

# 理论攻坚-数学运算 2

(讲义+笔记)

主讲教师：王义

授课时间：2023.12.14



粉笔公考·官方微信



让三个工程队轮班，每队施工 1 小时后换班，则该工程完成时，甲工程队的施工时间共计（ ）。

- A. 2 小时 54 分
- B. 3 小时
- C. 3 小时 54 分
- D. 4 小时

【例 3】(2022 天津公务员) 甲、乙二人合作计划 30 天完成一项工程，甲的工作效率是乙的 2 倍。两人合作 10 天后，甲的效率提升 25%，乙的效率提升 50%。又合作 10 天后，乙因其他任务撤出，甲单独完成剩余任务。则最终完成工作比预计时间（ ）。

- A. 早 2 天
- B. 晚 2 天
- C. 早 4 天
- D. 晚 4 天

【例 4】(2019 联考) 一项工程，乙队单独完成所花的时间是甲队的 1.5 倍。若甲队单独做 20 天后，两队合做还需要 60 天刚好完成；若甲队单独做  $x$  天后，由乙队单独再做  $y$  天也刚好完成。则下列关系正确的是（ ）。

- A.  $2y=3x$
- B.  $3x=4y$
- C.  $x=120-2y$
- D.  $y=180-1.5x$

【例 5】(2022 辽宁) 有 25 人铺设某足球场草坪，计划 20 天完成。动工 6 天后抽出 5 人负责围栏围网的施工，留下的人继续铺设草坪。如果每人的工作效率不变，那么铺设完该足球场的草坪实际要用（ ）天。

- A. 23.5
- B. 24.5
- C. 25.5
- D. 26.5

【例 6】(2022 四川) 甲、乙两人加工一批配件，已知甲单独加工需要 15 小时才能完成，甲和乙的工作效率之比为 4:3。现在甲、乙两人一起加工了 5 小时，还剩下 200 个配件未加工，则这批配件的总数是（ ）个。

- A. 480
- B. 450
- C. 420
- D. 390

## 第五节 经济利润问题

### 一、基础经济

#### 1. 基础公式

- (1) 利润=售价-成本
- (2) 利润率=利润/成本
- (3) 售价=成本\*(1+利润率)
- (4) 折扣=折后价/折前价
- (5) 总价=单价\*数量

#### 2. 方法

- (1) 方程法
- (2) 赋值法

【例 1】(2021 联考) 某鲜花店购进一批玫瑰，已知单支玫瑰进价 1 元，按定价 5 元销售了 70% 后，再以定价的 4 折销售剩余玫瑰，全部售完后共盈利 3100 元。问该花店共购进玫瑰多少支？( )

- A. 900
- B. 1000
- C. 1200
- D. 1500

【例 2】(2021 浙江公务员) 超市采购一批食用油，其中玉米油每桶进价比花生油低 20%。若花生油利润定为进价的 24%，玉米油利润定为进价的 30%，则花生油比玉米油每桶售价高 10 元。问玉米油每桶比花生油进价低多少元？( )

- A. 10
- B. 15
- C. 24
- D. 25

【例 3】(2020 广东选调) 商场销售某种型号的冰箱，上半年的利润率为 20%，由于下半年的进货价格下降 10%，商场决定适当下调销售价格，但调整后下半年的利润率仍然达到了 24%。则同上半年相比，下半年的销售价格降低了( )。

- A. 5%
- B. 6%

C. 7%

D. 8%

【例 4】(2020 河南) 某商场购进一批空调, 按进价的 40% 作为利润来定价, 当售出这批空调的 80% 后, 该商场将剩下的空调以定价的八折销售。若这批空调全部售出, 则可获利 ( )。

A. 28%

B. 34.4%

C. 36.8%

D. 39%

## 二、分段计费

### 1. 题型判定

生活中的水电费、出租车计费、税费等, 每段计费标准不同

### 2. 计算方法

按标准, 分开; 计算后, 汇总

【例 5】(2019 天津) 某城市居民用水价格为: 每户每月不超过 5 吨的部分按 4 元/吨收取; 超过 5 吨、不超过 10 吨的部分按 6 元/吨收取; 超过 10 吨的部分按 8 元/吨收取。某户居民两个月共交水费 108 元, 则该户居民这两个月用水总量最多为 ( ) 吨。

A. 21

B. 24

C. 17.25

D. 21.33

## 三、函数最值

### 1. 题型判定

单价和销量此消彼长, 问何时总价或总利润最高

### 2. 计算方法 (两点式)

(1) 设提价或降价次数为  $x$ , 列出总价或总利润的函数表达式

(2) 令函数值为 0, 解得  $x_1$ 、 $x_2$

(3) 当  $x = (x_1 + x_2) / 2$  时, 总价或总利润取得最值

【例 6】（2022 湖北公务员）北京冬奥会期间，冬奥会吉祥物“冰墩墩”纪念品十分畅销。销售期间某商家发现，进价为每个 40 元的“冰墩墩”，当售价定为 44 元时，每天可售出 300 个，售价每上涨 1 元，每天销量减少 10 个。现商家决定提价销售，若要使销售利润达到最大，则售价应为（ ）。

A. 51 元

B. 52 元

C. 54 元

D. 57 元

## 理论攻坚-数学运算 2（笔记）

### 数量关系 理论攻坚 2

学习任务：

1. 课程内容：工程问题、经济利润问题
2. 授课时长：2.5 小时
3. 对应讲义：第 127~130 页
4. 重点内容：
  - （1）掌握工程问题的三种考法与对应解题步骤
  - （2）掌握与售价、成本、利润、折扣、利润率等相关的公式
  - （3）掌握经济利润问题中的经典题型：分段计费问题及函数最值问题

| 数学运算课程安排 |                       |              |              |                     |
|----------|-----------------------|--------------|--------------|---------------------|
| 内容       | 数学运算一                 | 数学运算二        | 数学运算三        | 数学运算四               |
|          | 代入排除法<br>倍数特性法<br>方程法 | 工程问题<br>经济利润 | 行程问题<br>几何问题 | 排列组合与<br>概率<br>最值问题 |

#### 【注意】

1. 今天学习工程问题和经济利润问题。
2. 今天开始进入具体题型的学习，有同学说没有思路，听课、记笔记重点从以下两个维度。
  - （1）识别：会把工程问题和经济利润问题分成不同的小题型，要会识别这个工程问题是哪一类工程。
  - （2）对应的方法、套路、核心公式。

### 第四节 工程问题

1. 给完工时间型
  - ①赋总量；②算效率；③根据工作过程列式求解

2. 给效率比例型

①赋效率；②算总量；③根据工作过程列式求解

3. 给具体单位型

设未知数，列方程求解

工程问题

三量关系：总量=效率\*时间， $W=P*t$

考查题型

1. 给完工时间型

2. 给效率比例型（重点）

3. 给具体单位型

|        | A类 | B类 | C类 | D类 | E类 |
|--------|----|----|----|----|----|
| 5月21日  | 2  | 1  | 1  | 2  | 1  |
| 11月12日 | 2  | 1  | 1  |    |    |

【注意】工程问题：比较套路，考场中遇到一定要做，变形基本都会涉及到（强化、冲刺）。

1. 考情分析：2022年5月21日事业单位联考中数量一共考查了5题，其中工程考查A类2题、B类1题、C类1题、D类2题、E类1题，真题和今天讲的题目基本难度持平，甚至今天的题目会偏难一些。

2. 三量关系：总量=效率\*时间。

（1）例：老师做PPT，一天可以做5页（效率），一周上5天班（时间），则一周能做5页/天\*5天=25页（工作总量）。

（2）用W表示工作总量，P表示工作效率，t表示工作时间， $W=P*t$ 。求工作时间： $t=W/P$ 。求工作效率： $P=W/t$ 。

3. 考查题型：

（1）给完工时间型。

（2）给效率比例型（重点）。

（3）给具体单位型。

一、给完工时间型工程问题（给出多个完工时间）



①赋总量（完工时间的公倍数）

4 的倍数：4、8、12、16、20、24……

6 的倍数：6、12、18、24、30……

②算效率：效率=总量/时间

③根据工作过程列式计算

【例】搬一堆砖，甲单干要 4 小时，乙单干要 6 小时，甲乙合作需要多久完成？

【注意】给完工时间型工程问题（给出多个完工时间）：

1. 给出多个完工时间：“多个”指的是 $\geq 2$ 个；“完工时间”是指从头干到尾的时间。

2. 三步走：

（1）赋总量（为了好算，赋值总量为完工时间的公倍数）。

（2）算效率：效率=总量/时间（ $P=W/t$ ）。

（3）根据工作过程列式计算（通常在问题附近）。

3. 例：搬一堆砖，甲单干要 4 小时，乙单干要 6 小时，甲乙合作需要多久完成？

答：4 小时、6 小时都是完工时间，属于给完工时间型工程问题。（1）赋总量：赋值工作总量是完工时间 4 和 6 的公倍数。4 的倍数有 4、8、12、16、20、24、……；6 的倍数有 6、12、18、24、30、……，12 既是 4 的倍数又是 6 的倍数，12 是 4 和 6 的公倍数，赋值工作总量 12，赋值 24、36 也都可以，想到哪个就赋值哪个，赋值  $W_{总}=12$ 。（2）算效率： $P_{甲}=12/4=3$ 、 $P_{乙}=12/6=2$ 。（3）根据工作过程列式计算：求甲乙合作的时间， $t_{合作}=W/P=12/(3+2)=2.4$  小时。

4. 对工作总量赋值：赋值工作总量为 100、200、300、400 都可以，对最终的结果没有关系。如果不赋值工作总量，工作总量用  $W_{总}$  表示，则  $P_{甲}=W_{总}/4$ 、 $P_{乙}=W_{总}/6$ ，故甲乙合作的时间  $t=W_{总} \div (W_{总}/4+W_{总}/6)=1 \div (1/4+1/6)$ ， $W_{总}$  可以约掉，说明在本类问题中  $W_{总}$  的数值对结果没有影响，所以可以赋值。

5. 找公倍数：

（1）大数扩大。找 4 和 6 的公倍数：6 比较大，把 6 扩大， $6*2=12$ ，12 是 4 的倍数，故公倍数是 12。

(2) 短除法。4 和 6 同时除以 2，商 2、3，不能再同时除以一个数，把外围的数相乘，公倍数为  $2 \times 2 \times 3 = 12$ 。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 46} \\ \times \quad 2 \times 3 \end{array}$$

【例 1】(2022 联考) 为保障冬奥会比赛顺利进行, 各场馆需对设施设备进行测评, 合格后交付使用。现对一赛道进行检测, 已知检测时匀速作业, 如甲机构单独检测需要 90 分钟, 乙机构单独检测需要 135 分钟, 现两机构同时协作检测 45 分钟后, 甲单独完成剩余部分。问甲机构一共检测了多少分钟? ( )

- A. 55  
B. 60  
C. 65  
D. 70

【解析】1. 检测赛道是一个工程，出现多个完工时间（90 分钟、135 分钟），属于给完工时间型工程问题。

(1) 赋总量：赋值工作总量是 90 和 135 的公倍数，大数扩大（乘 2、3、4），135 比较大， $135 \times 2 = 270$ ，270 是 90 的倍数，则 90 和 135 的公倍数是 270，赋值  $W_{\text{总}} = 270$ 。

(2) 算效率:  $P=W/t$ ,  $P_{甲}=270/90=3$ ,  $P_{乙}=270/135=2$ 。

(3) 列式求解：问甲机构一共检测了多少分钟。甲和乙合作 45 分钟，甲单独干剩余部分，设需要  $t$  分钟，这个工程分成两段，甲和乙合作 45 分钟+甲单独工作  $t$  分钟=总量，列式： $(3+2)*45+3*t=270$ ，先约分， $75+t=90$ ，解得  $t=15$ 。甲第一段检测了 45 分钟、第二段检测了 15 分钟，所求= $45+15=60$  分钟，对应 B 项。【选 B】

①赋总量  $W_{\text{总}}=270$

②算效率  $P_{\text{甲}}=\frac{270}{90}=3$   $P_{\text{乙}}=\frac{270}{135}=2$

③列式求解

45分钟 t分钟

甲+乙 甲

$(3+2) \times 45 + 3 \times t = 270$

$75 + t = 90$

$t = 15$

90 135  
 $\uparrow \downarrow \times 2$   
 270  
 $45 + 15 = 60$

【例2】(2021 四川公务员) 某项工程，甲、乙、丙三个工程队如单独施工，分别需要 12 小时、10 小时和 8 小时完成。现按“甲—乙—丙—甲……”的顺序让三个工程队轮班，每队施工 1 小时后换班，则该工程完成时，甲工程队的施工时间共计 ( )。

- A. 2 小时 54 分      B. 3 小时  
C. 3 小时 54 分      D. 4 小时

【解析】2. 工程问题，出现多个完工时间（12 小时、10 小时、8 小时），属于给完工时间型工程问题。

(1) 赋总量：赋值工作总量是 12、10 和 8 的公倍数，短除法，同时除以 2，商 6、5、4，三个数不能再同时除以一个数，6 和 4 可以同时除以 2，商 3、2、5 不能除以 2，直接落下，落下 3、5、2，不能再同时除以一个数，外围数字相乘，公倍数为  $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2 = 120$ ，赋  $W_{\text{总}}=120$ 。

2 | 12 10 8

2 | 6 5 4

3 5 2

$\times 3 \times 5 \times 2$

(2) 算效率： $P=W/t$ ， $P_{\text{甲}}=120/12=10$ ， $P_{\text{乙}}=120/10=12$ ， $P_{\text{丙}}=120/8=15$ 。

(3) 列式求解：按甲 1h、乙 1h、丙 1h、甲 1h、乙 1h、丙 1h、……，单独看甲无法求解，两个甲之间隔了乙、丙，完成的时候不知道甲在哪里，按一个周期看，一个周期的甲、乙、丙完成的工作量= $10+12+15=37$  份工作。 $120/37=3$  个

周期……9 份工作， $37+37+37+9$ ，剩下 9 份工作到下一个周期，新的周期从甲开始干，甲 1 小时能完成 10 份工作，说明剩下 9 份工作对于甲而言不到 1 小时就能完成。问全部完成时，甲的施工时间，所求=3 小时+1 小时=4 小时，说明甲的施工时间是大于 3 小时、小于 4 小时，对应 C 项。【选 C】

①赋总量  $W_{总}=120$       ②算效率  $P_{甲}=\frac{120}{12}=10$      $P_{乙}=\frac{120}{10}=12$      $P_{丙}=\frac{120}{8}=15$   
 ③列式求解    甲、乙、丙 / 甲、乙、丙 / 甲、乙、丙 / 甲  
 $10+12+15$      $37$      $37$      $37$      $9$      $<1\text{小时}$   
 $120 \div 37 = 3\text{个周期} \dots 9\text{份工作}$   
 $3 \times 1 + 1 = 4$

**【注意】**

1. 剩余的 9 份工作由甲来干， $t_{甲}=9/10=0.9$  小时=0.9\*60=54 分钟。剩余的 9 份工作甲干了 54 分钟，前面三个周期是 3 小时，所求=3 小时+54 分钟=3 小时 54 分钟。

2. 交替合作：

(1) 找到循环周期：甲、乙、丙。

(2) 算出一个循环的工作量： $10+12+15=37$ 。

(3) 算出需要几个循环： $120/37=3$  个周期……9 份工作。

(4) 分析剩余工作量：三个周期甲需要 3 小时，剩余的 9 份工作由甲来干需要 54 分钟，总共需要 3 小时 54 分钟。

3. 易错点： $120/36=20/6=10/3=3$  个周期……1 份工作，算循环的时候不能约分，工作总量有它实际的意义。

二、给效率比例型工程问题（给多个效率的比例关系）

①赋效率（满足比例即可）

②算总量：效率\*时间=总量

③根据工作过程列式计算

【例】甲乙两人工作效率之比为 5: 2, 一项工作两人合作 6 天可以完成, 问乙单独工作需多少天完工?

给效率比例型

①直接给: 甲乙的效率之比为 3: 4

②间接给

③特殊型

【注意】给效率比例型工程问题 (给多个效率的比例关系):

1. 方法:

(1) 赋效率 (满足比例即可)。

(2) 算总量: 效率\*时间=总量。

(3) 根据工作过程列式计算。

2. 例: 甲乙两人工作效率之比为 5: 2, 一项工作两人合作 6 天可以完成, 问乙单独工作需多少天完工?

答: 给出效率比例, 属于给效率比例型工程问题。(1) 赋效率: 赋值  $P_{甲}=5$ 、 $P_{乙}=2$ , 满足比例即可。(2) 算总量: 两人合作 6 天可以完成,  $W=P*t=(5+2)*6=42$ 。(3) 根据工作过程列式计算: 问乙单独工作的时间,  $t_{乙}=W/P_{乙}=42/2=21$  天。

3. 给效率比例型:

(1) 直接给。甲、乙的效率之比为 3: 4。

(2) 间接给。

(3) 特殊给。

【例 3】(2022 天津公务员) 甲、乙二人合作计划 30 天完成一项工程, 甲的工作效率是乙的 2 倍。两人合作 10 天后, 甲的效率提升 25%, 乙的效率提升 50%。又合作 10 天后, 乙因其他任务撤出, 甲单独完成剩余任务。则最终完成工作比预计时间 ( )。

A. 早 2 天

B. 晚 2 天

C. 早 4 天

D. 晚 4 天

【解析】3. “甲的工作效率是乙的 2 倍”, 给效率比例,  $P_{甲}: P_{乙}=2: 1$ , 属

于给效率比例型工程问题。

(1) 赋效率：赋值  $P_{甲}=2$ 、 $P_{乙}=1$ 。

(2) 算总量：甲、乙合作 30 天能完成，则  $W=P*t=(2+1)*30=90$ 。

(3) 列式求解：第一段：甲、乙合作干 10 天，完成  $(2+1)*10=30$  份工作。  
第二段：“甲的效率提升 25%，乙的效率提升 50%”，涉及资料分析的增长率，则  $P'_{甲}=2+2*25\%=2.5$ ， $P'_{乙}=1+1*50\%=1.5$ ，甲、乙效率提升后又合作干了 10 天，完成  $(2.5+1.5)*10=40$  份工作。第三段：“乙因其他任务撤出，甲单独完成剩余任务”，一共是 90 份工作，剩余  $90-30-40=20$  份工作，题干没有说甲效率变回去，还是提升后的效率， $P'_{甲}=2.5$ ， $t=W/P=20/2.5=8$  天。最终完成需要  $10+10+8=28$  天，预计是 30 天，实际比预计早 2 天，对应 A 项。【选 A】

①赋效率  $P_{甲}=2$   $P_{乙}=1$   $P'_{甲}=2+2*25\%=2.5$   $P'_{乙}=1+1*50\%=1.5$

②算总量  $W=P*t=(2+1)*30=90$

③列式求解

| 甲+乙        | $P'_{甲}+P'_{乙}$ | $P'_{甲}$                           |
|------------|-----------------|------------------------------------|
| 10天        | 10天             | $t=\frac{W}{P}=\frac{20}{2.5}=8$ 天 |
| $(2+1)*10$ | $(2.5+1.5)*10$  | $90-30-40=20$ 份                    |
| 30份        | 40份             |                                    |

给效率比例型

①直接给：甲乙的效率之比为 3：4，

②间接给：甲 4 天的工作量等于乙 3 天的工作量

③特殊型

【注意】给效率比例型：

1. 直接给：甲乙的效率之比为 3：4，甲的工作效率是乙的 2 倍。

2. 间接给：甲 4 天的工作量等于乙 3 天的工作量。没有说甲 4 天干完了、乙 3 天干完了，4 天、3 天不是完工时间。

(1) 原理： $W_{甲}(4天)=W_{乙}(3天) \rightarrow P_{甲}*4=P_{乙}*3 \rightarrow P_{甲}/P_{乙}=3/4$ 。

(2) 结论： $W$  一定， $P$  和  $t$  成反比。比如打扫一间教室，总量一定，干得效率越快，所需的时间越短。 $W$  一定， $P$  和  $t$  的变化趋势相反，即  $P$  和  $t$  成反比。  
工作总量一定，甲的时间是 4 天、乙的时间是 3 天，即  $t_{甲}:t_{乙}=4:3$ ，效率和

时间成反比，故  $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}=3:4$ 。甲 8 天的工作量等于乙 5 天的工作量，说明  $t_{\text{甲}}:t_{\text{乙}}=8:5$ ，则  $P_{\text{甲}}:P_{\text{乙}}=5:8$ 。

【例 4】(2019 联考) 一项工程, 乙队单独完成所花的时间是甲队的 1.5 倍。若甲队单独做 20 天后, 两队合做还需要 60 天刚好完成; 若甲队单独做  $x$  天后, 由乙队单独再做  $y$  天也刚好完成。则下列关系正确的是 ( )。


- A.  $2y=3x$   
C.  $x=120-2y$
- B.  $3x=4y$   
D.  $y=180-1.5x$

【解析】4. “一项工程，乙队单独完成所花的时间是甲队的 1.5 倍”，工作量相同， $t_{乙}=t_{甲}*1.5 \rightarrow t_{乙}: t_{甲}=1.5: 1$ ，则  $P_{乙}: P_{甲}=1: 1.5$ （等号左边的主体不变，相反的只有右边），给效率比例型工程问题。

(1) 赋效率：赋值  $P_z=1$ ,  $P_{\text{甲}}=1.5$ 。

(2)算总量:甲队单独做 20 天后,两队合做还需要 60 天完成, $W_{\text{总}}=1.5*20+(1.5+1)*60=180$ 。

(3) 列式求解：甲队单独做  $x$  天后，乙队再单独做  $y$  天也刚好完成，则  $1.5x+y=180 \rightarrow y=180-1.5x$ ，对应 D 项。【选 D】



【例4】(2019联考) 一项工程, 乙队单独完成所花的时间是甲队的1.5倍。若甲队单独做20天后, 两队合做还需要60天刚好完成。若甲队单独做x天后, 由乙队单独再做y天也刚好完成。则下列关系正确的是 ( )。

遇见不一样的自己

A.  $2y = 3x$ 
B.  $3x = 4y$ 
C.  $x = 120 - 2y$ 
D.  $y = 180 - 1.5x$

**赋效率**

$P_乙 = 1, P_甲 = 1.5$

**算总量**

$\frac{20\text{天}}{\text{甲}} \quad \frac{60\text{天}}{\text{甲}+\text{乙}}$

**列式求解**

列:

$\frac{x\text{天}}{\text{甲}}$

$\frac{y\text{天}}{\text{乙}}$

$1.5x + y = 180$

$t_乙 = t_甲 = 1.5 = 1$

$P_乙 : P_甲 = 1 : 1.5$

$P_甲 = 3, P_乙 = 2, W_{总} = 360$

$3x + 2y = 360$

$W_{总} = 1.5 \times 20 + (1.5 + 1) \times 60 = 180$

【注意】有同学赋效率： $P_{\text{甲}}=3$ 、 $P_{\text{乙}}=2$ ，算总量： $W_{\text{总}}=360$ ，列式： $3x+2y=360$ ，等式左右两边同时除以 2，对应 D 项。

给效率比例型

①直接给：甲乙的效率之比为 3: 4

②间接给：甲 4 天的工作量等于乙 3 天的工作量

③特殊型——给多个人或多台机器：50 个工人、36 台收割机（每个人效率相同），赋值每个人/每台机器效率为 1

**【注意】**特殊型——给多个人或多台机器：50 个工人、36 台收割机，赋值每个人/每台机器效率为 1。

1. 原因：一个工厂有 50 个工人，分别为甲、乙、丙、丁、……，实际情况是有人干活快、有人干活慢、有人偷懒、有人勤快……等，如果每个人效率都不同，不会把 50 个人的情况都列出来，只能默认每个人的效率相同，效率之比是 1: 1: 1: 1: ……，因此赋值每个人的效率为 1。

2. 理解：赋值每个人的效率为 1。

（1）5 天一个人干的工作量  $W=5$ 。

（2）工厂有 50 个人，工厂一天的工作量  $W=50$ 。

**【例 5】**（2022 辽宁）有 25 人铺设某足球场草坪，计划 20 天完成。动工 6 天后抽出 5 人负责围栏围网的施工，留下的人继续铺设草坪。如果每人的工作效率不变，那么铺设完该足球场的草坪实际要用（ ）天。

A. 23.5

B. 24.5

C. 25.5

D. 26.5

**【解析】**5. 出现多个人，特殊型效率比例工程问题。

（1）赋效率：赋值每个人的效率为 1， $P_{\text{每个人}}=1$ 。

（2）算总量：25 人计划 20 天完成，则  $W_{\text{总}}=25 \times 20=500$ 。

（3）列式求解：第一段：“动工 6 天后”是按原计划干 6 天，即 25 人干 6 天，第二段：抽出 5 人后剩余 20 个人，设 20 人铺了  $t$  天，这两段的工作量加和为总量，列式： $25 \times 6 + 20 \times t = 500$ ，先约分， $30 + 4t = 100 \rightarrow 4t = 70$ ，解得  $t = 17.5$  天。第一段是 6 天、第二段是 17.5 天，实际需要  $6 + 17.5 = 23.5$  天，对应 A 项。**【选 A】**



①赋效率  $P_{\text{每个人}}=1$

②算总量  $W_{\text{总}} = 25 \times 20 = 500$

③列式求解

$6 + 17.5 = 23.5 \text{天}$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 25\text{个人} & 20\text{个人} \\ \hline 5 \text{天} & t = 17.5 \text{天} \\ \hline 25 \times 6 & + 20 \times t = 500 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 30 + 4t & = & 100 \\ 4t & = & 70 \\ & & t = 17.5 \text{天} \end{array}$$

id:57211146

【注意】取整：若选项改为 A. 23、B. 24、C. 25，算出来是 23.5 天，23 天干不完，24 天才能干完，向上取整，选 24 天。

### 三、给具体带单位数值型工程问题（具体效率或工作量）

①设未知数

②根据工作过程列方程

例：

要修 5000 米的路，要栽 1000 棵树

每天修 300 米，每天栽 100 棵树

【注意】

1. 给完工时间型→赋工作总量。

2. 给效率比例型（直接给、间接给、特殊给）→赋效率。

3. 给具体带单位数值型工程问题（具体效率或工作量）。

（1）例：

①要修 5000 米的路、要栽 1000 棵树→工作量的数值单位。

②每天修 300 米、每天栽 100 棵树→具体效率的数值单位。

（2）解题思路：出现效率或工作量（不一定要是工作总量）的具体数值单位（注意是或关系），赋值会有矛盾，用方程法。还剩 400 米，也是工作量的数值单位，不一定非要工作总量。不一定需要效率、工作量的数值单位同时出现，

这是“或”关系。先干 4 天，不属于给具体带单位数值型工程问题，看的是效率或工作量，和时间没有关系。

①设未知数。

②根据工作过程列方程。

【例 6】(2022 四川) 甲、乙两人加工一批配件，已知甲单独加工需要 15 小时才能完成，甲和乙的工作效率之比为 4:3。现在甲、乙两人一起加工了 5 小时，还剩下 200 个配件未加工，则这批配件的总数是 ( ) 个。

A. 480

B. 450

C. 420

D. 390

【解析】6. 只给了一个完工时间 (15 小时)，不是给完工时间型工程问题；出现效率比例 (4:3)，给效率比例型工程问题；出现工作量的数值单位 (200 个配件)，给具体带单位数值型工程问题。出现多个特征，优先考虑为第三类，给具体带单位数值型优先级比较高，用方程法。

方法一：设未知数找等量关系，“甲和乙的工作效率之比为 4:3”，按照比例设份数，设  $P_{甲}=4x$ ， $P_{乙}=3x$ 。“甲单独加工需要 15 小时才能完成”，则  $W_{总}=4x \times 15=60x$ 。“现在甲、乙两人一起加工了 5 小时，还剩下 200 个配件未加工”， $W_{已}+W_{未}=总量$ ，列式： $(4x+3x) \times 5+200=60x \rightarrow 35x+200=60x \rightarrow 200=25x$ ，解得  $x=8$ 。求总数，所求  $=60x=60 \times 8=480$ ，对应 A 项。

方法二：“现在甲、乙两人一起加工了 5 小时”，甲、乙工作时间相同， $W=P \times t$ ， $t$  一定， $W$  和  $P$  成正比，都有 5 个小时，我效率快，我就干得多。已知  $P_{甲}:P_{乙}=4:3$ ，则  $W_{甲}:W_{乙}=4:3$ ，已完成  $=W_{甲}+W_{乙}=7$  的倍数。还有 200 个未完成，已完成+未完成=总数，7 的倍数+200=总数，总数-200=7 的倍数。A 项：480-200=280，是 7 的倍数，保留；B 项：450-200=250，不是 7 的倍数，排除；C 项：420-200=220，不是 7 的倍数，排除；D 项：390-200=190，不是 7 的倍数，排除。选择 A 项。【选 A】

### 【注意】

1. 出现多个特征，有工作量的具体带单位数值，优先考虑为给具体带单位数

值型工程问题，用方程法。

2.  $t$  一定， $W$  和  $P$  成正比。

【拓展】（2023 湖北）某校图书馆新购买了一批图书。需要小伟和小强整理上架。小伟单独整理需要 4 小时，小强单独整理需要 5 小时，若两人同时整理，全部图书整理上架后，小伟比小强多整理 40 本，则该图书馆这次购买的图书一共有（ ）本。

A. 320

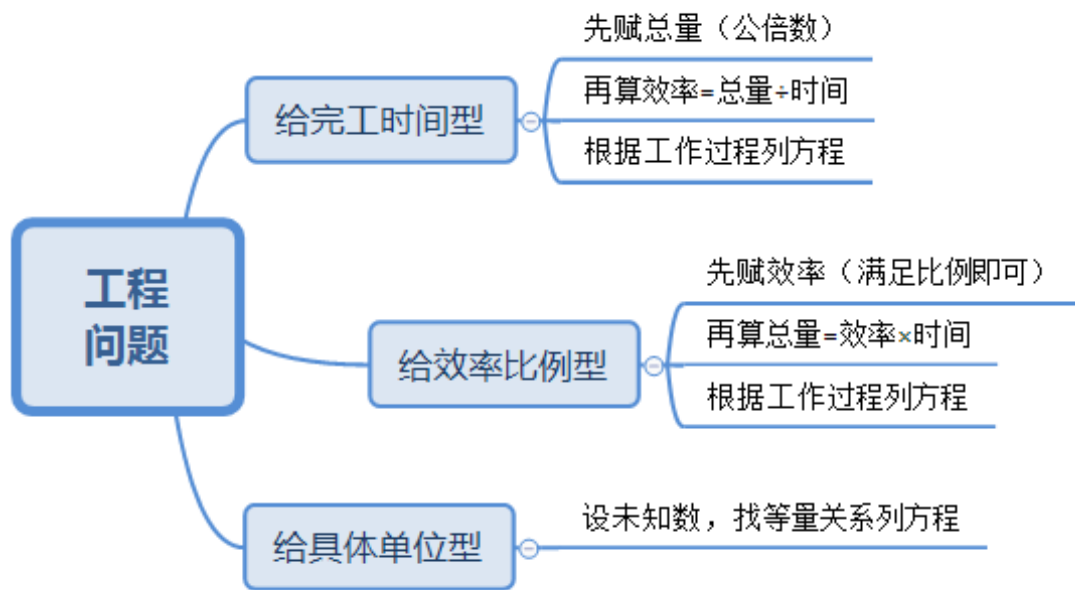
B. 360

C. 380

D. 400

【解析】拓展. 方法一：让小伟整理需要 4 小时、让小强整理需要 5 小时， $W$  一定， $P$  和  $t$  成反比， $t_{\text{伟}}:t_{\text{强}}=4:5$ ，则  $P_{\text{伟}}:P_{\text{强}}=5:4$ 。“若两人同时整理，全部图书整理上架后，小伟比小强多整理 40 本”， $t$  一定， $P_{\text{伟}}:P_{\text{强}}=5:4$ ，则  $W_{\text{伟}}:W_{\text{强}}=5:4$ 。问总数，总数= $W_{\text{伟}}+W_{\text{强}}=9$  的倍数，只有 B 项是 9 的倍数，选择 B 项。

方法二：“小伟单独整理需要 4 小时，小强单独整理需要 5 小时”，感觉像完工时间，但是有工作量的具体单位（小伟比小强多整理 40 本），属于给具体带单位数值型工程问题，用方程法。让小伟整理需要 4 小时、让小强整理需要 5 小时，类比完工时间型，出现具体单位，不能赋值，可以设未知数，设工作总量为  $20x$ ， $P_{\text{伟}}=20x/4=5x$ ， $P_{\text{强}}=20x/5=4x$ 。两人同时整理， $t=W_{\text{总}}/P_{\text{合作}}=20x/(5x+4x)=20/9$  小时，小伟比小强多整理 40 本， $5x*20/9-4x*20/9=40 \rightarrow x*20/9=40$ ，解得  $x=18$ ， $W_{\text{总}}=20x=20*18=360$ ，对应 B 项。【选 B】



【注意】工程问题：

1. 给完工时间型：

- (1) 先赋总量（公倍数）。
- (2) 再算效率=总量/时间。
- (3) 根据工作过程列方程。

2. 给效率比例型：直接给，间接给（比较难，给大家一个经验：出现多个时间，但不是完工时间，可以考虑为间接给效率比例，比如甲 4 天的工作量等于乙 3 天的工作量，4 天、3 天不是完工时间，间接给效率比例， $P_{甲} : P_{乙} = 3 : 4$ ），特殊型。

- (1) 先赋效率（满足比例即可）。
- (2) 再算总量=效率\*时间。
- (3) 根据工作过程列方程。

3. 给具体单位型：设未知数，找等量关系列方程。看效率、工作量的具体单位。出现多个特征，优先用方程法。出现 6 天，不属于给具体单位型。

4. 第三步的列式：

- (1) 按人头  $\rightarrow W_{甲} + W_{乙} + W_{丙} = W_{总}$ ，每个人干的活相加为总量。
- (2) 按时间段（较多）  $\rightarrow W_1 + W_2 + W_3 = W_{总}$ ，每一段的工作量相加为总量。

## 第五节 经济利润问题

### 一、基础经济

#### 1. 基础公式

- (1) 利润=售价-成本
- (2) 利润率=利润/成本
- (3) 售价=成本\*(1+利润率)
- (4) 折扣=折后价/折前价
- (5) 总价=单价\*数量

#### 2. 方法

- (1) 方程法
- (2) 赋值法

### 经济利润

一、常规经济——考得最多（基本公式+常用方法）

二、分段计费——简单

三、函数最值——套路

**【注意】经济利润：**数量关系中的经济利润都是小老板，数据不会特别大，不像资料分析的数据那么大，有几百万、几千万，甚至上亿。

- 1. 常规经济——考的最多（基本公式+常用方法）。考查简单。
- 2. 分段计费——简单，偶尔考。
- 3. 函数最值——套路，隔几年考。

#### 1. 基本公式：

- ①利润=售价-成本
- ②利润率=利润/成本
- ③售价=成本\*(1+利润率)
- ④折后价格=折前价格\*折扣
- ⑤总价=单价\*数量

**【注意】基本公式：**利润和利润率表示盈亏情况。

1. 利润=售价-成本。比如一支口红的成本是 50 元，卖 78 元，利润=78-50=28 元/支。

2. 利润率=利润/成本。利润率=28/50=56%，赚了 56%。赔了 10%，也是利润率，只不过利润率为一个负值。

3. 售价=成本\*（1+利润率）。售价=成本+利润=成本+成本\*利润率=成本（1+利润率）。

4. 折后价格=折前价格\*折扣。原来是 100 元（折前价），打八折后是 100\*80%=80 元（折后价），80%指的是打八折。原来是 120 元，打折后是 100 元，折扣=小的/大的=100/120，折扣都是小于 100%的。

5. 总价=单价\*数量。比如口红每支 78 元，卖了 10 支，则总价=78\*10=780 元。

6. 总利润=单利\*数量。比如口红每支赚 28 元，卖了 10 支，则总利润=28\*10=280 元。

定价和售价：成本和进价

售价=成本\*（1+利润率）

①某商品成本 100 元，按照 20%的利润率定价，则定价为多少元？

②某商品成本 100 元，按照 20%的利润率售卖，则售价为多少元？

③某商品成本 100 元，按照 20%的利润率定价，后又打九折出售，则售价多少元？



【注意】易混淆的概念：

### 1. 定价和售价：

(1) 比如防脱洗发液的定价是 30 元，促销价（售价）是 24 元。定价 $\neq$ 售价。

(2) 有促销时：定价 $\neq$ 售价；无促销时：定价=售价。

### 2. 成本和进价：

(1) 无其他（90%以上的题）。成本=进价。比如去学校门口摆地摊卖口红，所有的成本就是口红的进价。

(2) 有其他。成本=进价+其他。比如租了一个店卖口红，成本除了口红的进价，还有房租、水电费、物流、人工等，房租出现比较多。

### 3. 定价或售价=成本 $\times$ （1+利润率）。

(1) 某商品成本 100 元，按照 20%的利润率定价，则定价为多少元？

答：定价=成本 $\times$ （1+利润率）=100 $\times$ （1+20%）=120 元。

(2) 某商品成本 100 元，按照 20%的利润率售卖，则售价为多少元？

答：售价=成本 $\times$ （1+利润率）=100 $\times$ （1+20%）=120 元。看利润率决定的是谁 $\rightarrow$ 利润率决定了定价，则算出来的是定价；利润率决定了售价，则算出来的是售价。

(3) 某商品成本 100 元，按照 20%的利润率定价，后又打九折出售，则售价多少元？

答：定价=成本 $\times$ （1+利润率）=100 $\times$ （1+20%）=120 元，售价=120 $\times$ 90%=108 元。

## 一、常规经济利润

方法选择：

1. 给具体数值（带单位），套公式/方程法（有等量关系）

**【注意】**常规经济利润：

1. 方法选择：给具体数值（带单位），套公式/方程法（有等量关系）。

2. 具体数值单位：比如 90 元/件、卖了 4 件、一共赚了 200 元。

**【例 1】**（2021 联考）某鲜花店购进一批玫瑰，已知单支玫瑰进价 1 元，按

定价 5 元销售了 70% 后，再以定价的 4 折销售剩余玫瑰，全部售完后共盈利 3100 元。问该花店共购进玫瑰多少支？（ ）

- A. 900                      B. 1000  
C. 1200                    D. 1500

【解析】1. 经济利润问题，出现了具体单位，用方程法。这一批玫瑰花卖了两波，设一共进了  $x$  支。第一波：进价是 1 元/支，“按定价 5 元销售了 70%”，售价是 5 元/支，卖了  $0.7x$  支，每支赚  $5-1=4$  元，利润  $=4 \times 0.7x = 2.8x$  元。第二波：“以定价的 4 折销售剩余玫瑰”，售价是  $5 \times 40\% = 2$  元，还剩  $0.3x$  支，进价还是 1 元/支，每支赚  $2-1=1$  元，利润  $=1 \times 0.3x = 0.3x$  元。“全部售完后共盈利 3100 元”，“共”是非常明显的等量关系， $2.8x + 0.3x = 3100 \rightarrow 3.1x = 3100$ ，解得  $x = 1000$ ，对应 B 项。【选 B】

A. 900  
B. 1000  
C. 1200  
D. 1500

支

| 进价   | 售价   | 量     | 总利润                    |
|------|------|-------|------------------------|
| 1元/支 | 5元/支 | 0.7x支 | $4 \times 0.7x = 2.8x$ |
| 1元/支 | 2元/支 | 0.3x支 | $1 \times 0.3x = 0.3x$ |

$2.8x + 0.3x = 3100$   
 $3.1x = 3100$   
 $x = 1000$

【例 2】（2021 浙江公务员）超市采购一批食用油，其中玉米油每桶进价比花生油低 20%。若花生油利润定为进价的 24%，玉米油利润定为进价的 30%，则花生油比玉米油每桶售价高 10 元。问玉米油每桶比花生油进价低多少元？（ ）

- A. 10                      B. 15  
C. 24                      D. 25

【解析】2. 经济利润问题，出现多个主体，考虑列表。出现具体的数值单位（10 元），用方程法。“玉米油每桶进价比花生油低 20%”，通常设“比”字之后的主体，设花生油进价为  $x$ ，则玉米油进价为  $x \times (1-20\%) = 0.8x$ 。“若花生油利润定为进价的 24%，玉米油利润定为进价的 30%”，则花生油利润为  $x \times 24\% = 0.24x$ ，玉米油利润为  $0.8x \times 30\% = 0.24x$ 。



方法一：花生油、玉米油的利润相同，“花生油比玉米油每桶售价高 10 元”，进价+利润=售价，说明花生油进价高 10 元，则玉米油进价比花生油进价低 10 元，对应 A 项。

方法二：花生油售价= $x+0.24x=1.24x$ ，玉米油售价= $0.8x+0.24x=1.04x$ 。“花生油比玉米油每桶售价高 10 元”，列式： $1.24x-1.04x=10 \rightarrow 0.2x=10$ ，解得  $x=50$ 。花生油进价是 50 元，玉米油进价是  $0.8 \times 50=40$  元，玉米油进价比花生油进价低 10 元，对应 A 项。【选 A】

$$\begin{array}{lcl}
 & \text{进价} + \text{利润} & = \text{售价} \\
 \text{花生油} & 50x + 0.24x & = 1.24x \\
 \text{玉米油} & 40x + 0.24x & = 1.04x \\
 & 1.24x - 1.04x & = 10 \\
 & 0.2x & = 10 \\
 & x & = 50
 \end{array}$$

高 10 元

## 2. 给比例求比例的经济利润问题：赋值法

### ①只提到钱：赋成本

例：某商品按照 20%利润率定价，后来又打 9 折销售，此时每件商品的利润率是多少？

【注意】给比例求比例的经济利润问题：赋值法。

1. 赋值法：在一个经济利润问题中，给的都是比例（分数、百分数、比例、倍数），求的也是比例，用赋值法。

2. 只提到钱：赋成本。

3. 例：某商品按照 20%利润率定价，后来又打 9 折销售，此时每件商品的利润率是多少？

答：给比例（20%、9 折）求比例（利润率），用赋值法。一切商业行为或经济行为的源头都来自于成本，通常赋值成本。都是百分数，赋值 100 好算，赋成本是 100，“按照 20%利润率定价”，则定价= $100 \times (1+20\%)=120$  元；“打 9 折销售”，则售价是  $120 \times 90\%=108$  元，利润是  $108-100=8$  元，利润率=利润/成本

$=8/100=8\%$ 。

【例 3】(2020 广东选调)商场销售某种型号的冰箱,上半年的利润率为 20%,由于下半年的进货价格下降 10%,商场决定适当下调销售价格,但调整后下半年的利润率仍然达到了 24%。则同上半年相比,下半年的销售价格降低了( )。

- A. 5%  
B. 6%  
C. 7%  
D. 8%

【解析】3. 给比例求比例的经济利润问题,用赋值法。通常赋值成本,有百分数,赋值 100 好算,赋值成本为 100 元。出现多个时间段,列表分析。上半年:成本为 100,利润率为 20%,售价=成本 $\times$ (1+利润率)= $100\times(1+20\%)=120$ 。下半年:“下半年的进货价格下降 10%”,成本为 90,利润率为 24%,售价=成本 $\times$ (1+利润率)= $90\times(1+24\%)=111.6$ 。问同上半年相比,下半年的销售价格降低了百分之多少,求增长率,现在是 111.6,过去是 120,下降了 8.4,  $r=(\text{现期}-\text{基期})/\text{基期}=(111.6-120)/120=-8.4/120=-7\%$ ,下降了 7%,对应 C 项。【选 C】

比,下半年的销售价格降低了( )。

- A. 5%  
B. 6%  
C. 7%  
D. 8%

赋值成本 = 100 元

|     | 成本  | 利润率 | 售价                           |
|-----|-----|-----|------------------------------|
| 上半年 | 100 | 20% | $100 \times (1+20\%) = 120$  |
| 下半年 | 90  | 24% | $90 \times (1+24\%) = 111.6$ |

成本下降 10%  
 $r = \frac{111.6 - 120}{120} = -7\%$

售价 = 成本  $\times$  (1 + 利润率)

【例 4】(2020 河南)某商场购进一批空调,按进价的 40%作为利润来定价,当售出这批空调的 80%后,该商场将剩下的空调以定价的八折销售。若这批空调全部售出,则可获利( )。

- A. 28%  
B. 34.4%  
C. 36.8%  
D. 39%

【解析】4. 给比例求比例的经济利润问题,用赋值法。赋成本为 100 元/台,

“当售出这批空调的 80%后”，涉及数量，可以再赋值一个，赋值总量为 10 台。  
 前 80%：成本为 100 元/台，“按进价的 40%作为利润来定”，利润率为 40%，定价  
 $= \text{成本} \times (1 + \text{利润率}) = 100 \times (1 + 40\%) = 140$  元/台，单件利润  $= 140 - 100 = 40$  元/台；  
 “当售出这批空调的 80%后”，销量  $= 10 \times 80\% = 8$  台，总利润  $= 40 \times 8 = 320$  元。剩 20%：  
 销量为 2 台，“将剩下的空调以定价的八折销”，定价  $= 140 \times 80\% = 112$  元/台，成本  
 为 100 元/台，单件利润  $= 112 - 100 = 12$  元/台，总利润  $= 12 \times 2 = 24$  元。求这批空调的  
 利润率，利润率  $= \text{总利润} / \text{总成本} = (320 + 24) / (100 \times 10) = 344 / 1000 = 34.4\%$ ，对  
 应 B 项。【选 B】

|         |      |     |     |                               |       |    |      |
|---------|------|-----|-----|-------------------------------|-------|----|------|
|         |      | 成本  | 利润率 | 定价                            | 单件利润  | 销量 | 总利润  |
| B.34.4% | 前80% | 100 | 40% | $100 \times (1 + 40\%) = 140$ | 40元/台 | 8台 | 320元 |
| C.36.8% | 剩20% | 100 |     | $140 \times 80\% = 112$       | 12元/台 | 2台 | 24元  |
| D.39%   |      |     |     |                               |       |    |      |

10台 → 前80% → 8台  
 10台 → 剩20% → 2台

这批空调 = 100元/台  
 总量 = 10台

这批利润率  $= \frac{\text{这批利润}}{\text{这批成本}} = \frac{344}{100 \times 10} = 34.4\%$

【注意】本题用了两个公式：定价  $= \text{成本} \times (1 + \text{利润率})$ ，总利润  $= \text{单件利润} \times \text{销量}$ ，第一个公式是对成本赋值，第二个公式是对销量赋值，相当于两个三量关系各挑一个量赋值，这是可以的。如果销量用未知数表述，最后是可以约掉的。

【总结】给比例求比例经济利润问题，赋值法

【例 3】（2018 四川）春节假期，某产品的利润率为 98%，春节后，该产品成本提高但售价不变，使得利润率降为 80%，则该产品成本提高的百分比为（ ）。

- A. 10%
- B. 15%
- C. 20%
- D. 5%

【例 4】（2020 河南）某商场购进一批空调，按进价的 40%作为利润来定价，当售出这批空调的 80%后，该商场将剩下的空调以定价的八折销售。若这批空调全部售出，则可获利（ ）。

- A. 28%
- B. 34.4%

C. 36.8%

D. 39%

【注意】给比例求比例经济利润问题，赋值法。

1. 例 3：只提钱，赋成本为 100 元。

2. 例 4：既提钱，又提量，赋两个，赋成本为 100 元，赋总量为 10 个。

3. 例 4 改题：“当售出这批空调的  $\frac{2}{3}$  后，剩下的打八折销售”， $\frac{2}{3}$  也是分数，可以赋值，赋值总量为 10 不好算，赋总量为 3 台，第一波卖 2 台，第二波卖 1 台。

## 二、分段计费

### 1. 题型判定

生活中的水电费、出租车计费、税费等，每段计费标准不同

### 2. 计算方法

按标准，分开；计算后，汇总

在生活中，水电费、出租车计费等，每段计费标准不等。

问：在不同收费标准下，一共需要的费用？

计算方法：

①先按标准分开看

②计算之后再汇总

【引例】某地出租车收费标准为：3 公里内起步价 8 元；超出 3 公里的部分，每公里 2 元。小明打车坐了 12 公里，共花费多少钱？

【注意】分段计费：与生活的紧密度较高，联考考查过洗车充值卡、商场购物。

1. 在生活中，水电费、出租车计费等，每段计费标准不等。问：在不同收费标准下，一共需要的费用？

2. 计算方法：

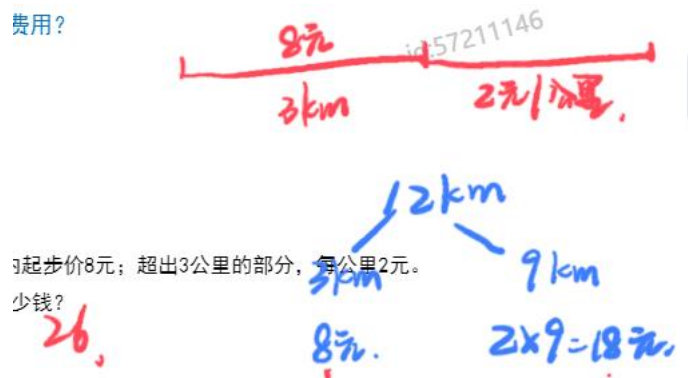
（1）先按标准分开看。

（2）计算之后再汇总。

3. 引例：某地出租车收费标准为：3 公里内起步价 8 元；超出 3 公里的部分，

每公里 2 元。小明打车坐了 12 公里，共花费多少钱？

答：3 公里内起步价是 8 元，超出 3 公里的部分是每公里 2 元。小明打车坐了 12 公里，先分开看，前面 3 公里→起步价 8 元，超出 9 公里→每公里 2 元， $9 \times 2 = 18$  元；再汇总， $8 + 18 = 26$  元。



【例 5】（2019 天津）某城市居民用水价格为：每户每月不超过 5 吨的部分按 4 元/吨收取；超过 5 吨、不超过 10 吨的部分按 6 元/吨收取；超过 10 吨的部分按 8 元/吨收取。某户居民两个月共交水费 108 元，则该户居民这两个月用水总量最多为（ ）吨。

- A. 21                                      B. 24
- C. 17.25                                    D. 21.33

【解析】5. 分段计费，0~5 吨（第一阶梯）：4 元/吨，5~10 吨（第二阶梯）：6 元/吨，超过 10 吨部分（第三阶梯）：8 元/吨。“某户居民两个月共交水费 108 元”，钱是一定的，要多用水，挑便宜的用。第一阶梯：两个月都用完这 5 吨， $(5+5) \times 4 = 40$  元；第二阶梯：两个月都用完这 5 吨， $(5+5) \times 6 = 60$  元；一共 108 元，已经用了 100 元，还剩 8 元，在第三阶梯用，两个月一共用了 1 吨，不需要分析是第一个月 1 吨、第二个月 0 吨或者第一个月 0 吨、第二个月 1 吨。所求  $= 5 + 5 + 5 + 5 + 1 = 21$  吨，对应 A 项。【选 A】



### 三、函数最值

#### 1. 题型判定

单价和销量此消彼长，问何时总价或总利润最高

#### 2. 计算方法（两点式）

（1）设提价或降价次数为  $x$ ，列出总价或总利润的函数表达式

（2）令函数值为 0，解得  $x_1$ 、 $x_2$

（3）当  $x = (x_1 + x_2) / 2$  时，总价或总利润取得最值

### 函数最值

（1）题型特征：单价（单利）和销量此消彼长，问何时总销售额/总利润最高？

【引例】单价为 300 元，可卖出 16 件。若单价每提升 30 元，销量会降低 1 件。请问当提价多少次时，销售总额最高？

（2）计算方法（两点式）：

①设提价或降价次数为  $x$ ，总价或总利润 = ( ) \* ( )

②总价或总利润为 0，解得  $x_1$ 、 $x_2$ ，让两个括号分别为 0

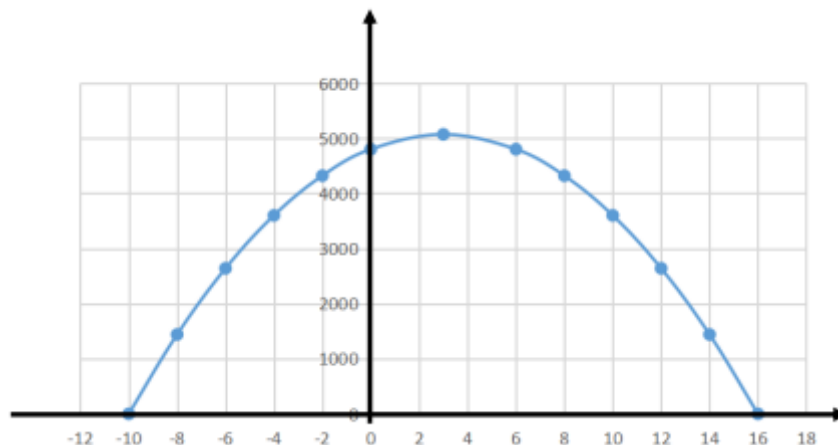
③当  $x = (x_1 + x_2) / 2$  时，取得最值

【引例】单价为 300 元，可卖出 16 件。若单价每提升 30 元，销量会降低 1 件。请问当提价多少次时，销售总额最高？

①设提价次数为  $x$ ，总价 =  $(300 + 30x)(16 - x)$

②令总价为 0，解得  $x_1$ 、 $x_2$ ；

③当  $x = (x_1 + x_2) / 2$  时，取得最值。



【注意】函数最值：

1. 题型特征：单价（单利）和销量此消彼长，问何时总销售额/总利润最高？

记忆：钱和量此消彼长，问何时取最值。比如超市卖东西，价格下降，量就上涨，价格上升，量就下降。

2. 计算方法（两点式）：

（1）设提价或降价次数为  $x$ （具体要看题干），总价或总利润 = ( ) \* ( )。

总价或总利润表示哪一个需要看题干的问题。

（2）令总价或为 0，解得  $x_1$ 、 $x_2$ ，让两个括号分别为 0。

（3）当  $x = (x_1 + x_2) / 2$  时，取得最值。

3. 引例：单价为 300 元，可卖出 16 件。若单价每提升 30 元，销量会降低 1 件。请问当提价多少次时，销售总额最高？

答：钱和量此消彼长，问何时取最值，函数最值问题。设提价  $x$  次，问销售总额最高，总价 = 单价 \* 销量。原来单价是 300 元、销量是 16 件，再填上  $x$  的变动，提价 1 次单价涨 30 元，提价 2 次单价涨  $2 * 30$  元，提价 3 次单价涨  $3 * 30$  元，提价  $x$  次单价涨  $30x$  元；提价 1 次数量降 1 件，提价 2 次数量降 2 件，提价 3 次数量降 3 件，提价  $x$  次数量降  $x$  件，总价 =  $(300 + 30x) * (16 - x)$ 。令两个括号分别为 0， $300 + 30x = 0$ ，解得  $x_1 = -10$ ； $16 - x = 0$ ，解得  $x_2 = 16$ 。当  $x = (x_1 + x_2) / 2 = (-10 + 16) / 2 = 3$  时取得最值。

4. 原理：总价 =  $(300 + 30x)(16 - x)$ ，是一个一元二次函数，函数图像是开口向下的抛物线。 $x$  轴表示提价次数， $y$  轴表示总价。问提价多少次时销售总额最高，销售总额最高点位于抛物线对称轴上取到  $\rightarrow x = 3$ 。 $300 + 30x = 0$ 、 $16 - x = 0$ ，解得  $x_1 = -10$ 、 $x_2 = 16$ ， $x$  取  $x_1$  和  $x_2$  的中点时，即  $x = (-10 + 16) / 2 = 3$  时取得最值。可以

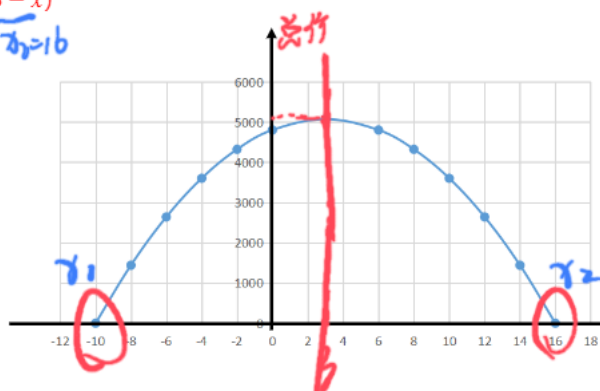
用  $x = -b/(2a)$ 、韦达定理，但是这些方法都是麻烦的，前提是把方程整理为  $ax^2 + bx + c$ ，会慢一些。

① 设提价次数为  $x$ ，总价 =  $(300 + 30x)(16 - x)$

② 令总价为 0，解得  $x_1, x_2$ ； $x_1 = -10$   $x_2 = 16$

③ 当  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  时，取得最值。

id:57211146



【例 6】（2022 湖北公务员）北京冬奥会期间，冬奥会吉祥物“冰墩墩”纪念品十分畅销。销售期间某商家发现，进价为每个 40 元的“冰墩墩”，当售价定为 44 元时，每天可售出 300 个，售价每上涨 1 元，每天销量减少 10 个。现商家决定提价销售，若要使销售利润达到最大，则售价应为（ ）。

- A. 51 元
- B. 52 元
- C. 54 元
- D. 57 元

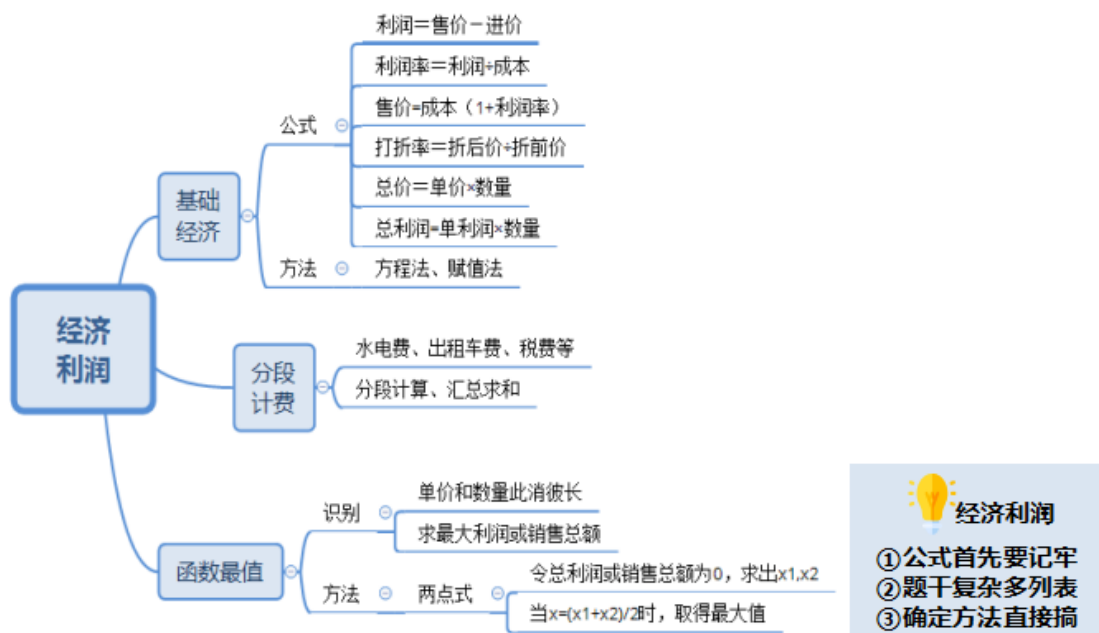
【解析】6. 单利 =  $44 - 40 = 4$  元。钱和量此消彼长，问何时取最值，函数最值问题。“现商家决定提价销售”，设提价  $x$  次，问销售利润最大，表示总利润，总利润 = 单利 \* 销量。原来单利是 4 元、销量是 300 个，把  $x$  的变动放进去，提价 1 次单利涨 1 元，提价 2 次单利涨 2 元，提价  $x$  次单利涨  $x$  元；提价 1 次减少 10 个，提价  $x$  次减少  $10x$  个，总利润 =  $(4 + x) * (300 - 10x)$ 。令两括号分别为 0， $4 + x = 0$ ，解得  $x_1 = -4$ ； $300 - 10x = 0$ ，解得  $x_2 = 30$ 。当  $x = (30 - 4) / 2 = 26 / 2 = 13$  时取得最值。问售价，提价 13 次，每次涨 1 元，售价 =  $44 + 13 = 57$  元，对应 D 项。【选 D】

### 【注意】

1. 列方程：总价或总利润 = （ ） \* （ ）。
  - （1）令总价/总利润为 0，解得  $x_1, x_2$ 。
  - （2）当  $x = (x_1 + x_2) / 2$  时，取得最值。
2. 改题：要使总销售额最高。



答：总销售额最高，要表示总价，总价=单价\*销量=  $(44+x)(300-10x)$ 。



【注意】经济利润：

1. 基础经济：考查最多，其中方程法考查最多。
2. 分段计费：偶尔考查，比较容易。
3. 函数最值：偶尔考查，比较容易。

| 识别（题干节选）                         | 具体题型             | 所用方法       |
|----------------------------------|------------------|------------|
| 1. 某工程甲、乙单独完成分别需要6h、8h.....      | a. 给完工时间型工程问题    | 赋P、算W、列式   |
| 2. 完成某工程、甲乙效率之比为3:5.....         | b. 给效率比例型工程问题    | 赋W、算P、列式   |
| 3. 甲6天完成的工作量和乙4天完成的相等.....       | c. 给具体数值单位工程问题   | 方程法        |
| 4. 某工厂60名工人生产汽车零配件.....          | d. 给具体数值的经济利润问题  | 赋成本        |
| 5. 某工厂要生产400盒布洛芬，每天生产100盒.....   | e. 给比例求比例的经济利润问题 | 赋成本、赋销量    |
| 6. 甲商品4元/件.....则甲的利润为多少元         | f. 函数最值问题        | 设次数x，两点式求解 |
| 7. 甲商品按照20%利润率定价，销售了10%.....( )% |                  |            |
| 8. 甲商品降价20%销售.....( )%           |                  |            |
| 9. 单价每张1元，销量下降4件.....总利润最大       |                  |            |

【注意】

1. 连线：识别（题干节选）→具体题型→所用方法。

（1）某工程甲、乙单独完成分别需要 6h、8h……→给完工时间型工程问题（连 a）→赋 W、算 P、列式。

(2) 完成某工程、甲乙效率之比为 3: 5……→给效率比例型工程问题（连 b，直接给效率比例）→赋 P、算 W、列式。

(3) 甲 6 天完成的工作量和乙 4 天完成的相等……→给效率比例型工程问题（连 b，间接给效率比例， $P_{甲}: P_{乙}=4: 6$ ）→赋 P、算 W、列式。

(4) 60 名工人生产汽车零配件……→给效率比例型工程问题（连 b，特殊给效率比例）→赋 P（赋每个人的效率为 1）、算 W、列式。

(5) 某工厂要生产 400 盒布洛芬，每天生产 100 盒……→给具体数值单位型工程问题（连 c，给工作量或效率的具体数值单位）→方程法。a、b、c 同时出现，优先 c。

(6) 甲商品 4 元/件……，则甲的利润为多少元→给具体数值的经济利润问题（连 d）→方程法。

(7) 甲商品按照 20%利润率定价，销售了 10%……（ ）%→给比例求比例的经济利润问题（连 e）→赋成本、赋销量（既提钱，又提量，赋两个）。

(8) 甲商品降价 20%销售……（ ）%→给比例求比例的经济利润问题（连 e）→赋成本（只提钱，赋一个）。

(9) 单价每涨 1 元，销量下降 4 件……总利润最大→函数最值问题（连 f）→设次数 x、两点式求解。

| 识别（题干节选）                                 | 具体题型             | 所用方法        |
|--|------------------|-------------|
| 1. 某工程甲、乙单独完成分别需要 6h、8h……                | a. 给完工时间型工程问题    | 赋 P、算 W、列式  |
| 2. 完成某工程、甲乙效率之比为 3:5……<br><i>有</i>       | b. 给效率比例型工程问题    | 赋 W、算 P、列式  |
| 3. 甲 6 天完成的工作量和乙 4 天完成的相等……<br><i>间接</i> | b. 给效率比例型工程问题    | 赋 W、算 P、列式  |
| 4. 某工厂 60 名工人生产汽车零配件……<br><i>特殊</i>      | c. 给具体数值单位工程问题   | 方程法         |
| 5. 某工厂要生产 400 盒布洛芬，每天生产 100 盒……          | c. 给具体数值单位工程问题   | 方程法         |
| 6. 甲商品 4 元/件……则甲的利润为多少元                  | d. 给具体数值的经济利润问题  | 赋成本 8       |
| 7. 甲商品按照 20%利润率定价，销售了 10%……（ ）%          | e. 给比例求比例的经济利润问题 | 赋成本、赋销量 7   |
| 8. 甲商品降价 20%销售……（ ）%                     | e. 给比例求比例的经济利润问题 | 赋成本、赋销量 7   |
| 9. 单价每涨 1 元，销量下降 4 件……总利润最大              | f. 函数最值问题        | 设次数 x，两点式求解 |

## 2. 方法：

(1) 赋值法：给比例求比例的经济利润问题、给完工时间型工程问题、给效率比例型工程问题。

(2) 方程法：给具体数值单位型工程问题、给具体数值的经济利润问题。

太阳下山有月光，月光消散是朝阳

**【答案汇总】**

工程问题 1-5: BCADA; 6: A

经济利润问题 1-5: BACBA; 6: D

遇见不一样的自己

Be your better self