時間序列分析

第三章：平穩時間序列分析

主講老師：江愷瑤

第三章：平穩時間序列分析

第5講：ARMA模型的統計性質

目錄

- ARMA模型
- 平穩條件與可逆條件
- 傳遞形式與逆轉形式
- ARMA均值
- ARMA自協方差函數
- ARMA自相關系數
- ACF與PACF截尾性

ARMA模型

ARMA模型

auto regressive moving average

- 具有以下結構的模型稱為自回歸**移動平均模型ARMA(p,q)**

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ \phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ E(x_s \varepsilon_t) = 0, \forall s < t \end{cases}$$

書寫時一般會缺省限制條件，只寫1式。

- 3個限制條件：

✓ 2式保證模型最高階數為p和q

✓ 3式保證隨機干擾序列$\{\varepsilon_t\}$為零均值白噪聲序列$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

✓ 4式保證了當前隨機干擾與過去序列值無關

ARMA模型

auto regressive moving average

- 具有以下結構的模型稱為自回歸**移動平均模型ARMA(p,q)**

$$\begin{cases} x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ \phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\ E(x_s \varepsilon_t) = 0, \forall s < t \end{cases}$$

書寫時一般會缺省限制條件，只寫1式。

- 3個限制條件：

✓ 2式保證模型最高階數為p和q

✓ 3式保證隨機干擾序列$\{\varepsilon_t\}$為零均值白噪聲序列$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

✓ 4式保證了當前隨機干擾與過去序列值無關

ARMA模型

- 若$\phi_0 = 0$，則稱模型是中心化ARMA(p,q)模型：

$$\boldsymbol{x_t = \phi_1 x_{t-1} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}}$$

- 引入延遲算子，可簡記為：

$$\boldsymbol{\Phi(B) x_t = \Theta(B) \varepsilon_t}$$

- $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$，為p階自回歸系數多項式
- $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$，為q階移動平均系數多項式

ARMA模型

- ARMA(p,q)

$$\Phi(B)x_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

- 當q=0時，ARMA(p,q)退化為AR(p)
- 當p=0時，ARMA(p,q)退化為MA(q)

- AR(p)和MA(q)是ARMA(p,q)的特例，它們都統稱為ARMA模型。ARMA(p,q)的統計性質是AR(p)和MA(q)的統計性質的有機組合。

平穩條件與可逆條件

平穩條件與可逆條件

$z_t = \Theta(\mathrm{B})\varepsilon_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$
均值為0
方差為$(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$
平穩序列

令$z_t = \Theta(\mathrm{B})\varepsilon_t$

$$\boldsymbol{\Phi(B)x_t = \Theta(B)\varepsilon_t} \longrightarrow \boldsymbol{\Phi(\mathrm{B})\mathrm{x}_t = z_t}$$

- 類似於AR模型的分析，可得ARMA(p,q)平穩條件是$\Phi(B)=0$的根都在單位圓外。即ARMA(p,q)的平穩性完全由其自回歸部分決定。

- 同理可得ARMA(p,q)可逆條件與MA(q)完全相同：當$\Theta(B)=0$的根都在單位圓外。

平穩條件與可逆條件

- ARMA(p,q)： $\boldsymbol{\Phi(B)x_t = \Theta(B)\varepsilon_t}$
- 平穩條件：$\Phi(B) = 0$的根都在單位圓外
- 可逆條件：$\Theta(B) = 0$的根都在單位圓外

- 當$\Phi(B) = 0$和$\Theta(B) = 0$的根都在單位圓外時，稱平穩可逆模型，這是一個由它自相關系數唯一識別的模型。

傳遞形式與逆轉形式

傳遞形式與逆轉形式

- 對於一個平穩可逆ARMA(p,q)模型，它的傳遞形式為：

$$x_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-j} \qquad \boldsymbol{MA}(\infty)$$

其中，G_j為Green函數。通過待定系數法可得它的遞推公式：

$$\begin{cases} G_0 = 1 \\ G_k = \sum_{j=1}^{k} \phi_j' G_{k-j} - \theta_k', k \geq 1 \end{cases}$$

$$\phi_j' = \begin{cases} \phi_j, & 1 \leq j \leq p \\ 0, & j > p \end{cases}$$

$$\theta_k' = \begin{cases} \phi_k, & 1 \leq k \leq p \\ 0, & k > p \end{cases}$$

傳遞形式與逆轉形式

- 對於一個平穩可逆ARMA(p,q)模型，它的逆轉形式為：

$$\varepsilon_t=\frac{\Phi(B)}{\Theta(B)}x_t=\sum_{j=0}^{\infty}I_j x_{t-j} \qquad \boldsymbol{AR}(\infty)$$

其中，I_j為逆函數。通過待定系數法可得它的遞推公式：

$$\begin{cases} I_0=1 \\ I_j=\sum_{m=1}^{j}\theta'_m I_{j-m}-\phi'_j, j\geq 1 \end{cases}$$

$$\phi'_j=\begin{cases}\phi_j, & 1\leq j\leq p \\ 0, & j>p\end{cases}$$

$$\theta'_m=\begin{cases}\phi_m, & 1\leq m\leq p \\ 0, & k>m\end{cases}$$

ARMA均值

ARMA均值

- 對於一個非中心化ARMA(p,q)模型

$$\underbrace{x_t}_{E(x_t)} = \phi_0 + \phi_1 \underbrace{x_{t-1}}_{E(x_t)} + \cdots + \phi_p \underbrace{x_{t-p}}_{E(x_t)} + \underbrace{\varepsilon_t}_{0} - \theta_1 \underbrace{\varepsilon_{t-1}}_{0} - \cdots - \theta_q \underbrace{\varepsilon_{t-q}}_{0}$$

- 兩邊同求期望可得均值為：

$$E(x_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

ARMA自協方差函數

ARMA自協方差函數

$\gamma(k)$

$= E(x_t x_{t+k})$

$= E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} G_i \varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t+k-j}\right)\right]$

$= E\left[\sum_{i=0}^{\infty} G_i \sum_{j=0}^{\infty} G_j \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t+k-j}\right]$

$= \boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} G_i G_{i+k}}$

延遲k自協方差函數$\gamma(k)$

ARMA自相關系數

ARMA自相關系數

- 根據定義，延遲k自相關系數為：

$$\rho(k)=\frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}G_iG_{i+k}}{\sum_{i=0}^{\infty}G_i^2}$$

ACF與PACF截尾性

ACF與PACF截尾性

- ACF:
- 根據自相關系數表達式，可得ARMA(p,q)自相關系數不截尾，這和ARMA(p,q)可轉為$MA(\infty)$的性質是一致的。

- PACF：
- ARMA(p,q)可轉為$AR(\infty)$，可得它的偏自相關系數也不截尾。

ACF與PACF截尾性

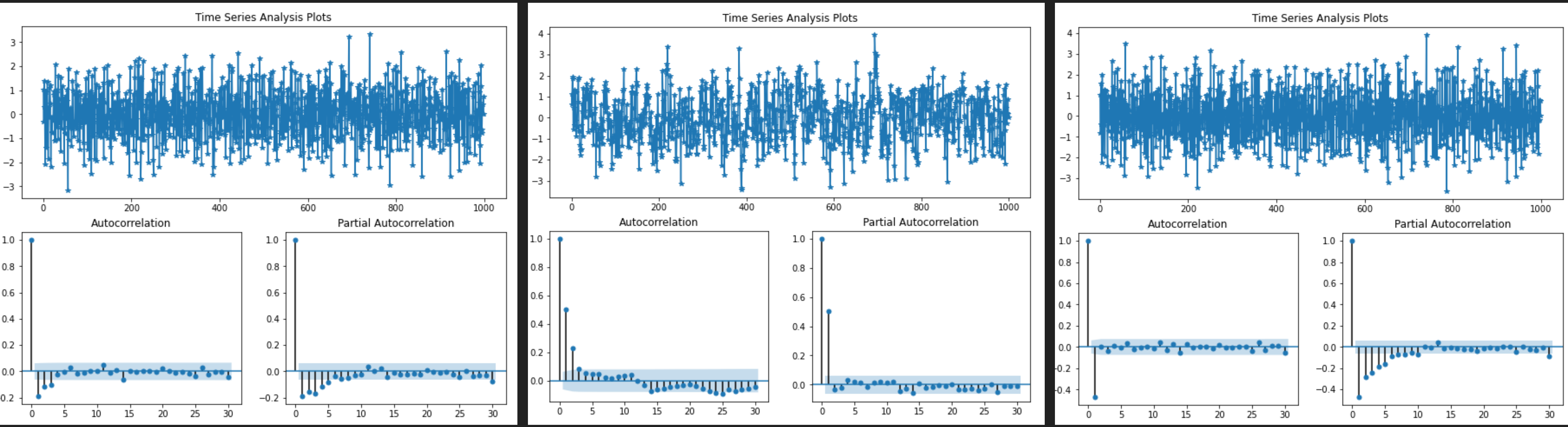
模型	ACF	PACF
AR(p)⇔ARMA(p,0)	拖尾	p階截尾
MA(q) ⇔ARMA(0,q)	q階截尾	拖尾
ARMA(p,q)	拖尾	拖尾

練習

- 擬合以下模型，並考察它們的ACF和PACF拖尾性。
- ARMA(1,1) ：$x_t - 0.5x_{t-1} = \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1}$
- AR (1) ：$x_t - 0.5x_{t-1} = \varepsilon_t$
- MA(1) ：$x_t = \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1}$

練習p3.7.ipynb

模型	ACF	PACF
AR(p)⇔ARMA(p,0)	拖尾	p階截尾
MA(q) ⇔ARMA(0,q)	q階截尾	拖尾
ARMA(p,q)	拖尾	拖尾



ARMA(1,1) ：$x_t - 0.5x_{t-1} = \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1}$

AR (1) ：$x_t - 0.5x_{t-1} = \varepsilon_t$

MA(1) ：$x_t = \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1}$

本節總結

本節總結

- 掌握求ARMA(p,q)模型均值、方差、自協方差、自相關系數的方法。
- 掌握ARMA(p,q)平穩條件與可逆條件的判斷。
- 掌握求ARMA(p,q)傳遞形式與逆轉形式（Green函數、逆函數）。

模型	ACF	PACF
AR(p)⇔ARMA(p,0)	拖尾	p階截尾
MA(q) ⇔ARMA(0,q)	q階截尾	拖尾
ARMA(p,q)	拖尾	拖尾

ARMA_stat_char.ipynb

本節總結

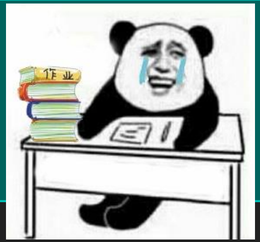
- 均值 $\frac{\phi_0}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p}$
- 方差 $Var(x_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} G_i^2$
- 自協方差函數 $\gamma(k) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} G_i G_{i+k}$
- 自相關系數拖尾 $\rho(k) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} G_i G_{i+k}}{\sum_{i=0}^{\infty} G_i^2}$
- 偏自相關系數拖尾

作業

作業3.5a

- 某ARMA(2,2)模型為：$\Phi(B)x_t = 3 + \Theta(B)\varepsilon_t$，求$E(x_t)$
- 其中$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$，$\Phi(\mathrm{B}) = (1 - 0.5B)^2$

作業



作業

- 提交HW3-5.docx
- 截止時間：2021年10月3日23:59