常系数线性微分方程

摘要：

本文档简要介绍关于微分方程及其求解的基本知识，可用于动态电路微分方程的求解。若要详细了解相关知识，需要阅读高等数学关于微分方程的相关内容。如果你尚未学习高等数学，那么只需要记住微分方程解的最后推导结论，不需要看具体的推导过程，所以基本不影响第六周和第七周动态电路的学习。

微分方程

定义：包含自变量、未知函数以及未知函数导数或微分的方程称为微分方程。

常微分方程

定义：未知函数为一元函数的称为常微分方程。

一阶线性方程

$$a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+by=f(t)$$

其特点是：方程中只包含 y 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的一次项，故称为线性方程。由于 a 、b 均为常数，该方程称为常系数线性方程。$f(t)$ 称为自由项。当 $f(t)=0$ 时，有

$$a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+by=0$$

上式称为线性齐次方程。当 $f(t)\neq 0$ 时，称为线性非齐次方程。

对齐次方程，设解的形式为

$$y=Ae^{pt}$$

代入齐次方程有

$$aApe^{pt}+bAe^{pt}=0$$

即

$$Ae^{pt}(ap+b)=0$$

显然，由于上式中 $Ae^{pt}\neq 0$，上式只有

$$(ap+b)=0$$

该方程称为线性齐次方程的特征方程。由于 a 、 b 为常数，所以由特征方程可知：

$$p=-\frac{b}{a}$$

其中， p 称为特征方程的特征根。因此，齐次方程的通解为

$$y=Ae^{-\frac{b}{a}t}$$

其中，常数 A 由初始条件决定。将初始条件代入上式，有

$$y(0)=Ae^{0}=A$$

所以，该齐次方程的解为

$$y=y(0)e^{-\frac{b}{a}t}$$

对于非齐次方程

$$a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+by=f(t)$$

其解为对应齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和。即

$$y=y'+y''$$

其中，齐次方程通解

$$y'=Ae^{-\frac{b}{a}t}$$

当自由项 $f(t)$ 为常数或正弦时间函数，特解也为常数或正弦时间函数。这样，非齐次方程的通解为

$$y = Ae^{-\frac{b}{a}t} + y''$$

以上关于一阶线性常微分方程的求解方法可推广到二阶线性常微分方程。