# 時間序列分析

# 第三章：平穩時間序列分析

主講老師：江愷瑤

# 第三章：平穩時間序列分析

# 第4講：MA模型的統計性質

# 目錄

# MA模型

# MA模型

- 具有以下結構的模型稱為**q階移動平均moving average模型MA(q)**

$$\begin{cases} x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \\ \theta_q \neq 0 \\ E(\varepsilon_t) = 0, Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t\varepsilon_s) = 0, s \neq t \end{cases}$$

書寫時一般會缺省限制條件，只寫1式。

- 2個限制條件：
  - ✓ 2式保證模型最高階數為q
  - ✓ 3式保證隨機干擾序列$\{\varepsilon_t\}$為零均值白噪聲序列$\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$

# MA模型

- 當$\mu = 0$時，稱為中心化MA(q)模型。

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 非中心化MA(q)模型可透過下面變換轉化為**中心化MA(q)**模型：

$$y_t = x_t - \mu$$

- 則$\{y_t\}$為$\{x_t\}$的中心化序列。

- 今後在分析MA(q)模型的性質時，一般會簡化為中心化模型再進行分析。

# MA模型

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

- 引入延遲算子B，中心化MA(q)模型可以簡記為：

$$x_t = \Theta(\mathrm{B})\varepsilon_t$$

- 其中$\Theta(B)$稱**q階移動平均系數多項式**：

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

# MA模型的均值

# MA模型的均值

- MA(q)模型

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 假設$q < \infty$，在等式兩邊取期望，有

$$E(x_t) = E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q})$$

均值$\mu$

$E(\varepsilon_t) = 0$

$E(\varepsilon_{t-q}) = 0$

$$E(x_t) = \mu$$

- MA(q)模型具有常數均值。

中心化MA(q)模型，$\mu = 0$，均值為0

# MA模型的方差

# MA模型的方差

- MA(q)模型

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 在等式兩邊求方差，有

$$\underbrace{Var(x_t)}_{\text{方差}} = Var(\underbrace{\mu}_{Var(\mu)=0} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \underbrace{\varepsilon_{t-q}}_{Var(\varepsilon_{t-q}) = \sigma_\varepsilon^2})$$

$$Var(x_t) = \left(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

- MA(q)模型具有常數方差。

# MA模型的自協方差函數

# MA模型的自協方差函數

- MA(q)模型

$$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- 求滯後k協方差函數

$$\gamma_k = E(x_t x_{t-k})$$

$$= E(\mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q})(\mu + \varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-k-q})$$

$$= \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ (-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i})\sigma_\varepsilon^2 & 1 \le k \le q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

# MA模型的自協方差函數

$$E\left(\mu+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}\right)\left(\mu+\varepsilon_{t-k}-\theta_1\varepsilon_{t-k-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-k-q}\right)$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon_t$ | $-\theta_1\varepsilon_{t-1}$ | $\cdots$ | $-\theta_k\varepsilon_{t-k}$ | $-\theta_{k+1}\varepsilon_{t-k-}$ | $\cdots$ | $-\theta_q\varepsilon_{t-q}$ | |
| | | | $\varepsilon_{t-k}$ | $-\theta_1\varepsilon_{t-k-1}$ | | $-\theta_{q-k}\varepsilon_{t-q}$ | $-\theta_{q-k+1}\varepsilon_{t-q-1}$ |

$$=\left(-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_{k+(q-k)}\right)\sigma_\varepsilon^2$$

$$=\left(-\theta_k+\sum_{i=1}^{q-k}\theta_i\theta_{k+i}\right)\sigma_\varepsilon^2$$

$$1\le k\le q$$



主講人：江愷瑤　聯絡方式：hikong@cityu.mo

# MA模型的自協方差函數

$$E\left(\mu+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}\right)\left(\mu+\varepsilon_{t-k}-\theta_1\varepsilon_{t-k-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-k-q}\right)$$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon_t$ | $-\theta_1\varepsilon_{t-1}$ | … | $-\theta_q\varepsilon_{t-q}$ | … | $0*\varepsilon_{t-k}$ | 0 | 0 |
| | | | | | $\varepsilon_{t-k}$ | $-\theta_1\varepsilon_{t-k-1}$ | … |

$$=0$$

$\mathrm{k}>q$

# MA模型的自協方差函數

- MA(q)模型滯後k協方差函數

$$\gamma_k = \begin{cases} (1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2 & k=0 \\ (-\theta_k+\sum_{i=1}^{q-k}\theta_i\theta_{k+i})\sigma_\varepsilon^2 & 1\le k\le q \\ 0 & k>q \end{cases}$$

- MA(q)自協方差函數只與滯後階數k有關，且q階截尾。

# MA模型的自相關系數

# MA模型的自相關系數

- MA(q)模型自相關系數

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} & 1 \le k \le q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

- MA(q)自相關系數只與滯後階數k有關，且q階截尾。

# 練習

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} & 1 \le k \le q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

- MA(1)模型$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- 自相關系數為

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k \ge 2 \end{cases}$$

# 練習

- MA(2)模型$x_t = \mu + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$
- 自相關系數為

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \vdots & \\ \dfrac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k}\theta_i\theta_{k+i}}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2} & 1 \le k \le q \\ \vdots & \\ 0 & k > q \end{cases}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k = 1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k = 2 \\ 0 & k \geq 3 \end{cases}$$

# MA模型的偏自相關系數

# MA模型的偏自相關係數

- 與AR(p)模型相同， 用$\phi_{kk}$表示MA(q)模型的滯後k偏自相關系數。

- 結論： MA(q)模型的滯後k偏自相關系數$\phi_{kk}$拖尾。

- 證明：借助MA模型逆函數遞推公式。

# MA模型統計性質總結

# MA模型統計性質總結

- 當$q < \infty$時，MA(q)模型一定是平穩模型。
- MA(q)模型偏自相關系數PACF拖尾。
- MA(q)模型自相關系數ACF為q階截尾。

- AR和MA的ACF/PACF呈對偶關系

| | 自相關系數ACF | 偏自相關系數PACF |
|---|---|---|
| AR(p) | 拖尾 | p階截尾 |
| MA(q) | q階截尾 | 拖尾 |

### 寬平穩

- 對時間序列$\{X_t, t \in T\}$，如果滿足以下三個條件：

① 任取$t \in T$，有$E(X_t^2) < \infty$

② 任取$t \in T$，有$E(X_t) = \mu$，$\mu$為常數

③ 任取$t, s, k \in T$，且$k + s - t \in T$，有$\gamma(t, s) = \gamma(k, k + s - t)$

- 則稱時間序列$\{X_t\}$為**寬平穩時間序列**。寬平穩也叫弱平穩或二階平穩。

# 練習3.4.1（p3.4.1.ipynb）

- 繪制下列MA模型的自相關系數圖和偏自相關系數圖，觀察ACF截尾和PACF拖尾的性質。

① $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$

② $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

③ $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$

④ $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$

# 練習3.4.1（p3.4.1.ipynb）

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i \theta_{k+i}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} & 1 \le k \le q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

- ACF:

① $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$  $\rho_0 = 1$

② $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$  $\rho_1 = -\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = -0.4$

③ $x_t = \varepsilon_t - \dfrac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \dfrac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$

④ $x_t = \varepsilon_t - \dfrac{5}{4} + \dfrac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$

$\rho_0 = 1$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = -0.64$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = 0.31$$

# 練習3.4.1（p3.4.1.ipynb）

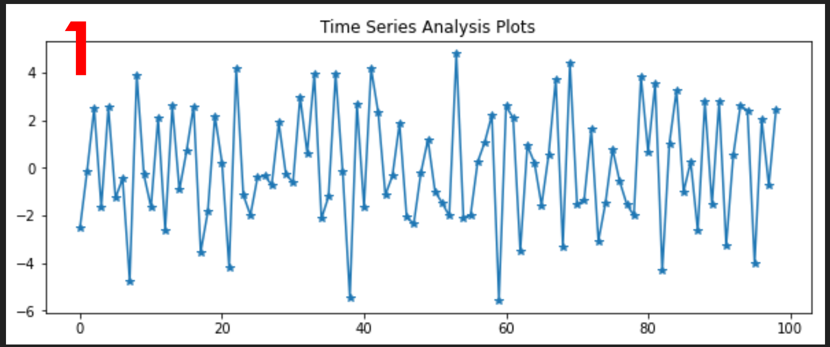
## 時序圖

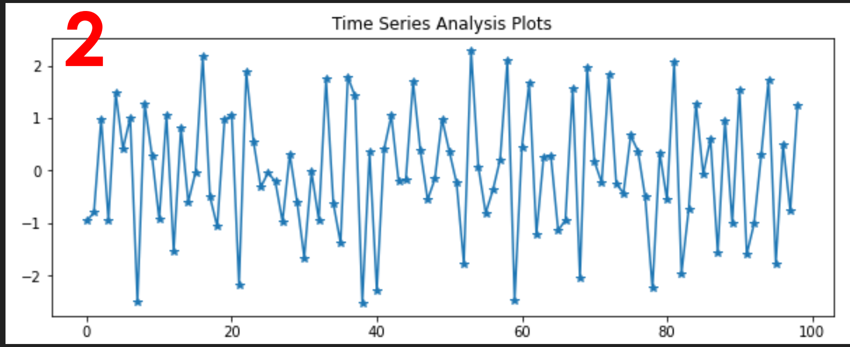
① $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$

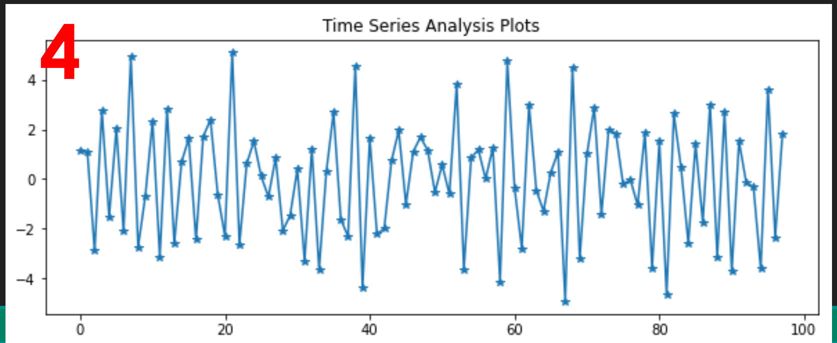
② $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

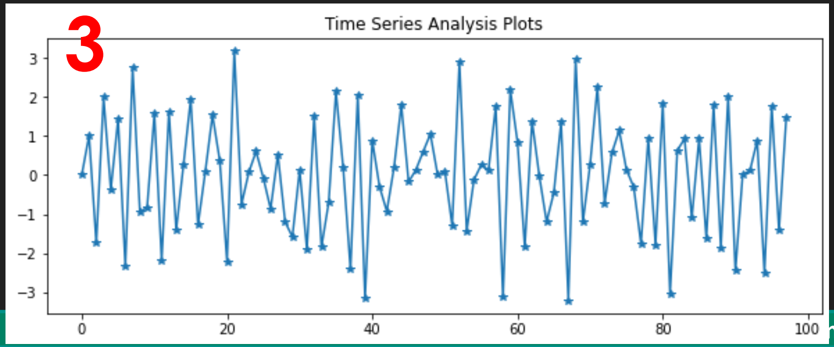
③ $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$

④ $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$



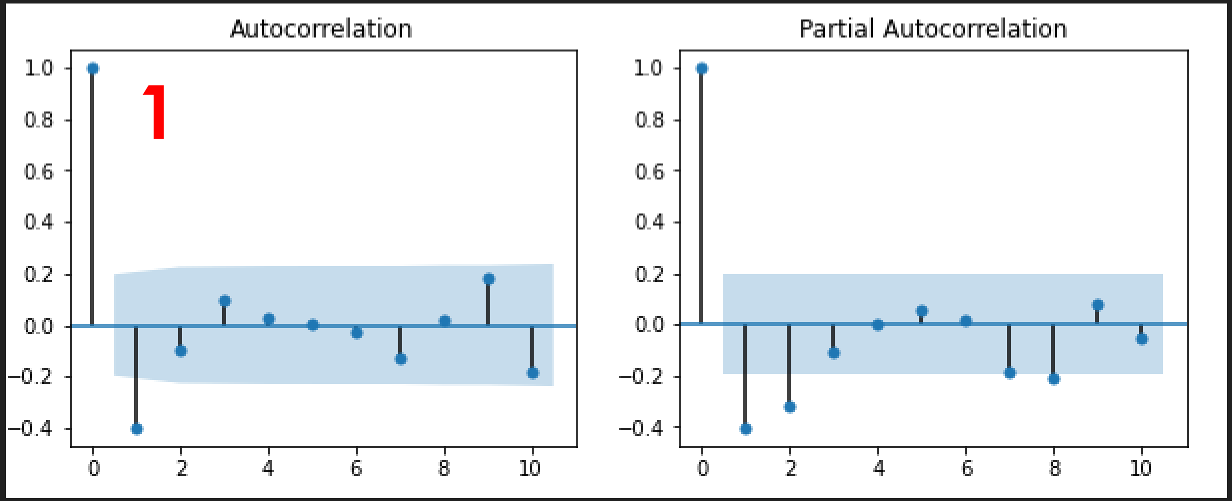



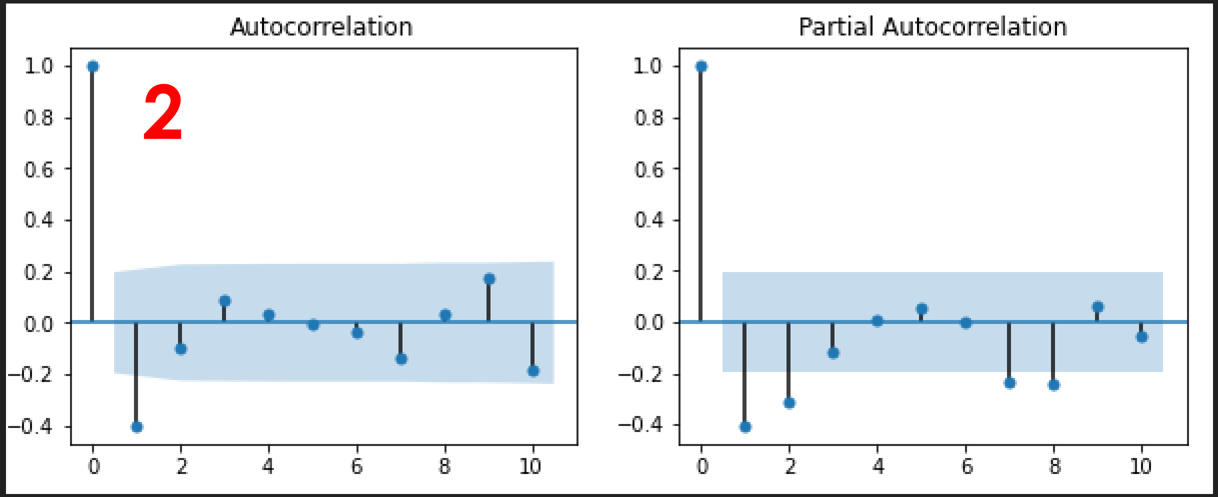



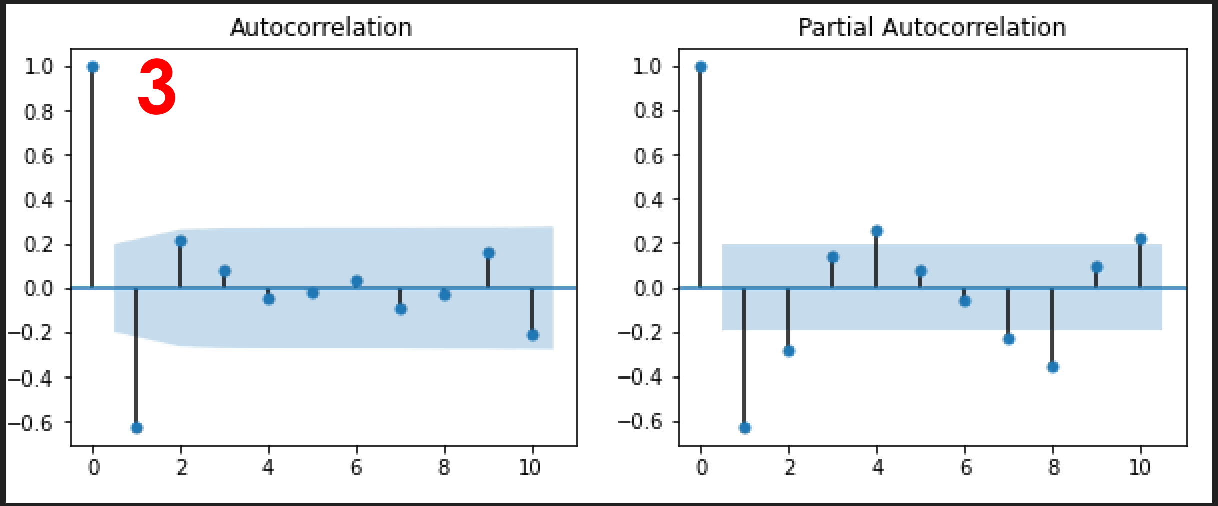



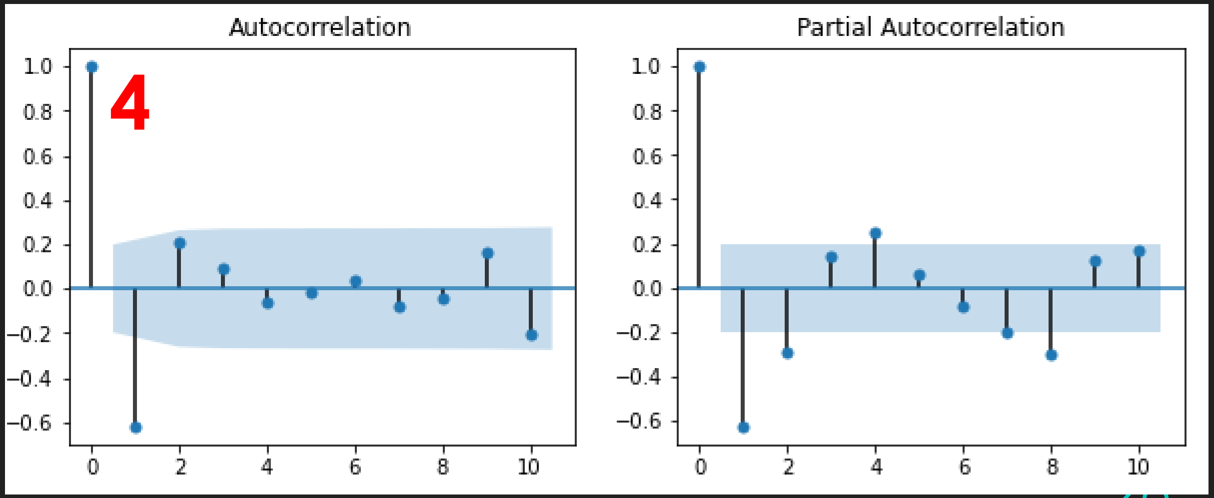
# 練習3.4.1（p3.4.1.ipynb）

- ACF&PACF



# 練習3.4.1（p3.4.1.ipynb）

- MA(q)模型偏自相關系數PACF拖尾。
- MA(q)模型自相關系數ACF為q階截尾。

- 不同的MA(1)模型有相同的自相關圖。

① $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$

② $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

- 不同的MA(2)模型有相同的自相關圖。

③ $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$

④ $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$

# MA模型的可逆性

# MA模型的可逆性

## CH2：自相關系數非唯一性

- 一個平穩時間序列一定唯一決定了它的自相關函數，但一個自相關函數未必唯一對應著一個平穩時間序列。
- 這使人們根據樣本的ACF來確定模型帶來難度。

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = -0.4$$

① $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$

② $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = -0.64$$

$$\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} = 0.31$$

③ $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$

④ $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$

# MA模型的可逆性

## MA模型的可逆性條件：

- 為了保證一個給定的自相關函數能夠對應唯一的MA模型，需要給模型增加約束條件。

# MA模型的可逆性

- 用過去序列值的一個線性組合來逼近系統現在時刻的行為，即

$$X_t = I_1 X_{t-1} + I_2 X_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} I_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\boldsymbol{\varepsilon_t = (1 - \mathrm{I}_1 \mathrm{B} - \mathrm{I}_2 \mathrm{B}^2 - \cdots)\mathrm{X}_t = \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} I_j B^j\right) X_t}$$

- 上式稱為當前時刻序列的**逆轉形式**，系數函數$I_j$為**逆函數**。
- 逆函數對應一個無窮自回歸模型。

# MA模型的可逆性

## MA模型的可逆性條件：

- 為了保證一個給定的自相關函數能夠對應唯一的MA模型，需要給模型增加約束條件。

## 可逆MA模型：

- 如果MA模型生成的序列可以用一個無窮階自回歸模型$AR(\infty)$逼近，即逆函數存在，則稱該MA模型具有可逆性，是可逆的；反之則不可逆。

## 可逆的重要性：

- 一個自相關函數唯一對應一個可逆的MA模型。

# MA模型的可逆性

- 考慮MA(1)

$$①\ x_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \Rightarrow \frac{x_t}{1-\theta B} = \varepsilon_t$$

$$②\ x_t = \varepsilon_t - \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1} \Rightarrow \frac{x_t}{1-\frac{1}{\theta}B} = \varepsilon_t$$

- 當$|\theta| < 1$時，①可逆。$(1+\theta B+\theta^2B^2+\cdots)x_t = \varepsilon_t$
- 當$|\theta| > 1$時，②可逆。$\left(1+\frac{B}{\theta}+\frac{B^2}{\theta^2}+\cdots\right)x_t = \varepsilon_t$

# MA模型的可逆性

○考慮MA(q)

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \Rightarrow \frac{x_t}{1-\theta_1 B-\cdots-\theta_q B^q} = \varepsilon_t \Rightarrow \frac{x_t}{\Theta(B)} = \varepsilon_t$$

- 其中$\Theta(B)$為移動平均係數多項式。假定$\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_q}$為$\Theta(B)$的q個根。則

$$\Theta(B) = (1-\lambda_1 B)\dots(1-\lambda_q B) = \prod_{k=1}^{q}(1-\lambda_k B)$$

$$\varepsilon_t = \frac{x_t}{(1-\lambda_1 B)\dots(1-\lambda_q B)}$$

式子收斂充要條件是$|\lambda_i| < 1$
即MA(q)模型的係數多項式$\Theta(B) = 0$的根在單位圓外$\left|\frac{1}{\lambda_i}\right| > 1$
這就是MA(q)模型的可逆性條件

# MA模型的可逆性

- MA(q)模型可逆充要條件是MA(q)模型的**移動平均系數多項式$\Theta(B)=0$的根都在單位圓外**。

MA(q)可逆 ⟷ 對偶 ⟷ AR(p)平穩

- AR(p)模型平穩充要條件是AR(p)模型的**自回歸系數多項式$\Phi(B)=0$的根都在單位圓外**。

# MA模型的可逆性

- 一個自相關函數可以唯一對應一個可逆的MA(q)模型
- MA(q)$x_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$，其中它的移平均系數多項式$\Theta(B) = 0$的根都在單位圓外。

# 逆函數遞推公式

# 逆函數遞推公式

- 用過去序列值的一個線性組合來逼近系統現在時刻的行為，即

$$X_t = I_1 X_{t-1} + I_2 X_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} I_j X_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\cdots{}^2 - \cdots)\mathbf{X_t} = \left(\mathbf{1} - \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I_j B^j}\right) \boldsymbol{X_t}$$

$I_j$ 是甚麼？

逆轉形式，系數函數$I_j$為逆函數。

自回歸模型。

# 逆函數遞推公式

- 如果MA(q) $\boldsymbol{x_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}}$可逆，有

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots \theta_q B^q = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i$$

$$I(B) = I_0 + I_1 B + I_2 B^2 + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} I_l B^l$$

$$\begin{cases} \Theta(B)\varepsilon_t = x_t \\ \varepsilon_t = I(B)x_t \end{cases}$$

把下式代入上代有$\Theta(B)I(B)x_t = x_t$，待定系數法求得

$$I_0 = 1$$

$$I_l = \sum_{i=1}^{l} \theta_i' I_{l-i}$$

其中
$l \geq 1$

$$\theta_i' = \begin{cases} \theta_i, i \leq q \\ 0, i > q \end{cases}$$

# 逆函數遞推公式（待定系數法推導）

$$\Theta(B)I(B)x_t = x_t$$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots \theta_q B^q = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i$$

$$I(B) = I_0 + I_1 B + I_2 B^2 + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} I_l B^l$$

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} I_l B^l\right) x_t = x_t$$

待定系數法求I(B)

$$\left(I_0 + \sum_{l=1}^{\infty}\left(I_l - \sum_{i=1}^{l} \theta_i' I_{l-i}\right) B^l\right) x_t = x_t$$

$$\theta_i' = \begin{cases} \theta_i, & i \le q \\ 0, & i > q \end{cases}$$

對$x_t$，有$\mathrm{I}_0 x_t = x_t$，得$I_0 = 1$

對$x_{t-1}$，有$l = 1$，即$I_1 - \theta_1' I_0 = 0$，得$I_1 = \theta_1' I_0$

對$x_{t-l}$，有$I_l - \sum_{i=1}^{l} \theta_i' I_{l-i} = 0$，得$I_l = \sum_{i=1}^{l} \theta_i' I_{l-i}$

# 練習3.4.2

- 考察3.4.1的4個MA模型可逆性，並寫出可逆MA模型的逆轉形式

① $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$

② $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

③ $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$

④ $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$

# 練習3.4.2

- $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} \Rightarrow \frac{x_t}{1-2B} = \varepsilon_t \Rightarrow \frac{x_t}{\Theta(B)} = \varepsilon_t$
- 移動平均系數多項式$\boldsymbol{\Theta(B) = 1 - 2B}$，根為$\lambda$
- $\boldsymbol{1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2}$
- 根為$\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{2}}$，即$\boldsymbol{\lambda < 1}$，不可逆

# 練習3.4.2

- $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} \Rightarrow \frac{x_t}{1-0.5B} = \varepsilon_t \Rightarrow \frac{x_t}{\Theta(B)} = \varepsilon_t$
- 移動平均系數多項式$\boldsymbol{\Theta(B) = 1 - 0.5B}$，根為$\lambda$
- $\boldsymbol{1 - 0.5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2}$
- **根為$\boldsymbol{\lambda = 2}$，即$\boldsymbol{\lambda > 1}$，可逆**

# 練習3.4.2

- $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2} \Rightarrow \frac{x_t}{1-\frac{4}{5}B+\frac{16}{25}B^2} = \varepsilon_t \Rightarrow \frac{x_t}{\Theta(B)} = \varepsilon_t$
- 移動平均系數多項式$\boldsymbol{\Theta(B) = 1 - \frac{4}{5}B + \frac{16}{25}B^2}$，根為$\lambda$
- $\boldsymbol{1 - \frac{4}{5}\lambda + \frac{16}{25}\lambda^2 = 0}$
- $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{32}(4 + \sqrt{48}i)\ ,\ \lambda_2 = \frac{5}{32}\left(4 + \sqrt{48}i\right)$
- $\boldsymbol{|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.25 > 1}$，可逆

# 練習3.4.2

- $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2} \Rightarrow \frac{x_t}{1-\frac{5}{4}B+\frac{25}{16}B^2} = \varepsilon_t \Rightarrow \frac{x_t}{\Theta(B)} = \varepsilon_t$
- 移動平均系數多項式$\boldsymbol{\Theta(B) = 1 - \frac{5}{4}B + \frac{25}{16}B^2}$，根為$\lambda$
- $\boldsymbol{1 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{25}{16}\lambda^2 = 0}$
- $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{4}{50}(5+\sqrt{75}i)\ ,\ \lambda_2 = \frac{4}{50}(5-\sqrt{75}i)$
- $\boldsymbol{|\lambda_1| = |\lambda_2| = 0.8 < 1}$，不可逆

# 練習3.4.2

- 考察3.4.1的4個MA模型可逆性，並寫出可逆MA模型的逆轉形式

| 模型 | 結論 |
|---|---|
| $x_t = \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1}$ | 不可逆 |
| $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$ | 可逆 |
| $x_t = \varepsilon_t - \frac{4}{5}\varepsilon_{t-1} + \frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$ | 可逆 |
| $x_t = \varepsilon_t - \frac{5}{4} + \frac{25}{16}\varepsilon_{t-2}$ | 不可逆 |

# 練習3.4.2

- $x_t = \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$

$$I_0 = 1$$

$$I_1 = \theta_1 I_0 = 0.5$$

$$I_2 = \theta_1 I_1 = 0.5^2$$

$$I_n = 0.5^n$$

逆轉形式為$\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} I_i x_{t-i} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^i x_{t-i}}$

## 逆函數遞推公式

- 如果MA(q) $\boldsymbol{x_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}}$可逆，有

$$\begin{cases}\Theta(B)\varepsilon_t = x_t \\ \varepsilon_t = I(B)x_t\end{cases}$$

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots \theta_q B^q = 1 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i B^i$$

$$I(B) = I_0 + I_1 B + I_2 B^2 + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} I_l B^l$$

把下式代入上代有$\Theta(B)I(B)x_t = x_t$，待定系數法求得

$$I_0 = 1$$

$$I_l = \sum_{i=1}^{l} \theta_i' I_{l-i}$$

其中
$l \geq 1$
$\theta_i' = \begin{cases}\theta_i, i \leq q \\ 0, i > q\end{cases}$

41

# 練習3.4.2

逆函數遞推公式

如果MA(q) $x_t=\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q}$可逆，有

$$\begin{cases}\Theta(B)\varepsilon_t=x_t\\ \varepsilon_t=I(B)x_t\end{cases}$$

$\Theta(B)=1-\theta_1B-\cdots\theta_qB^q=1-\sum_{i=1}^{q}\theta_iB^i$

$I(B)=I_0+I_1B+I_2B^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}I_iB^i$

把下式代入上代有$\Theta(B)I(B)x_t=x_t$，待定系數法求得

$$I_0=1$$

$$I_l=\sum_{i=1}^{l}\theta_i'I_{l-i}$$

其中
$l\geq 1$
$\theta_i'=\begin{cases}\theta_i, i\leq q\\ 0, i>q\end{cases}$

41

- $x_t=\varepsilon_t-\frac{4}{5}\varepsilon_{t-1}+\frac{16}{25}\varepsilon_{t-2}$

其中$\theta_1=\frac{4}{5},\theta_2=-\theta_1^2=-\frac{16}{25}$

$$I_0=1$$
$$I_1=\theta_1I_0=\theta_1$$
$$I_2=\theta_1I_1-\theta_1^2I_0=0$$
$$I_3=\theta_1I_2-\theta_1^2I_1=-\theta_1^3$$
$$I_4=\theta_1I_3-\theta_1^2I_2=-\theta_1^4$$
$$I_5=\theta_1I_4-\theta_1^2\mathrm{I}_3=0$$

$$\Rightarrow\quad I_k=\begin{cases}(-1)^n\theta_1^k, & k=3n\ or\ k=3n+1\\ 0, & k=3n+2\end{cases},\ n=0,1,2,\ldots$$

逆轉形式為$\boldsymbol{\varepsilon_t=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i0.8^{3i}x_{t-3i}+\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i0.8^{3i+1}x_{t-3i-1}}$

# MA模型的偏自相關系數拖尾

# MA模型的偏自相關系數拖尾

- MA(q)模型的滯後k偏自相關系數$\phi_{kk}$

$$\phi_{kk}=\frac{-\sum_{l=0}^{q} I_{k+l}\gamma_l}{\left(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2}$$

- 證明：
- **可逆MA(q)可等價為$AR(\infty)$。$AR(p)$的偏自相關系數p階截尾，那麼$AR(\infty)$的偏自相關系數不截尾，即可逆MA(q)偏自相關系數拖尾。**

更嚴格的數學證明見後面2頁PPT。

# MA模型的偏自相關系數拖尾證明

4. MA 模型偏自相关系数拖尾的证明

证明：记中心化 $MA(q)$ 模型为：

$$x_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

其中，$\varepsilon_{t-i}$ （$i=1$，2，…，$q$） 独立同分布，且 $E(\varepsilon_{t-i})=0$，$\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-i})=\sigma^2$。

借助 $MA(q)$模型的逆函数，$MA(q)$模型可以等价表示为：

$$\varepsilon_t = I(B)x_t$$

式中，$I(B)$为 $MA(q)$模型的逆函数，它服从式（3.37）的表达。

展开 $I(B)$，可以得到 $x_t$ 的等价表示：

$$\varepsilon_t = x_t + \sum_{l=1}^{\infty} I_l x_{t-l} \Rightarrow x_t = \varepsilon_t - \sum_{l=1}^{\infty} I_l x_{t-l}$$

如果给定 $x_{t-1}$，…，$x_{t-k+1}$的值，则有

$$\begin{aligned}
\hat{E}(x_t) &= E(x_t \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1}) \\
&= E(\varepsilon_t - \sum_{l=1}^{k-1} I_l x_{t-l} - \sum_{l=k}^{\infty} I_l x_{t-l} \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1}) \\
&= E(\varepsilon_t \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1}) - E(\sum_{l=1}^{k-1} I_l x_{t-l} \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1}) \\
&\quad - E(\sum_{l=k}^{\infty} I_l x_{t-l} \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1})
\end{aligned}$$

式中，$E(\varepsilon_t \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1}) = 0$；$E(\sum_{l=1}^{k-1} I_l x_{t-l} \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1})$ 等于常数 $\sum_{l=1}^{k-1} I_l x_{t-l}$；

# MA模型的偏自相關系數拖尾證明

$E(\sum_{l=k}^{\infty} I_l x_{t-l} \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1})$ 等于无条件期望 $E(\sum_{l=k}^{\infty} I_l x_{t-l})$。

所以 $\hat{E}(x_t) = \sum_{l=1}^{k-1} I_l x_{t-l} + E(\sum_{l=k}^{\infty} I_l x_{t-l})$，它也可以等价写为：

$$\hat{E}(x_t) = \sum_{l=1}^{k-1} I_l x_{t-l} + E(\sum_{l=0}^{\infty} I_{l+k} x_{t+k-l})$$

考虑到未来的序列值对过去值无法构成影响（过去是因，未来是果，反之不成立），所以对将来值序列取条件等于无条件，则

$$x_{t-k} \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k+1} = x_{t-k} \text{ 且 } \hat{E}(x_{t-k}) = E(x_{t-k}) = 0$$

$\forall k > 0$，则 $MA(q)$模型延迟 $k$ 偏自相关系数为：

$$\begin{aligned}
\phi_{kk} &= \frac{E\{[x_t - \hat{E}(x_t)][x_{t-k} - \hat{E}(x_{t-k})]\}}{\mathrm{Var}(x_{t-k} \mid x_{t-1}, \cdots, x_{t-k-1})} \\
&= \frac{E[(\varepsilon_t - \sum_{l=0}^{\infty} I_{k+l} x_{t-k-l}) x_{t-k}]}{\mathrm{Var}(x_{t-k})} \\
&= \frac{E(\varepsilon_t x_{t-k}) - I_{k+l} \sum_{l=0}^{\infty} E(x_{t-k-l} \cdot x_{t-k})}{(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2} \\
&= \frac{-\sum_{l=0}^{q} I_{k+l} \gamma_l}{(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2}
\end{aligned}$$

式中，$\gamma_l$ 为 $MA(q)$模型延迟 $l$ 自协方差函数。

因为 $\sum_{l=0}^{q} I_{k+l} \gamma_l$ 不会恒等于零，所以 $MA(q)$模型偏自相关系数拖尾。

证毕。

# 本節總結

# 本節總結

- 掌握求MA(q)模型均值、方差、自協方差、自相關系數、偏自相關系數的方法。
- MA(q)模型，自相關系數q階截尾，偏自相關系數拖尾。
- 可逆MA(q)模型可寫成$AR(\infty)$的形式，即逆轉形式。
- MA_stat_char.ipynb

# 本節總結

- 常數均值
- 常數方差$Var(x_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2$
- 自協方差函數只與滯後階數相關，且q階截尾

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma_\varepsilon^2 & k = 0 \\ (-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i\theta_{k+i})\sigma_\varepsilon^2 & 1 \le k \le q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i\theta_{k+i}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} & 1 \le k \le q \\ 0 & k > q \end{cases}$$

- 自相關系數只與滯後階數相關，且q階截尾
- 偏自相關系數拖尾

# 作業

# 作業3.4a (AR)

作業

- 計算AR(1)模型

$$x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

① 均值

② Green函數遞推公式

③ 方差

④ 延遲k協方差函數$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$

⑤ 延遲k自相關系數$\rho_0, \rho_1, \rho_2$

# 作業3.4b (AR)

作業

- 計算AR(2)模型

$$x_t = 0.8x_{t-1} - 0.64x_{t-2} + \varepsilon_t$$

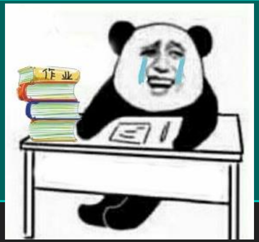
① 均值

② 延遲k協方差函數$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$

③ 方差

④ 延遲k自相關系數$\rho_0, \rho_1, \rho_2$

# 作業3.4c (MA)

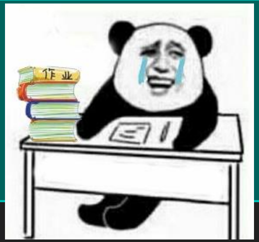


作業

- 已知某中心化MA(1)模型1階自相關系數$\rho_1 = 0.5$，該模型表達式。

$$x_t = \varepsilon_t - ???\,\varepsilon_{t-1}$$

# 作業3.4d (MA)



作業

- 已知MA(2)模型為

$$x_t = \varepsilon_t - 0.7\varepsilon_{t-1} + 0.4\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

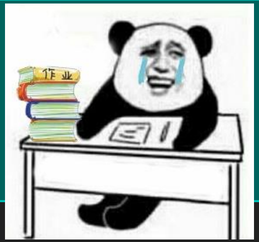
- 求

① $E(x_t)$

② $Var(x_t)$

③ $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3$

# 作業3.4e (AR, MA)



作業

- 檢驗下列模型的平穩性(AR模型)或可逆性(MA模型)，其中$\{\varepsilon_t\}$為白噪聲序列。
- $x_t = 0.5x_{t-1} + 1.2x_{t-2} + \varepsilon_t$
- $x_t = 1.1x_{t-1} - 0.3x_{t-2} + \varepsilon_t$
- $x_t = \varepsilon_t - 0.9\varepsilon_{t-1} + 0.3\varepsilon_{t-2}$
- $x_t = \varepsilon_t + 1.3\varepsilon_{t-1} - 0.4\varepsilon_{t-2}$

# 作業

作業

- 提交HW3-4.docx
- 截止時間：待定