6-5 电路定律的相量形式

直流电路，列写代数方程的依据是KCL和KVL，

对于正弦稳态电路，可以由KCL和KVL直接列写相量形式的代数方程吗?

答案：可以！！！

根据KCL $\boxed{i_1 = i_2 + i_3}$

若电流均为正弦量，

$$i_1 = \sqrt{2}I_1\cos(\omega t + \varphi_1) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}I_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_1)}\right]$$

$$i_2 = \sqrt{2}I_2\cos(\omega t + \varphi_2) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}I_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_2)}\right]$$

$$i_3 = \sqrt{2}I_3\cos(\omega t + \varphi_3) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}I_3 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_3)}\right]$$

根据KCL方程，推导可得

$$\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}(I_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} - I_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} - I_3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_3})\right] = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}(\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3)\right] = 0$$

$$\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0 \qquad \boxed{\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3}$$

可见，电流的相量形式同样满足KCL方程，可以直接列写！

同理，电压的相量形式满足KVL方程，

因此，以后可直接对电流相量列写KCL方程，对电压相量直接列写KVL方程。

求解一个电路，既需要列写KCL方程和KVL方程，
也需要列写每条支路的电压电流关系方程，即VCR方程。

对于电阻支路 $\boxed{u_R = Ri_R}$

若电压、电流为正弦量 $u_R = \sqrt{2}U_R\cos(\omega t + \varphi_u)$ $i_R = \sqrt{2}I_R\cos(\omega t + \varphi_i)$

将正弦量转化为复数的指数形式，经过与前面类似的推导过程可以得到

$$U_R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} = RI_R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} \qquad \boxed{\dot{U}_R = R\dot{I}_R}$$

可见，对电阻而言，在相量域中仍然满足欧姆定律。

对于受控源支路，推导过程与电阻支路推导过程类似，此处省略，
结论是，在相量域中受控源支路的控制关系不变。
例如，时域中电压控制电压源 $U_1 = 3U_2$
则在相量域中，$\dot{U}_1 = 3\dot{U}_2$

对于电感支路 $\boxed{u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}}$

设 $u_L = \sqrt{2}U_L\cos(\omega t + \varphi_u) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}U_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)}\right]$

$$i_L = \sqrt{2}I_L\cos(\omega t + \varphi_i) = \mathrm{Re}\left[\sqrt{2}I_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)}\right]$$

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}U_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)}\right] = L\frac{\mathrm{d}\left\{\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}I_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)}\right]\right\}}{\mathrm{d}t}$$

整理可得 $\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}(U_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} - \mathrm{j}\omega LI_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i})\right] = 0$

$$U_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} - \mathrm{j}\omega LI_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} = 0 \qquad \boxed{\dot{U}_L = \boxed{\mathrm{j}\omega L}\dot{I}_L}$$

可见，对电感而言，在相量域中，电压电流关系类似于欧姆定律，
只不过系数为纯虚数。将 $\mathrm{j}\omega L$ 称为感抗，以示与电阻的区别。
相量域将时域的微分关系，转变为比例关系，
因而在相量域中，不再需要列写微分方程！

同理，对电容支路 $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

经过与电感支路类似的推导过程，可得 $\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_C$

这同样也是将时域微分关系，转变为相量域的比例关系。

$$\dot{I}_C = \mathrm{j}\omega C\dot{U}_C \quad \Rightarrow \quad \dot{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C$$

$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}$ 称为容抗，以示与电阻的区别