6-4 相量法的引入

正弦量和复数之间的关系

根据欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}=\cos\theta+\mathrm{j}\sin\theta$

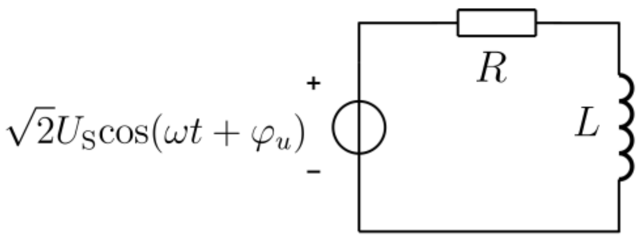
$\theta=\omega t+\varphi$ 则 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}=\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{j}\sin(\omega t+\varphi)$

$$\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right]$$

对任意一个正弦量 $\sqrt{2}A\cos(\omega t+\varphi)$,都可转化为复数的实部,

$$\sqrt{2}A\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right]$$

这就是将正弦量与复数的指数形式联系起来!



$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=\sqrt{2}U_{\mathrm{S}}\cos(\omega t+\varphi_u)$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}+Ri_L=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}U_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_u)}\right]$$

设特解 $i_L^{(1)}=\sqrt{2}I_L\cos(\omega t+\varphi_i)$ 可写成 $i_L^{(1)}=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}I_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}\right]$

将特解代入微分方程,

$$\boxed{L\frac{\mathrm{d}\left\{\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}I_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}\right]\right\}}{\mathrm{d}t}}+R\times\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}I_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}\right]=\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}U_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_u)}\right]$$

$$\mathrm{Re}\left[\sqrt{2}L\mathrm{j}\omega I_L e^{\mathrm{j}\varphi_i}\right]$$

$$\mathrm{Re}\left[\mathrm{j}\omega LI_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}+RI_L\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}-U_{\mathrm{S}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_u)}\right]=0$$

$$\mathrm{Re}\left[e^{\mathrm{j}\omega t}\left(\mathrm{j}\omega LI_Le^{\mathrm{j}\varphi_i}+RI_Le^{\mathrm{j}\varphi_i}-U_{\mathrm{S}}e^{\mathrm{j}\varphi_u}\right)\right]=0$$

$\mathrm{Re}\left[e^{\mathrm{j}\omega t}\boxed{\left(\mathrm{j}\omega L I_L e^{\mathrm{j}\varphi_i} + R I_L e^{\mathrm{j}\varphi_i} - U_S e^{\mathrm{j}\varphi_u}\right)}\right] = 0$ 此式对所有时间t均成立

所以必须满足 $\mathrm{j}\omega L I_L \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} + R I_L \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} - U_S \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} = 0$ $I_L \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} = \dfrac{U_S \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}}{R + \mathrm{j}\omega L}$

由此可以求出I_L和φ_i 进而可得特解为 $i_L^{(1)} = \sqrt{2} I_L \cos(\omega t + \varphi_i)$

这个过程仍然很漫长痛苦!此时就需要引入相量的概念。

将 $\dot{I}_L = I_L \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$ 称为电感电流的相量形式,

I_L为电感电流有效值,φ_i 为初相角。

只要求出相量,即可获得正弦量三要素中的两个要素,

第三个要素ω与正弦激励角频率相同,不需要求解。

同理,将 $\dot{U}_S = U_S \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$ 称为电压源电压的相量形式。

将 $\dot{I}_L = I_L \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$ $\dot{U}_S = U_S \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}$

代入方程 $\mathrm{j}\omega L I_L \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} + R I_L \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i} - U_S \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u} = 0$

可得 $\mathrm{j}\omega L \dot{I}_L + R \dot{I}_L - \dot{U}_S = 0$

这是一个代数方程,显然比微分方程简单!

那么问题来了:怎样才能直接写出相量的代数方程,

而不是通过微分方程来得到代数方程(极为繁琐)!

这将在6-5节详细介绍。