二重积分的计算法

直角坐标系下计算二重积分的方法

直角坐标系下计算二重积分的例题

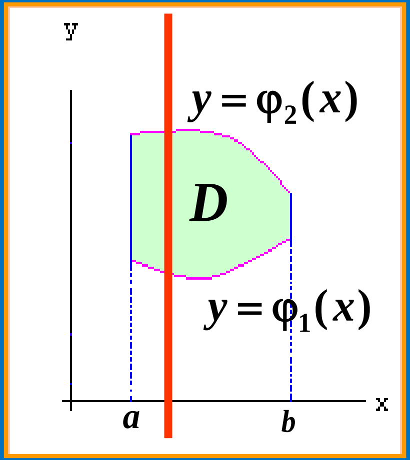
极坐标系下计算二重积分的方法

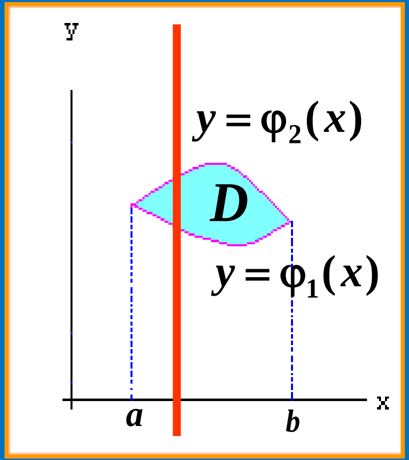
极坐标系下计算二重积分的例题

直角坐标系下计算二重积分的方法

设 $f(x,y) \geq 0$.

(1) X—型区域： $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$， $a \leq x \leq b$

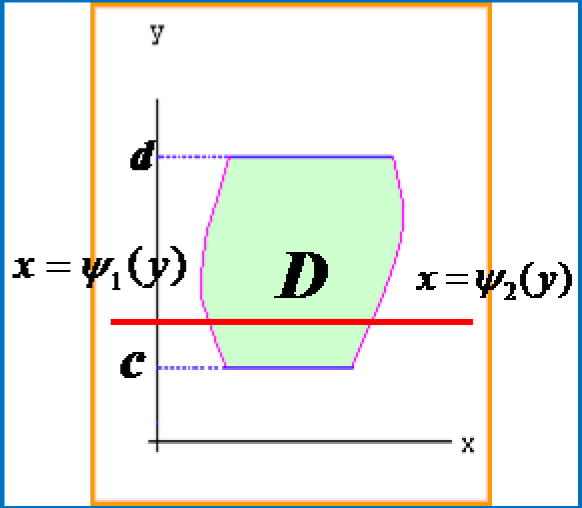


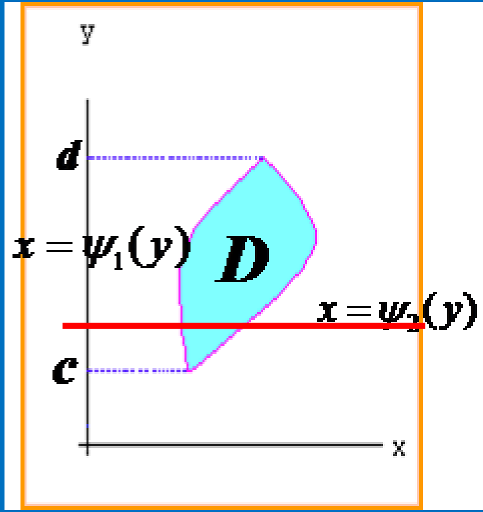


其中函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续.

则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$

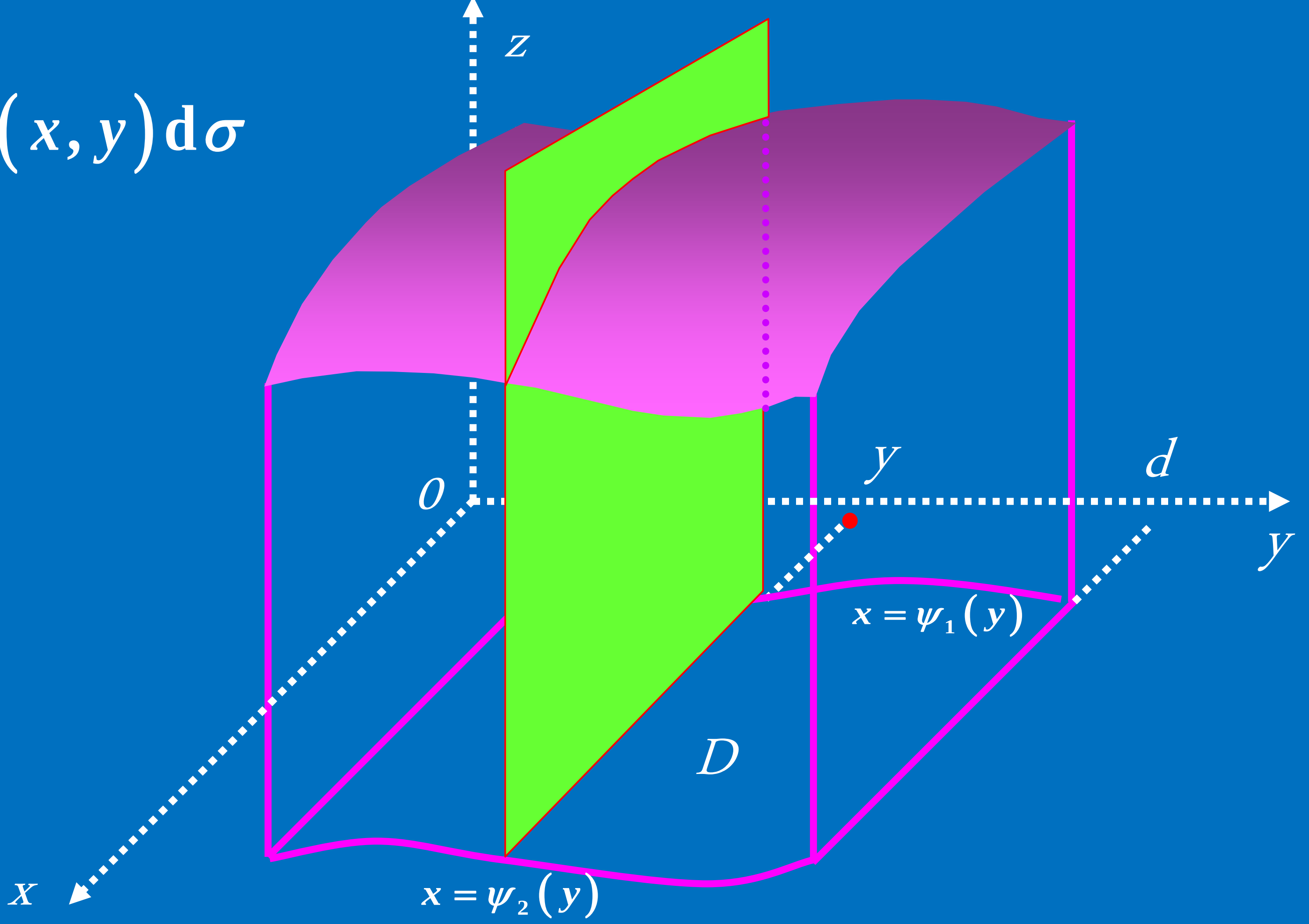
2）Y—型区域： $\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)$， $c \le y \le d$





$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \underline{\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x}$$

计算$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

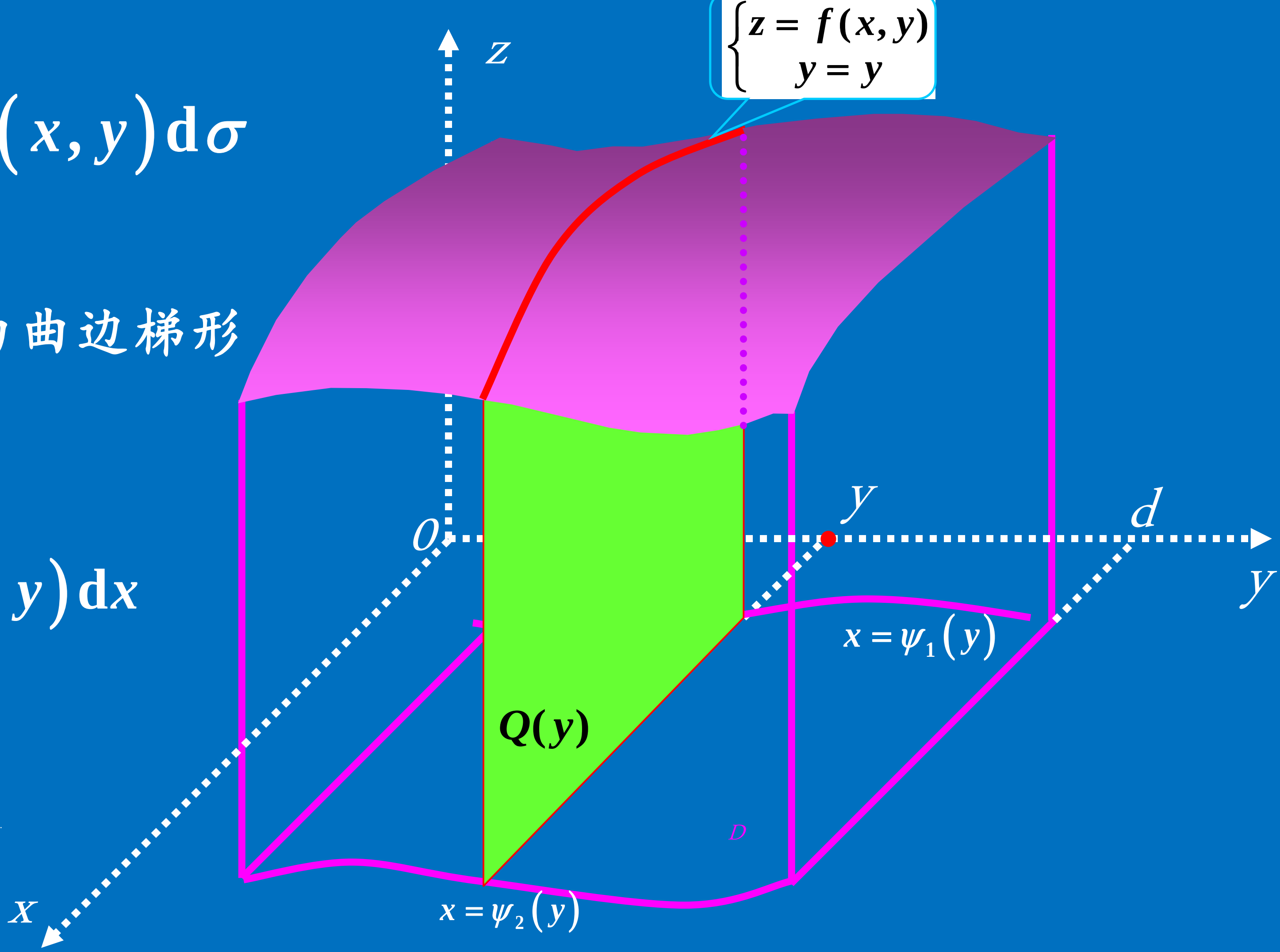


计算 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

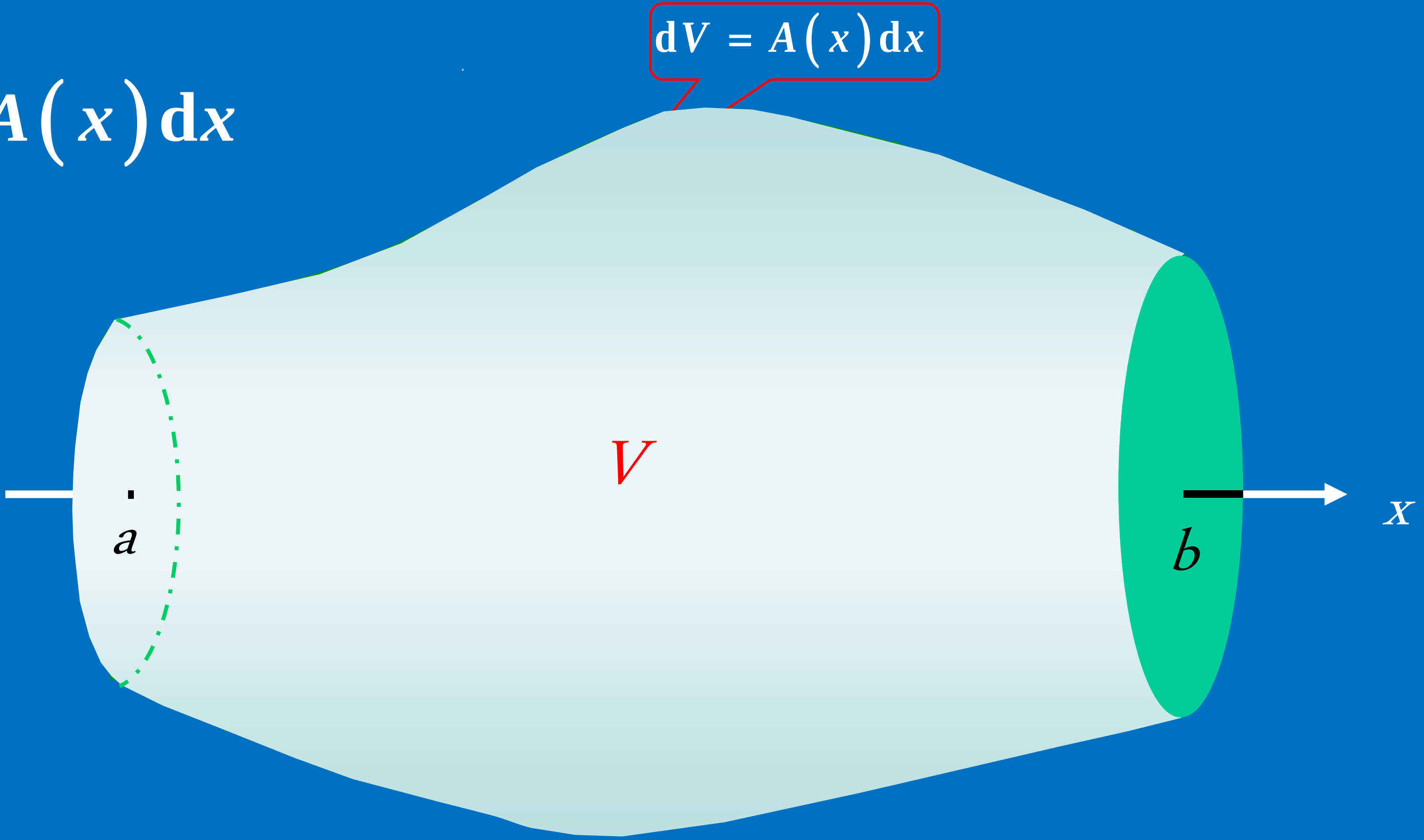
截面 $Q(y)$ 为曲边梯形

$Q(y)$

$= \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$



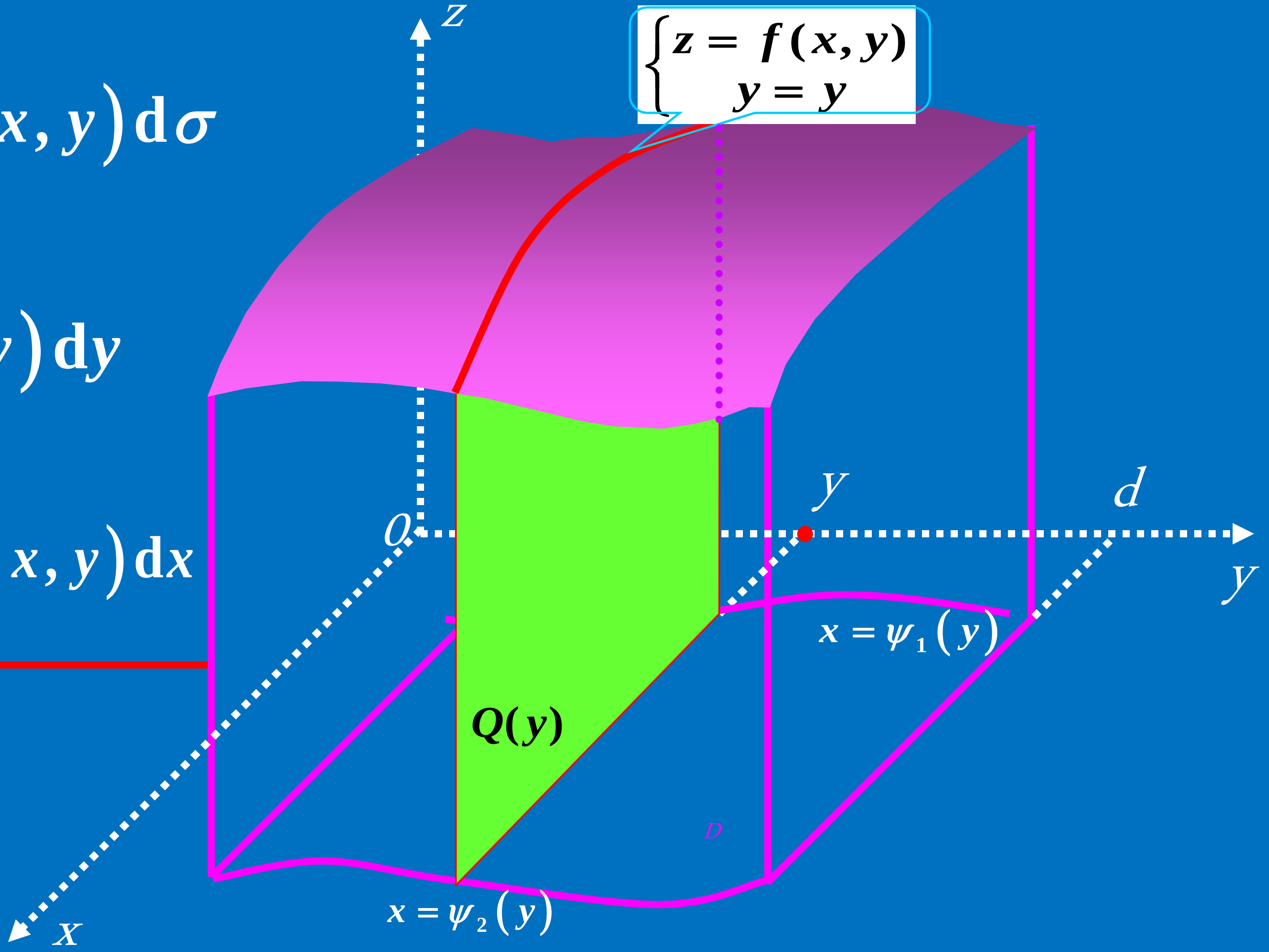
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$



计算 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

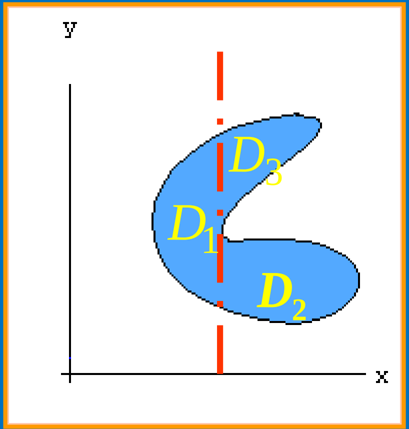
$$V=\int_c^d Q(y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



3）既非 X—型，又非 Y—型区域：利用区域的可加性计算

$$\iint_{D} = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

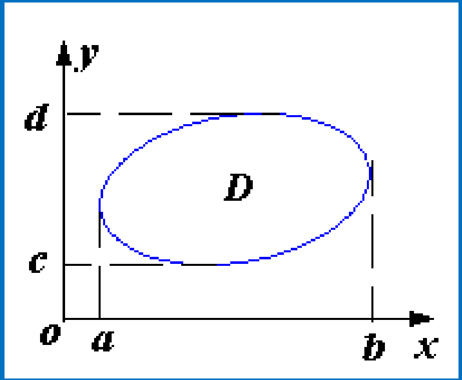


4) 既是 X—型，又是 Y—型区域：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$



二重积分化为二次积分确定积分限的方法：

X-型：任取一线穿过区域，上下曲线定 y 限，

用域外两线夹区域，左右直线定 x 限

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

二重积分化为二次积分确定积分限的方法：

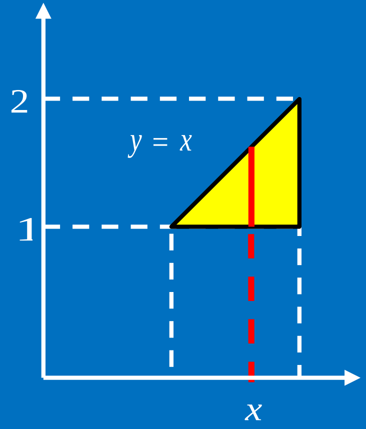
Y-型：任取一线穿过区域，左右曲线定 x 限，

用域外两线夹区域，上下直线定 y 限

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

直角坐标系下计算二重积分的例题

例 计算：$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由直线 $y=1$，$x=2$，$y=x$ 所围成.

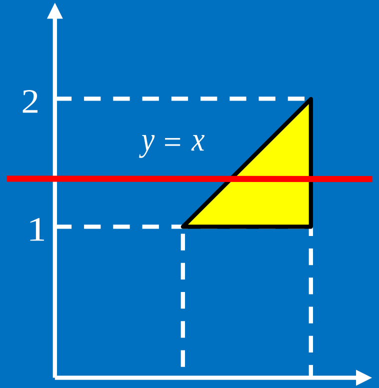


解 积分区域为 X-型.

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\left[\int_1^x xy\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_1^x\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{8}.$$

例　计算：$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由直线 $y=1$，$x=2$，$y=x$ 所围成.



解　D 又是 Y–型区域.

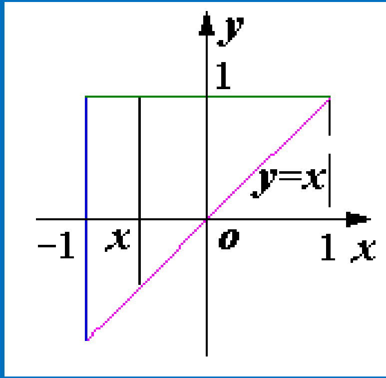
$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \left[\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

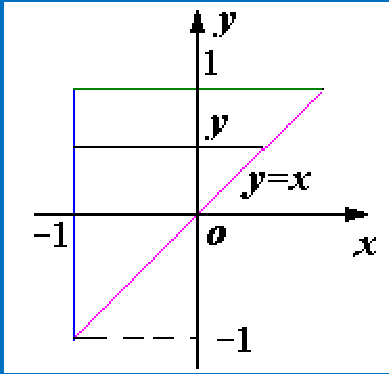
$$= \int_1^2 \left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_y^2 \mathrm{d}y = \int_1^2 \left(2y-\frac{y^3}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{9}{8}.$$

例 $\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由直线 $y=1$， $x=-1$，

$y=x$ 所围成.

解





D 既是 X-型区域，又是 Y-型区域.

例　$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由直线 $y=1$，$x=-1$，$y=x$ 所围成.

解　根据被积函数的特点，视 D 为 X-型区域：

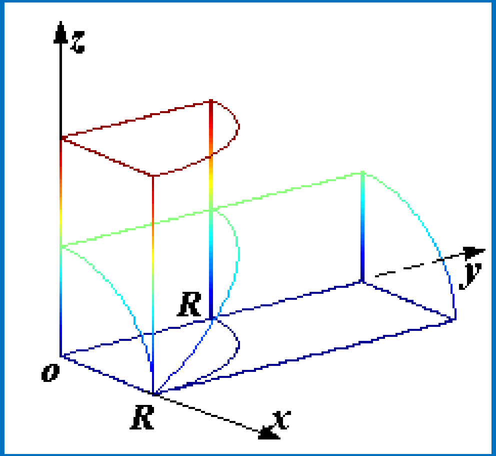
$$\iint\limits_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_x^1\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(|x|^3-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

例　求两个底圆半径等于 R 的直交圆柱面围成的立体体积.

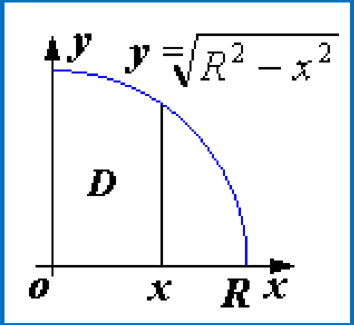
解　设这两个圆柱面的方程为

$$x^2 + y^2 = R^2,\quad x^2 + z^2 = R^2.$$



$$V = 8V_1 = 8\iint_D \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

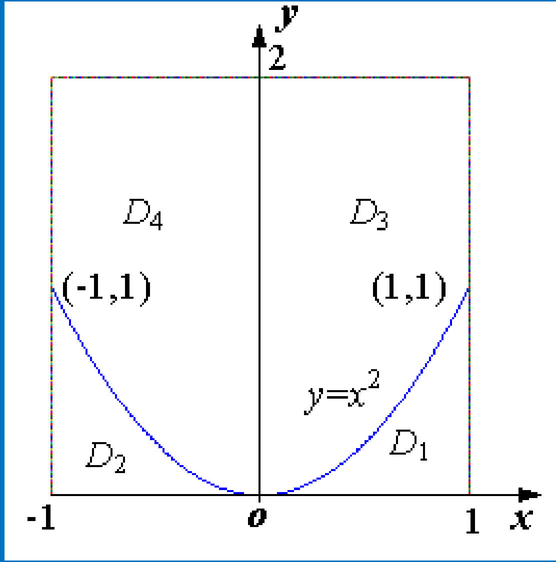
$$=8\int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{16}{3}R^3$$



例　计算 $\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：$-1\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 2$.

解　$\iint\limits_D \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=2\iint\limits_{D_1} \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_3} \sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$=2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y+2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1\left[-\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}\right]_0^{x^2}\mathrm{d}x+2\int_0^1\left[\frac{2}{3}(y-x^2)^{3/2}\right]_{x^2}^{2}\mathrm{d}x$$

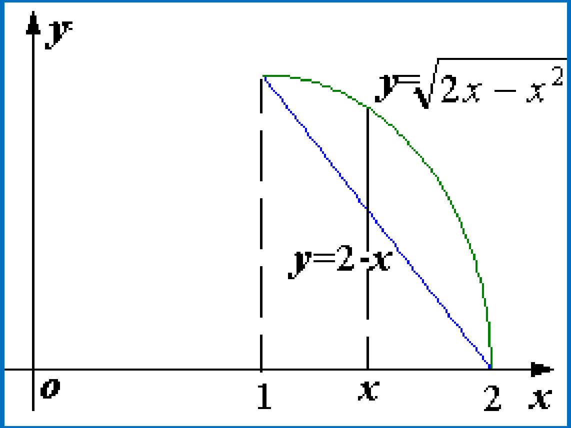
$$=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x$$

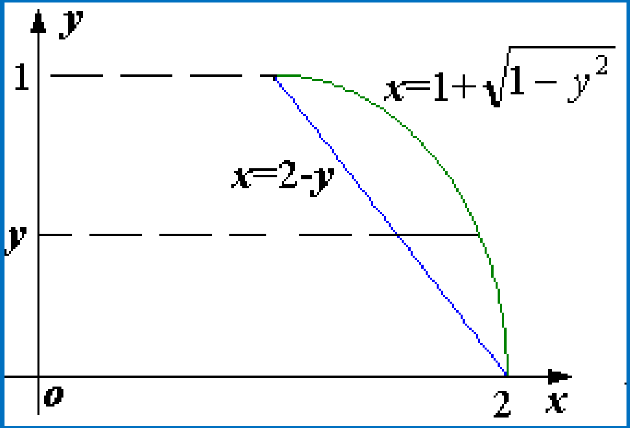
$$=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$$

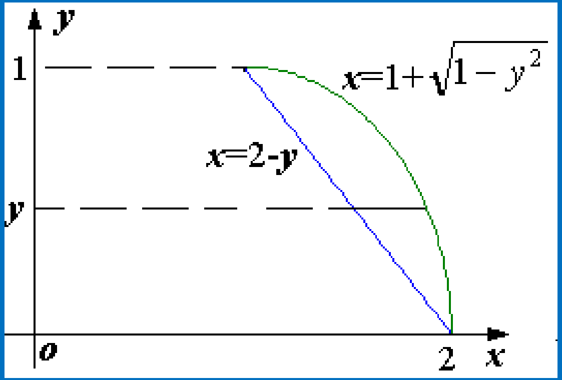
例　交换下列二次积分的积分次序：

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解　积分区域 D 为：$1 \leqslant x \leqslant 2$，$2-x \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}$.







积分区域 D 为：$0\leqslant y\leqslant 1$，$2-y\leqslant x\leqslant 1+\sqrt{1-y^2}$.

$$\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$$