

# 主成分分析

( PCA )

计算机科学的及膝裙陆

大学博士

浙江大学

图像表示

后路依据自然图像

# 依据自然意象

- 先验基础

- 傅立叶变换
- DCT
- •

- 后依据 ( 数据驱动的 )

- 为了估计从数据本身的线性变换，并且变换可以被理想地适合于正被处理的数据的类型。
  - PCA
  - 字典基于机器学习

# 图像变换的两个性质

- 变量解耦
  - 这些基底的系数 少相关 或成为 独立 在理想的情况下。
- 降维
  - 的碱基大约重建图像的数量通常比像素的数目小得多。

# PCA [1]

- 无论DFT或DCT具有“能量压缩”属性。
- 是什么 最佳 在能量压缩方面的改造？
- 在统计分析中的两个基本概念： 方差  
和 协方差 随机向量的

# 方差和协方差

- 考虑有两个随机向量 **零种手段**  $\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_{NT}]$ ,  $\mathbf{B} = [b_1, b_2, \dots, b_{NT}]$ .
- 该方差的  $a$  和  $b$  被定义为

$$\begin{aligned}
 a^2 &= \langle A A^T \rangle_{-t-t} \\
 b^2 &= \langle B B^T \rangle_{-t-t}
 \end{aligned}$$

- 其中预期  $\langle \cdot \rangle_{-t-t}$  是平均值  $\tilde{n}$  变量。

- 该协方差  $a$  和  $b$  是一个直接的概括：

$$a b = \langle A B^T \rangle_{-t-t}$$

# 样本协方差矩阵

- 我们概括两个随机向量的任意数。假设我们有  $M$  个随机向量，并且每个向量具有  $n$  变量。
- 该  $n \times M$  观察矩阵  $\mathbf{X}$  被定义为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{M1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{Mn} \end{bmatrix}$$

- 该 样本 协方差矩阵估计

$$\mathbf{S}_x = \frac{1}{n-1} \mathbf{X} \mathbf{X}^T$$

# PCA的目标

- PCA的目标是找到 *一套基础的* 其中观察矩阵  $\mathbf{X}$  被变换到一个新的观察矩阵  $\mathbf{Y}$  , 和 *协方差矩阵* 的  $\hat{\mathbf{y}}$  将是一个

*对角线* 矩阵 • 删除数据之间的相关性 , 而保存能量尽可能多地。

- PCA的假设 :
  - 首先所有基本向量  $\{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N\}$  是正交 ( 即  $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$  ) 这是所有基本向量构造的正交矩阵  $\mathbf{P}$ .
  - 其次 , *与最大的变化方向* 是比低方差更重要 , 所以在变换空间的信号的能量被保持得尽可能紧凑。

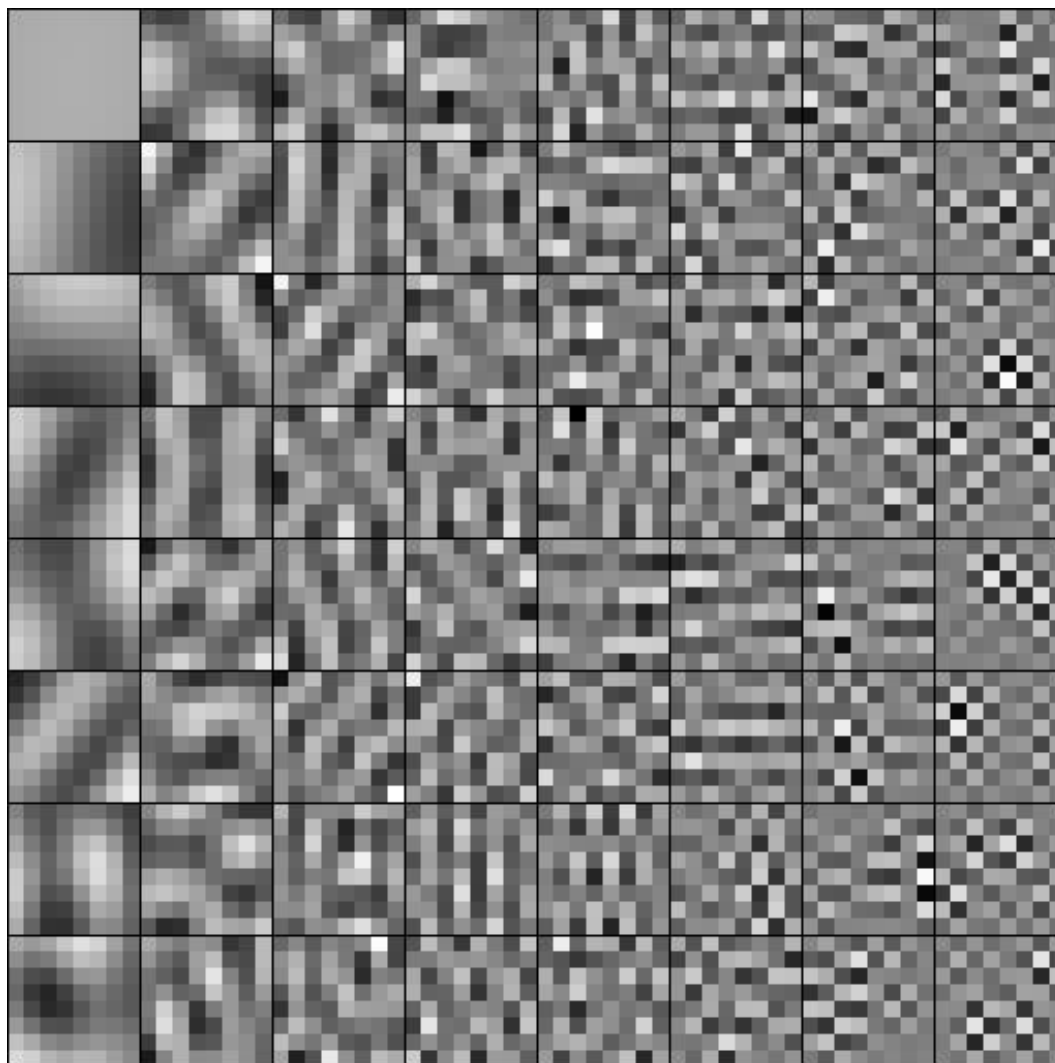


# 本征值分解

- 在线性代数，协方差矩阵  $C_X$  可对角化由它的本征向量的正交矩阵。
- 本征值分解： $C_X = E D E^T$
- 如果正交变换矩阵  $P$  被选择作为  $P = E^T$ ,  
 $Y = P X = E^T X$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i Y_i^T \\
 & \bullet \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E X_i X_i^T E^T \\
 & \bullet \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E X_i X_i^T E^T \\
 & \bullet E E^T \\
 & \bullet E D E^T \\
 & \bullet
 \end{aligned}$$

## 64 8 • 从图像“海伦”了解到8种主要组分 ( 或基本图像 )



## A toy example of PCA

1) Divide an image with the size of  $512 \times 512$  into  $8 \times 8$  blocks

2) Observation Matrix  $\mathbf{X}$ :  $64 \times 4096$

3) The Sampling Covariance Matrix  $\mathbf{C}_X$ :  $64 \times 64$

4) Eigenvalue Decomposition of  $\mathbf{C}_X$ :  $\mathbf{C}_X = \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{E}^T$

5) We select the eigenvectors with the first  $k$  largest eigenvalues, and form a PCA transform matrix  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{P}$ :  $64 \times k$ ,  $k \ll 64$ )

6) Now we can transform the observation matrix  $\mathbf{X}$  into another space by the PCA matrix  $\mathbf{P}$  ( $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^T \mathbf{X}$  and  $\mathbf{Y}$ :  $k \times 4096$ )

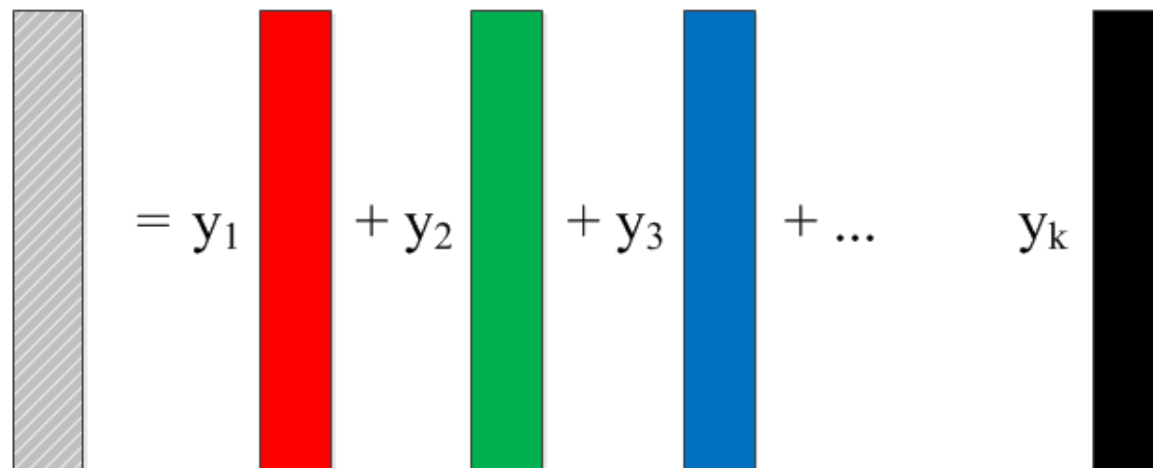
7) Reconstruction:  $\mathbf{X}_R = \mathbf{P} \mathbf{Y}$  (Note  $\mathbf{X}_R \approx \mathbf{X}$ )

PCA Forward Transform:  $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$



The diagram illustrates the PCA forward transform equation  $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$ . On the left, a vertical gray bar represents the output vector  $\mathbf{y}$ , with segments labeled  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $\dots$ , and  $y_k$ . This is followed by an equals sign, an opening parenthesis, a matrix of four horizontal bars (red, green, blue, and black) with a vertical ellipsis between the blue and black bars, and a closing parenthesis. This matrix represents the principal component loadings  $\mathbf{P}^T$ . To the right of the parenthesis is a multiplication symbol  $\times$ , followed by a tall, thin gray vertical bar representing the input vector  $\mathbf{x}$ .

PCA Inverse Transform:  $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$



The diagram illustrates the PCA inverse transform equation  $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ . On the left, a tall, thin gray vertical bar with diagonal hatching represents the reconstructed input vector  $\mathbf{x}$ . This is followed by an equals sign, then the terms  $y_1$ ,  $+ y_2$ ,  $+ y_3$ ,  $+ \dots$ , and  $y_k$ . Each term is preceded by a vertical bar of a specific color: red for  $y_1$ , green for  $y_2$ , blue for  $y_3$ , and black for  $y_k$ . These colored bars represent the principal components, which are summed to reconstruct the original input vector  $\mathbf{x}$ .

20



# 参考

- [1] MJT Smith和A. Docef，研究指南数字图像处理，科学出版社，公司里弗代尔，佐治亚州，1999年。

**谢谢！**

锡群Lu博士

xqlu@zju.edu.cn