5-9 二阶电路

1、二阶电路的方程

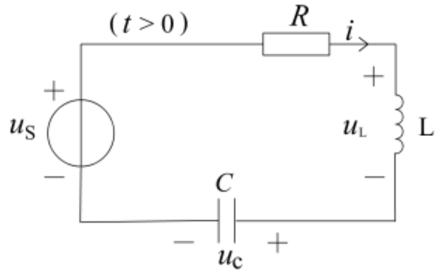
RLC 电路，应用 KVL和VCR得：

$$Ri + u_L + u_C = u_S(t)$$

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_S(t)$$



含有二个动态元件的线性电路，称为二阶电路。

其电路方程为二阶线性常微分方程。

当 $u_s(t)=0$时，二阶电路方程是一个齐次方程；

当 $u_s(t)\neq 0$ 时，二阶电路方程是一个非齐次方程。

2、二阶电路的零输入响应

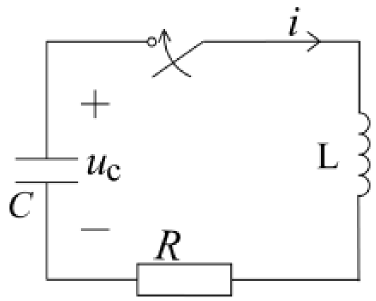
已知

$$u_C(0_+) = U_0 \quad i(0_+) = 0$$

电路方程：

$$Ri + u_L - u_C = 0$$

$$i = -C\frac{du_C}{dt} \qquad u_L = L\frac{di}{dt}$$



这是一个齐次方程。

以电容电压为变量得：

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

由于输入激励项为 0，所以u_c以及其他电路变量称为零输入响应。

以电容电压为变量时的初始条件:

$$u_C(0_+) = U_0 \quad i(0_+) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt}\Big|_{t=0_+} = 0$$

特征方程:

$$LCp^2 + RCp + 1 = 0$$

特征根:

$$p = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$

2. 零状态响应的三种情况

$$p = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	二个不等负实根	过阻尼
$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	二个相等负实根	临界阻尼
$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$	二个共轭复根	欠阻尼

(1) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\qquad$ $u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$

由两个初始条件确定 A_1和 A_2。

$$u_C(0_+) = U_0 \rightarrow A_1 + A_2 = U_0$$

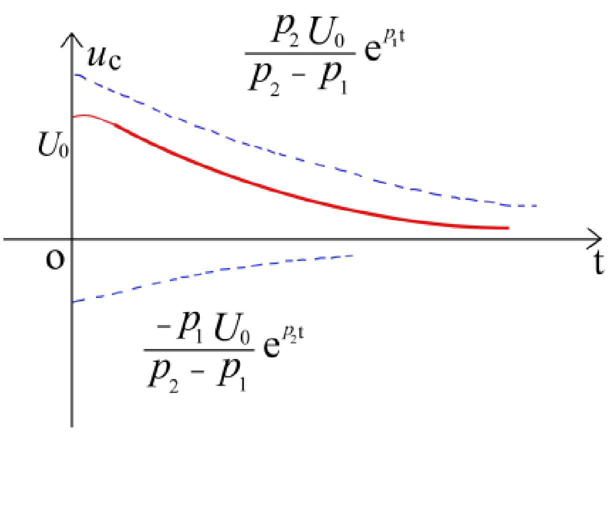
$$\frac{du_C}{dt}\Big|_{(0_+)} = 0 \rightarrow p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{p_2}{p_2 - p_1} U_0 \\ A_2 = \frac{-p_1}{p_2 - p_1} U_0 \end{cases}$$

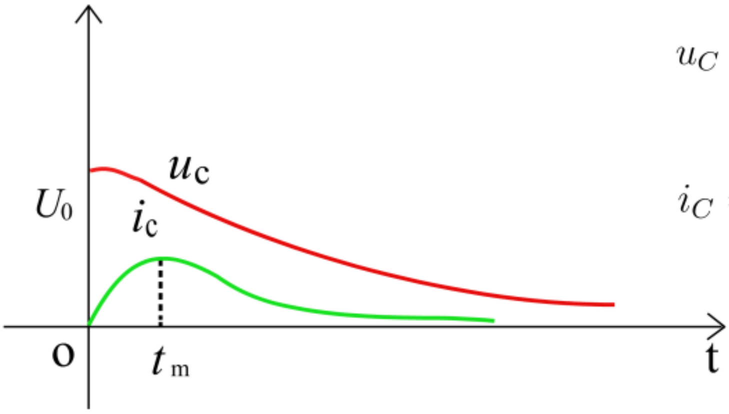
$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

①电容电压： $u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$

设 $|p_2| > |p_1|$



②电容和电感电流



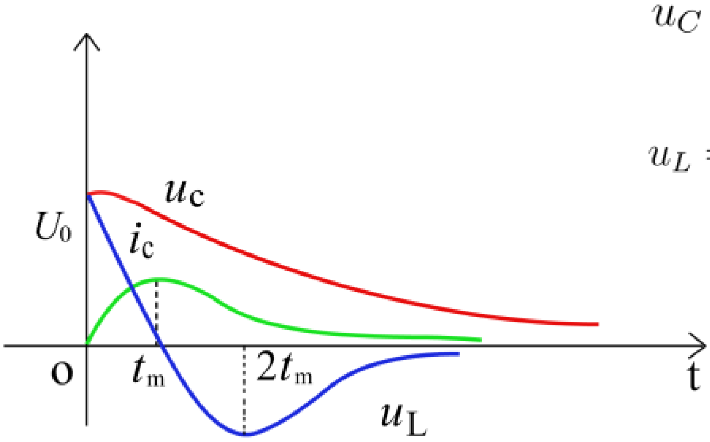
$$u_C=\frac{U_0}{p_2-p_1}(p_2e^{p_1t}-p_1e^{p_2t})$$

$$i_C=-C\frac{du_C}{dt}=\frac{-U_0}{L(p_2-p_1)}(e^{p_1t}-e^{p_2t})$$

$t=0_+$ $i_c=0$。 $t=\infty,\quad i_C=0$

$i_c>0$ $t=t_m$ 时 i_c 最大

③电感电压 u_L



$$u_C=\frac{U_0}{p_2-p_1}(p_2e^{p_1t}-p_1e^{p_2t})$$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=\frac{-U_0}{(p_2-p_1)}(p_1e^{p_1t}-p_2e^{p_2t})$$

$t=0$，$u_L=U_0$ $t=\infty$，$u_L=0$

$0<t<t_m$，i 增加 $t>t_m$，i 减小，$u_L<0$

$t=2t_m$时$|u_L|$最大

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{-U_0}{(p_2 - p_1)}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

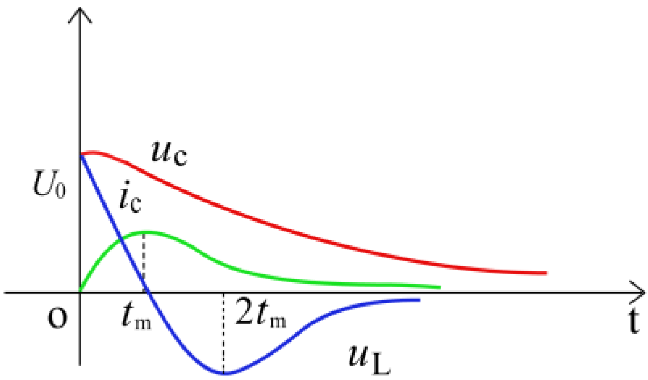
i_C=i 为极值时，即u_L=0时的t_m计算如下：

$$(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{e^{p_1 t_m}}{e^{p_2 t_m}} \quad \Rightarrow \quad t_m = \frac{\ln(\frac{p_2}{p_1})}{p_1 - p_2}$$

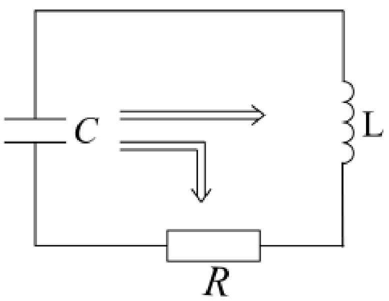
由 du_L/dt 可确定 u_L 为极小时的t 。

$$(p_1^2 e^{p_1 t} - p_2^2 e^{p_2 t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2\ln(\frac{p_2}{p_1})}{p_1 - p_2} \quad \Rightarrow \quad t=2t_m$$

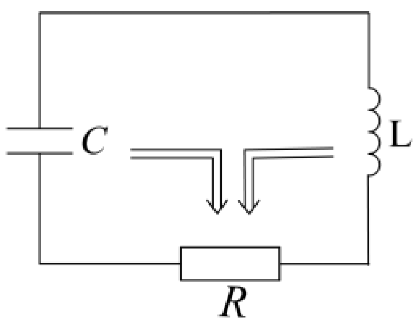
④能量转换关系



$0<t<t_m$，u_C 减小，i 增加。



$t>t_m$，u_C 减小，i 减小。



$(2) R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\qquad p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$

共轭复根

令：$\delta = \frac{R}{2L}$（衰减系数），$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$（谐振角频率）

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$（固有振荡角频率） $\qquad p = -\delta \pm \mathrm{j}\omega$

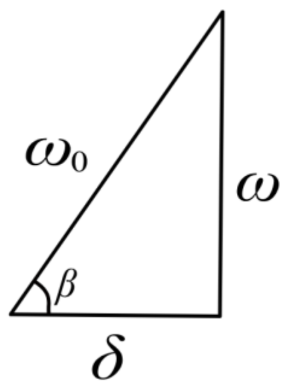
$\boldsymbol{u_c}$的解答形式：$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} = e^{-\delta t}(A_1 e^{\mathrm{j}\omega t} + A_2 e^{-\mathrm{j}\omega t})$

经常写为：$\quad u_C = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$

由初始条件 $\begin{cases} u_C(0^+) = U_0 & \rightarrow A\sin\beta = U_0 \\ \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0 & \rightarrow A(-\delta)\sin\beta + A\omega\cos\beta = 0 \end{cases}$

$$\sin\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$A = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 \qquad \Longrightarrow$$



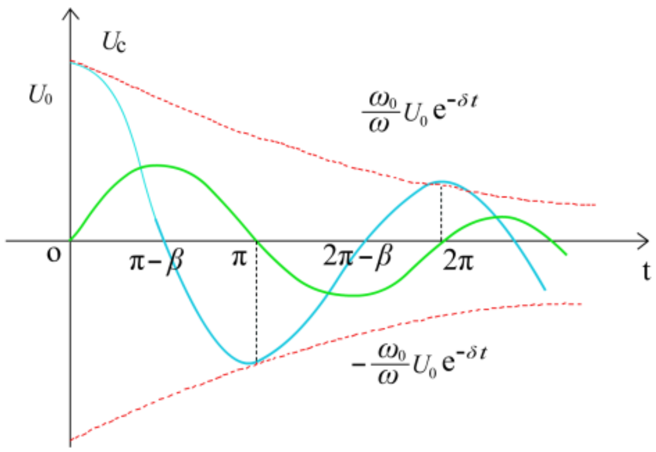
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

所以，$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$$

u_c是振幅以$\pm\frac{\omega_0}{\omega}U_0$ 为包络线依指数衰减的正弦函数。

t=0 时u_C=U_0 $u_C = 0 : \omega t = \pi - \beta,\ 2\pi - \beta\ ...n\pi - \beta$



$$i_C = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} sin(\omega t)$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = -\frac{\omega_0}{\omega} U_0 e^{-\delta t} sin(\omega t - \beta)$$

$$(3) R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad p_1 = p_2 = -\frac{R}{2L} = -\delta$$

相等负实根

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

由初始条件 $\begin{cases} u_C(0^+) = U_0 & \rightarrow A_1 = U_0 \\ \frac{du_C}{dt}(0^+) = 0 & \rightarrow A_1(-\delta) + A_2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} A_1 = U_0 \\ A_2 = U_0 \delta \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} u_C &= U_0 e^{-\delta t}(1 + \delta t) \\ i_C &= -C\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \\ u_L &= L\frac{di}{dt} = U_0 e^{-\delta t}(1 - \delta t) \end{aligned}\right\} \text{非振荡放电}$$

小结：

$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 过阻尼，非振荡放电

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 临界阻尼，非振荡放电

$$u_C = A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t}$$

$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 欠阻尼，振荡放电

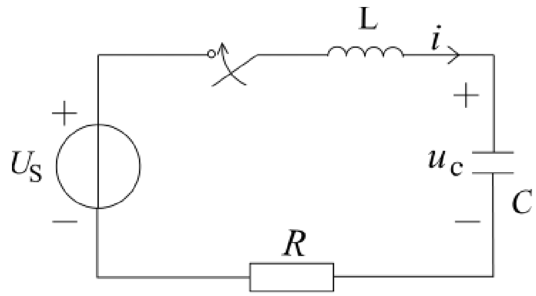
$$u_C = A e^{-\delta t} sin(\omega t + \beta)$$

由初始条件 $\begin{cases} u_C\,(0_+) \\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\,(0_+) \end{cases}$ 定常数

3、二阶电路零状态响应和全响应

微分方程为

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$



$$u_C = u'_C + u''_C$$

特解 通解

特征方程为 $LCp^2 + RCp + 1 = 0$

特解 $u'_C = U_S$

u_C解答形式为

$u_C = U_S + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} (p_1 \neq p_2)$ 过阻尼非振荡充电或放电

$u_C = U_S + A_1 e^{-\delta t} + A_2 t e^{-\delta t} (p_1 = p_2 = -\delta)$ 临界阻尼非振荡充电或放电

$u_C = U_S + A e^{-\delta t} sin(\omega t + \beta)(p_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{j}\omega)$ 欠阻尼振荡充电或放电

由初值 $u_C(0^+)$, $\dfrac{du_C}{dt}(0^+)$ 确定两个常数

当 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 均为零时，则为零状态响应；

当 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 至少有一个不为零，则为全响应。