



数字图像处理

Digital Image Processing

信息工程学院

School of Information Engineering

4.1 线性系统的基本理论与运算

郭志强 主讲

4.1 线性系统的基本理论与运算

4.1.1 线性系统与非线性系统

设系统的特性可表示成对输入图像进行T运算，并令 $f_1(x, y)$ 、 $f_2(x, y)$ 与 $T[f_1(x, y)]$ 、 $T[f_2(x, y)]$ 分别代表两对不同的输入和输出图像，则当系统满足：

$$T[f_1(x, y)] + T[f_2(x, y)] = T[f_1(x, y) + f_2(x, y)] \quad (4.1)$$

关系时，称系统具有叠加性。当系统满足：

$$T[kf_1(x, y)] = kT[f_1(x, y)] \quad (4.2)$$

关系时，称系统具有齐次性。

4.1 线性系统的基本理论

4.1.1 线性系统与非线性系统

同时满足**叠加性和齐次性**的系统称为**线性系统**。由于图像是二维的，所以这样的系统称为**二维线性系统**，由式(4.1)和式(4.2)定义的运算称为**二维线性运算**。显然，**二维线性系统**应一般地满足：

$$T\left[\sum k_i f_i(x, y)\right] = \sum k_i T[f_i(x, y)] \quad (4.3)$$

凡不满足叠加性和齐次性的系统都属于非线性系统。

4.1 线性系统的基本理论

4.1.2 二维线性移不变系统

1、移不变系统

当系统的单位脉冲输入为 $\delta(x - \alpha, y - \beta)$ ，也即输入的单位脉冲函数延迟了 α 、 β 单位时，输出为 $h(x - \alpha, y - \beta)$ ，即输出结果性态不变，仅在位置上延迟了 α 、 β 单位，则称这样的系统为移不变系统。

显然，对于移不变系统来说，系统的输出仅与输入函数的性态有关，而与输入函数作用的起点无关。

$$\text{且： } T[\delta(x - \alpha, y - \beta)] = h(x - \alpha, y - \beta) \quad (4.4)$$

4.1 线性系统的基本理论

2、线性移不变系统

如果一个系统既是线性系统，又是移不变系统，则该系统是线性移不变系统。

课堂问题：

请判断 $g(x, y) = 3f(x, y) + 5$ 是否线性移不变系统？

4.1 线性系统的基本理论

对于一个二维线性移不变系统 $h(x, y)$ ，设其输入为 $f(x, y)$ ，输出为 $g(x, y)$ ，线性移不变系统的运算为 T ，则有：

$$\begin{aligned} g(x, y) &= T[f(x, y)] \\ &= T\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T[f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta && \text{(线性叠加原理)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) T[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta && \text{(齐次性; } x, y \text{ 为变量)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta && \text{(移不变性, 卷积表示)} \\ &= f(x, y) * h(x, y) && (4.5) \end{aligned}$$

即：线性移不变系统的输出等于系统的输入与系统脉冲响应（点扩展函数）的卷积。

4.1 线性系统的基本理论

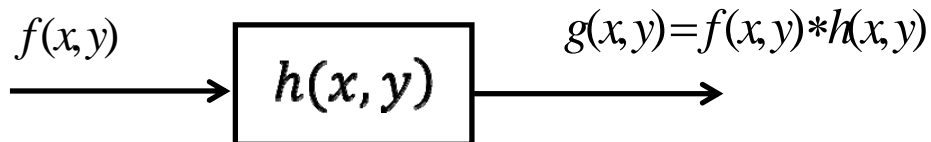
同理有：

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\alpha, y-\beta) h(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ &= h(x, y) * f(x, y) \end{aligned} \quad (4.6)$$

也有：

$$h(x, y) * f(x, y) = f(x, y) * h(x, y) \quad (4.7)$$

所以，二维线性移不变系统的输入、输出和运算关系可描述为：





谢谢

THANK YOU