符号数学运算

Mathematica的最大优点就是能够进行各种复杂的数学符号计算，下面我们分类介绍它的符号计算功能。

1、代数多项式运算

多项式是代数学中最基本的表达式，下面分类给出关于它的各种数学运算。

基本运算

- Expand[poly] 将多项式poly展开为乘积与乘幂
- Expand[poly,expr] 只展开poly中与expr相匹配的项
- Factor[poly] 对多项式poly进行因式分解
- FactorTerms[poly] 提取多项式poly中的数字公因子
- Collect[poly,x] 以x为变量，按相同的幂次排列多项式poly
- Collect[poly,{x,y,…}] 同上，但以x,y为变量
- PowerExand[expr] 将expr中的(x y)^p变为x^p*y^p，(x^p)^q变为x^(p*q)

请见下面的例子

```
Expand[(1+(1+x^2)^2)^2, 1+x^2]
```

$$(2+2x^2+x^4)^2$$

```
Expand[(1+(1+x^2)^2)^2]
```

$$4+8x^2+8x^4+4x^6+x^8$$

```
Factor[%]
```

$$(2+2x^2+x^4)^2$$

多项式的结构

- **Length[poly]** 列出多项式所含的项数
- **Exponent[expr,form]** 给出expr中关于form最高幂次
- **Coefficient[expr,form]** 给出expr中关于form的系数
- **CoefficientList[poly,form]** 以form为变量，将poly前面的系数按幂次由小到大顺序用集合形式列出

上页 下页 退出

下面是计算实例

```
t = Expand[(2a+3x)^3 (4x+5y)^2]; t
```

$$128 a^3 x^2 + 576 a^2 x^3 + 864 a x^4 + 432 x^5 + 320 a^3 x y + 1440 a^2 x^2 y + 2160 a x^3 y + 1080 x^4 y + 200 a^3 y^2 + 900 a^2 x y^2 + 1350 a x^2 y^2 + 675 x^3 y^2$$

```
Collect[t, x]
```

$$432 x^5 + 200 a^3 y^2 + x^4 (864 a + 1080 y) + x^3 (576 a^2 + 2160 a y + 675 y^2) + x^2 (128 a^3 + 1440 a^2 y + 1350 a y^2) + x (320 a^3 y + 900 a^2 y^2)$$

```
Coefficient[t, x^3]
```

$$576 a^2 + 2160 a y + 675 y^2$$

```
CoefficientList[t, y]
```

$$\{128 a^3 x^2 + 576 a^2 x^3 + 864 a x^4 + 432 x^5, 320 a^3 x + 1440 a^2 x^2 + 2160 a x^3 + 1080 x^4, 200 a^3 + 900 a^2 x + 1350 a x^2 + 675 x$$

```
FactorTerms[t, y]
```

$$(8 a^3 + 36 a^2 x^3 + 54 a x^6 + 27 x^9) (16 x^2 + 40 x y + 25 y^2)$$

多项式的四则运算

- **PolynomialQuotient[poly1,poly2,x]** 求poly1除以poly2的商,其中poly1与poly2均以x为变量，其结果舍去余式
- **PolynomialRemainder[poly1,poly2,x]** 求poly1/poly2的余式
- **PolynomialGCD[poly1,poly2]** 求poly1与poly2的最大公因式
- **PolynomialLCM[poly1,poly2]** 求poly1与poly2的最小公倍式
- **FactorTerms[poly]** 提取poly中所有项的公因子
- **FactorTerms[poly,x]** 以x为变量，提取公因子
- **FactorList[poly]** 以集合形式给出poly的公因子
- **InterpolatingPolynomial[{{x1,y1},{x2,y2},…},x]** 求通过数据点(x1,y1),(x2,y2),…且以x为变量的拉格朗日插值多项式

下面是关于多项式四则运算的例子

```
p1 := 4 - 3 x^2 + x^3; p2 := 4 + 8 x + 5 x^2 + x^3;
{Factor[p1], Factor[p2]}
```

$\{(-2+x)^2(1+x),\ (1+x)(2+x)^2\}$

```
{PolynomialGCD[p1, p2], PolynomialLCM[p1, p2]}
```

$\{1+x,\ (4-4x+x^2)(4+8x+5x^2+x^3)\}$

```
PolynomialQuotient[(x^2 + 1) p1, p2, x]
```

$33-8x+x^2$

```
PolynomialRemainder[p1, p2, x]
```

$-8x-8x^2$

```
d = {{-2, 4}, {-1, 1}, {0, 0}, {1, 1}, {2, 4}};
InterpolatingPolynomial[d, x]
```

$4+(-2+x)(2+x)$

```
Simplify[%]
```

x^2

有理多项式运算

- Numerator[expr] 给出表达式expr的分子部分
- ExpandNumerator[expr] 只将表达式expr中的分子部分展开
- Denominator[expr] 给出表达式expr的分母部分
- ExpandDenominator[expr] 只将表达式expr中的分母部分展开
- Expand[expr] 只展开表达式expr的分子，并将分母分成单项
- ExpandAll[expr] 同时展开表达式expr的分子与分母
- Together[expr] 将多个有理分式进行通分运算
- Apart[expr] 将有理分式expr分解为一系列最简分式的和
- Cancel[expr] 约去有理分式expr分子与分母的公因子
- Factor[expr] 对expr进行因式分解

下面是有关有理多项式运算的例子。

```
t = (x - 1)^2 (2 + x) / ((1 + x) (x - 3)^2); Expand[t]
```

$$\frac{2}{(-3+x)^2\,(1+x)} - \frac{3\,x}{(-3+x)^2\,(1+x)} + \frac{x^3}{(-3+x)^2\,(1+x)}$$

```
ExpandAll[t]
```

$$\frac{2}{9+3\,x-5\,x^2+x^3} - \frac{3\,x}{9+3\,x-5\,x^2+x^3} + \frac{x^3}{9+3\,x-5\,x^2+x^3}$$

```
Together[%]
```

$$\frac{2-3\,x+x^3}{9+3\,x-5\,x^2+x^3}$$

```
Apart[%]
```

$$1+\frac{5}{(-3+x)^2}+\frac{19}{4\,(-3+x)}+\frac{1}{4\,(1+x)}$$

```
Factor[%]
```

$$\frac{(-1+x)^2\,(2+x)}{(-3+x)^2\,(1+x)}$$

上页 下页 退出

表达式的化简

- **Simplify[expr]** 化简**expr**，使其结果的表达式最短
- **FullSimplify[expr]** 同上，但将结果表达式中的所有函数展开
- **Simplify[expr,assum]**根据假设**assum** 化简**expr**，使其结果的表达式最短
- **FullSimplify[expr]**根据假设**assum** 化简**expr**，但将结果表达式中的所有函数展开

对于化简表达式，上面的两个命令差不多，但大部分情况下，我们更愿意用**FulSimplify[]**，通过下面的例子，你可以看出它确实比**Simplify[]**好一点。另外,**assum**是一个逻辑表达式,例如**x>0, y<1**,或者是对表达式中元素的范围界定,例如**Element[x,Reals]**等等

```
Simplify[Cos[x]^2 - Sin[x]^2]
```

$$\mathrm{Cos}[2\,x]$$

```
{Simplify[Gamma[1 + n] / n], FullSimplify[Gamma[1 + n] / n]}
```

$$\left\{\frac{\mathrm{Gamma}[1+n]}{n},\ \mathrm{Gamma}[n]\right\}$$

$$\mathrm{Simplify}\left[-108+108\,x+45\,x^2-40\,x^3-10\,x^4+4\,x^5+x^6\right]$$

$$(-2+x)^2\,(-1+x)\,(3+x)^3$$

$$\mathrm{Simplify}\left[\frac{4\,(x^2-1)}{(x-1)\,\sqrt{(x+1)^2}\,(3\,x+2)+\sqrt{(x-1)^2}\,(3\,x^2+x-2)},\ 0<x<1\right]$$

$$1$$

$$\mathrm{Simplify}\left[e^{\frac{2\,i\,\pi\,(1-n^2+4\,n)}{n}},\ n\in\mathrm{Integers}\right]$$

$$e^{\frac{2\,i\,\pi}{n}}$$

$$\mathrm{Simplify}\left[\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{\frac{1}{1-x^2}},\ x>1\ ||\ x<-1\right]$$

$$-1$$

上页 下页 退出

2、三角函数运算

虽然Simplify及FullSimplify命令也能对三角函数表达式进行化简，但功能有限，在大部分情况下，我们对三角函数就使用以下命令。

•TrigExpand[expr] 展开倍角及和差形式的三角函数

•TrigFactor[expr] 用倍角及和差形式表示三角函数

•TrigFactorList[expr] 给出每个因式及其指数的列表

•TrigReduce[expr] 用倍角化简expr，使其结果的表达式最短

•TrigToExp[expr] 使用欧拉公式将三角表达式化成复指数形式

•ExpToTrig[expr] 将复指数形式的表达式化成三角函数形式表达式

下面是三角函数运算的例子。

```
t = Sin[3 y] Cos[2 x + y] - Cos[3 x]; t1 = TrigExpand[t]
```

$$-\mathrm{Cos}[x]^3-\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Cos}[y]^2\,\mathrm{Sin}[x]+\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Cos}[y]^4\,\mathrm{Sin}[x]+3\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]^2+\mathrm{Cos}[x]^2\,\mathrm{Cos}[y]\,\mathrm{Sin}[y]+2\,\mathrm{Cos}[x]^2\,\mathrm{Cos}[y]^3\,\mathrm{Sin}[y]-\mathrm{Cos}[y]\,\mathrm{Sin}[x]^2\,\mathrm{Sin}[y]-2\,\mathrm{Cos}[y]^3\,\mathrm{Sin}[x]^2\,\mathrm{Sin}[y]+\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{Sin}[y]^2-6\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Cos}[y]^2\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{Sin}[y]^2-2\,\mathrm{Cos}[x]^2\,\mathrm{Cos}[y]\,\mathrm{Sin}[y]^3+2\,\mathrm{Cos}[y]\,\mathrm{Sin}[x]^2\,\mathrm{Sin}[y]^3+\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]\,\mathrm{Sin}[y]^4$$

```
t2 = TrigFactor[t1]
```

$$\frac{1}{2}\left(-2\,\mathrm{Cos}[3x]-\mathrm{Sin}[2x-2y]+\mathrm{Sin}[2x+4y]\right)$$

```
{t3 = TrigReduce[t1], t4 = TrigReduce[t1 - t2]}
```

$$\left\{\frac{1}{2}\left(-2\,\mathrm{Cos}[3x]-\mathrm{Sin}[2x-2y]+\mathrm{Sin}[2x+4y]\right),\ 0\right\}$$

```
t5 = TrigToExp[t]
```

$$-\frac{1}{2}e^{-3ix}-\frac{1}{2}e^{3ix}+\frac{1}{4}i\,e^{2ix-2iy}-\frac{1}{4}i\,e^{-2ix+2iy}+\frac{1}{4}i\,e^{-2ix-4iy}-\frac{1}{4}i\,e^{2ix+4iy}$$

```
FullSimplify[%]
```

$$-\mathrm{Cos}[3x]+\mathrm{Cos}[2x+y]\,\mathrm{Sin}[3y]$$

上页 下页 退出

3、复数运算

Mathematica中的复数运算与其它数学运算没有什么区别，下面是有关复数运算的数学函数，其中I为系统内部变量，表示复数虚部。

•x+Iy,Re[z],Im[z],Abs[z],Conjugate[z],Arg[z]以上分别为复数,实部，虚部，模，共轭复数，辐角主值

•ComplexExpand[expr]展开expr,并假设expr中所有变量都是实数

•ComplexExpand[expr,{x1,x2,…}]展开expr, 假设x1,x2为复数

•Mathematica的大部分内部函数，都是基于复数的，比如三角函数、指数与对数函数、贝塞尔函数等。

```
{z = (3 + 6 I) / (7 - I)^2, Abs[z], Re[z], Im[z], Conjugate[z], Arg[z]}
```

$$\left\{\frac{3}{125}+\frac{33\,i}{250},\ \frac{3}{10\sqrt{5}},\ \frac{3}{125},\ \frac{33}{250},\ \frac{3}{125}-\frac{33\,i}{250},\ \mathrm{ArcTan}\left[\frac{11}{2}\right]\right\}$$

```
ComplexExpand[Tan[2 x + I*3 y]]
```

$$\frac{\mathrm{Sin}[4x]}{\mathrm{Cos}[4x]+\mathrm{Cosh}[6y]}+\frac{i\,\mathrm{Sinh}[6y]}{\mathrm{Cos}[4x]+\mathrm{Cosh}[6y]}$$

```
z =.; ComplexExpand[Sin[z] Exp[x], z]
```

$$e^{x}\,\mathrm{Cosh}[\mathrm{Im}[z]]\,\mathrm{Sin}[\mathrm{Re}[z]]+i\,e^{x}\,\mathrm{Cos}[\mathrm{Re}[z]]\,\mathrm{Sinh}[\mathrm{Im}[z]]$$

4、方程求解

- Solve[lhs==rhs,x] 求出x的解
- Solve[{lhs1==rhs1,lhs2==rhs2,…},{x,y,…}] 求联立方程组x,y,…的解
- Reduce[{lhs1==rhs1,lhs2==rhs2,…},{x,y,…}] 同上，但给出方程组所有可能的解，包括平凡解
- Eliminate[{lhs1==rhs1,lhs2==rhs2,…},{x,y,…}] 消去方程组中的变量x,y,…
- expr/.solution 将解solution应用于表达式expr
- Solve[]是求解方程或方程组的非平凡解的一个最简单的公式，下面是几个这方面的例子。

```
x=.; Solve[x^4-8x^3+24x^2-32x+15==0, x]
{{x→1}, {x→2-ⅈ}, {x→2+ⅈ}, {x→3}}
Solve[{2x+3y==8, 3x+2y==7}, {x, y}]
{{x→1, y→2}}
```

但是，Solve[]只能求出方程或方程组的理论解，下面的两例子中，第一个例子是能够求出理论解的，但若Mathematica都显示出来，可能要占据整个屏幕，此时我们只有利用//N或N[]命令从理论解计算它的数值解；对于第二个例子，根本没有理论解，因此Solve[]命令也求不出来的理论解，只能用下节的FindRoot[]命令求它的数值解。

```
x=.; Solve[x^4+2x^3+x+1 == 0, x] // N
{{x → 0.379567 - 0.76948 i}, {x → 0.379567 + 0.76948 i},
 {x → -2.11769}, {x → -0.641445}}
Abs[x] /. %
{0.858004, 0.858004, 2.11769, 0.641445}
Solve[{x^2+y^2 == 4, Exp[x] + y == 6}, {x, y}]
Solve::tdep :
 The equations appear to involve the variables to be
   solved for in an essentially non-algebraic way.
```

•Reduce[]与Solve[]的区别是:Reduce[]还能给出平凡解，而Solve[]则只能给出非平凡解。

```
Solve[a x + b == c, x]
```

$$\left\{\left\{x \to -\frac{b-c}{a}\right\}\right\}$$

```
Reduce[a x + b == c, x]
```

$$a == 0 \,\&\&\, b == c \,||\, x == \frac{-b+c}{a} \,\&\&\, a \neq 0$$

•Eliminate[]的作用是：从方程组中消去若干个变量以简化方程组。

```
Eliminate[{a x^3 + y == 0, 2 x + (1 - a) y == 1}, y]
```

$$-a x^3 + a^2 x^3 == 1 - 2 x$$

```
Solve[%, x] /. a → 2 // N
```

$$\{\{x \to 0.423854\}, \{x \to -0.211927 + 1.06524\, i\}, \{x \to -0.211927 - 1.06524\, i\}\}$$

上页 下页 退出

5、线性代数运算

- **Mathematica**能够进行各种线性代数运算，其具体命令见上一节的第8页，这里我们只给出一些实际的例子。
- **Mathematica**中的向量，没有行向量与列向量之分，在处理有关向量运算时，你一定要注意此点，请见下面的例子。

```
Clear[a, b, A, B]; a = {1, 2, 3}; b = {3, 4, 5};
{Dot[a, b], Cross[a, b]}
```

```
{26, {-2, 4, -2}}
```

```
A = 2 DiagonalMatrix[{1, 2, 3}] - {{0, 2, 1}, {1, 0, 1}, {1, 1, 0}}
```

```
{{2, -2, -1}, {-1, 4, -1}, {-1, -1, 6}}
```

```
{Det[A], a.A, A.a, a.A.b}
```

```
{34, {-3, 4, 15}, {-3, 4, 15}, 82}
```

Mathematica能够进行与矩阵有关的各种运算，求方阵的行列式、矩阵的四则运算、求逆矩阵、解线性方程组、求矩阵的特征值与特征向量等(下面的例子续接上面的计算)。

```
B = 3 A - 2 * MatrixPower[A, 3]; MatrixForm[B]
```

$$\begin{pmatrix} -56 & 98 & 61 \\ 37 & -178 & 133 \\ 85 & 109 & -468 \end{pmatrix}$$

```
{Inverse[B].b, LinearSolve[B, b]}
```

$$\left\{\left\{\frac{535933}{120609}, \frac{218480}{120609}, \frac{146935}{120609}\right\}, \left\{\frac{535933}{120609}, \frac{218480}{120609}, \frac{146935}{120609}\right\}\right\}$$

```
Eigensystem[A] // N
```

$\{\{6.43931 + 0.\, i,$
$4.66112 - 4.44089 \times 10^{-16}\, i, 0.899568 + 4.44089 \times 10^{-16}\, i\},$
$\{\{-0.0497586 + 0.\, i, -0.389553 + 0.\, i, 1.\},$
$\{-5.56292 + 8.17818 \times 10^{-15}\, i, 6.9018 - 7.73409 \times 10^{-15}\, i, 1.\},$
$\{3.61268 - 4.96914 \times 10^{-16}\, i, 1.48775 + 5.28252 \times 10^{-17}\, i, 1.\}\}\}$

```
Chop[%]
```

{{6.43931, 4.66112, 0.899568}, {{-0.0497586, -0.389553, 1.},
{-5.56292, 6.9018, 1.}, {3.61268, 1.48775, 1.}}}

```
Eigenvalues[A] // N
```

$\{6.43931 + 0.\,i,\ 4.66112 - 4.44089 \times 10^{-16}\,i,\ 0.899568 + 4.44089 \times 10^{-16}\,i\}$

```
Chop[%]
```

{6.43931, 4.66112, 0.899568}

6、微积分运算

极限运算

- Limit[expr,x->x0] 求当x→x0时，表达式expr的极限
- Limit[expr,x->x0,Direction->-1] 同上，但求左极限
- Limit[expr,x->x0,Direction->1] 同上，但求右极限

•另外，在Mathematica安装目录：\AndOnes\StandardPackages\Calculus子目录下，有一个软件包Limit.m，它对极限命令Limit[]进行了各种扩展，使适用计算的函数更广。在计算极限前，最好先装入此软件包。

上页 下页 退出

```
<< Calculus`limit`
Limit[ArcSin[(1 - x) / (1 + x)], x -> +Infinity]
```

$$-\frac{\pi}{2}$$

```
Limit[(Exp[Sin[x]] - 1) / x, x -> 0]
```

$$1$$

```
Limit[(Pi - x) Tan[x], x -> Pi / 2, Direction -> 1]
```

$$\infty$$

上页 下页 退出

读入常用数学软件包的另一种方法如下：

在**Mathematica**安装目录的**\AndOnes\StandardPackages**下，附加了许多在**Mathematica**启动时没有装入到系统内部的数学软件包，它们的磁盘上的扩展名为“**.m**”，对每个软件包，都可以通过任何一个文本编辑软件如**Notebook**、**NotePad**、**Word**等打开它，研究它的用法，并通过“<<软件包目录名 该目录下的文件名 ”装入此软件包，下面是软件包的清单：**Algebra(**代数软件包**)**、**LinearAlgebra(**线性代数软件包**)**、**Statistics(**统计软件包**)**、**Culculus(**微积分软件包**)**、**DiscreteMath(**离散数学软件包**)**、**NumberTheory(**数论软件包**)**、**Geometry(**几何软件包**)**、**Graphics(**图形处理软件包**)**、**NumericalMath(**数值分析软件包**)**。另外，在每个软件包目录下，都有一个文件“**Master.m**”，如果将此软件包装入，就装入了该目录下的所有软件包。比如装入所有微积分运算方面的软件包，可使用

```
<< calculus`master`
```

导数运算

f'[x] 函数 f(x)的导数

f''[x] 函数 f(x)的二阶导数

更一般情况是下面的函数：

D[f, x] 求导数 $\frac{df}{dx}$ 或者偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$

D[f, {x, n}] 求高阶导数 $\frac{d^n f}{dx^n}$ 或者高阶偏导数 $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$

上页 下页 退出

D[f, x, y, ⋯] 求高阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^n f}{\partial x \partial y \cdots}$

D[f, x, Nonconstants->{y, z, ⋯}] 求 f 对 x 的偏导数，其中假设变量 y, z, ⋯为 x 的函数

Dt[f] 求函数 f 的全微分 df

Dt[f, x] 只求函数 f 对变量 x 的微分

Dt[f, x, Constant->{c1, c2, ⋯}] 同上，但假设 c1, c2 为常数

下面是有关导数方面的一些数学运算：

```
f[x_] := (x^2 + 1)^2 ArcTan[x]; FullSimplify[{f'[x], f''[x]}]
```

$$\{(1+x^2)(1+4x\,\mathrm{ArcTan}[x]),\ 6x+4(1+3x^2)\,\mathrm{ArcTan}[x]\}$$

```
FullSimplify[{D[f[x], x], D[f[x], {x, 2}]}]
```

$$\{(1+x^2)(1+4x\,\mathrm{ArcTan}[x]),\ 6x+4(1+3x^2)\,\mathrm{ArcTan}[x]\}$$

```
u[x_, y_] := x^3 y + x^2 y^2 - 3 x y^3;[u[x, y], {x, 2}, {y, 1}
```

$$6x+4y$$

上页 下页 退出

```
D[g[x, x y, z / x], x, NonConstants → {y, z}]
```

$$\left(-\frac{z}{x^2}+\frac{D[z, x, \text{NonConstants}\to\{y, z\}]}{x}\right) g^{(0,0,1)}\left[x, x\,y, \frac{z}{x}\right]+ (y+x\,D[y, x, \text{NonConstants}\to\{y, z\}])\, g^{(0,1,0)}\left[x, x\,y, \frac{z}{x}\right]+ g^{(1,0,0)}\left[x, x\,y, \frac{z}{x}\right]$$

```
Dt[5 y^2 + Sin[y] == x^2, x]
```

$$10\,y\,\text{Dt}[y, x]+\text{Cos}[y]\,\text{Dt}[y, x]==2\,x$$

```
Solve[%, Dt[y, x]]
```

$$\left\{\left\{\text{Dt}[y, x]\to\frac{2\,x}{10\,y+\text{Cos}[y]}\right\}\right\}$$

```
Dt[u[x, y], x]
```

$$3\,x^2\,y+2\,x\,y^2-3\,y^3+x^3\,\text{Dt}[y, x]+2\,x^2\,y\,\text{Dt}[y, x]-9\,x\,y^2\,\text{Dt}[y, x]$$

积分运算

Integrate[f, x] 求不定积分 $\int f\,dx$

Integrate[f, {x, a, b}] 求定积分 $\int_a^b f\,dx$

Integrate[f, {x, a, b}, Assumptions->expr]
允许某些限定条件

Integrate[f, {x, a, b}, {y, y1[x], y2[x]}]

求 $\int_a^b dx \int_{y1(x)}^{y2(x)} f\,dx$

上页 下页 退出

下面是积分方面的运算

```
Clear[x, y, a, b]; FullSimplify[Integrate[Exp[a x] Cos[b x], x]
```

$$\frac{e^{a x}\,(a\,\mathrm{Cos}[b\,x] + b\,\mathrm{Sin}[b\,x])}{a^2 + b^2}$$

```
Integrate[x^4 Sin[x]^7, {x, 0, Pi/2}]
```

$$\frac{18567642368}{1418090625} - \frac{89316604\,\pi}{13505625} + \frac{2161\,\pi^3}{7350}$$

下面是二重积分 $\int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} xy\,dx$

```
Integrate[x y, {y, -1, 2}, {x, y^2, y + 2}]
```

$$\frac{45}{8}$$

```
Integrate[x^n, {x, 0, 1}]
```

$$\text{If}\left[\text{Re}[n] > -1, \frac{1}{1+n}, \int_0^1 x^n \, dx\right]$$

```
Integrate[x^n, {x, 0, 1}, Assumptions → (n > 1)]
```

$$\frac{1}{1+n}$$

```
Integrate[Sin[a x] / x, {x, 0, ∞}]
```

$$\text{If}\left[\text{Im}[a] == 0, \frac{1}{2}\pi\,\text{Sign}[a], \int_0^\infty \frac{\text{Sin}[a\,x]}{x} \, dx\right]$$

```
Integrate[Sin[a x] / x, {x, 0, ∞}, Assumptions → (Im[a] == 0)
```

$$\frac{1}{2}\pi\,\text{Sign}[a]$$

级数运算

Sum[f, {i, imin, imax}] 计算符号和 $\sum_{i=i\min}^{i\max} f$

Sum[f, {i, imin, imax, di}] 同上，但步长为 di

Sum[f, {i, imin, imax, di}, {j, jmin, jmax, di}, …]

计算多重符号和，若省略 di，则默认按 1 递增

Product[f, {i, imin, imax}] 计算符号积 $\prod_{i=i\min}^{i\max} f$

Product[f, {i, imin, imax}] 计算符号积 $\prod_{i=i\min}^{i\max} f$

Product[f, {i, imin, imax, di}] 同上，但步长为 di

Product[f, {i, imin, imax, di}, {j, jmin, jmax, di}, …]
计算多重符号积，若省略 di，则默认按 1 递增

Series[f, {x, x0, n}] 求函数 f 在 x=x0 处的 n 阶泰勒展开式

Series[f, {x, x0, n}, {y, y0, m}, …]求函数 f 在 (x0, y0, …)点泰勒展开式，其中 x 展开至多为 n 阶，y 至多为 m 阶

Normal[expr]去掉泰勒展开式 expr 中的高阶无穷小项

下面是计算实例

```
Clear[i, j, n, x, f]; Sum[1/j^2, {j, 1, Infinity, 2}]
```

$$\frac{\pi^2}{8}$$

```
Sum[(-1)^(n-1)/n, {n, 1, Infinity}]
```

Log[2]

```
Sum[(-1)^n/(2n+1), {n, 0, Infinity}]
```

$$\frac{\pi}{4}$$

```
Product[x+i, {i, 0, 1, 0.2}]
```

$$x\,(0.2+x)\,(0.4+x)\,(0.6+x)\,(0.8+x)\,(1.+x)$$

```
Series[Sqrt[1+x^2], {x, 0, 5}]
```

$$1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+O[x]^6$$

```
f[x_] = Normal[%]
```

$$1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}$$

微分方程的理论解

•**DSolve[eqn,y[x],x]**求解微分方程**eqn**，其中**y**为**x**的函数

•**DSolve[{eqn,initial conditions},y[x],x]**求解含有初始条件的微分方程

•**DSolve[{eqn1,eqn2,…},{y1[t],y2[t],…},t]**求解微分方程组其中**y1[t],y2[t],…**为函数，**t**为自变量

在输入要求解的微分方程时，如果**y**为函数，**x**为自变量，则我们一般用**y[x]**表示函数本身，**y'[x]**表示函数的一阶导数，**y''[x]**表示二阶导数，**y'''[x]**表示三阶，依此类推。当然，你也可用**D[y[x],{x,n}]**的形式来输入函数的导数。在**Mathematica** 所给出的微分方程的解中，用**C[1],C[2],C[3],…**表示任意常数。

```
Clear[x, y, t]; DSolve[y'[x] == 6 x^3 y[x]^2, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x]\to -\frac{2}{3x^4-C[1]}\right\}\right\}$$

```
DSolve[x y'[x] == y[x]^2/x + y[x], y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x]\to \frac{x}{C[1]-Log[x]}\right\}\right\}$$

```
DSolve[{x^3 y'[x] == x^2 y[x] - 2 y[x]^2, y[1] == 6}, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x]\to \frac{6x^2}{-12+13x}\right\}\right\}$$

```
solution = DSolve[x^2 y''[x] + 5 x y'[x] - 2 y[x] == 0, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x]\to x^{i\sqrt{2}\left(i\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)}C[1]+x^{i\sqrt{2}\left(i\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)}C[2]\right\}\right\}$$

```
sol = FullSimplify[solution]
```

$$\left\{\left\{y[x]\to x^{-2-\sqrt{6}}\left(x^{2\sqrt{6}}C[1]+C[2]\right)\right\}\right\}$$

f[x_] = sol[[1, 1, 2]] //. {C[1] → 1, C[2] → 2}

$$x^{-2-\sqrt{6}}\left(2+x^{2\sqrt{6}}\right)$$

sol = DSolve[{y''[x] - y'[x] == 4 x e^x, y[0] == 0, y'[0] == 0}, y[x], x]

$$\left\{\left\{y[x]\to-\frac{4\,e^{x}}{-1+\mathrm{Log}[xe]}+\frac{4}{\mathrm{Log}[xe]}+\frac{4\,xe^{x}}{(-1+\mathrm{Log}[xe])\,\mathrm{Log}[xe]}\right\}\right\}$$

sol //. Log[xe] → 1 + Log[x]

$$\left\{\left\{y[x]\to-\frac{4\,e^{x}}{\mathrm{Log}[x]}+\frac{4}{1+\mathrm{Log}[x]}+\frac{4\,xe^{x}}{\mathrm{Log}[x]\,(1+\mathrm{Log}[x])}\right\}\right\}$$

DSolve[{x''[t] - 2 y[t] == t + 2, 3 y'[t] == 3 t^2}, {x[t], y[t]}, t]

$$\left\{\left\{x[t]\to\frac{1}{30}\left(30\,t^{2}+5\,t^{3}+t^{5}+30\,C[1]+30\,t^{2}\,C[2]+30\,t\,C[3]\right),\right.\right.$$
$$\left.\left.y[t]\to\frac{t^{3}}{3}+C[2]\right\}\right\}$$