時間序列分析

第三章：平穩時間序列分析

主講老師：江愷瑤

第三章：平穩時間序列分析

第2講：AR模型的平穩性

目錄

隨機時間序列模型

ARMA模型

- **隨機時間序列模型**是指僅用它的過去值及隨機擾動項所建立起來的模型，其一般形式爲

$$x_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, \mu_t)$$

- 建立具體的時間序列模型需解決如下三個問題

1. 模型的具體形式
2. 時序變量的滯後期
3. 隨機擾動項的結構

ARMA模型

- 例如：
- 銀行的存款與利率關係，取綫性方程、一期滯後以及白噪聲隨機擾動($\mu_t = \varepsilon_t$)，模型將是一個**1階自回歸過程AR(1)**：

$$\boldsymbol{x_t = \varphi x_{t-1} + \varepsilon_t}$$

- 其中，ε_t指白噪聲。

ARMA模型

- 在時間序列的統計分析中，平穩序列是一類重要的隨機序列。在這方面已經有了比較成熟的理論知識，最常用的是 ARMA（Autoregressive Moving Average）序列。
- 用 ARMA 模型去近似地描述動態數據在實際應用中有許多優點：
  1. 它是綫性模型，只要給出少量參數就可完全確定模型形式
  2. 便于分析數據的結構和內在性質
  3. 便于在最小方差意義下進行最佳預測和控制

ARMA模型

- AR 模型（Aut

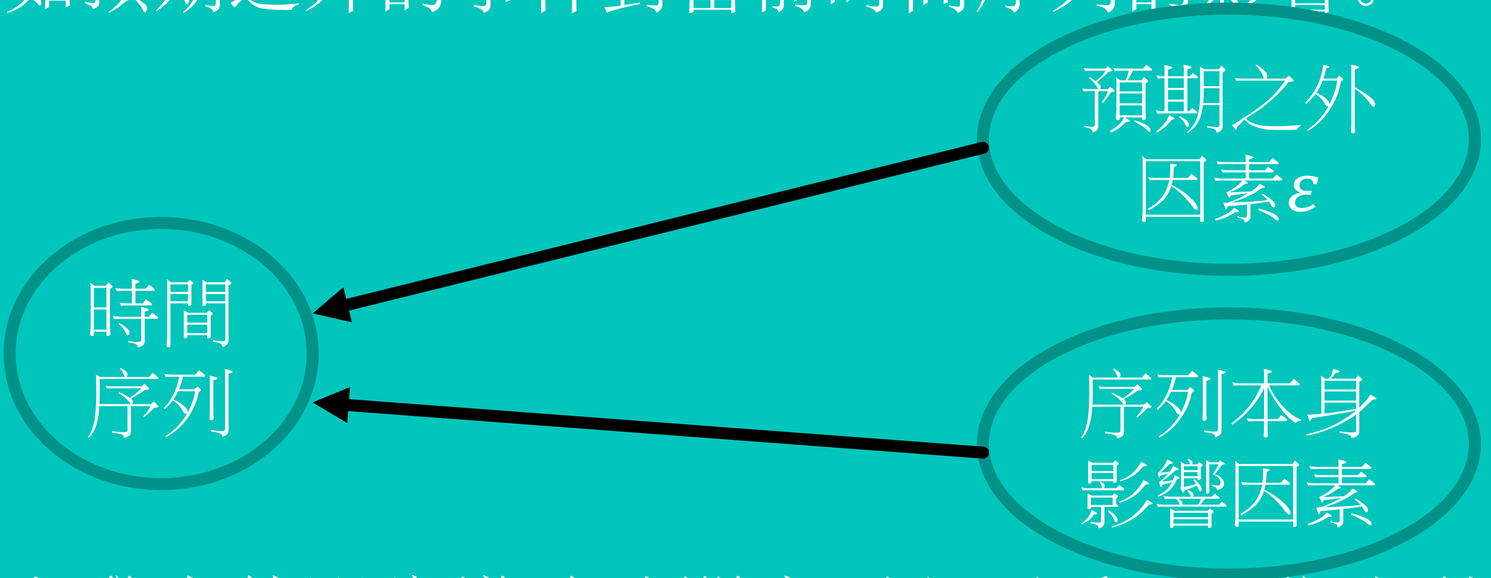
x

- MA 模型（M

- ARMA 模型（

$x_t = \phi_0 + \phi_1$

在金融領域當中有很多衝擊效應現象存在，例如預期之外的事件對當前時間序列的影響。



突發事件影響導致時間序列主要受到預期之外因素的影響。比如：疫情導致澳門出入境人數的波動情況。

AR模型

AR模型

- 具有以下結構的模型稱為**p階自回歸模型AR(p)**

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\ \phi_p \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ E(x_s \varepsilon_t) = 0, \forall s < t \end{cases}$$

書寫時一般會缺省限制條件，只寫1式。

- 三個限制條件：

✓ 2式保證模型最高階數為p

✓ 3式保證隨機干擾序列$\{\varepsilon_t\}$為零均值白噪聲序列

✓ 4式保證了當前隨機干擾與過去序列值無關

AR模型

- 當$\phi_0 = 0$時，稱為中心化AR(p)模型。

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

- 非中心化AR(p)模型可透過下面變換轉化為**中心化AR(p)**模型：

$$\mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}, y_t = x_t - \mu$$

- 則$\{y_t\}$為$\{x_t\}$的中心化序列。

- 今後在分析AR(p)模型的性質時，一般會簡化為中心化模型再進行分析。

AR模型

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

- 引入延遲算子B，中心化AR(p)模型可以簡記為：

$$\Phi(B)x_t = \varepsilon_t$$

- 其中$\Phi(B)$稱**p階自回歸系數多項式**：

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

AR模型平穩性判別

AR模型平穩性判別

○模型平穩性的定義

如果模型生成的時間序列是平穩的，就說該模型是平穩的否則，就說該模型是非平穩的。

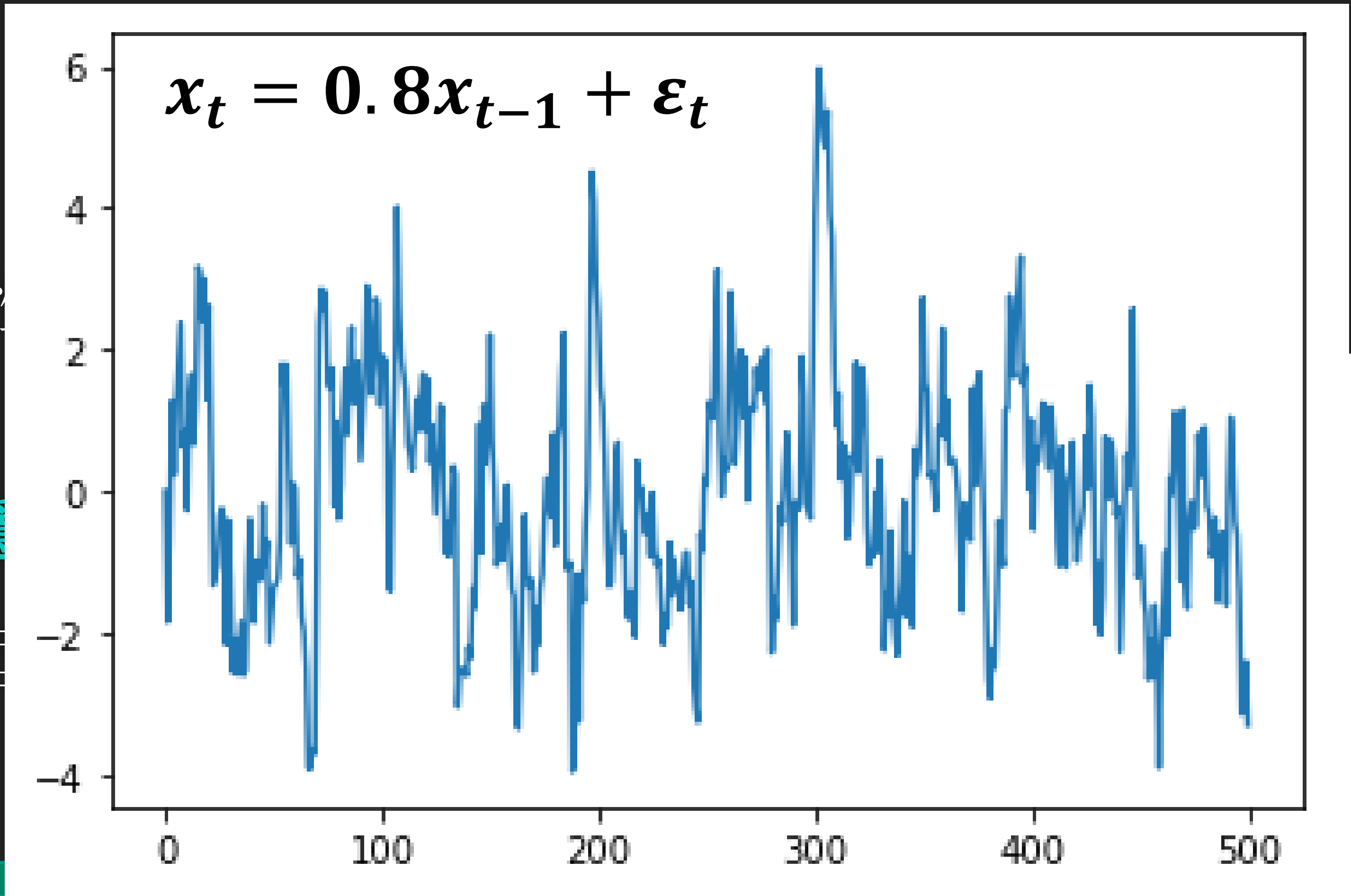
○模型平穩性的判定

隨機時間序列模型的平穩性

平穩性來判斷。

○模型平穩性和時間序列平穩

模型平穩則對應的滿足模型



AR模型平穩性判別

判別原因

- 目的是找到一個合理的模型來分析平穩時間序列數據。
- AR 、 MA 及 ARMA 模型都是常用的平穩序列的擬合模型，但**并非所有 AR 、 MA及 ARMA 模型都是平穩的**。
- 模型平穩，其生成序列也平穩。

討論

- AR模型是常用的平穩序列擬合模型之一，但並非所有AR模型都是平穩的。

- **以下AR模型是否平穩？**

① $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

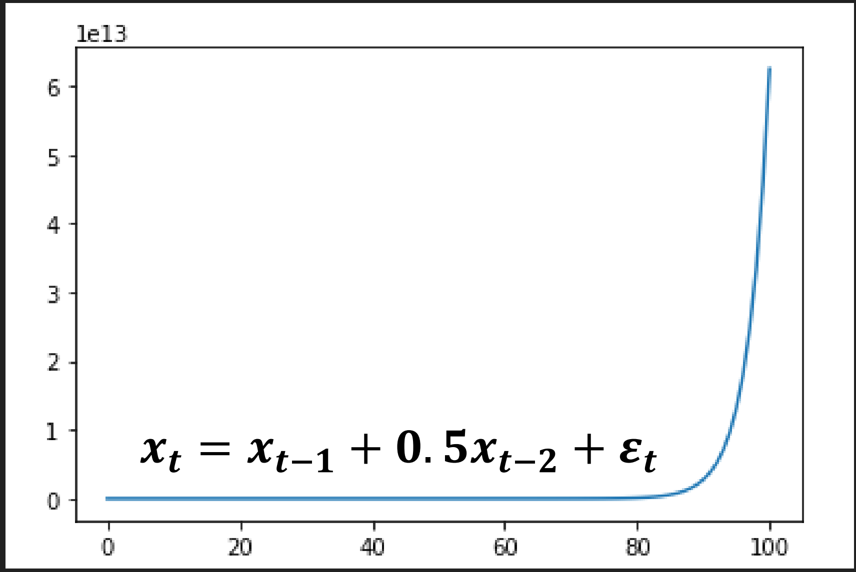
② $x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$

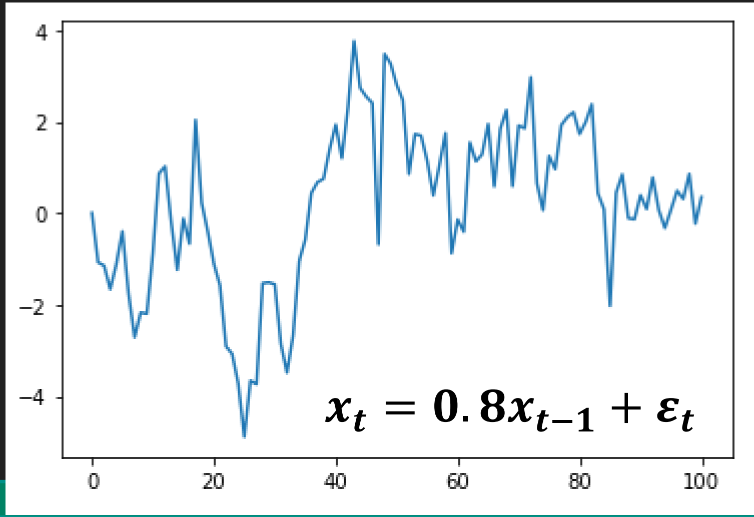
③ $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

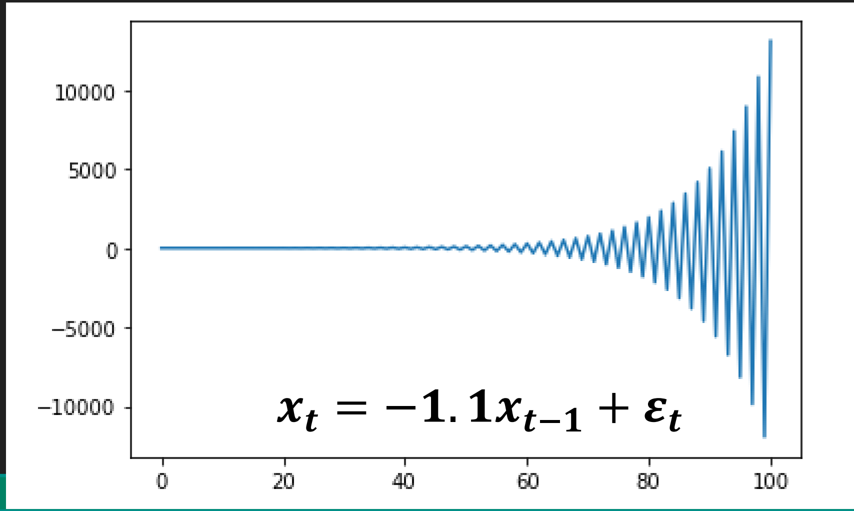
④ $x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

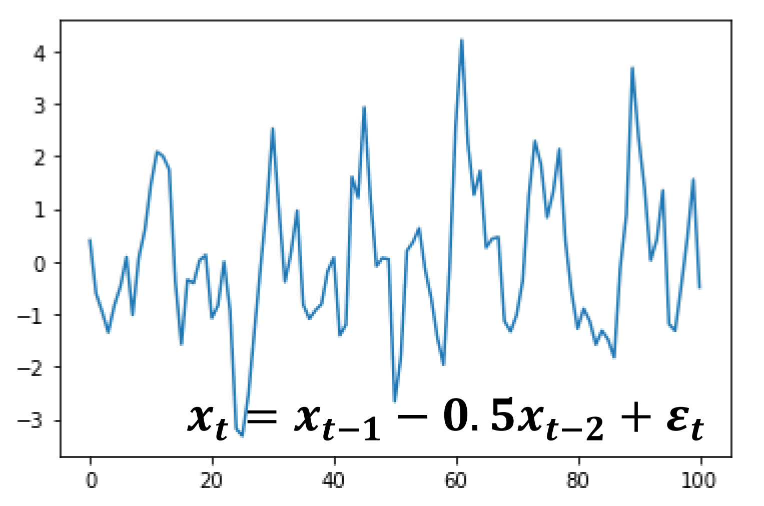
討論ARstationary_example.ipynb

- 圖示法：時序圖、自相關圖（粗糙直觀的判別方法）
- 准確的判別方法：特徵根判別和平穩域判別









AR模型平穩性判別：特徵根判別

特徵根判別

- 任一中心化AR(p)模型$\Phi(B)x_t = \varepsilon_t$都可視一個非齊次線性差分方程：

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \cdots - \phi_p x_{t-p} = \varepsilon_t$$

- 其通解為$x_t = x_t' + x_t''$

線性差分方程定義

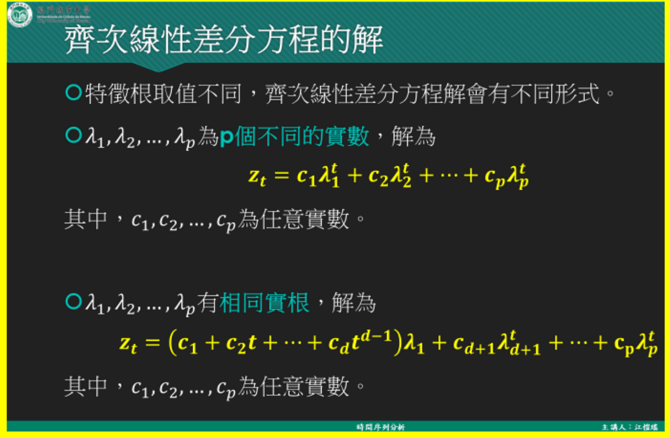
- 以下形式的方程為序列$\{z_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$的**線性差分方程**：

$$z_t + a_1 z_{t-1} + a_2 z_{t-2} + \cdots + a_p z_{t-p} = h(t)$$

式中，$p \geq 1$，$a_1, a_2, \ldots, a_p$為實數，$h(t)$為t的已函數。

CH3-1課件

特徵根判別


齊次線性差分方程的解

- 特徵根取值不同，齊次線性差分方程解會有不同形式。
- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$為**p個不同的實數**，解為

$$z_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \cdots + c_p\lambda_p^t$$

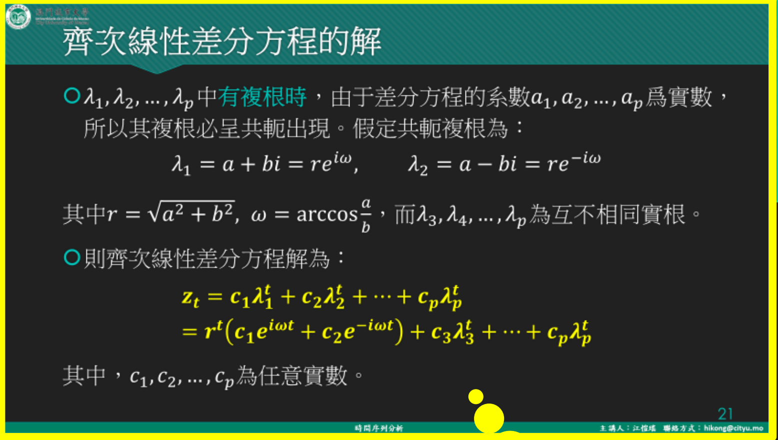
其中，$c_1, c_2, \dots, c_p$為任意實數。

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$有**相同實根**，解為

$$z_t = \left(c_1 + c_2 t + \cdots + c_d t^{d-1}\right)\lambda_1 + c_{d+1}\lambda_{d+1}^t + \cdots + c_p\lambda_p^t$$

其中，$c_1, c_2, \dots, c_p$為任意實數。

時間序列分析 主講人：江愷瑤


齊次線性差分方程的解

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$中**有複根時**，由于差分方程的系數$a_1, a_2, \dots, a_p$爲實數，所以其複根必呈共軛出現。假定共軛複根為：

$$\lambda_1 = a + bi = re^{i\omega}, \qquad \lambda_2 = a - bi = re^{-i\omega}$$

其中$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \omega = \arccos\frac{a}{b}$，而$\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_p$為互不相同實根。

- 則齊次線性差分方程解為：

$$\begin{aligned} z_t &= c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \cdots + c_p\lambda_p^t \\ &= r^t\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right) + c_3\lambda_3^t + \cdots + c_p\lambda_p^t \end{aligned}$$

其中，$c_1, c_2, \dots, c_p$為任意實數。

21

時間序列分析 主講人：江愷瑤 聯絡方式：hikong@cityu.mo

CH3-1課件

- 齊次線性差分方程通解x_t'

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_d$為d個相等實根

$\lambda_{d+1}, \dots, \lambda_{p-2m}$為p-d-2m個互不等實根

$\lambda_{j1} = r_j e^{i\omega_j}, \lambda_{j2} = r_j e^{-i\omega_j}\ (j = 1, \dots, m)$為m對共軛複根

則

$$x_t' = \sum_{j=1}^{d} c_j t^{j-1}\lambda_1^t + \sum_{j=d+1}^{p-2m} c_j\lambda_j^t + \sum_{j=1}^{m} r_j^t\left(c_{1j}\cos\omega_j t + c_{2j}\sin\omega_j t\right)$$

其中$c_1, \dots, c_p, c_{1j}, c_{2j}(j = 1, \dots, m)$為任意實數。

特徵根判別

CH3-1課件

$$z_t + a_1 z_{t-1} + a_2 z_{t-2} + \cdots + a_p z_{t-p} = 0$$

- 齊次線性差分方程求解需要借助特徵方程和特徵根
- 特徵方程：

$$\lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + a_2 \lambda^{p-2} + \cdots + a_p = 0$$

- 非齊次線性差分方程特解x_t''

可證明AR(p)模型的自回歸系數多項式$\Phi(u) = 0$的根是齊次線性差分方程$\Phi(B)x_t = 0$的特徵根的倒數。

$$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \cdots - \phi_p x_{t-p} = \varepsilon_t$$

設$\lambda_1, \dots, \lambda_p$是$\Phi(B)x_t = 0$的p個特徵根，任取$\lambda_i(i \in (1,2, \dots p))$代入特徵方程有：

$$\lambda_i^p - \phi_1 \lambda_i^{p-1} - \cdots - \phi_p = 0$$

令$u_i = \frac{1}{\lambda_i}$代入$\Phi(u) = 0$有：

$$\Phi(u_i) = 1 - \phi_1 \frac{1}{\lambda_i} - \cdots - \phi_p \frac{1}{\lambda_i^p} = \frac{1}{\lambda_i^p}\left[\lambda_i^p - \phi_1 \lambda_i^{p-1} - \cdots - \phi_p\right] = 0$$

證畢。

特徵根判別

任找一個x_t''使得
$\Phi(B)x_t'' = \varepsilon_t$

- 非齊次線性差分方程特解x_t''

AR(p)模型的自回歸系數多項式$\Phi(u) = 0$的根是齊次線性差分方程$\Phi(B)x_t = 0$的特徵根的倒數。因此，$\Phi(B)$可以因子分解成

$$\Phi(B) = \prod_{i=1}^{p}(1 - \lambda_i B)$$

由此得到

$$x_t'' = \frac{\varepsilon_t}{\Phi(B)} = \frac{\varepsilon_t}{\prod_{i=1}^{p}(1 - \lambda_i B)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{1 - \lambda_i B}\varepsilon_t$$

$k_i(i = 1,2, \ldots, p)$為常數。

$$\frac{1}{(1+x)(2-x)} = \frac{1/3}{1+x} + \frac{1/3}{2-x}$$

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{p}(1 - \lambda_i B)} = \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{1 - \lambda_i B}$$

特徵根判別

- 非齊次線性差分方程通解x_t

$$x_t = x_t' + x_t'' =$$

$$\sum_{j=1}^{d} c_j t^{j-1} \lambda_1^t + \sum_{j=d+1}^{p-2m} c_j \lambda_j^t + \sum_{j=1}^{m} r_j^t (c_{1j} \cos \omega_j t + c_{2j} \sin \omega_j t) + \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{1-\lambda_i B} \varepsilon_t$$

特徵根判別

- 非齊次線性差分方程通解$x_t =$

$$\sum_{j=1}^{d} c_j t^{j-1}\lambda_1^t + \sum_{j=d+1}^{p-2m} c_j\lambda_j^t + \sum_{j=1}^{m} r_j^t(c_{1j}\cos\omega_j t + c_{2j}\sin\omega_j t) + \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{1-\lambda_i B}\varepsilon_t$$

- 要得到中心化AR(p)模型平穩，要求對任意實數$c_1, \dots, c_p, c_{1j}, c_{2j}(j = 1, \dots, m)$有$\lim_{t\to\infty} x_t = 0$，成立時有

$$|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, p - 2m$$

$$|r_i| < 1, i = 1, 2, \dots, m$$

- **AR(p)模型平穩充要條件是AR(p)的p個特徵根都在單位圓內。**

特徵根判別

- AR(p)模型的自回歸系數多項式$\Phi(u)=0$的根u_i是齊次線性差分方程$\Phi(B)x_t=0$的特徵根λ_i的倒數。即$u_i=\frac{1}{\lambda_i}$

$$\Updownarrow$$

- AR(p)模型平穩充要條件是AR(p)的p個**特徵根λ_i都在單位圓內**。
- AR(p)模型平穩充要條件是AR(p)模型的**自回歸系數多項式$\Phi(u)=0$的根u_i都在單位圓外**。

AR模型平穩性判別：平穩域判別

特徵根判別

λ_i, r_i取值受
$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$影響著

$x_t - \phi_1 x_{t-1} - \cdots - \phi_p x_{t-p} = \varepsilon_t$

- 非齊次線性差分方程通解$x_t =$

$$\sum_{j=1}^{d} c_j t^{j-1} \lambda_1^t + \sum_{j=d+1}^{p-2m} c_j \lambda_j^t + \sum_{j=1}^{m} r_j^t (c_{1j} \cos \omega_j t + c_{2j} \sin \omega_j t) + \sum_{i=1}^{p} \frac{k_i}{1-\lambda_i B} \varepsilon_t$$

- 中心化AR(p)模型平穩，有

$$|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, p-2m$$

$$|r_i| < 1, i = 1, 2, \dots, m$$

- AR(p)模型平穩充要條件是AR(p)的p個**特徵根λ_i都在單位圓內**。
- AR(p)模型平穩充要條件是AR(p)模型的**自回歸系數多項式$\Phi(u) = 0$的根u_i都在單位圓外**。

平穩域判別

- 對一個AR(p)模型而言，若沒有平穩性要求，那麼參數向量 $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)'$沒有限制，它們可取遍p維歐氏空間任意一點。

- 但如果**有平穩性限制**，那$(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p)'$就只可取p維歐氏空間的一個子集，使得特徵根都在單位圓內的系數集合

$$\{\boldsymbol{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p} | \text{特徵根都在單位圓內}\}$$

- 它被稱為**AR(p)模型的平穩域**。

練習

求AR(1)模型平穩域

AR(1)模型$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \varepsilon_t$

特徵方程$\lambda - \phi_1 = 0$

特徵根$\lambda = \phi_1$

平穩充要條件：特徵根在單位圓內，即$|\phi_1| < 1$

平穩域為$\{\phi_1 | -1 < \phi_1 < 1\}$

練習

求AR(2)模型平穩域

AR(2)模型$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$

特徵方程$\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0$

特徵根$\lambda_1 = \frac{\phi_1+\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}, \lambda_2 = \frac{\phi_1-\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2}$

平穩充要條件：特徵根在單位圓內，即$|\lambda_1| < 1$且$|\lambda_2| < 1$

平穩域為$\{\phi_1, \phi_2 | |\phi_2| < 1$且$\phi_2 \pm \phi_1 < 1\}$

http://202.171.253.71/www.sfu.ca/~baa7/Teaching/econ818/StationarityAR2.pdf

練習

(i) $[\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2}]/2 < 1$, which implies that $\sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2} < 2 - \gamma_1$. This in turn implies that $\gamma_1^2 + 4\gamma_2 < 4 + \gamma_1^2 - 4\gamma_1$, or $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$.

(ii) $[\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2}]/2 > -1$, which implies that $\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2} > -2$. This in turn implies that $(\gamma_1 + 2)^2 > \sqrt{\gamma_1^2 + 4\gamma_2}$, or $\gamma_1^2 + 4 + 4\gamma_1 > \gamma_1^2 + 4\gamma_2$, or $\gamma_2 - \gamma_1 < 1$.

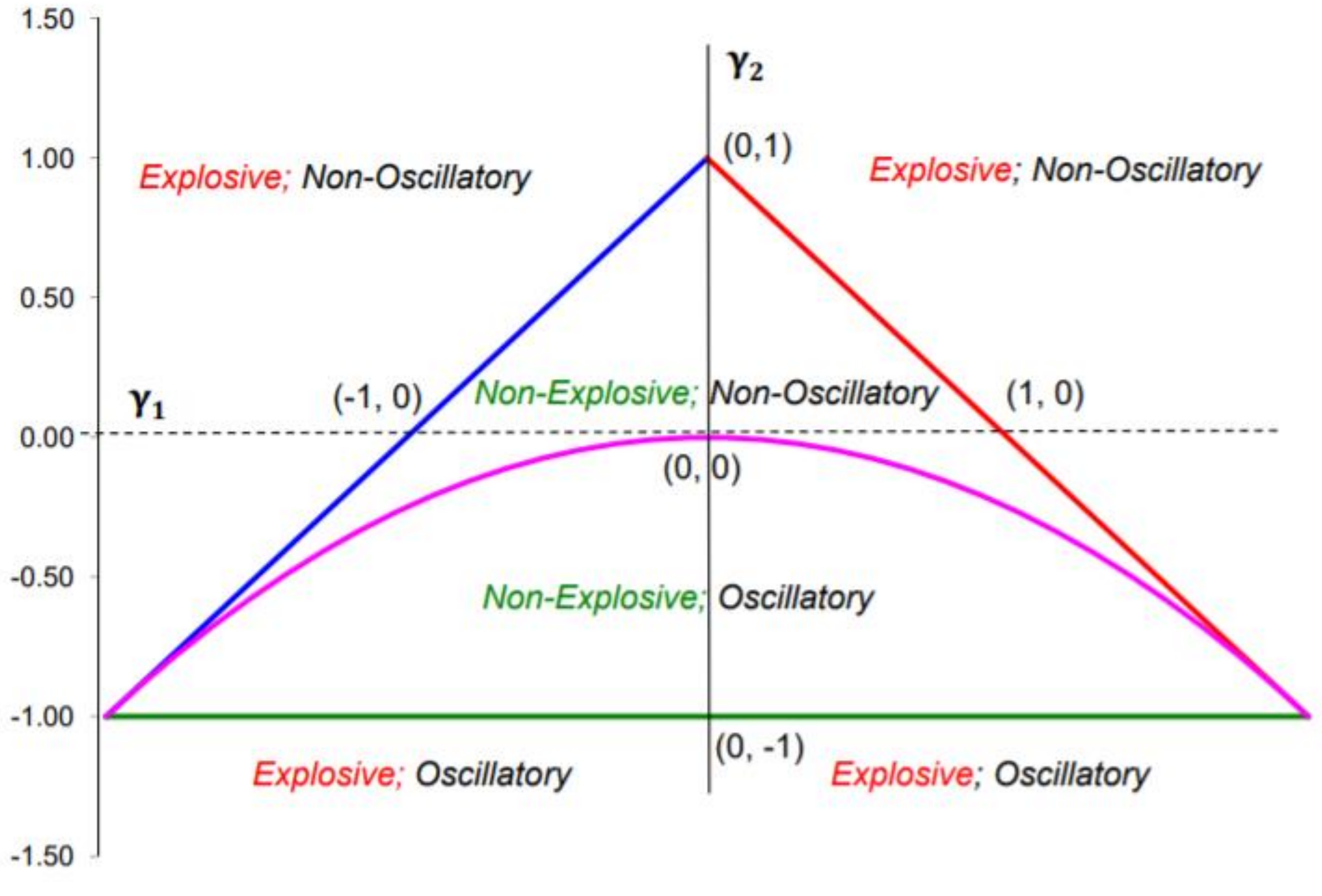
Stationarity requires that $|\lambda_i| < 1$; $i = 1, 2$. So, equating coefficients, we have:

$$\gamma_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)\text{, and } \gamma_2 = -\lambda_1\lambda_2 .$$

Now, if $|\lambda_1| < 1$ and $|\lambda_2| < 1$, then $|\lambda_1\lambda_2| < 1$, which implies that $|\gamma_2| < 1$.

http://202.171.253.71/www.sfu.ca/~baa7/Teaching/econ818/StationarityAR2.pdf

練習



Source: This diagram is based on Figure 7.1, on p.196 of A. Zellner, *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, Wiley, New York, 1971.

http://202.171.253.71/www.sfu.ca/~baa7/Teaching/econ818/StationarityAR2.pdf

總結

本節內容

- 具有以下結構的模型稱為**p階自回歸模型AR(p)**

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\ \phi_p \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ E(x_s \varepsilon_t) = 0, \forall s < t \end{cases}$$

- （如何轉變為中心化？）中心化AR(p)模型：

$$\Phi(B)x_t = \varepsilon_t$$

- p階自回歸系數多項式：

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

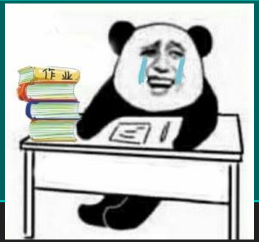
本節內容

- 特徵根判別：
- AR(p)模型平穩充要條件是AR(p)的p個**特徵根λ_i都在單位圓內**。
- AR(p)模型平穩充要條件是AR(p)模型的**自回歸系數多項式$\Phi(u)=0$的根u_i都在單位圓外**。

- 平穩域判別：
- $\{\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_p|$特徵根都在單位圓內$\}$

作業3-2

作業3-2A

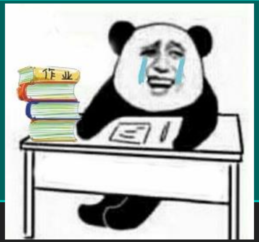


作業

- 常數c取何值時，以下AR(3)序列一定是非平穩序列？

$$x_t = x_{t-1} + cx_{t-2} - cx_{t-3} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

作業3-2B



作業

- 已知AR(2)序列為$x_t = x_{t-1} + cx_{t-2} + \varepsilon_t$，其中$\{\varepsilon_t\}$為白噪聲序列。確定c取值範圍，以保證$\{x_t\}$為平穩序列。

作業3-2C

對於以下AR模型，畫出時序圖（參考ARstationary_example.ipynb，生成101個x_t即足夠）和自相關圖（參考CH2-1的drawts(y,pname)）。

利用特徵根判別法、平穩域判別法，判斷以下AR模型是否平穩？

① $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

② $x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$

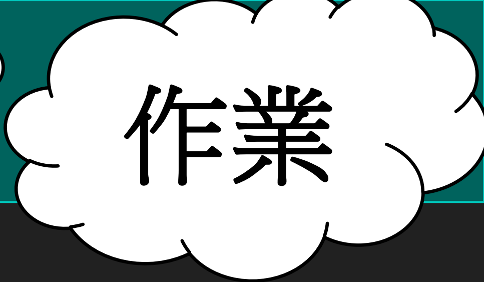
③ $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

④ $x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

⑤ $x_t = -0.9x_{t-1} + \varepsilon_t$

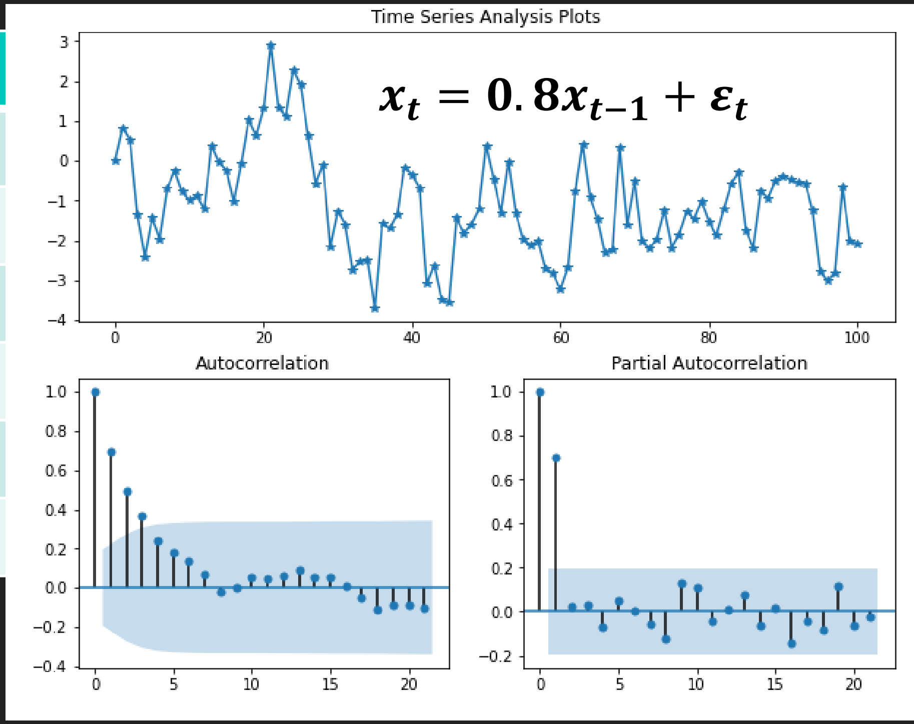
⑥ $\mathrm{x}_t = 0.9\mathrm{x}_{t-1} - 0.2\mathrm{x}_{t-2} + \varepsilon_t$

作業3-2C



參考做法

模型	特徵根判別	平穩域判別	結論
1	$\lambda_1 = 0.8$	$\phi_1 = 0.8$	平穩
2	$\lambda_1 =$	$\phi_1 =$	
3	$\lambda_1 =, \lambda_2 =$	$\lvert\phi_2\rvert =, \phi_2 + \phi_1 =, \phi_2 - \phi_1 =$	
4	$\lambda_1 =, \lambda_2 =$	$\lvert\phi_2\rvert =, \phi_2 + \phi_1 =, \phi_2 - \phi_1 =$	
5	$\lambda_1 =$	$\phi_1 =$	
6	$\lambda_1 =, \lambda_2 =$	$\lvert\phi_2\rvert =, \phi_2 + \phi_1 =, \phi_2 - \phi_1 =$	



提交文件：word文件(參考HW2-1.docx)和ipynb文件（命名為hw3-2c_question.ipynb）

截止日期：待定