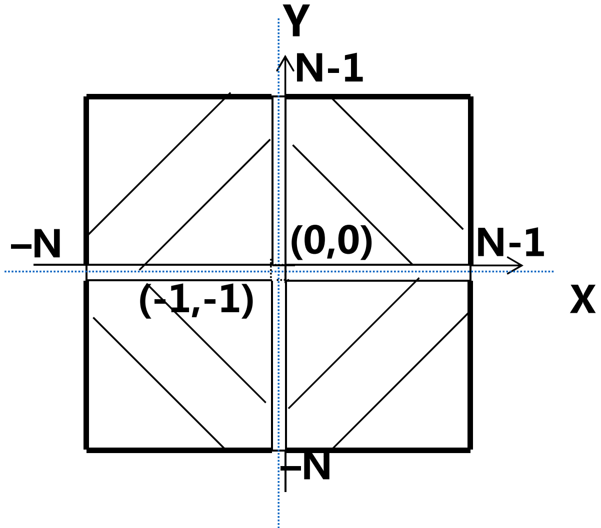
（1）围绕图像边缘（但不重叠）将其折叠成对称形式而得到的变换称为偶离散余弦变换；

（2）通过重叠图像的第一列像素和第$N-1$行像素将其折叠成对称形式而得到的变换称为奇离散余弦变换。

下面只介绍偶离散余弦变换。

4.4 离散余弦变换

设$f(x,y)$为一$N \times N$的图像数据阵列，将$f(x,y)$围绕其左边缘和下边缘不重叠地折叠成偶对称图像,即下图。



并表示为：

$$f_s(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & x \geq 0, y \geq 0 \\ f(-x-1,y) & x < 0, y \geq 0 \\ f(x,-y-1) & x \geq, y < 0 \\ f(-x-1,-y-1) & x < 0, y < 0 \end{cases} \qquad (4.35)$$

可见,$2N \times 2N$的新图像的对称中心位于图像中细十字虚线的交叉处，也即位于$(-1/2,-1/2)$处。

4.4 离散余弦变换

对上述的新图像$f_s(x,y)$取二维傅立叶变换可得：

$$F_s(u,v)=\frac{1}{2N}\sum_{x=-N}^{N-1}\sum_{y=-N}^{N-1}f_s(x,y)\exp\left(-\frac{j2\pi[u(x+\frac{1}{2})+v(y+\frac{1}{2})]}{2N}\right) \qquad (4.36)$$

由于$f_s(x,y)$是实对称函数，欧拉展开式后的正弦项为零值，所以上式可简化成

$$F_s(u,v)=\frac{1}{2N}\sum_{x=-N}^{N-1}\sum_{y=-N}^{N-1}f_s(x,y)\cdot\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\cdot\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right] \qquad (4.37)$$

由于该对称函数四个象限的变换结果完全相同，所以

$$F_s(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\cdot\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right] \qquad (4.38)$$

把上述变换矩阵定义成归一正交矩阵形式，可得$f_s(x,y)$的二维DCT为：

$$F(u,v)=\frac{2}{N}K(u)K(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\cdot\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]$$

(4.39a)

其中

$$K(u)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & u=0\\ 1 & u=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

(4.39b)

$$K(v)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & v=0\\ 1 & v=1,2,\cdots,N-1\end{cases}$$

(4.39c)

一种更直观地二维正DCT表示形式为：

$$F(0,0)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

(4.40a)

$$F(u,0)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\quad(u\neq 0)$$

(4.41b)

$$F(0,v)=\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\left[\frac{\pi(2x+1)v}{2N}\right]\quad(v\neq 0)$$

(4.42c)

$$F(u,v)=\frac{2}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\cdot\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]$$

(4.43d)

其中，$f(x,y)$是二维空间向量元素，

$F(u,v)$是变换系数矩阵之元素。

二维离散余弦变换的正、反变换核是相同的、对称的、可分离的，即

$$Q(x,y,u,v)=\frac{2}{N}K(u)K(v)\cdot\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right]\cdot\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right] \quad (4.44)$$

$$=q_1(x,u)\cdot q_2(y,v)=q_1(x,u)\cdot q_1(y,v)$$

并记 $$q=q_1(x,u)=\sqrt{\frac{2}{N}}K(u)\cdot\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N}\right] \quad (4.45)$$

二维DCT的正、反变换的空间矢量表示形式为:

$$F=q\cdot f\cdot q^T \quad (4.46a)$$

$$f=q^T F\cdot q \quad (4.46b)$$

二维DCT的正、反变换的空间矢量表示形式为:

$$F = q \cdot f \cdot q^T \tag{4.47a}$$

$$f = q^T F \cdot q \tag{4.48b}$$

横坐标为，纵座标为的变换矩阵的形式为：

$$q^T = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{\pi}{2N} & \cos\frac{3\pi}{2N} & \cdots & \cos\frac{(2N-1)\pi}{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\frac{(N-1)\pi}{2N} & \cos\frac{3(N-1)\pi}{2N} & \cdots & \cos\frac{(2N-1)(N-1)\pi}{2N} \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

4.4 离散余弦变换

4.4.3 DCT变换的基函数与基图像

如前所述，DCT正变换和反变换可描述为：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot Q(x,y,u,v) \tag{4.50}$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\cdot Q(x,y,u,v) \tag{4.51}$$

其中，正、反变换核$Q(x,y,u,v)$也称为二维DCT变换的基函数或基图像，式(4.98)中的$F(u,v)$称为变换系数。

课堂问题：原图像是基图像的线性组合吗?

4.4 离散余弦变换

4.4.3 DCT变换的基函数与基图像

图3.13显示的是当$N=4$时的二维DCT变换的基图像。

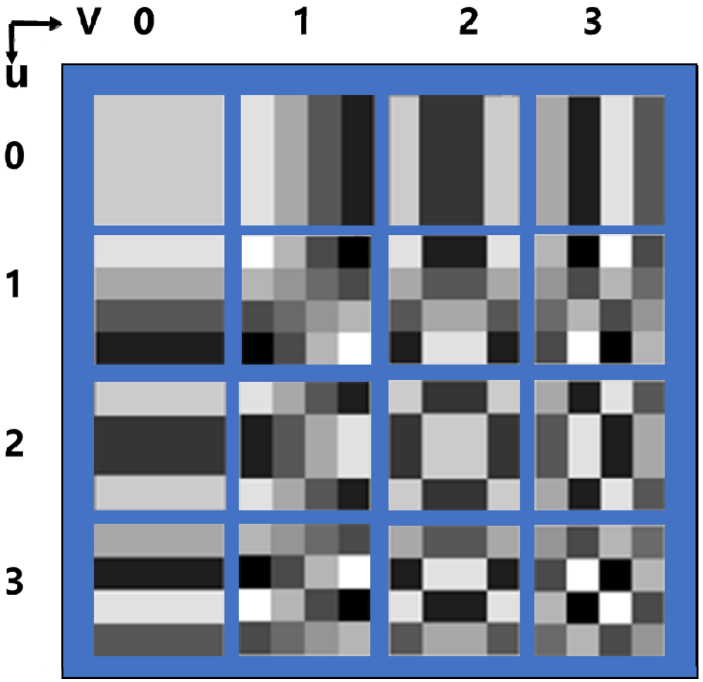
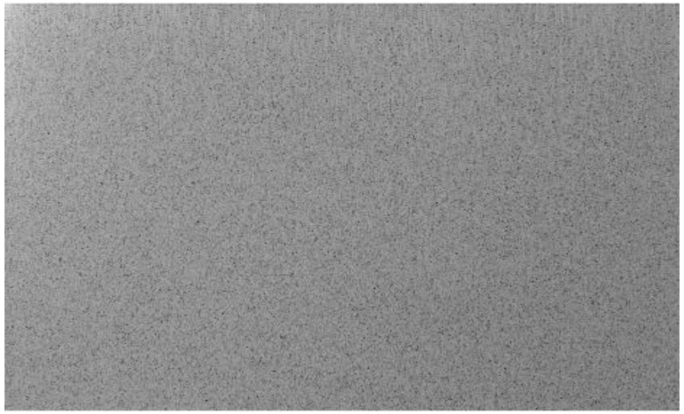


图3.13　$N=4$时的二维DCT变换基图像

4.4 离散余弦变换

4.4.4 DCT变换的实例

```
RGB=imread('C:\Users\Administrator
figure(1);
imshow(RGB);
GRAY=rgb2gray(RGB);
figure(2);
imshow(GRAY);
DCT=dct2(GRAY);
figure(3);
imshow(log(abs(DCT)),[]);
```




谢 谢
THANK YOU