数字图像处理

Digital Image Processing

信息工程学院
School of Information Engineering

4.2 离散傅立叶变换

郭志强 主讲

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

1、基图像

由二维离散傅里叶反变换式（4.17）：

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1}\sum_{u=0}^{N-1}F(u,v)\exp\left[\frac{j2\pi(xu+yv)}{N}\right]$$

可知，由于u和v均有$0,1,\ldots,N-1$的N个可能的取值，所以$f(x,y)$由N^2个频率分量组成，所以每个频率分量都与一个特定的(u,v)值相对应；且对于某个特定的(u,v)值来说，当(x,y)取遍所有可能的值($x=0$，1，…，$N-1$；$y=0$，1，…，$N-1$）时，就可得到对应于该特定的(u,v)值的一幅基图像。

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

1、基图像

$$f_{u,v}=\frac{1}{N}\begin{bmatrix} exp[j2\pi\left(\left(0u+0v\right)/N\right)] & \cdots & exp[j2\pi((0u+(N-1)v)/N)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ exp[j2\pi(((N-1)u+0v)/N)] & \cdots & exp[j2\pi(((N-1)u+(N-1)0v)/N)] \end{bmatrix}$$

(4. 20)

课堂问题： 对应于不同（u,v）值的基图像共有多少幅？

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

2、可分离性

式(4.16)和式(4.17)的二维离散傅里叶变换对可写成如下的分离形式：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\exp[\frac{-j2\pi xu}{N}](\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[\frac{-j2\pi yv}{N}]) \qquad \textbf{(4.21)}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\exp[\frac{j2\pi ux}{N}](\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp[\frac{j2\pi vy}{N}]) \qquad \textbf{(4.22)}$$

上述的可分离表示形式说明，可以连续运用两次一维DFT来实现一个二维DFT。

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

2、可分离性

以式(4.21)：$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\exp[\frac{-j2\pi xu}{N}](\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[\frac{-j2\pi yv}{N}])$

为例，可先沿y轴方向进行一维的(列)变换而求得：

$$F(x,v)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp[\frac{-j2\pi vy}{N}] \qquad (4.23)$$

然后再对$F(x,v)$沿x方向进行一维的(行)变换而得到最后结果：

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}F(x,v)\exp[\frac{-j2\pi ux}{N}] \qquad (4.24)$$

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

3、平均值

一幅图像的灰度平均值可表示为：

$$\bar{f} = \frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \qquad (4.25)$$

如果将$u = v = 0$代入式(4.16)：

$$F(u,v) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\exp\left[-\frac{j2\pi(xu+yv)}{N}\right]$$

可得：

$$F(0,0) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \qquad (4.26)$$

所以，一幅图像的灰度平均值可由DFT在原点处的值求得，即：

$$\bar{f} = \frac{1}{N}F(0,0) \qquad (4.27)$$

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

4、周期性

对于$M \times N$的图像和二维离散傅里叶变换对的一般定义式(4.16)和(4.17)，$F(u,v)$的周期性定义为：

$$F(u,v)=F(u+mM,v+nN)$$

$$(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \qquad (4.28)$$

5、共轭对称性

设$f(x,y)$为实函数，则其傅里叶变换$F(u,v)$具有共轭对称性：

$$F(u,v)=F^*(-u,-v) \qquad (4.29)$$

$$|F(u,v)|=|F(-u,-v)| \qquad (4.30)$$

4.2.3 二维离散傅里叶变换的若干重要性质

6、平移性(shift property)

对于$M \times N$的图像$f(x,y)$和二维离散傅里叶变换对的一般定义式(4.26)和(4.27)，若设用符号　表示函数与其傅里叶变换的对应性，则傅里叶变换的平移性可表示为：

$$f(x,y)\exp[j2\pi(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N})] \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0) \quad \textbf{(4.31)}$$

$$F(u,v)\exp[-j2\pi(\frac{x_0 u}{M}+\frac{y_0 v}{N})] \Leftrightarrow f(x-x_0, y-y_0) \quad \textbf{(4.32)}$$

其中，式(4.31)说明，给函数乘以一个指数项，就相当于把其变换后的傅里叶频谱在频率域进行平移。式(4.32)说明，给傅里叶频谱乘以一个指数项，就相当于把其反变换后得到的函数在空间域进行平移。


谢 谢
THANK YOU