分析-0（H）讲义

2024春

授课老师：周杰

笔记记录：陈天铁

目录

1 极限

1.1 序列的极限

定义 1.1.1. 将一串数 $a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n,\cdots$ 称为**序列**，视为函数 $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，记为 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

定义 1.1.2. 称实数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的**极限存在**，若：$\exists l\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n\geqslant N$

$$|a_n-l|<\varepsilon$$

或写成 $\exists l\in\mathbb{R},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$

$$n\geqslant N\Longrightarrow|a_n-l|<\varepsilon$$

此时称序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **收敛**，且极限为 l.记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$ 或 $a_n\to l\ (n\to+\infty)$.

定理 1.1.3. 数列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 之极限若存在，则必唯一.

证明. 设 $l_1,\ l_2$ 均为 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 之极限且 $l_1\neq l_2$.由定义，$\forall\varepsilon>0,\exists N=N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n\geqslant N_1$

$$|a_n-l_1|<\varepsilon$$

$\forall\varepsilon>0,\exists N=N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n\geqslant N_2$

$$|a_n-l_2|<\varepsilon$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{2}\left|l_2-l_1\right|,\ N=\max\{N_1,N_2\}$，则 $\forall n\geqslant N$

$$|a_n-l_1|<\frac{1}{2}\left|l_2-l_1\right|,\ |a_n-l_2|<\frac{1}{2}\left|l_2-l_1\right|$$

由三角不等式

$$|l_2-l_1|=|(l_2-a_n)-(l_1-a_n)|\leqslant|a_n-l_2|+|a_n-l_1|<\frac{1}{2}\left|l_2-l_1\right|+\frac{1}{2}\left|l_2-l_1\right|=|l_2-l_1|$$

矛盾！从而假设不成立，故极限唯一. □

注 1.1.4. 记 $B_\varepsilon(l)=\{x\in\mathbb{R}\big|\,|x-l|<\varepsilon\}$，则

$$|a_n-l|<\varepsilon\Leftrightarrow a_n\in B_\varepsilon(l)$$

当 $l_1\neq l_2$ 时，$\exists\varepsilon>0$，使得

$$B_\varepsilon(l_1)\cap B_\varepsilon(l_2)=\varnothing$$

故我们可以将 $B_\varepsilon(l)$ 替换为含 l 的一个邻域，这将把极限的概念推广到更一般的情形，比如拓扑空间.

下面我们来讨论极限的一些基本性质.

定理 1.1.5. 收敛列 $(a_n)_{n\in NN}$ 必有界，即 $\exists M\in\mathbb{R}$，使得 $\forall n,\ |a_n|\leqslant M$.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}=l\in\mathbb{R}$，在极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言中取定 ε，则 $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得对 $\forall n\geqslant N$

$$|a_n-l|<\varepsilon$$

即

$$|a_n|<\max\{|l+\varepsilon|\,,|l-\varepsilon|\}\overset{\triangle}{=\!=}M_1$$

另一方面，对 $n\leqslant N-1$

$$|a_n|\leqslant\max\{|a_1|\,,|a_2|\,,\cdots,|a_{N-1}|\}\overset{\triangle}{=\!=}M_2$$

取 $M=\max\{M_1,M_2\}$，则 $\forall n,\ |a_n|\leqslant M$. □

定理 1.1.6 (极限与四则运算). 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A+B \\
&\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = A-B \\
&\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = A\cdot B \\
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B},\ B\neq 0
\end{aligned}$$

证明. 仅证 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = A+B$，其余类似.由定义，$\forall\varepsilon>0, \exists N_1 = N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n \geqslant N$

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall\varepsilon>0, \exists N_2 = N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n \geqslant N$

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

现对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则对 $\forall n \geqslant N$

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},\ |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立，则

$$|(a_n+b_n)-(A+B)| \leqslant |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

定理 1.1.7 (极限与不等式定理). 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，若 $A<B$，则 $\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N,\ a_n < b_n$.

证明. 取 C 满足 $A<C<B$，取 $\varepsilon_1 = C-A>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 之定义，对 $\varepsilon_1>0,\ \exists N_1 = N_1(\varepsilon_1)\in\mathbb{N}$，使得对 $\forall n\geqslant N_1$

$$|a_n - A| < \varepsilon_1$$

取 $\varepsilon_2 = B-C>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$ 之定义，对 $\varepsilon_2>0,\ \exists N_2 = N_2(\varepsilon_2)\in\mathbb{N}$，使得对 $\forall n\geqslant N_2$

$$|b_n - B| < \varepsilon_2$$

综合上述两式知，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则对 $\forall n\geqslant N$

$$a_n < A+\varepsilon_1 = C = B-\varepsilon_2 < b_n$$

□

定理 1.1.8 (夹逼准则). 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 存在且为 l.

证明. $\forall\varepsilon>0, \exists N = N_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n\geqslant N_1$

$$|a_n - l| < \varepsilon$$

$\forall\varepsilon>0, \exists N = N_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n\geqslant N_2$

$$|c_n - l| < \varepsilon$$

故对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则 $\forall n\geqslant N$

$$|a_n - l| < \varepsilon,\ |c_n - l| < \varepsilon$$

同时成立，从而

$$l-\varepsilon<a_n\leqslant b_n\leqslant l+\varepsilon$$

即

$$|b_n-l|<\varepsilon$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=l.$ □

推论 1.1.9. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，则 $\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geqslant N$

$$\begin{aligned}a_n>b_n&\Longrightarrow A\geqslant B\\ a_n\geqslant b_n&\Longrightarrow A\geqslant B\\ a_n>B&\Longrightarrow A\geqslant B\\ a_n\geqslant B&\Longrightarrow A\geqslant B\end{aligned}$$

证明. 仅证第一条，其余类似.反设 $A<B$，由极限与不等式定理知 $\exists\tilde{N}\in\mathbb{N}$，使得对 $\forall n\geqslant\tilde{N},\ a_n<b_n$，取 $\tilde{\tilde{N}}=\max\{N,\tilde{N}\}$，则 $\forall n\geqslant N,\ a_n<b_n$，与假设矛盾! □

我们的一个自然的问题是：如何在无法猜出 l 之情形下，断言 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛？对此给出的答案是 Cauchy 收敛准则，在具体讨论之前，我们先做一些准备工作.

定义 1.1.10 (Cauchy 列)**.** 称 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 ***Cauchy* 列**，若：$\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N},$ 使得对 $\forall n,m\geqslant N$

$$|a_n-a_m|<\varepsilon$$

等价地：$\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N},$ 使得对 $\forall n\geqslant N,\ p\geqslant 0$

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$$

定理 1.1.11. 若 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，则 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 *Cauchy* 列.

证明. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N},$ 使得对 $\forall n\geqslant N$

$$|a_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}$$

特别地，$\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon),$ 使得对 $\forall n\geqslant N,\ m\geqslant N$

$$|a_n-l|<\frac{\varepsilon}{2},\ |a_m-l|<\varepsilon$$

同时成立，从而 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon),$ 使得对 $\forall n\geqslant N,\ m\geqslant N$

$$|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

□

定义 1.1.12. 对于非空集合 $X\subseteq\mathbb{R}$，定义 X 上的**上确界**、**下确界**分别为

$$\begin{aligned}\sup X&\triangleq\min\{c\in\mathbb{R}\big|\forall x\in X,\ x\leqslant c\}\\ \inf X&\triangleq\max\{c\in\mathbb{R}\big|\forall x\in X,\ x\geqslant c\}\end{aligned}$$

定理 1.1.13 (上确界原理)**.** 实数集 $\mathbb{R}$ 的任意非空有上界之子集必定有上确界，非空有下界之子集必定有下确界.

注 1.1.14. 上确界原理为实数的完备化公理的一个等价描述.

注 1.1.15. 任意集合 X 之定义格式为

$$X \xlongequal{\triangle} \{x \in \text{已知集合} | x \text{ 满足某性质} P\}$$

最初 *Cantor* 集合论中对集合的定义没有 $x \in$已知集合 这一条，导致如下对象 $T = \{x\text{为集合且 } x \notin x\}$，我们无法讨论其是否为集合.

定理 1.1.16 (闭区间套定理)**.** 对于一列闭区间套

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

则一定可以找到属于所有闭区间的点 $c \in \mathbb{R}$.若该闭区间套还满足 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $|I_k| < \varepsilon$，则 c 为所有闭区间的唯一公共点.

证明. 记闭区间 I_n 为 $I_n = [a_n, b_n]$，构造

$$X = \{a_n \in (a_n)_{n\in\mathbb{N}} | n \in \mathbb{N}\},\ Y = \{b_n \in (b_n)_{n\in\mathbb{N}} | n \in \mathbb{N}\}$$

则 X 有上确界，Y 有下确界.X 非空，有上界 ($a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$)，由上确界原理，$\sup X$ 存在.特别地，$a_n \leqslant \sup X$，同理 $\inf Y \leqslant b_n$.更进一步有

$$a_n \leqslant \sup X \leqslant \inf Y \leqslant b_n$$

取 c 为 $\sup X$ 和 $\inf Y$ 之间任一数，则由 $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ 知 $c \in I_n$.
唯一性：设存在 c_1, c_2 均满足 $\forall n$, $c_1 \in I_n = [a_n, b_n]$, $c_2 \in I_n = [a_n, b_n]$.若 $c_1 \neq c_2$，不妨设 $c_2 > c_1$，则 $\forall n$

$$a_n \leqslant c_1 < c_2 \leqslant b_n$$

从而

$$|I_n| \xlongequal{\triangle} b_n - a_n \geqslant c_2 - c_1 > 0$$

这与 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k$，使得 $|I_k| < \varepsilon$ 矛盾! □

注 1.1.17. 闭区间套定理也可推出上确界原理.

注 1.1.18. $\forall n$, I_n 为开区间，则命题不成立，比如取 $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

定理 1.1.19 (Cauchy 判别准则)**.** 若 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 *Cauchy* 列，则 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛.

证明. 设 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Cauchy 列，考察

$$x_n = \inf\{a_k \in (a_r)_{r\in\mathbb{N}} | k \geqslant n\},\ y_n = \sup\{a_k \in (a_r)_{r\in\mathbb{N}} | k \geqslant n\}$$

我们断言：x_n, y_n 存在.事实上，$\{a_k \in (a_r)_{r\in\mathbb{N}} | k \geqslant n\}$ 非空有上下界（Cauchy 列有界）.由构造

$$x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n$$

考虑闭区间套 $I_n = [x_n, y_n]$，由 Cauchy 列定义知，$y_n - x_n \to 0$ ($n \to +\infty$).由闭区间套定理知，$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 存在唯一公共点，记为 l.则 $\forall n$, $x_n \leqslant l \leqslant y_n$.
从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, 使得对 $\forall k \geqslant N$

$$a_N - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \inf_{k\geqslant N}\{a_k\} \leqslant a_k \leqslant \sup_{k\geqslant N}\{a_k\} \leqslant a_N + \frac{\varepsilon}{3}$$

进而

$$|a_k - l| \leqslant |y_N - x_N| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

由定义，$\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = l$. □

定理 1.1.20 (Weierstrass 定理)**.** 若 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 $\forall n,\ a_n \leqslant a_{n+1}$，则 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛 $\iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界.

证明. $\Longrightarrow$ 由收敛列有界即得.

$\Longleftarrow$ 由上确界原理，$\{a_n \in (a_n)_{n\in\mathbb{N}} | n \in \mathbb{N}\}$ 非空有界，从而有唯一上确界 l，即 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$，使得

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_N \leqslant l$$

由 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 单调性

$$a_N \leqslant a_n \leqslant l,\ \forall n \geqslant N$$

从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},$ 使得对 $\forall n \geqslant N$

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant a_n \leqslant l$$

即

$$|a_n - l| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. □

例 1.1.21. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$，证明 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛.

证明. 注意到

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \cdots + \binom{n}{k}\Big(\frac{1}{n}\Big)^k + \cdots + \binom{n}{n}\Big(\frac{1}{n}\Big)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1} \leqslant 3
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n+1}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n+1}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{k-1}{n+1}\Big) = a_{n+1}
\end{aligned}$$

利用Weierstrass 定理知 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛. □

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛的 $\varepsilon - \delta$ 语言：$\forall l,\ \exists \varepsilon > 0,$ 使得对 $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N$

$$|a_n - l| \geqslant \varepsilon$$

若用 Cauchy 判别准则叙述，则：$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛 $\Longrightarrow \exists \varepsilon > 0,$ 使得对 $\forall N \in \mathbb{N}, \exists m, n \geqslant N$

$$|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon$$

定理 1.1.22. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛 $\iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的所有子列收敛且收敛于同一极限.

证明. $\Longleftarrow$ 只需注意到 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为自身之子列.

$\Longrightarrow$ 由定义，$\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall n\geqslant\mathbb{N}$

$$|a_n-l|<\varepsilon$$

对子列 $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ 断言其收敛至 l，即要证：$\forall\varepsilon>0,\exists K=K(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, 使得对 $\forall k\geqslant K$

$$|a_{n_k}-l|<\varepsilon$$

取 $K(\varepsilon)=N(\varepsilon)$，则 $\forall k\geqslant K(\varepsilon)$, $n_k\geqslant k\geqslant N(\varepsilon)$，有

$$|a_{n_k}-l|<\varepsilon$$

□

例 1.1.23. $\Big(a_n=(-1)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛.

例 1.1.24. $\Big(a_n=\sin n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛.

证明. 取 $n_k=(2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{5\pi}{6})$ 中某一整数，$n_l=(2l\pi-\frac{5\pi}{6},2l\pi-\frac{\pi}{6})$ 中某一整数，则

$$a_{n_k}=\sin n_k\in(\frac{1}{2},1],\ a_{n_l}=\sin n_l\in[-1,-\frac{1}{2})$$

由定理1.1.22知 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 不收敛. □

1.2 级数

定义 1.2.1 (级数)**.** 给定序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，称求和式

$$\sum_{k=0}^{+\infty}a_n=a_0+a_1+a_2+\cdots$$

为**级数**.称级数 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k$ **收敛**，若序列 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，其中

$$S_n\xlongequal{\triangle}a_0+a_1+\cdots+a_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，记为 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k=S$.

例 1.2.2. $a_k=\frac{1}{2^k}$, $k\geqslant1$，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛.

证明. 去证：$\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon)$, 使得对 $\forall n\geqslant N$

$$|S_n-1|<\varepsilon$$

取

$$N(\varepsilon)=\left\lceil\frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{\ln 2}\right\rceil+1\in\mathbb{N}$$

则 $\forall n\geqslant N$

$$|S_n-1|=\left|-\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\right|\leqslant\Big(\frac{1}{2}\Big)^{N(\varepsilon)}=\frac{1}{2}\varepsilon<\varepsilon$$

□

注 1.2.3. 上例中利用 *Cauchy* 收敛准则同样可以证明.

命题 1.2.4 (第 N 项判别法). 若 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ 收敛，则 $\lim\limits_{N\to+\infty} a_N = 0$.

证明. 在 Cauchy 判别准则中，考虑 $S_{N+1} - S_N = a_{N+1}$ 即得. □

命题 1.2.5. 改变一个级数的有限项不影响级数敛散性.

证明. 设在级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 中改变 $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}$，其中 $n_1 < n_2 < \cdots n_k$.则在 Cauchy 判别准则的 $\varepsilon - \delta$ 语言中，将原级数中的 $N(\varepsilon)$ 替换为 $\max\{N(\varepsilon, n_k)\}$，可得新级数的 $N'(\varepsilon)$. □

定理 1.2.6. 对于非负项级数（$a_n \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$），$\sum\limits_{k=1}^{a+\infty} a_k$ 收敛 $\iff (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界.

证明. $\Longrightarrow$ 由定义，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在，故 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界.
$\Longleftarrow$ 由 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有界且单调递增（$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geqslant 0$），故由 Weierstrass 定理知 $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛. □

例 1.2.7. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ 收敛于 $e \xlongequal{\triangle} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

证明. 令

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

则由牛顿二项式公式知

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big) \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = S_n \end{aligned}$$

另一方面，对给定的 n，当 $k \geqslant n$ 时

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{k}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{k}\Big) \\ \leqslant &1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{k}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{k}\Big) \end{aligned}$$

左右两边对 $k \to +\infty$ 取极限得

$$S_n \leqslant \lim_{k\to\infty} e_k = e$$

结合 $e_n \leqslant S_n$ 则 $e_n \leqslant S_n \leqslant e$，而 $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n = e$，由夹逼准则知

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = e$$

□

例 1.2.8. 下面我们来讨论一下芝诺悖论：在一条直线（x 轴）上，勇士初始位置在 0，以 v_2 的速度向正方向运动；乌龟初始位置在 $L(L>0)$，以 v_1 的速度向正方向运动，且 $v_1 < v_2$.芝诺悖论说，勇士永远追不上乌龟，因为每当勇士到达乌龟之前所在位置时，乌龟又往前移动一段距离，具体可见以下表格.
此悖论产生的原因是：衡量勇士追上乌龟的标准是时间而不是步数，事实上，在 $T = \frac{L}{v_2 - v_1}$ 时刻，勇士和乌龟在同一位置，故能追上.
由此我们可以问：在什么意义下，勇士追不上乌龟？变为数学语言即，是否存在一个度量，使得在该度量下，T 的长度为无穷？
对此，我们给出的回答是，可以采用 p 进赋值的度量，具体细节在此不多展开.

	勇士位置	乌龟位置	时刻
0th	0	L	0
1st	L	$L+\frac{L}{v_2}v_1$	$\frac{L}{v_2}$
2nd	$L+\frac{L}{v_2}v_1$	$L+\frac{L}{v_2}v_1+L\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2$	$\frac{L}{v_2}\frac{v_1}{v_2}+\frac{L}{v_2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
nth	$L+L\frac{v_1}{v_2}+\cdots+L\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}$	$L+L\frac{v_1}{v_2}+\cdots+L\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n}$	$\frac{L}{v_2}+\frac{L}{v_2}\frac{v_1}{v_2}+\cdots+\frac{L}{v_2}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}$

定理 1.2.9 (比较判法). 设 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{a+\infty} b_k$ 均为非负项级数，设 $\exists M\in\mathbb{N}$，使得 $\forall k\geqslant M$, $a_k\leqslant b_k$，则

(1) $\sum b_k$ 收敛 $\Longrightarrow \sum a_k$ 收敛.

(2) $\sum a_k$ 发散 $\Longrightarrow \sum b_k$ 发散.

证明. (1) 由于改变级数的有限项不改变级数的敛散性，故只需对级数 $\sum\limits_{k\geqslant M} a_k$, $\sum\limits_{k\geqslant M} b_k$ 证明上述结论.不妨设 $a_k\leqslant b_k$, $\forall k\geqslant 1$ (重新定义指标)，此时

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k\leqslant \sum_{k=1}^{n} b_n = T_n$$

从而 $\sum b_k$ 收敛 $\Longrightarrow T_n$ 单调递增于 T，特别地，(T_n) 有界 T.故 $S_n\leqslant T$，由Weierstrass 定理知，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在.
(2) 直接利用 (1) 逆否命题. □

命题 1.2.10 (结合律). 给定序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$，假设 ①$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots$ 收敛. ②括号中的项符号相同.则 $\sum a_n$ 收敛.

证明. 令 $b_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$，考察 $\sum a_n$ 的部分和 $S_m=a_1+\cdots+a_m$，则存在 $k=k(m)$，使得

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - S_m = \cdots + a_{n_k}) + (a_{n_k+1}+\cdots+a_{n_{k+1}})+\cdots$$

当 $a_{n_k}\geqslant 0$ 时

$$b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - S_m\leqslant b_k+b_{k+1}+\cdots$$

当 $a_{n_k}\leqslant 0$ 时

$$b_k+b_{k+1}+\cdots\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - S_m\leqslant b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots$$

注意到

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - S_m\right|\leqslant \max\{|b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots|\,,|b_k+b_{k+1}+\cdots|\} \tag{1.2.1}$$

我们断言：当 $m\to+\infty$ 时，$k(m)\to+\infty$. 反设不成立，即 $m\to+\infty$ 时，$\big(k(m)\big)_m$ 有界，则 n_k 有界，与 $n_{k+1}\geqslant n_k+1$ 矛盾!
对(1.2.1)取极限 $m\to+\infty$ 知

$$\lim_{m\to+\infty}\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n - S_m\right|\leqslant \max\{\lim|b_k+b_{k+1}+\cdots|\,,\lim|b_{k+1}+b_{k+2}+\cdots|\}=0$$

故命题得证. □

注 1.2.11. 若 ② 不成立，则 $\sum a_n$ 可能不收敛，如：$\big(1+(-1)\big)+\big(1+(-1)\big)+\cdots$.

注 1.2.12. $\sum a_n$ 收敛 $\Longrightarrow \sum b_k$ 收敛，其中 $b_k = (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k})$.

命题 1.2.13. 设 $\sum a_k$ 满足 $\sum |a_n|$ 收敛，则重排该级数 $\sum a_n$ 后得到的新级数 $\sum b_m$ 也收敛，更强地，$\sum |b_m|$ 也收敛，且级数和 $\sum b_m = \sum a_n$.

命题 1.2.14. $\sum |a_n|$ 收敛 $\Longrightarrow \sum a_n$ 收敛.

证明. $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},$ 使得对 $\forall n \geqslant N, m \geqslant 0$

$$\big| |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| \big| < \varepsilon$$

故 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N},$ 使得对 $\forall n \geqslant N, m \geqslant 0$

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}| \leqslant \big| |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+m}| \big| < \varepsilon$$

由 Cauchy 判别准则知命题成立. □

注 1.2.15. 反之不成立.

1.3 函数的极限

定义 1.3.1 ($\varepsilon - \delta$ 语言)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，我们说 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$，若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, l),$ 使得对 $\forall |x - a| < \delta,\ x \neq a$

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

等价地，$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathring{B}_\delta(a)$，使得

$$f\big(\mathring{B}_\delta(a)\big) \subseteq B_\varepsilon(l)$$

注 1.3.2. 在 $\varepsilon - \delta$ 语言中，要求 $x \neq a$，原因是：我们希望形如 $f(x) = \begin{cases} 0\ ,\ x \neq 0 \\ 1\ ,\ x = 0 \end{cases}$ 的极限存在.

上式中我们所取邻域仅为开球 $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} \big| |x - a| < \delta\}$ 与去心开球 $\mathring{B}_\delta(a) = B_\delta(a) \backslash \{a\}$ 两类，但事实上我们可以更一般化.

定义 1.3.3 (邻域)**.** 设 $a \in \mathbb{R}$，称含 a 的一个开区间为 a 的一个**邻域**，记作 $U(a)$.称含 a 的一个开区间除去 $\{a\}$ 为 a 的一个**去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a)$.

定义 1.3.4 (函数极限的邻域定义)**.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，我们说 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$，若 $\forall U(l),\ \exists \mathring{U}(a)$，使得

$$f\big(\mathring{U}(a)\big) \subseteq U(l)$$

命题 1.3.5. $\varepsilon - \delta$ 语言的函数极限定义 $\Longleftrightarrow$ 邻域语言下的函数极限定义.

证明. $\Longleftarrow$ 对 $\forall B_\varepsilon(l)$，在邻域语言中取 $U(l)$ 为 $B_\varepsilon(l)$，则由邻域语言下函数极限存在知 $\exists \mathring{U}(a)$，使得

$$f\big(\mathring{U}(a)\big) \subseteq B_\varepsilon(l)$$

由去心邻域定义知，$\exists \mathring{B}_\delta(a) \subseteq \mathring{U}(a)$，特别地

$$f\big(\mathring{B}_\delta(a)\big) \subseteq f\big(\mathring{U}(a)\big) \subseteq B_\varepsilon(l)$$

$\Longrightarrow$ 对 $\forall U(l)$，在 $\varepsilon - \delta$ 语言中取 $B_\varepsilon(l) \subseteq U(l)$，则由 $\varepsilon - \delta$ 语言下函数极限存在知 $\exists \mathring{B}_\delta(a)$，使得

$$f\big(\mathring{B}_\delta(a)\big) \subseteq B_\varepsilon(l)$$

取 $\mathring{U}(a) = B_\delta(a)$，则

$$f\big(\mathring{U}(a)\big) = f\big(\mathring{B}_\delta(a)\big) \subseteq B_\varepsilon(l) \subseteq U(l)$$

□

注 1.3.6. 两种定义各有千秋，邻域语言更利于推广；$\varepsilon-\delta$ 语言给出误差的估计，从而更精细.

回到数列极限，$a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a(n)=l$ 定义即为 $\forall\varepsilon>0,\exists N=N(\varepsilon;l)$, 使得对 $\forall n\geqslant N$

$$|a(n)-l|<\varepsilon$$

等价于 $\forall B_\varepsilon(l)$, $\exists\mathring{B}_N(\infty)=\{n\in\mathbb{N}|n>N\}$，使得

$$a\big(\mathring{B}(\infty)\big)\subseteq B_\varepsilon(l)$$

其中 $\mathring{B}(\infty)$ 可被视为 ∞ 的一个去心邻域.从而我们可以用邻域的语言统一极限.

定义 1.3.7. 设 $a\in\mathbb{R}$，称 a 为 X 的**极限点**（不要求 $a\in X$），若

$$\mathring{U}(a)\cap X\neq\varnothing,\ \forall\mathring{U}(a) \tag{1.3.1}$$

例 1.3.8. $a=0$, $X=\{\frac{1}{n}\}_{n\geqslant1}$，则 a 为 X 之极限点；$a=0$, $X=\{0,\frac{1}{n}\}_{n\geqslant1}$，则 a 也为 X 之极限点.

若 (1.3.1) 被替换为 $\exists\mathring{U}(a)$, $\mathring{U}(a)\cap X\neq\varnothing$，则有可能 $\exists\mathring{U}'(a)$, $\mathring{U}'(a)\cap X=\varnothing$，从而对 $\forall\mathring{B}_\delta(a)\subseteq\mathring{U}'(a)$, $\mathring{B}_\delta(a)\cap X=\varnothing$，故在该意义下定义 f 之极限不能反映 $|x-a|<\delta$, $x\neq a$, $x\in X$ 上 f 取值的任何信息.

命题 1.3.9. 若 a 为 X 之极限点，则对 $\forall\mathring{U}_{\mathbb{R}}(a)$, $\mathring{U}_X(a)=\mathring{U}_{\mathbb{R}}(a)\cap X$ 含 X 中无限个点.

证明. 反设存在某 $\mathring{U}_{\mathbb{R}}(a)$，使得 $\mathring{U}_X(a)=\{a_1,\cdots a_N\}$ 仅有有限个点.取 $\delta=\min\limits_{i\in\{1,\cdots N\}}\{|a_i-a|\}$，从而 $\mathring{B}_\delta(a)$ 为 a 的去心邻域，而 $B_\delta(a)\cap X=\varnothing$，与极限点定义矛盾！ □

命题 1.3.10. $f:X\to\mathbb{R}$，a 为 X 之极限点，则 $\lim\limits_{x\to a,\,x\in X}f(x)=l\Longleftrightarrow$ 任意 $X\backslash\{a\}$ 之序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$，当 $x_n\to a$ 时有 $f(x_n)\to l$, $n\to+\infty$.

证明. $\Longrightarrow$ 由定义，$\forall U(l)$, $\exists\mathring{U}_X(a)$，使得

$$f\big(\mathring{U}_X(a)\big)\subseteq U(l)$$

若 $x_n\to a$, $x_n\in X\backslash\{a\}$，则 $\exists N\in\mathbb{N}$，使得对 $\forall n>N$

$$x_n\in\mathring{U}_X(a)$$

从而 $\exists N\in\mathbb{N}$，使得对 $\forall n>N$

$$f(x_n)\in f\big(\mathring{U}_X(a)\big)\subseteq U(l)$$

即 $\lim\limits_{x_n\to a}=l$.

$\Longleftarrow$ 反证：设 l 不为极限（极限不存在或存在但不是 l），则 $\exists U(l)$, 使得对 $\forall\mathring{U}_X(a),\exists x\in\mathring{U}_X(a)$

$$f(x)\notin U(l)$$

取 $\mathring{U}_X(a)=\mathring{B}_1(a)$，则存在 $x_1\in\mathring{B}_1(a)$

$$f(x_1)\notin U(l)$$

再取 $\mathring{U}_X(a)=\mathring{B}_{\min\{\frac{1}{2}|x_1-a|,\frac{1}{2}\}}(a)$，则存在 $x_2\in\mathring{B}_{\min\{\frac{1}{2}|x_1-a|,\frac{1}{2}\}}(a)$

$$f(x_2)\notin U(l)$$

从而存在 $x_n\in B_{\frac{1}{n}}(a)$

$$f(x_n)\notin U(l)$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，而 $f(x_n)\notin U(l)$，这与 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$ 矛盾！ □

上述命题实际上告诉我们有如下事实：函数极限与四则运算、不等式之关系和序列极限与四则运算、不等式之关系是一致的.比如若 $\lim\limits_{x\to a,\,x\in X}f(x)$ 存在，则极限唯一.

1.4 基上的极限

定义 1.4.1. 由集合 X 的某些子集 $B \subseteq X$ 组成的子集族 $\mathcal{B}$ 称为 X 上的一个基，若 $\mathcal{B}$ 满足：

(1) $\forall B \in \mathcal{B},\ B \neq \varnothing$

(2) $\forall B', B'' \in \mathcal{B},\ \exists B \in \mathcal{B},\ B \in B' \cap B''$

例 1.4.2. $\mathcal{B} = \{B_N = \{x \in \mathbb{R} | x > N\}\}_{N \in \mathbb{R}}$ 构成了 $\mathbb{R}$ 上的一个基，记为 $x \to +\infty$.
$\mathcal{B} = \{B_N = \{x \in \mathbb{N} | x > N\}\}_{N \in \mathbb{N}}$ 构成了 $\mathbb{N}$ 上的一个基.

定义 1.4.3 (基上的极限)**.** 对函数 $f : X \to \mathbb{R}$，设 $\mathcal{B}$ 为 X 上的一个基，我们称 $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = l$ 是说 $\forall V(l),\ \exists B \in \mathcal{B}$，使得

$$f(B) \subseteq V(l)$$

下面是更多基的例子.

基 $\mathcal{B}$ 中的元素 B	$\mathcal{B}$ 之记号
$\mathring{U}_{\mathbb{R}}(a) : \mathbb{R}$ 中 a 的去心邻域	$x \to a$
$\mathring{B}_{\delta}(a)$: 去心开球	$x \to a$
$\mathring{U}_X(a) : X$ 中 a 的去心邻域	$x \to a,\ x \in X$
$\{x \in \mathbb{R} \| x > N\}$	$x \to +\infty$
$\{x \in \mathbb{R} \| x > N\} \cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \| n > N\}$	$n \to +\infty$
$\{x \in \mathbb{R} \| x > N\} \cap X$	$x \to +\infty,\ x \in X$
$\{x \in \mathbb{R} \| x < -N\}$	$x \to -\infty$
$U_{\mathbb{R}}(a)\ B_{\delta}(a)$	连续性
$B(\xi_0, \cdots, \xi_n, \delta) = \{(\xi_0, \cdots, \xi_n) \in [a,b]^{n+1} \big\| \max \|\xi_{i+1} - \xi_i\| < \delta\}$	Riemann 积分

定理 1.4.4 (复合函数极限定理)**.** 设 $f : x \to Y,\ g : Y \to \mathbb{R}(X, Y \subseteq \mathbb{R})$，设在 X 上有基 $\mathcal{B}_X$，Y 上有基 $\mathcal{B}_Y$，且 $\lim\limits_{\mathcal{B}_Y} g$ 存在，且 $\forall B_Y \in \mathcal{B}_Y,\ \exists B_X \in \mathcal{B}_X$，使得

$$f(B_X) \subseteq B_Y$$

则 $g \circ f$ 在基 $\mathcal{B}_X$ 下极限存在，且

$$\lim_{\mathcal{B}_X} (g \circ f) = \lim_{\mathcal{B}_Y} g$$

证明. 设 $\lim\limits_{\mathcal{B}_Y} g(y) = l$，下证 $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} g \circ f(x) = l$.由定义，$\forall V(l),\ \exists B_Y \in \mathcal{B}_Y$，使得

$$g(B_Y) \subseteq V(l)$$

由题设，可找到 $B_X \subseteq \mathcal{B}_X$，使得

$$f(B_X) \subseteq B_Y$$

此时

$$(g \circ f)(B_X) = g\big(f(B_X)\big) \subseteq g(B_Y) \subseteq V(l)$$

即 $\forall V(l),\ \exists B_X \in \mathcal{B}_X$，使得

$$(g \circ f)(B_X) \subseteq V(l)$$

得证. □

例 1.4.5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

证明. 取 $X=\mathbb{R}_+$, $Y=\mathbb{N}$，X 上的基 $\mathcal{B}_X=x\to+\infty$，$Y$ 上的基 $\mathcal{B}_Y=n\to+\infty$.考虑

$$\begin{aligned} X \longrightarrow & Y \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto & [x] \\ & n \longmapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

断言：$B_Y\in\mathcal{B}_Y$, $\exists B_X\in\mathcal{B}_x$，使得

$$f(B_X)\subseteq B_Y$$

这是显然成立的，因为对 $B_N=\{n\in\mathbb{N}|n>N\}$ 只需找 $B_{N+1}=\{x\in\mathbb{R}|x>N+1\}$ 即可.另一方面

$$g(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ g_1(n)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n,\ g_2(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

满足

$$\lim_{\mathcal{B}_Y}g(n)=\lim_{\mathcal{B}_Y}g_1(n)=\lim_{\mathcal{B}_Y}g_2(n)=e$$

由复合函数极限定理知 $g\circ f$, $g_1\circ f$, $g_2\circ f$ 极限存在，且均为 e.注意到

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

由夹逼准则知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

另一方面

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t-\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=e$$

得证. □

定义 1.4.6 (连续)**.** 设 $f:X\to\mathbb{R}$, $a\in X$，称 f 在点 a 处**连续**，若

- $\varepsilon-\delta$ 语言：$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得

$$x\in B_\delta(a)\cap X\Longrightarrow f(x)\in B_\varepsilon\big(f(a)\big)$$

  等价地，$\forall B_\varepsilon\big(f(a)\big)$, $\exists B_\delta(a)\cap X$，使得

$$f\big(B_\delta(a)\cap X\big)\subseteq B_\varepsilon\big(f(a)\big)$$

- 邻域语言：$\forall V\big(f(a)\big)$, $\exists U_x(a)$，使得

$$f\big(U_X(a)\big)\subseteq V\big(f(a)\big)\Big(\Longleftrightarrow U_X(a)\subseteq f^{-1}\big(V(f(a))\big)\Big)$$

注 1.4.7. 当 a 不为 X 之极限点时（即 $\exists\mathring{U}_X(a)=\varnothing\Longleftrightarrow\exists U_X(a)\cap X=\{a\}$），则 f 在 a 处必连续.

注 1.4.8. 当点 a 为 X 之极限点时，我们断言：f 在点 a 连续 $\Longleftrightarrow\lim\limits_{x\to a,\,x\in X}f(x)$ 存在且值为 $f(a)$.

证明. $\Longrightarrow$ $\forall V\big(f(a)\big)$, $\exists U_X(a)$，使得

$$f\big(U_X(a)\big)\subseteq V\big(f(a)\big)$$

由于 a 为极限点，故 $\forall\mathring{U}_X(a)\neq\varnothing$，故谈极限有意义.取 $\mathring{U}_X(a)=U_X(a)\backslash\{a\}$，故 $\forall V\big(f(a)\big)$, $\exists\mathring{U}_X(a)$，使得

$$f\big(\mathring{U}_X(a)\big)\subseteq f\big(U_X(a)\big)\subseteq V\big(f(a)\big)$$

故

$$\lim_{x\to a,\ x\in X} f(x) = f(a)$$

$\Longleftarrow \forall V\big(f(a)\big)$, $\exists \mathring{U}_X(a)$，使得

$$f\big(\mathring{U}_X(a)\big) \subseteq V\big(f(a)\big)$$

故

$$f\big(U_X(a)\big) = f\big(\mathring{U}_X(a)\cup\{a\}\big) = f\big(\mathring{U}_X(a)\big)\cup\{f(a)\} \subseteq V\big(f(a)\big)$$

即 f 在点 a 连续. $\square$

若取基 $\mathcal{B}_a = \{U_X(a)\}$，则 f 在 a 处连续定义为 $\lim\limits_{\mathcal{B}_a} f$ 存在.

定义 1.4.9. *称 $f: X\to\mathbb{R}$ 在 X 上*__连续__*，若 f 在任意一点 $a\in X$ 处连续.若 $f: X\to\mathbb{R}$ 在点 a 处不连续，则称 a 为 $f: X\to\mathbb{R}$ 之*__间断点__*.*

下面是间断点在三种不同语言下的叙述方式.

- $\exists\varepsilon > 0,$ 使得对 $\forall\delta > 0, \exists x\in X,\ |x-a| < \delta$

$$|f(x) - f(a)| > \varepsilon$$

- $\exists B_\varepsilon\big(f(a)\big),$ 使得对 $\forall B_\delta\cap X, \exists x\in B_\delta(a)\cap X$

$$f(x)\notin B_\varepsilon\big(f(a)\big)$$

- $\exists V\big(f(a)\big)$, 使得对 $\forall U_X(a)$

$$f\big(U_X(a)\big)\nsubseteq V\big(f(a)\big)$$

例 1.4.10. *Dirichlet 函数*

$$\begin{aligned} D:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0\ ,\ x\in\mathbb{Q} \\ 1\ ,\ x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

在任意点不连续.
Riemann 函数

$$\begin{aligned} R:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \frac{1}{n}\ ,\ x = \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\backslash\{0\},\ (m,n)=1,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N} \\ 0\ ,\ x\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cup\{0\} \end{cases} \end{aligned}$$

在有理点不连续，无理点连续.

1.5 连续函数的局部性质与整体性质

定理 1.5.1. *设 $f: X\to\mathbb{R}$ 在 $a\in X$ 处连续，则*

(1) f 在某邻域/开球 $U_X(a)$ 上有界.

(2) 若 $f(a)\neq 0$，则在某邻域 $U_X(a)$ 上恒正或恒负.

(3) 连续函数的四则运算仍为连续函数.

(4) 设 $g: Y \to \mathbb{R}$ 在 $f(a)$ 处有定义且连续，则 $g \circ f$ 在点 a 处连续.

证明. 由定义，f 在点 a 连续即 $\lim\limits_{\mathcal{B}_a} f$ 存在，其中 $\mathcal{B}_a = \{U_X(a) \subseteq X\}$，故上述四条均可通过极限的性质得到. □

定理 1.5.2 (Bolzano-Cauchy 介值定理)**.** 若 $X = [a, b]$，且 $f: X \to \mathbb{R}$ 连续，$f(a)f(b) < 0$，则 $\exists c \in [a, b]$，使得 $f(c) = 0$.

证明. 将闭区间 $I_1 = [a, b]$ 平分为两个闭区间，考察 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$，则已证毕.否则存在一个闭区间使 f 在两端点取值异号，记该区间为 I_2.重复该操作，则或者在有限步内找到 c，使得 $f(c) = 0$，或者得到无穷闭区间套

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$$

由构造，

$$|I_n| = \frac{1}{2^n} |I_1|$$

故 $n \to +\infty$ 时，$|I_n| \to 0$.由 闭区间套定理知

$$\bigcap_{n \geqslant 1} I_n = \{c\}$$

该点 c 满足 $\forall n,\ I_n = [a_n, b_n] \ni c,\ a_n \to c,\ b_n \to c,\ f(a_n)f(b_n) < 0$ 由 f 之连续性可知

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(c) = \lim_{n \to \infty} f(b_n)$$

由极限与不等式四则运算关系得

$$\big(f(c)\big)^2 \leqslant 0 \Longrightarrow f(c) = 0$$

□

推论 1.5.3. 设 $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ 连续，且 $a, b \in (a_0, b_0)$，$f(a) = A$，$f(b) = B$，则对任意介于 A 与 B 间的数 C，$\exists c$ 在 a, b 之间，使得

$$f(c) = C$$

例 1.5.4 (平分蛋糕)**.** 对于一条好的曲线围成的区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$，能找到直线 L，将 Ω 面积平分.

证明. 考虑 Ω 外一点 P，作任意直线 L_0 使 $L_0 \cap \Omega = \varnothing$.对过点 P 之直线 L，令从 L_0 至 L 的夹角（逆时针方向为正）为 θ.定义

$$\begin{aligned} f_+ : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto f_+(\theta) = \Omega\text{在}L\text{左侧之面积} \end{aligned}$$

合理假设曲线使 f_+ 为连续函数.同理定义 f_- 由 Ω 在 L 右侧之面积定义.令 $g = f_+ - f_- : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$，则 g 连续.由 Ω 有界知 $\exists \theta_1 < 0$，使得 $g(\theta_1) < 0$；$\exists \theta_2 > 0$，使得 $g(\theta_2) > 0$.
利用Bolzano-Cauchy 介值定理知 $\exists \xi$ 在 θ_1, θ_2 之间，使得 $g(\xi) = 0$. □

在讨论连续函数的下一个性质之前，我们先来看一个引理.

引理 1.5.5 (开覆盖引理)**.** 对任意一个覆盖闭区间 I 的开区间族 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ 均存在一个有限子族覆盖 I.

证明. 记 $I_1 = [a, b] = I$.若 I_1 不能被 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ 的有限子族覆盖，则 $[a, \frac{a+b}{2}], [\frac{a+b}{2}, b]$ 中至少有一个不能被有限覆盖，记之为 I_2.重复该过程，得无限闭区间套

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots,\ |I_n| = \frac{1}{2^{n-1}} |I_1|$$

由闭区间套定理知

$$\bigcap_{n\geqslant 1} I_n = \{c\}$$

由于 $c \in I_1 \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$，故存在 α_*，使得 $c \in U_{\alpha_*}$.故存在开球 $B_\delta(c) \subseteq U_{\alpha_*}$（由 U_{α_*} 为开区间之性质）.
而 $|I_n| \to 0,\ n \to +\infty$，故 $\exists N \in \mathbb{N}$，使得 $|I_n| < \frac{\delta}{2}$.故 $I_n \subseteq B_\delta(c) \subseteq U_{\alpha_*}$.这与 I_n 不能被有限覆盖矛盾！

□

定理 1.5.6 (Weierstrass 最大值定理)**.** $f : X = [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续，则 f 在 $[a,b]$ 有界，且在 $[a,b]$ 上能取到最大值、最小值.

证明. 由连续函数得局部性质可知 $\forall x \in X,\ \exists U_X(x)$，使得 $|f|$ 在 $U_X(x)$ 上有界，记为 M_x.则

$$X = [a,b] \subseteq \bigcup_{x\in[a,b]} U_X(x)$$

由开覆盖引理知，存在 $\bigcup\limits_{x\in[a,b]} U_X(x)$ 之有限子族 $U_X(x_1), \cdots U_X(x_n)$ 覆盖 X.则在 X 上

$$|f| \leqslant \max\{M_{x_1}, \cdots M_{x_n}\}$$

从而 f 在 X 上有界.
考察函数

$$\begin{aligned} g = \sup_{x\in X} f(x) - f : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto M - f(x) \end{aligned}$$

由连续函数与四则运算之关系得，g 与 $\frac{1}{g}$ 均连续.反设 M 不能被取到，则 g 在 X 上处处非 0.
另一方面，由上确界定义，g 可无限接近于 0.从而 $\frac{1}{g}$ 连续与 $\frac{1}{g}$ 在 $X = [a,b]$ 无界矛盾！故 M 能被取到.
同理，下确界 m 可被取到.

□

我们可以问：对于 $f : X \to Y$，何种 X, Y 上的结构能定义 f 之极限与连续性？对此，我们讨论拓扑空间。

定义 1.5.7 (拓扑与拓扑空间)**.** 称集合 X 的一个子集族 $\mathcal{U}$ 为一个**开集族**，U 中子集为**开集**，若 U 满足：

- $\varnothing \in \mathcal{U},\ X \in \mathcal{U}$
- $\forall U_1, \cdots U_n \in \mathcal{U} \Longrightarrow U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{U}$
- $\forall U_\alpha \in \mathcal{U} \Longrightarrow \bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \mathcal{U}$

称 $\mathcal{U}$ 中元素 U 之补集为**闭集**.称 $\mathcal{U}$ 为集合 X 上的一个**拓扑**（一个**拓扑结构**），称 $(X,\mathcal{U})$ 为一个**拓扑空间**.

例 1.5.8. 离散拓扑：$X = \mathbb{R},\ \mathcal{U} = \{U \subseteq X | U \text{ 任意}\}$.
Zariski 拓扑：$X = \mathbb{R},\ \mathcal{U} = \{U \subseteq X | U^c \text{ 为有限集}\} \cup \{\varnothing\}$

定义 1.5.9 (连续函数)**.** 设 $(X,\mathcal{U}_X)$, $(Y,\mathcal{U}_Y)$ 为拓扑空间，称 $f : X \to Y$ 在 $a \in X$ **连续**，若任意 Y 中含 $f(a)$ 之开集 $V_Y\big(f(a)\big)$，存在 X 中含 a 之开集 $U_X(a)$ 使得

$$f\big(U_X(a)\big) \subseteq V_Y\big(f(a)\big)$$

定理 1.5.10. f 连续 $\Longleftrightarrow$ 开集在 f 下之原像为开集.

证明. $\Longleftarrow$ 只需证 $\forall a\in X$，f 在 a 处连续，即 $\forall V_Y\big(f(a)\big)\in\mathcal{U}_Y$, $\exists U_X(a)\in\mathcal{U}_X$ 使得

$$f\big(U_X(a)\big)\subseteq V_Y\big(f(a)\big)$$

由假设 $f^{-1}\Big(V_Y\big(f(a)\big)\Big)$ 为 $(X,\mathcal{U})$ 中开集，且 $a\in f^{-1}\Big(V_Y\big(f(a)\big)\Big)$.取 $U_X(a)=f^{-1}\Big(V_Y\big(f(a)\big)\Big)$ 满足条件.
$\Longrightarrow$ 设 $V\in\mathcal{U}_Y$，要证 $f^{-1}(V)\in\mathcal{U}_X$.任取 $a\in f^{-1}(V)$，在 f 在 a 处连续之定义中取 $V_Y\big(f(a)\big)=V$，则 $\exists U_X(a)\in\mathcal{U}_X$

$$U_X(a)\subseteq f^{-1}(V)$$

考察 $\bigcup\limits_{a\in f^{-1}(V)}U_X(a)\subseteq f^{-1}(V)$.另一方面，$f^{-1}(V)=\{a\in f^{-1}(V)\}\subseteq\bigcup\limits_{a\in f^{-1}(V)}U_X(a)$.综合两式得

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{a\in f^{-1}(V)}U_X(a)$$

为开集. □

事实上，我们先前讨论的实数上的连续函数的性质可将 $(Y,\mathcal{U}_Y)$ 取成 ($\mathbb{R}$,经典拓扑/标准拓扑)，其中 ($\mathbb{R}$,经典拓扑) 的定义为：$\mathcal{U}_{\text{经典}}=$ 从非空开区间族出发，通过任意并、有限交运算构成的子集族 $=$ 从非空开球族出发，通过任意并、有限交运算构成的子集族.

注 1.5.11. 只要求 $\mathcal{U}$ 对有限交运算封闭，比如 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_+}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$ 不为开集.

命题 1.5.12. ① $U\in\mathcal{U}_{\text{经典}}\iff U$ 为至多可数个不交开区间的并.② $U\in\mathcal{U}_{\text{经典}}\iff\forall x\in U,\ \exists B_\delta(x)\subseteq U$（称为性质 $\mathcal{P}$）

证明. ② $\Longrightarrow$ 性质 $\mathcal{P}$ 对非空开球成立，且对任意并、有限交性质保持，故性质 $\mathcal{P}$ 对 $\mathcal{U}_{\text{经典}}$ 中元素都成立.
$\Longleftarrow$ 首先，$U\subseteq\bigcup\limits_{x\in U}B_\delta(x)$.由性质 $\mathcal{P}$，$\forall x\in U,\ \exists\delta=\delta(x)$，使得 $B_\delta(x)\subseteq U$.从而 $\bigcup\limits_{x\in U}B_\delta(x)\subseteq U$.另一方面，$U\subseteq\bigcup\limits_{x\in U}B_\delta(x)$，故

$$U=\bigcup_{x\in U}B_\delta(x)$$

由 $\mathcal{U}_{\text{经典}}$ 之定义，U 为开集. □

定义 1.5.13 (连通性). 称 $(X,\mathcal{U})$ 为**连通空间**，若 X 不能写成两个不交非空开集的并.

定理 1.5.14 (Bolzano-Cauchy 介值定理). 设 f 连续，且 $(X,\mathcal{U}_X)$ 为连通空间，则 f 满足 *Bolzano-Cauchy* 介值定理（$f(a)f(b)<0\Longrightarrow\exists c\in X,\ f(c)=0$）.

证明. 令

$$U_1=\{x\in X|f(x)>0\}\neq\varnothing,\ U_2=\{x\in X|f(x)<0\}\neq\varnothing\ (f(a)f(b)<0)$$

由 f 连续性知 $U_1=f^{-1}\big((0,+\infty)\big)$ 与 $U_2=f^{-1}\big((-\infty,0)\big)$ 均为 X 中开集.
反设 $\forall x\in X,\ f(x)\neq 0$，则 $X=U_1\cup U_2,\ U_1\cap U_2=\varnothing,\ U_1\neq\varnothing,\ U_2\neq\varnothing$，与 X 连通性矛盾!
故 $\exists c\in X$，使得 $f(c)=0$. □

命题 1.5.15. $(\mathbb{R},\mathcal{U}_{\text{经典}})$ 为连通的拓扑空间.

证明. 设 $\mathbb{R}=U_1\cup U_2,\ U_1\neq\varnothing,\ U_2\neq\varnothing,\ U_1\cap U_2\neq\varnothing,\ U_1,U_2$ 为开集.任取 $x\in U_1$，考察

$$\{y\in U_2|y<x\},\ \{y\in U_2|y>x\}$$

由假设，这两个集合中必有一个非空，不妨设后者非空，考察

$$Y=\{z\in\mathbb{R}\big|z\geqslant x,\ [x,z)\subseteq U_1\}$$

集合 Y 有上界，比如 $y+1$，且 Y 非空，因为由 $x \in U_1$ 知 $\exists B_\delta(x) \subseteq U_1$，可取 $x+\frac{\delta}{2} \in Y$.由上确界原理知，Y 存在上确界 M.
若 $M \in U_1$，由 U_1 为开集，$\exists B_\varepsilon(M) \subseteq U_1$，故 $M+\frac{\varepsilon}{2} \in U_1$，与 M 为上确界矛盾！
若 $M \in U_2$，由 U_2 为开集，$\exists B_\rho(M) \subseteq U_2$，特别地，$(M-\frac{\rho}{2}, M) \subseteq U_2$，与 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ 矛盾！
故 $\mathbb{R}$ 连通. $\square$

定理 1.5.16. 设 $f:(X,\mathcal{U}_X) \to (\mathbb{R},\mathcal{U}_{经典})$ 连续，设 $(X,\mathcal{U}_X)$ 满足开覆盖引理（称为紧性），则 *Weierstrass* 最大值定理成立.

证明. 重复 $(X,\mathcal{U}_X) = (\mathbb{R},\mathcal{U}_{经典})$ 时之推理. $\square$

注 1.5.17. $(I=[a,b] \subseteq \mathbb{R}, 经典拓扑)$ 满足开覆盖引理.

2 微分

2.1 函数的可微性

以下我们约定 $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，其中 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ 赋予经典拓扑.

定义 2.1.1 (无穷小)**.** 函数 $h: X \to \mathbb{R}$ 为集合 X 上基 $\mathcal{B}$ 的**无穷小**，若

$$\lim_{\mathcal{B}} h = 0$$

称 $h: X \to \mathbb{R}$ 为基 $x \to 0$ 的 n 阶无穷小，若

$$\lim_{x \to 0} \frac{h}{x^n} = 0$$

记作 $h = o(x^n)$, $x \to 0$.若 $x \to 0$ 时，$\frac{h}{x^n}$ 有界，记作 $h = \mathcal{O}(x^n), x \to 0$.

定义 2.1.2. 考察 $f: X \to \mathbb{R}$，设 $x_0 \in X$, x_0 为极限点，称 f 在点 x_0 处**可微/可导**，若存在关于自变量之增量 $x - x_0$ 的线性函数

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(x_0): \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x - x_0 &\longmapsto \mathscr{A}(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ 均为线性空间，使得

$$f(x) - f(x_0) = \mathscr{A}(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0; x_0)$$

其中 $\alpha(x - x_0; x_0) = o(x - x_0)$, $x \to x_0$.
称 $\mathscr{A}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 f 在点 x_0 处之**导数**，也记为 $f'(x_0)$.若 $\forall x_0 \in X$, $f'(x_0) = \mathscr{A}(x_0)$ 存在，则称

$$\begin{aligned} f': X &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ x_0 &\longmapsto f'(x_0) = \mathcal{A}(x_0) \end{aligned}$$

为 f 之**导函数**.

下面我们来考察多元函数的导数.约定 $\mathbb{R}^n$ 中向量为 $n \times 1$ 之列向量，且取定了基

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

向量 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 在基 $(e_1, \cdots, e_n)$ 下坐标为 x^1, $\cdots x^n$ 满足

$$\begin{aligned} \vec{x} &= e_1 x^1 + e_2 x^2 + \cdots + e_n x^n \\ &= \begin{pmatrix} e^1 & \cdots & e^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdots \\ x^n \end{pmatrix} = e \cdot x \end{aligned}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 之基 $(e_1, \cdots e_n)$, $\mathbb{R}$ 之基 $\mathscr{E}$ 下

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(x_0): \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ e \cdot v &\longmapsto \mathscr{E}\big(A(x_0) \cdot v\big) \end{aligned}$$

其中 $A(x_0)$ 为 $\mathscr{A}$ 的矩阵表示.

设 f' 在 X 上处处可微

$$f' : X \longrightarrow \prod_{x_0\in X} \mathrm{Hom}(V_{x_0}, \mathbb{R})$$
$$x_0 \longmapsto \mathscr{A}(x_0) = f'(x_0)$$

若 f' 在 x_0 处可微，则称 $(f')'(x_0)$ 为 x_0 处的 2 阶导数.

$$(f')' : X \longrightarrow \prod_{x_0\in X} \mathrm{Hom}\big(V_{x_0}, \prod_{x_0\in X} \mathrm{Hom}(V_{x_0}, \mathbb{R})\big)$$

类似定义 $(f')'\cdots(x_0)$ 为 x_0 处的 n 阶导数，$(f')'\cdots = f^{(n)}$ 为 f 的 n 阶导函数.称 f 在 x_0 处 **n 阶可导**，若 $f^(n)(x_0)$ 存在.称 f 在 x_0 处**无穷可导/光滑**，若 $\forall n$, $f^{(n)}(x_0)$ 均存在.

$$f^{(n)}(x_0) \in \underbrace{\mathrm{Hom}\Big(V_{x_0}, \mathrm{Hom}\big(V_{x_0}, \cdots, \mathrm{Hom}(V_{x_0}, \mathbb{R})\big)\cdots\Big)}_{n\text{个}}$$

下面考虑

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \cdots \\ x^n \end{pmatrix} = x \longmapsto f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \cdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

称 f 在 $x_0 \in X$ 处**可微**，若存在 $\mathscr{A}(x_0) \in \mathrm{Hom}(V_{x_0}, \mathbb{R}^m)$ 使得

$$f(x) - f(x_0) = \mathscr{A}(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0; x_0)$$

其中 $\alpha(x - x_0; x_0) = o(|x - x_0|)$, $x \to x_0$.即

$$\begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(x_0) \\ \cdots \\ f_m(x) - f_m(x_0) \end{pmatrix} = A(x_0) \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \cdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(x - x_0; x_0) \\ \cdots \\ \alpha_n(x - x_0; x_0) \end{pmatrix}$$

其中 $A(x_0)$ 为 $\mathscr{A}(x_0)$ 在基下的表示矩阵，为 $m \times n$ 矩阵，$\alpha_i(x - x_0; x_0) = o(|x - x_0|)$, $x \to x_0$, $i = 1, \cdots m$.

考察 f'.

$$f' : X \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_{x_0}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$$
$$x_0 \longmapsto f'(x_0)\left(v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \cdots \\ v^n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ \cdots \\ v^n \end{pmatrix}\right)$$
$$x \longmapsto f'(x)\Big(v \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1}(x) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix} v\Big)$$

考察 $(f')'$，$(f')'$ 为向量值函数 f' 在 x_0 处的一阶导数.

$$(f')'(x_0) \in \mathrm{Hom}(V_{x_0}, \mathbb{R}^n) \qquad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}$$

命题 2.1.3. ① 若 $f : X \subseteq \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 在点 x_0 处可微，则 $f'(x_0)$ 唯一.②若 $f : X \subseteq \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ 在点 x_0 处可微，则 f 在点 x_0 处连续.

证明. ① 由

$$f(x)-f(x_0)=A(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0;x_0)$$

知

$$A(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

由极限唯一性可得.

② 由 $x_0\in X$ 且 x_0 为极限点知：f 在点 x_0 处连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}$ 存在且为 $f(x_0)$.对定义式两端取极限得

$$\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=A(x_0)\lim_{x\to x_0}(x-x_0)+\lim_{x\to x_0}\alpha(x-x_0;x_0)=0$$

得证. □

定义 2.1.4 (一阶最佳逼近). 设 f 在点 x_0 处连续，称线性函数 $g_*:x\mapsto g_*(x;x_0)$ 为对于 f 在 $x\to x_0$ 时的**一阶最佳逼近**，若对任意形如 $g:x\mapsto c_0+c_1(x-x_0)$ 得函数，都有

$$|f(x)-g_*(x;x_0)|\leqslant|f(x)-g(x;x_0)|\,,\ x\to x_0 \tag{2.1.1}$$

命题 2.1.5. 设 f 在点 x_0 处可微，若 g_* 为最佳逼近，则

$$g_*(x;x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

证明. 设 $g_*=c_{0,*}+c_{1,*}(x-x_0)$，取 $g=f(x_0)$，则

$$\big|f(x)-\big(c_{0,*}+c_{1,*}(x-x_0)\big)\big|\leqslant|f(x)-f(x_0)|\,,\ x\to x_0,\ x\in X$$

取极限

$$\lim_{x\to x_0,x\in X}f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0,x\in X}g_*(x;x_0)$$

即

$$c_{0,*}=f(x_0)$$

此时

$$f(x)-g_*(x;x_0)=f(x)-f(x_0)-c_{1,*}(x-x_0)$$

取

$$g(x,x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

由

$$|f(x)-f(x_0)-c_{1,*}(x-x_0)|\leqslant|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|\,,\ x\to x_0,\ x\in X$$

从而

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)-c_{1,*}(x-x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant\left|\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}\right|,\ x\to x_0,\ x\in X$$

由 f 在点 x_0 处可微知

$$\lim_{x\to x_0,\ x\in X}RHS=0\Longrightarrow\lim_{x\to x_0,\ x\in X}LHS=0$$

即

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-c_{1,*}\Big)=0\Longrightarrow c_{1,*}=f'(x_0)$$

□

命题 2.1.6. 若 f 在 x_0 处一阶最佳逼近存在，且 f 在 x_0 处连续，则 f 在 x_0 处可导.

证明. 取 $g(x)\equiv f(x_0)$，对 (2.1.1) 取 $x\to x_0$, $x\in X$ 极限，由 f 在 x_0 处连续知

$$c_{0,*}=f(x_0)$$

又由 (2.1.1)，对任意 $g(x)=f(x_0)+c_1(x-x_0)$ 有

$$|f(x)-g_*(x;x_0)|\leqslant |f(x)-g_*(x;x_0)+(c_{1,*}-c_1)(x-x_0)|$$

从而

$$\left|\underbrace{\frac{f(x)-g_*(x;x_0)}{x-x_0}}_{\beta(x;x_0)}\right|\leqslant\left|\underbrace{\frac{f(x)-g_*(x;x_0)}{x-x_0}}_{\beta(x;x_0)}+(c_{1,*}-c_1)\right|$$

由逼近的定义，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x;x_0)$ 存在，又因为上式对任意 c_1 成立，故

$$\lim_{x\to x_0}\beta(x;x_0)=0$$

□

命题 2.1.7. 若 f 在点 x_0 处可导，则 f 在 x_0 处的一阶最佳逼近存在.

证明. 我们断言 $g_*(x;x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 为最佳逼近.即 $\forall c_0$, $c_1\in\mathbb{R}$

$$\big|f(x)-\big(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big)\big|\leqslant|f(x)-c_0-c_1(x-x_0)|$$

即

$$|\alpha(x-x_0;x_0)|\leqslant\big|\alpha(x-x_0;x_0)+\big(f(x_0)-c_0\big)+\big(f'(x_0)-c_1\big)(x-x_0)\big|,\ x\to x_0 \tag{2.1.2}$$

若 $c_0\neq f(x_0)$，则 $\exists\mathring{B}_\delta(x_0)$，使得对 $x\in\mathring{B}_\delta(x_0)$

$$|\alpha(x-x_0;x_0)|<\frac{1}{4}|f(x_0)-c_0|$$

则 (2.1.2) 成立.
若 $c_0=f(x_0)$，注意到

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x-x_0;x_0)}{x-x_0}=0$$

故 (2.1.2) 也成立. □

命题 2.1.8. ① 设 f,g 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 处可导，则 $f+g$, fg, $\frac{f}{g}$（若 $g(x_0)\neq0$）在点 x_0 处可导，且

$$\begin{aligned}&(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)\\&(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\\&\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{1}{g(x_0)^2}\big(f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)\big)\end{aligned}$$

② 设 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}\mathbb{R}$，$f$ 在 x_0 处可导，g 在 $f(x_0)$ 处可导，则 $(g\circ f)$ 在 x_0 处可导且

$$(g\circ f)'(x_0)=g'\big(f(x_0)\big)\cdot f(x_0)$$

证明. ① 由

$$f'(x_0)=\lim_{v\to0}\frac{f(x_0+v)-f(x_0)}{v}$$

及极限与四则运算的关系知成立.

② 考察 $g\circ f$ 在 x_0 处之行为.

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0;x_0),\ x\to x_0,\ x\in X\\
g(y) &= g(y_0)+g'(y_0)(y-y_0)+\beta(y-y_0;y_0),\ y\to y_0,\ y\in Y\\
(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0) &= g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)\\
&= g'\big(f(x_0)\big)\big(f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0;x_0)\big)+\beta\big(f(x)-f(x_0);f(x_0)\big)\\
&= g'\big(f(x_0)\big)\cdot f'(x_0)(x-x_0)+g'(x_0)\alpha(x-x_0;x_0)+\beta\big(f(x)-f(x_0);f(x_0)\big)
\end{aligned}$$

定义

$$\gamma(y-y_0;y_0)=\frac{\beta(y-y_0;y_0)}{y_0}$$

由 g 在 y_0 处可微知

$$\lim_{y\to y_0,y\in Y}\gamma(y-y_0;y_0)=0$$

由复合函数之极限

$$\lim_{x\to x_0,x\in X}\gamma(f(x)-f(x_0);y_0)=0$$

从而 $x\to x_0$ 时

$$g'(x_0)\alpha(x-x_0;x_0)+\beta\big(f(x)-f(x_0);f(x_0)\big)=g'(x_0)\alpha(x-x_0;x_0)+\gamma(f(x)-f(x_0);y_0)(x-x_0)=o(x-x_0)$$

故得证. □

下面考察 $f:X\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,\ x\mapsto\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \cdots\\ f_m(x)\end{pmatrix}$ 在 x_0 处的行为，从而只需考察 $m=1$ 的情形.

命题 2.1.9. 若 f 在 x_0 处可导，则 $f_i,\ i=1,\cdots,m$ 连续且可导，且

$$f'(x_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x^n}(x_0)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x^n}(x_0)\end{pmatrix}$$

证明. 由 f 在点 x_0 处可导之定义

$$f(x_0+v)-f(x_0)=f'(x_0)v+\alpha(v;x_0),\ x\to x_0,\ x\in X$$

取 $v=te_i=t\begin{pmatrix}0\\ \cdots\\ 1\\ \cdots\\ 0\end{pmatrix}$（仅第 i 个分量为 1），$t\in\mathbb{R}$.

$$\begin{gathered}
f_1(x_0+te_i)-f_1(x_0)=a_{1i}(x_0)t+\alpha_1(te_i;x_0),\ a_{1i}\overset{\triangle}{=\!=}f_1'(x_0)(e_i)\\
\cdots\\
f_m(x_0+te_i)-f_m(x_0)=a_{mi}(x_0)t+\alpha_m(te_i;x_0)
\end{gathered}$$

对 $t\to 0$ 取极限得

$$a_{ji}(x_0)=\lim_{t\to0}\frac{f_j(x_0+te_i)-f_j(x_0)}{t}\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}\frac{\partial f_j}{\partial x^i}(x_0)$$

由 $f'(x_0)$ 之线性性，$f'(x_0)$ 之矩阵表示为 $(a_{ji})_{m\times n}$. □

注 2.1.10. 当 $m=1$ 时，$f'(x_0)=\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}(x_0) \quad \cdots \quad \frac{\partial f_1}{\partial x^n}(x_0))\Big)$ 为在 $\mathrm{Hom}(V_{x_0},\mathbb{R})$ 中元素在标准基下的矩阵表示，$\mathrm{Hom}(V_{x_0},\mathbb{R})\cong (V_{x_0})^*$.

下面我们问，若 $\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x^i}(x_0)\Big)_{m\times n}$ 存在，则 $f'(x_0)$ 一定存在吗？事实上这不一定，我么们给出例子.

例 2.1.11. 考察

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{cases} 1\,,\ x^1x^2\neq 0 \\ 0\,,\ x^1x^2=0 \end{cases} \end{aligned}$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Big)=\frac{\partial f}{\partial x^2}\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Big)=0$$

而 f 在原点处不连续，故不可导.

例 2.1.12. 考察

$$\begin{aligned} X=\mathbb{R} &\xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n,\ n\geqslant 1 \\ f^{(n)}(x_0) &\in \underbrace{\mathrm{Hom}\Big(V_{x_0},\mathrm{Hom}\big(V_{x_0},\cdots,\mathrm{Hom}(V_{x_0},\mathbb{R})\big)\cdots\Big)}_{n\text{个}} \end{aligned}$$

f 在点 x_0 处一阶可导，且 $f'(x_0)=nx_0^{n-1}$ 为 $\mathrm{Hom}(V_{x_0},\mathbb{R})$ 在基下得矩阵表示，等同为 $\mathbb{R}$ 中的一个数.一阶导函数 f' 有

$$\begin{aligned} f':X &\longrightarrow \prod_{x_0\in X}\mathrm{Hom}(V_{x_0},\mathbb{R}) \\ x_0 &\longmapsto f'(x_0)\in \mathrm{Hom}(V_{x_0},\mathbb{R})\ (\text{即}nx_0^{n-1}) \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} f':X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto nx^{n-1} \end{aligned}$$

类似可知 $f^{(n)}(x)$ 存在并求出其值.

2.2 微分中值定理

定义 2.2.1. 对于 $f:X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，若 $a\in X$ 且 $\exists U_X(a)$，使得 $\forall x\in U_X(a)$ 有 $f(x)\leqslant f(a)$（或 $f(x)\geqslant f(a)$），则称 a 为 f 之**局部极大值点**（或 **局部极小值点**）.相应地，$f(a)$ 为 f 之**局部极大值**（或 **局部极小值**）.称 a 为 X 之**内点**，若 $\exists B_\delta(a)\subseteq X$.

引理 2.2.2 (费马引理)**.** 若 $f:X\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在局部极值点 a 可微，且 a 为内点，则 $f'(a)=0\in\mathrm{Hom}(V_{x_0},\mathbb{R})$.

证明. 仅对 a 为内部、极大值点证明，其余情况类似.由定义

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+\alpha(h;a)=\big(f'(a)+\beta(h;a)\big)h$$

其中 $a+h\in X$, $a+h\to a$, $\beta(h;a)\overset{\triangle}{=\!=}\frac{\alpha(h;a)}{h}=o(1)$, $h\to 0$.
由内点之假设，$h\to 0$ 时，$a+h\in U_X(a)$.从而对于这样的 h，$f(a+h)-f(a)\leqslant 0$.
反设 $f'(a)\neq 0$，由 $\beta=o(1)$ 知 $f'(a)+\beta$ 与 $f'(a)$ 符号一致（保号性）.从而 $(f'(a)+\beta)h$ 之符号在 $h>0$, $h<0$ 反号，矛盾! □

定理 2.2.3 (Rolle 定理)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，若 $f(a)=f(b)$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明. 由Weierstrass 最大值定理知，f 在 $[a,b]$ 上有最大值点 x_M 和最小值点 x_m.若 $f(x_M)=f(x_m)$，则 f 为常值函数，从而 $\forall\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.
若 $f(x_M)\neq f(x_m)$，由 $f(a)=f(b)$ 知 x_M,x_m 中至少有一个内点，记其为 ξ，由费马引理 知 $f'(\xi)=0$. □

定理 2.2.4 (Lagrange 有限增量定理)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，则 $\exists\xi\in(a,b)$

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

证明. 考察辅助函数

$$\begin{aligned} F:[a,b]&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\end{aligned}$$

由四则运算，F 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，由构造

$$F(a)=F(b)=f(a)$$

对 F 利用Rolle 定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$.由四则运算

$$f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$$

□

推论 2.2.5 (单调性检验法)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，设 $\forall\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)\geqslant 0$，则 f 在 (a,b) 上单调递增.

证明. $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$，由 Lagrange 有限增量定理知 $\exists\xi=\xi(x_1,x_2)\in(x_1,x_2)$，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_2)\geqslant 0$$

即

$$f(x_2)\geqslant f(x_1)$$

□

推论 2.2.6 (常值函数检验法)**.** 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，则 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数 $\Longleftrightarrow\forall\xi\in(a,b)$, $f'(\xi)=0$.

证明. $\Longrightarrow$ 由定义即得.
$\Longleftarrow$ 由 Lagrange 有限增量定理可得. □

定理 2.2.7 (Cauchy 有限增量定理)**.** 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，则 $\exists\xi\in(a,b)$

$$f'(\xi)\big(g(b)-g(a)\big)=g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big)\tag{2.2.1}$$

若特别地，$\forall\eta\in(a,b)$, $g'(\eta)\neq 0$，则 $g(b)-g(a)\neq 0$ 且

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

证明. 考察辅助函数

$$\begin{aligned} F: [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)\big(g(b)-g(a)\big) - g(x)\big(f(b)-f(a)\big) \end{aligned}$$

直接验证，F 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微，且 $F(b) = F(a)$.由 Rolle 定理，$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $F'(\xi) = 0$，故 (2.2.1) 成立.
由 Lagrange 有限增量定理知，$g(b) - g(a) \neq 0$. □

2.3 函数的 n 阶逼近及误差控制

定义 2.3.1. 设 $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在 x_0 处 n 次可导，称

$$P_n(x;x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^K,\ x \in X$$

为 f 在 x_0 附近的 n **阶 *Taylor* 多项式**.

命题 2.3.2. $P_n(x;x_0)$ 为 f 在 x_0 附近的 n 阶最佳逼近.

证明. 与 $n=1$ 情形类似. □

我们的核心问题是：对误差 $R_n(x;x_0) \overset{\triangle}{=\!=} f(x) - P_n(x;x_0)$ 进行估计，考察 $R_n(x;x_0)$ 对 x_0, n, x 的依赖性，特别地，在固定 n, $x \to x_0$ 下的行为，以及固定 x, $n \to +\infty$ 下的行为.

定理 2.3.3 (n 阶余项估计)**.** 设 $f^{(k)}$, $k = 0, \cdots, n$ 在 $[x_0, x]$ 上连续，$f^{(n+1)}$ 在 (x_0, x) 存在，则对任意的在 $[x_0, x]$ 上连续，(x_0, x) 上可微，且导数不为 0 的函数 φ，$\exists \xi = \xi(x_0, n, x, \varphi) \in (x_0, x)$，使得

$$R_n(x;x_0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)}\Big(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\Big)$$

证明. 考察辅助函数

$$\begin{aligned} F: [x_0,x] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(x) - P_n(x;t) \end{aligned}$$

由假设，F 在 $[x_0, x]$ 上连续，在 (x_0, x) 上可微.直接计算

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\Big) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

对 $[x_0, x]$ 上的函数 F 与 φ 利用 Cauchy 有限增量定理知，$\exists \xi = \xi(x_0, n, x, \varphi) \in (x_0, x)$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

而

$$F(x) - F(x_0) = 0 - R_n(x;x_0)$$

故

$$R_n(x;x_0) = -\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)}F'(\xi) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)}\Big(\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\Big)$$

□

推论 2.3.4 (Cauchy 余项公式)**.** $R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$.

证明. 取 $\varphi(t)=t+x$. □

推论 2.3.5 (Lagrange 余项公式). $R_n(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

证明. 取 $\varphi(t)=(x-t)^{n+1}$. □

例 2.3.6. 考察

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto(1+x)^\alpha,\ \alpha>-1,\ \alpha\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

当 $x_0=0$ 时

$$P_n(x;x_0)=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

例 2.3.7. 考察

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto e^x\end{aligned}$$

取 $x_0=0$，则

$$P_n(x;x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!},\ R_n(x;x_0)=\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

特别地

$$|R_n(x;x_0)|\leqslant\frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

对于给定的 n, $R_n(x;x_0)\to0,\ x\to0$.

例 2.3.8. 考察

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\ ,\ x\neq0\\ 0\ ,\ x=0\end{cases}\end{aligned}$$

我们断言 f 无穷可微且 $\forall k\geqslant0,\ f^{(k)}(0)=0$.
事实上

$$R_n(x;0)\xlongequal{Lagrange}\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=e^{-\frac{1}{\xi^2}}Q_n\Big(\frac{1}{\xi}\Big)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},\ \xi=\xi(x_0,n,x)\in(0,x)$$

其中 Q_n 为 $3n$ 次多项式，特别地，$x\to0$ 时，$\xi\to0$.

$$\begin{aligned}|R_n(x;0)|&\leqslant\left|e^{-\frac{1}{\xi^2}}Q_n\Big(\frac{1}{\xi}\Big)\right|\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1},\ \xi\in(0,x)\\ \Longrightarrow&R_n(x;0)=o\big((x-0)^n\big)\end{aligned}$$

此时

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=R_n(x)=e^{-\frac{1}{\xi^2}}Q_n\Big(\frac{1}{\xi}\Big)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

注意到固定 x_0,x 时

$$\lim_{n\to+\infty}R_n(x;x_0)=0,\ \lim_{n\to+\infty}P_n(x;x_0)=f(x)$$

并不成立.

定义 2.3.9. 设 f 在 x_0 处无穷可微，称 $P(x)=\lim\limits_{n\to\infty}P(x;x_0)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 为函数 f 的**以 x_0 为中心的 *Taylor* 级数**.

定义 2.3.10 (解析)**.** 若存在 x_0 之邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时有：$P(x;x_0)=f(x)$，则称 f 在点 x_0 处**解析**.

注 2.3.11. 解析函数一定是无穷可微函数.

定义 2.3.12. 称形如 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ 的级数为关于变量 x 的**幂级数**，其中 $a_k\in\mathbb{R}$, $k=0,1,\cdots$.

定理 2.3.13 (Cauchy-Hadamard 定理)**.** 定义

$$R=\left(\varlimsup_{k\to+\infty}(|a_k|)^{\frac{1}{k}}\right)^{-1}$$

则 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ 在 $\overline{B_R(0)}$ 之外点发散，$B_R(0)$ 之内点绝对收敛.

注 2.3.14. 关于上极限 $\varlimsup\limits_{k\to+\infty}x_k$，由 $(x_k)_{k\geqslant1}$ 构造：

$$a_n=\inf_{k\geqslant n}x_k,\ b_n=\sup_{k\geqslant n}x_k$$

对两序列取极限

$$\varliminf_{k\to+\infty}x_k:=\lim_{n\to\infty}a_n,\ \varlimsup_{k\to+\infty}x_k=\lim_{n\to\infty}b_n$$

证明. 由 $\varlimsup\limits_{k\to+\infty}a_k$ 定义知：$\forall\varepsilon>0$，存在序列 $(a_k)_{k\geqslant1}$ 中无限多项，使得

$$|a_k|^{\frac{1}{k}}>\frac{1}{k}-\varepsilon$$

若 $x\notin\overline{B_R(0)}$，即 $|x|>R$，则 $\exists\varepsilon=\varepsilon(x)>0$，使得

$$\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)|x|>1$$

此时

$$\left|a_kx^k\right|=|a_k|\,|x|^k>\left(\frac{1}{R}-\varepsilon\right)^k|x|^k>1$$

对无限个 k 成立.由第 N 项判别法知 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$ 发散.
若 $x\in B_R(0)$，取 $\varepsilon=\varepsilon(x)>0$ 使得

$$\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)|x|<1$$

对该 ε，存在 $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得 $\forall k\geqslant N(\varepsilon)$

$$|a_k|^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{R}+\varepsilon$$

这是因为，由 $\varlimsup\limits_{k\to+\infty}a_k$ 定义：$\forall\varepsilon>0,\ \exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得 $\forall n\geqslant N$

$$\sup_{k\geqslant}a_k<\varlimsup_{k\to+\infty}a_k+\varepsilon$$

此时 $\exists\varepsilon=\varepsilon(x)>0,\ N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$，使得 $k\geqslant N$

$$\left|a_kx^k\right|\leqslant\left((\frac{1}{R}+\varepsilon)\,|x|\right)^k<1$$

由比较判法知结论成立. □

推论 2.3.15 (Abel 第一定理)**.** 设 $\sum a_k x^k$ 在 x_* 处收敛，则该幂级数在 $B_{|x_*|}(0)$ 中绝对收敛.

证明. 直接利用 Cauchy-Hadamard 定理. □

定义 2.3.16. 称上述的

$$R = \Big(\varlimsup_{k\to+\infty}(|a_k|)^{\frac{1}{k}}\Big)^{-1}$$

为级数 $\sum a_k x^k$ 的**收敛半径**，称 $B_R(0)\bigcup\{\{R,-R\}\text{中}\sum a_k x^k\text{收敛的元素}\}$ 为**收敛区域**.

例 2.3.17. $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$ 的收敛半径 $R=+\infty$，收敛区域为 $\mathbb{R}$.

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}x^k$ 的收敛半径为 $R=1$，收敛区域为 $(-1,1)$.

$\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k}$ 的收敛半径为 $R=1$，收敛区域为 $[-1,1)$.

推论 2.3.18. $\sum k a_k\cdot x^{k-1}$, $\sum\frac{a_k}{k+1}x^{k+1}$ 的收敛半径与 $\sum a_k x^k$ 的相同.

证明. 直接利用 Cauchy-Hadamard 定理. □

应用 Cauchy-Hadamard 定理，$P(x;x_0)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ 的收敛半径为

$$R = \Big(\varlimsup_{k\to+\infty}\left|\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\right|^{\frac{1}{k}}\Big)^{-1}$$

利用余项公式可以判断，$P(x;x_0)$ 是否收敛至 f.

最后我们看一个代数基本定理的证明来结束这章内容.

定理 2.3.19 (代数基本定理)**.** 任一 n 次复系数多项式

$$p(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n,\ n\geqslant 1,\ c_n\neq 0$$

在 $\mathbb{C}$ 上均有根.特别地，p 有 n 个复根.

证明. 不妨设 $c_n=1$，令 $\mu=\inf\limits_{z\in\mathbb{C}}|p(z)|$.断言：$\exists R>0$，使得 $\forall|z|>R$ 有 $|p(z)|>\mu$.
事实上，由

$$p(z)=z^n\Big(1+\frac{c_{n-1}}{z}+\frac{c_{n-2}}{z^2}+\cdots+\frac{c_0}{z^n}\Big)$$

知

$$|p(z)|\geqslant|z|^n\left(1-\frac{|c_{n-1}|}{|z|}-\cdots-\frac{|c_0|}{|z|^n}\right)$$

由

$$\lim_{|z|\to+\infty}\frac{1}{|z|^k}=0,\ \forall k\geqslant 1$$

知 $\forall\varepsilon>0,\exists R=R(\varepsilon)>0,$ 使得对 $\forall|z|>R$

$$\frac{1}{|z|^k}<\varepsilon,\ k=1,\cdots n$$

令 $c=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|c_k|$，则 $\forall\varepsilon>0,\ \exists R>0$，当 $|z|>R$ 时

$$|p(z)|\geqslant|R|^n\left(1-\frac{|c_{n-1}|}{|z|}-\cdots-\frac{|c_0|}{|z|^n}\right)>|R|^n(1-nc\varepsilon)$$

从而 ε 充分小，R 充分大时，

$$|p(z)|\geqslant|R|^n(1-nc\varepsilon)>\max\{1,2\mu\}\tag{2.3.1}$$

由 $\mu = \inf |p(z)|$ 知：$\forall k \geqslant 1$, $\exists z_k$，使得

$$|p(z_k) - \mu| < \frac{1}{k} \tag{2.3.2}$$

设 $z_k = x_k + iy_k$，由 (2.3.1) 及 (2.3.2) 知 $|z_k| < R$.

对 $(x_k), (y_k)$ 利用 Bolzano-Weierstrass 定理：存在 $(z_k)_{k\geqslant 1}$ 之子列 $(z_{k_m})_{m\geqslant 1}$ 满足 $\lim\limits_{m\to+\infty} z_{k_m} = z_0$.由 P 连续知

$$\lim_{m\to+\infty} |P(z_{k_m})| = |P(z_0)|$$

另一方面，注意到

$$\lim_{m\to+\infty} |P(z_{k_n})| = \mu$$

故

$$|P(z_0)| = \mu$$

下证 $\mu = 0$.若 $\mu > 0$，考虑 $Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$，则 $Q(0) = 1$, $|Q(z)| \geqslant 1$. 从而多项式 $Q(z)$ 具有形式

$$Q(z) = 1 + q_k z^k + \cdots + q_n z^n$$

令 $q_k = \rho e^{i\varphi}$, $\rho \neq 0$.令 $z = re^{i\theta}$, $\theta = \frac{\pi-\varphi}{k}$，则

$$Q(re^{i\theta}) \leqslant \left|1 + q_k z^k\right| + \left(\left|q^{k+1} z^{k+1}\right| + \cdots + |q_n z^n|\right) = \left|1 - \rho r^k\right| + r^{k+1}\left(\left|q^{k+1}\right| + \cdots + |q_n| r^{n-k+1}\right)$$

当 r 充分接近 0 时

$$\left|Q(re^{i\theta})\right| \leqslant 1 - r^k\left(\rho - r\big(|q_{k+1}| + \cdots + |q_n| r^{n-k+1}\big)\right) < 1$$

与 $|Q(z)| \geqslant 1$ 矛盾！故 $\mu = 0$. $\square$

3 黎曼积分

3.1 Riemann 积分的定义

Riemann 积分的直观意义/动机是计算曲边梯形的面积，我们的思路是：

(1) 细分区间 $[a,b]$.

(2) 对小曲边梯形利用规则形状进行逼近，对规则形状之面积求和.

(3) 证明求和收敛，且值不依赖于逼近方式.

为此，我们将定义集合 X、集合 X 上的基 $\mathcal{B}$、集合 X 上的函数 $\sigma(-;f):X\to\mathbb{R}$.

定义 3.1.1 (划分、带标记点的划分). *对于闭区间 $[a,b]$，称满足 $a=x_0<x_1<\cdots x_n=b$ 的有限点集为 $[a,b]$ 的***划分***，记作 P.由划分构造的闭区间 $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,\cdots,n$ 称为***划分区间***，记作 $\triangle_k$.划分的***直径*** $\lambda(p)\triangleq\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\triangle_k|$.在划分区间 $\triangle_k=[x_{k-1},x_k]$ 上选择点 ξ_k，$k=1,2,\cdots,n$，称 (P,ξ) 为***带标记点** $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ ***的划分***.*

记 $X=\{(P,\xi)|(P,\xi)\text{为带标记点 }\xi\text{ 的划分}P\}$, $\mathcal{B}=\{B_d\subseteq X|B_d:=\{(P,\xi)\in X)|\lambda(P)<d\}\}$，则 $\mathcal{B}$ 为 X 上的一个基，记作 $\lambda(P,\xi)\to 0$.考察

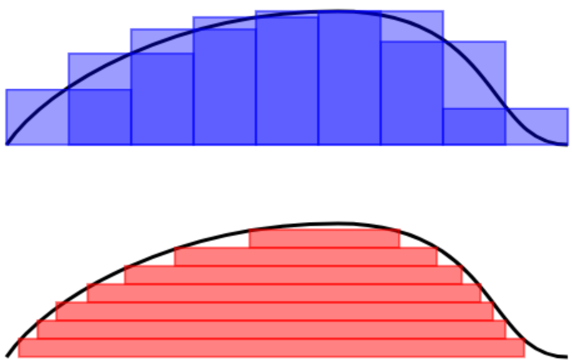
$$\begin{aligned}\sigma(-;f):X&\longrightarrow\mathbb{R}\\(P,\xi)&\longmapsto\sigma(P,\xi;f):=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\triangle x_k,\ \triangle x_k=x_k-x_{k-1}\end{aligned}$$

称为 f 在 $[a,b]$ 上由 (P,ξ) 给出的**积分和**.

定义 3.1.2 (Riemann 积分). *称 I 为 f 在 $[a,b]$ 上的* ***Riemann 积分***，*若 $\lim\limits_{\mathcal{B}}\sigma(-;f)$ 存在，且为 I，也可记为*

$$I=\lim_{\lambda(P,\xi)\to 0}\sigma(-;f)=\int_a^b f(x)dx$$

注 3.1.3. *Riemann 积分与 Lebesgue 积分对比.*



注 3.1.4. *Riemann 积分的 $\varepsilon-\delta$ 语言：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)$,使得对 $\forall(P,\xi)\in X$, $\lambda(P,\xi)<\delta$*

$$|\sigma(p,\xi;f)-I|<\varepsilon$$

命题 3.1.5. *若 $I=\lim\limits_{\mathcal{B}}\sigma(-;f)$，则必唯一.*

证明. $I=\lim\limits_{\mathcal{B}}\sigma(-;f)\Longleftrightarrow\{\sigma(P,\xi;f)\}_{(P,\xi)}\in X$ 为 Cauchy 列.由 Cauchy 列极限唯一知命题成立. □

例 3.1.6. *Dirichlet* 函数

$$\begin{aligned} D:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0\,,\ x\in\mathbb{Q} \\ 1\,,\ x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

在任意闭区间 $[a,b]$ 上不 *Riemann* 可积.

证明. $\forall P$, $\exists\xi'=(\xi'_1,\cdots,\xi'_n)\subseteq\mathbb{Q}$, $\xi''=(\xi''_1,\cdots,\xi''_n)\subseteq\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.此时

$$\sigma(P,\xi';f)=\sum_{k=1}^{n}1\cdot\triangle x_k=b-a,\ \sigma(P,\xi'';f)=\sum_{k=1}^{n}0\cdot\triangle x_k=0$$

故 $\{\sigma(P,\xi;f)\}_{(P,\xi)\in X}$ 不为 Cauchy 列. □

3.2 Riemann 可积的判定

命题 3.2.1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 且 *Riemann* 可积，记作 $f\in\mathcal{R}([a,b])$，则 f 有界.

证明. 反设 f 在 $[a,b]$ 上无界，则 $\forall P=(x_0<x_1<\cdots x_n)$, $\exists\triangle_{k_0}=[x_{k_0-1},x_{k_0}]$，使得 f 在 $\triangle_{k_0}$ 上无界.故对 $\forall M>0,\exists\xi'_{k_0},\xi''_{k_0}\in\triangle_{k_0}$，使得

$$\left|f(\xi'_{k_0})-f(\xi''_{k_0})\right|>\frac{M}{2}\frac{1}{|\triangle_{k_0}|}$$

取 P 的两个划分

$$\begin{aligned} \xi'&=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k_0-1},\xi'_{k_0},\xi_{k_0+1},\cdots,\xi_n) \\ \xi''&=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{k_0-1},\xi''_{k_0},\xi_{k_0+1},\cdots,\xi_n) \end{aligned}$$

则

$$|\sigma(P,\xi';f)-\sigma(P,\xi'';f)|=\left|\sum_{k=k_0}\left(f(\xi'_{k_0})-f(\xi''_{k_0})\right)\triangle_{k_0}\right|>\frac{M}{2}$$

故 $\{\sigma(P,\xi;f)\}_{(P,\xi)\in X}$ 非 Cauchy 列.矛盾! □

定义 3.2.2 (加细、振幅)**.** 向闭区间 $[a,b]$ 的划分 P 添加新的分点所得的划分 $\tilde{P}$ 称为 P 的**加细**.定义 f 在区间 S 上的**振幅**为

$$\omega(f;S)=\sup_{x'\in S,\ x''\in S}|f(x')-f(x'')|$$

定理 3.2.3 (振幅和很小)**.** 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界，若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对 $\forall(P,\xi),\lambda(P,\xi)<\delta$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\triangle_k)\triangle x_k\right|<\varepsilon$$

则 f *Riemann* 可积.

证明. 记 P 为 $[a,b]$ 之划分，$P=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\triangle_k$.设 $\tilde{P}$ 为 P 之加细，$\tilde{P}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\bigcup\limits_{l=1}^{n_k}\triangle_{k_l}$.则

$$\begin{aligned} \left|\sigma(P,\xi;f)-\sigma(\tilde{P},\tilde{\xi};f)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\triangle x_k-\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k}f(\xi_{k_l})\triangle x_{k_l}\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k}\left(f(\xi_k)-f(\xi_{k_l})\right)\triangle x_{k_l}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k}\omega(f;\triangle_{k_l})\,|\triangle x_{k_l}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\triangle x_k)\,|\triangle x_k| \end{aligned}$$

现对 $\forall(P',\xi'),(P'',\xi'')\in X$，考虑其公共加细 $P=P'\cup P''$，由上述计算知

$$|\sigma(P,\xi;f)-\sigma(P',\xi';f)|\leqslant\sum_m\omega(f,\triangle_m)\,|\triangle_m|$$

$$|\sigma(P,\xi;f)-\sigma(P'',\xi'';f)|\leqslant\sum_m\omega(f,\triangle_m)\,|\triangle_m|$$

由三角不等式

$$|\sigma(P',\xi';f)-\sigma(P'',\xi'';f)|\leqslant 2\sum_m\omega(f;\triangle_m)\,|\triangle_m|$$

故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0,$ 使得对 $\forall(P',\xi'),(P'',\xi''),\lambda(P',\xi')<\delta,\lambda(P'',\xi'')<\delta$

$$|\sigma(P',\xi';f)-\sigma(P'',\xi'';f)|<2\varepsilon$$

故 f Riemann 可积. □

定义 3.2.4. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界，P 为 $[a,b]$ 之划分，$m_k=\inf\limits_{x\in\triangle_k}f(x)$, $M_k=\sup\limits_{x\in\triangle_k}f(x)$，则称

$$s(P;f)=\sum_{k=1}^n m_k\triangle_k$$

为下 ***Riemann/Darboux* 和**.称

$$S(P;f)=\sum_{k=1}^n M_k\triangle_k$$

为上 ***Riemann/Darboux* 和**.

命题 3.2.5.

$$s(P;f)=\inf_{\xi:(P,\xi)\in X}\sigma(P,\xi;f)$$

$$S(P;f)=\sup_{\xi:(P,\xi)\in X}\sigma(P,\xi;f)$$

证明. 以下仅证

$$S(P;f)=\sup_{\xi:(P,\xi)\in X}\sigma(P,\xi;f)$$

$s(P;f)$ 类似.注意到 $\forall\xi$

$$s(P;f)\leqslant\sigma(P,\xi;f)\leqslant S(P;f)$$

故只需证 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\xi^*$，使得

$$S(P;f)-\varepsilon\leqslant\sigma(P,\xi^*;f)$$

由 M_k 之定义，$\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$, $\exists\xi_k^*\in\triangle_k$，使得

$$M_k-\frac{\varepsilon}{b-a}<f(\xi_k^*)$$

令 $\xi^*=(\xi_1^*,\xi_2^*,\cdots,\xi_n^*)$，则

$$\sum_{k=1}^n M_k\triangle x_k-\varepsilon=\sum_{k=1}^n M_k\triangle x_k-\sum_{k=1}^n\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)\triangle x_k<\sum_{k=1}^n f(\xi_k^*)\triangle x_k$$

□

命题 3.2.6. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界，则 f *Riemann* 可积 $\Longleftrightarrow \underline{I}=\overline{I}$.其中

$$\underline{I}=\lim_{\lambda(P)\to 0}s(P;f),\ \overline{I}=\lim_{\lambda P\to 0}S(P;f)$$

此时 $\underline{I}$ 与 $\overline{I}$ 之公共值为 $I=\int_a^b f(x)dx$.

证明. $\Longleftarrow$ 由定义

$$s(P;f)\leqslant\sigma(P,\xi;f)\leqslant S(P;f)$$

对上式取极限 $\lambda(P,\xi)\to 0$ 得

$$\underline{I}\leqslant\lim_{\lambda(P,\xi)\to 0}\sigma(P,\xi;f)\leqslant\overline{I}$$

利用夹逼准则即得.

$\Longrightarrow \forall P,\ \varepsilon>0,\ \exists\xi^*$，使得

$$S(P;f)-\varepsilon\leqslant\sigma(P,\xi^*;f)\leqslant S(P;f)$$

知

$$\lim_{\lambda(P)\to 0}S(P;f)=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(P,\xi^*;f)\xlongequal{\text{由 } f \text{ 之可积性}}I$$

故 $\overline{I}$ 存在且 $\overline{I}=I$.类似地，$\underline{I}$ 存在且 $\underline{I}=I$. □

定理 3.2.7. f *Riemann* 可积，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)$,使得对 $\forall\lambda(P,\xi)<\delta$

$$\left|\sum_{k=1}^n\omega(f;\triangle_k)\triangle x_k\right|<\varepsilon$$

证明. 注意到

$$\omega(f;\triangle_k)=M_k-m_k$$

从而

$$\sum_{k=1}^n\omega(f;\triangle_k)\triangle x_k=S(P;f)-s(P;f)$$

由上述命题知成立. □

推论 3.2.8. $\mathcal{C}([a,b])\subseteq\mathcal{R}(a,b)$，其中 $\mathcal{C}([a,b])=\{f|f$ 在 $[a,b]$ 上连续$\}$.

证明. 由 $[a,b]$ 之紧性，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)$,使得对 $\forall x',x'',\ |x'-x''|<\delta$

$$|f(x')-f(x'')|<\delta$$

特别地，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对 $\forall\triangle\subseteq[a,b],\ |\triangle|<\delta$

$$\omega(f,\triangle)<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

从而 $\forall P,\ \lambda(P)<\delta$

$$\left|\sum_{k=1}^n\omega(f,\triangle_k)\triangle x_k\right|<\varepsilon$$

□

推论 3.2.9. 若 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 有界，且在有限个点之外处处连续，则 $f\in\mathcal{R}([a,b])$,

证明. 设 $\omega(f;[a,b])\leqslant C<+\infty,;C>0$.假设 f 在 $[a,b]$ 上有 n 个间断点 $a_1,\ \cdots,a_N$，则对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta_1=\frac{\varepsilon}{8NC}$.考察 $F=[a,b]\backslash\bigcup\limits_{i=1}^{N}B_{\delta_1}(a_i)$.由于 f 在有界闭集 F 上连续，故一致连续.即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$,使得对 $\forall\triangle\subseteq F$, $|\triangle|<\delta_2$

$$\omega(f;\triangle)<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

现取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，对满足 $\lambda(P)<\delta$ 的划分

$$\sum_{k=1}^{n}\omega(f;\triangle_k)\triangle x_k=\sum_{k:\triangle_k\subseteq F}\omega(f;\triangle_k)+\sum_{k:\triangle_k\bigcap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N}B_{\delta_1}(a_i)\right)\neq\varnothing}\omega(f;\triangle_k)\triangle x_k$$

对前者，$|\triangle_k|<\delta<\delta_2$，故

$$|\mathrm{I}|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k:\triangle_k\subseteq F}\omega(f;\triangle_k)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

对后者 $\triangle_k\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{N}[a_i-\delta_1-\delta,a_i+\delta_1+\delta]$，从而

$$|\mathrm{II}|\leqslant\sum_{k:\triangle_k\bigcap\left(\bigcup\limits_{i=1}^{N}B_{\delta_1}(a_i)\right)\neq\varnothing}C\cdot\triangle x_k\leqslant C\cdot\sum_{i=1}^{N}2(\delta_1+\delta)\leqslant CN\cdot4\delta_1=\frac{\varepsilon}{2}$$

故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)$,使得对 $\forall(P,\xi),\lambda(P)<\delta$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\triangle_k)\triangle x_k\right|<\varepsilon$$

故 $f\in\mathcal{R}(a,b)$. □

推论 3.2.10. 闭区间上的单调函数 *Riemann* 可积.

证明. 不妨设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 满足 $f(a)<f(b)$（否则 $f(a)=f(b)$，即 f 为常值函数，此时 $\omega(f;\triangle_k)=0$）.对任意满足 $\lambda(P)<\delta$ 的划分 P

$$\sum_{k=1}^{n}\omega(f;\triangle_k)\triangle x_k=\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\triangle x_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)-f(x_{k-1})\big)\delta=\delta\big(f(b)-f(a)\big)$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，则

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\triangle_k)\triangle x_k\right|<\varepsilon$$

故 $f\in\mathcal{R}([a,b])$. □

事实上，对可积性的判定，我们有更强的 Lebesgue 判别准则.为此，我们先介绍一些概念.

定义 3.2.11 (零测集)**.** 称集合 $E\subseteq\mathbb{R}$ 为 *Lebesgue* 意义下具有零测集（或称为**零测集**），若 $\forall\varepsilon>0$, E 可被至多可数个开区间 $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 覆盖，且 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|I_k|<\varepsilon$.

注 3.2.12. 由于 $\sum|I_k|$ 绝对收敛，从而定义不依赖于 $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 之排序.

引理 3.2.13. *(1)* 有限点集为零测集.

(2) 至多可数个零测集之并仍为零测集.

(3) 零测集之子集仍为零测集.

(4) $a<b$ 时，$[a,b]$ 不为零测集.

证明. (1) 单点集 $\{x_0\}$ 为零测集（$B_\varepsilon(x_0)$），余下由 (2) 推出.

(2) 考察 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 E_n 为零测集，下证：$\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ 为零测集.

设 $E_n\subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_{n,k}$，$\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}|I_{n,k}|<\frac{\varepsilon}{2^n}$.从而 $E\subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_{n,k}$，且

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}|I_{n,k}|<\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$$

(3) 由定义即得.

(4) 由有限开覆盖原理知，若 $[a,b]\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} I_k$，则存在子覆盖 $[a,b]\subseteq\bigcup\limits_{k\in\Lambda} I_k$, Λ 有限.特别地

$$\sum_{k\in\Lambda}|I_k|\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}|I_k|$$

只需证明 $\sum\limits_{k\in\Lambda}|I_k|\geqslant b-a$ 即可，利用归纳即得.

□

定义 3.2.14. *若在集合 $X\subseteq\mathbb{R}$，某性质 $\mathcal{P}$ 在 X 的一个零测集之外成立，则称性质 $\mathcal{P}$ 在 X 上***几乎处处***成立.*

定理 3.2.15 (Lebesgue 判别准则)**.** *$f\in\mathcal{R}([a,b])\iff f$ 在 $[a,b]$ 有界且在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.*

例 3.2.16. *Dirichlet 函数*

$$\begin{aligned} D:[0,1]&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\begin{cases}0\ ,\ x\in\mathbb{Q}\\ 1\ ,\ x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}\end{aligned}$$

不 Riemann 可积，因为 D 在 $[0,1]$ 上处处不连续.

例 3.2.17. *Riemann 函数*

$$\begin{aligned} R:[0,1]&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\begin{cases}\frac{1}{n}\ ,\ x=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}\backslash\{0\},\ (m,n)=1,\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}\\ 0\ ,\ x\in(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cup\{0\}\end{cases}\end{aligned}$$

我们断言 $\int_0^1 R(x)dx=0$

证明. 首先利用阿基米德原理可知 $\forall[a,b]$, $[a,b]$ 中至多有限个满足 $n\leqslant N$ 有理数 $\frac{m}{n}$.给定 $N\in\mathbb{N}$, $[0,1]$ 满足 $n\leqslant N$ 之 $\frac{m}{n}$ 个数有限，且不超过 $\frac{N(N+1)}{2}+N\leqslant 2N^2$.
将 $[0,1]$ 分成 n 份，又对任意标记点 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 至多 $2N^2$ 个标记点满足 $R(\xi_k)\geqslant\frac{1}{N}$，从而

$$0\leqslant\sigma(P,\xi;R)\leqslant\sum_{\xi_k=\frac{m}{n},n\leqslant N}R(\xi_k)\triangle_k+\sum_{else}R(\xi_k)\triangle x_k\leqslant 1\cdot 2N^2\lambda(P)+\frac{1}{N}(1-0)$$

取 $\lambda(P)<\frac{1}{N}$，则

$$0\leqslant\sigma(P,\xi;R)\leqslant\frac{2}{N}+\frac{1}{N}=\frac{3}{N}$$

故 $\lim\limits_{\mathcal{B}}\sigma(-;R)=0$

□

推论 3.2.18. $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$，且 f 几乎处处等于 g，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$$

这个推论的一个应用是对 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$，可将 f 任意延拓为 $[a,b]\to\mathbb{R}$ 上之有界函数 $\tilde{f}$，且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \tilde{f}(x)dx$$

3.3 Riemann 可积函数的性质

命题 3.3.1. $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$，则

(1) $f\pm g\in\mathcal{R}([a,b])$, $\lambda f\in\mathcal{R}([a,b])$, $\lambda\in\mathbb{R}$

(2) $f\cdot g\in\mathcal{R}([a,b])$

(3) $|f|\in\mathcal{R}([a,b])$

(4) $[c,d]\subseteq[a,b]$, ; $f\Big|_{[c,d]}\in\mathcal{R}([a,b])$

证明. (1)(2) 直接利用 Riemann 可积的极限定义，由极限与四则运算之关系可得，或利用 Riemann 可积 $\Longleftrightarrow$ 振幅和很小.由三角不等式

$$\begin{aligned}&\omega(f+g;\triangle_k)\leqslant\omega(f;\triangle_k)+\omega(g;\triangle_k)\\&\omega(fg;\triangle_k)\leqslant C_f\omega(g;\triangle_k)+C_g\omega(f;\triangle_k),\ C_f=\max|f|\,,\ C_g=\max|g|\end{aligned}$$

(3) 注意到

$$\omega(|f|\,;\triangle_k)\leqslant\omega(f;\triangle_k)$$

(4) 将 $[c,d]$ 的划分 (P,ξ) 补充为 $[a,b]$ 之划分 (Q,η)，则 $\lambda(P)\leqslant\lambda(Q)$.而

$$0\leqslant\sum_{k:\triangle_k\subseteq P}\omega\Big(f\Big|_{[c,d]};\triangle_k\Big)\triangle x_k\leqslant\sum_{k:\triangle_k\subseteq Q}\omega(f;\triangle_k)\triangle x_k$$

利用 Riemann 可积 $\Longleftrightarrow\lim\limits_{\lambda(P,\xi)\to0}\sum\limits_{k:\triangle_k\subseteq Q}\omega(f;\triangle_k)\triangle x_k=$.利用夹逼准则知成立. □

注 3.3.2. $\mathbb{R}([a,b])$ 为无限维线性空间，这是因为 $span(x^k)_{k\geqslant0}$ 为 $\mathcal{R}([a,b])$ 之线性子空间，且 $\dim span(x^k)_{k=0}^n=n+1$.反设 $x^0,x^1,\cdots x^n$ 线性相关，则 $\exists c_0,c_1\cdots,c_n\in\mathbb{R}$，使得

$$c_0x^0+c_1x^1+\cdots+c_nx^n=0\in\mathcal{R}([a,b])$$

由代数基本定理知矛盾！故 $\dim\mathcal{R}([a,b])=+\infty$.

定理 3.3.3. 考虑

$$\begin{aligned}\int_a^b:\mathcal{R}([a,b])&\longrightarrow\mathbb{R}\\f&\longmapsto\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

则 $\int_a^b$ 为线性映射.

证明. 只需证 $\forall f,g\in\mathcal{R}([a,b])$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ 有

$$\int_a^b \big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$$

由 $\mathcal{R}([a,b])$ 之定义，$\lambda f+\mu g\in\mathcal{R}([a,b])$.此时

$$\sum_{k=1}^n(\lambda f+\mu g)(\xi_k)\triangle x_k=\lambda\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\triangle x_k+\mu\sum_{k=1}^n g(\xi_k)\triangle_k$$

取极限 $\lim\limits_{\mathcal{B}}$ 知结论成立. □

命题 3.3.4 (积分算子对区域的可加性). 设 $a<b<c$, $f\in\mathcal{R}([a,c])$，则

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f\Big|_{[a,b]}(x)dx+\int_b^c f\Big|_{[b,c]}(x)dx$$

证明. 由 Riemann 可积函数的性质，$f\Big|_{[a,b]}\in\mathcal{R}([a,b])$, $f\Big|_{[b,c]}\in\mathcal{R}([b,c])$，从而 RHS 有定义.
取 $[a,c]$ 的带标记点的划分 (P,ξ)，由 $\lim\limits_{\mathcal{B}}\sigma(P,\xi;f)$ 存在知对于满足 $b\in P$ 之 (P,ξ) 极限也存在.考虑这样的 (P,ξ)，记其诱导的对于 $[a,b]$ 与 $[b,c]$ 的带标记点的划分为 $(P',\xi'),(P'',\xi'')$，则

$$\sigma(P,\xi;f)=\sigma(P',\xi';f)+\sigma(P'',\xi'';f)$$

由构造，$\xi=\xi'\cup\xi''$ 且 $\lambda(P')\leqslant\lambda(P),\lambda(P'')\leqslant\lambda(P)$.特别地，$\lambda(P)\to 0\Rightarrow\lambda(P')\to 0,\lambda(P'')\to 0$.对上述 (P,ξ)，取极限 $\lambda(P)\to 0$ 得

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f\Big|_{[a,b]}(x)dx+\int_b^c f\Big|_{[b,c]}(x)dx$$

□

定理 3.3.5. 设 $a,b,c\in\mathbb{R}$，而 f 为以这些点为端点的最大闭区间上的 *Riemann* 可积函数，则

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx+\int_c^a f(x)dx=0$$

证明. 不妨设 $a\leqslant b$, $a\leqslant c$.若 $b\leqslant c$，则

$$\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx=\int_a^c f(x)dx$$

若 $b>c$，则

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

□

定理 3.3.6. 设 $a\leqslant b$, $f\in\mathcal{R}([a,b])$，则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\,dx$$

证明. $a=b$ 时显然.$a<b$ 时注意到 $|f|\in\mathcal{R}([a,b])$ 且

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\triangle x_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^n|f(\xi_k)|\,\triangle x_k$$

对两边取极限 $\lim\limits_{\mathcal{B}}$ 即得. □

定理 3.3.7 (积分对被积函数的单调性)**.** 设 $a \leqslant b$, $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a,b])$，且 $\forall x \in [a,b]$, $f_1(x) \leqslant f_2(x)$，则

$$\int_a^b f_1(x)dx \leqslant \int_a^b f_2(x)dx$$

证明. 对 Riemann 和 σ 有相应不等式，取极限 $\lim\limits_{\mathcal{B}}$ 并利用极限与不等式之关系即得. □

推论 3.3.8. *(1)* 设 $a \leqslant b$, $f \in \mathcal{R}([a,b])$，且 $\forall x \in [a,b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$，则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$$

(2) $a \leqslant b$, $f \in \mathcal{R}([a,b])$，则 $\exists \mu \in [m, M]$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

(3) 假设同 *(2)*，若 $f \in \mathcal{C}([a,b])$，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

证明. (1) 直接利用 Riemann 积分对于被积函数的单调性.

(2) 当 $a = b$ 时，结论平凡.当 $a < b$ 时，取

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

由 (1) 知 $m \leqslant \mu \leqslant M$.

(3) 由连续函数的 Weierstrass 最大值和连续函数的 Bolzano-Cauchy 介值原理即得.

□

定理 3.3.9. 设 $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$，若 g 在 $[a,b]$ 上非负（或非正），则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,\ \mu \in [m, M]$$

若额外地，$f \in \mathcal{C}([a,b])$，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

证明. $a = b$ 时显然.上式在交换 a, b 时，两边均变号，故不妨设 $a < b$.由于改变 g 之符号，两边均变号，不妨 $\forall x \in [a,b]$, $g(x) \geqslant 0$.由积分单调性

$$m \int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M \int_a^b g(x)dx$$

若 $\int_a^b g(x)dx \neq 0$，取

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},\ \mu \in [m, M]$$

若 $f \in \mathcal{C}([a,b])$，利用 Weierstrass 最大值定理及连续函数介值定理即得. □

下面我们将讨论著名的微积分基本定理，在此之前，需要做一些预备工作.

定义 3.3.10 (变上限积分)**.** 设 $f \in \mathcal{R}([a,b])$，称

$$\begin{aligned} F : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

为**变上限积分**.

引理 3.3.11. *(1) 若 $f \in \mathcal{R}([a,b])$，则 $F \in \mathcal{C}([a,b])$.*

(2) 若 $f \in \mathcal{R}([a,b])$，且 f 在 x_0 处连续，则 F 在 x_0 处可微，且

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

证明. (1) $f \in \mathcal{R}([a,b]) \Longrightarrow f\Big|_{[a,x]} \in \mathcal{R}([a,x]) \Longrightarrow F$ 良定义.由 Riemann 可积必要条件知 f 有界，设 $|f(x)| \leqslant M,\ \forall x \in [a,b]$，从而 $\forall x, x+h \in [a,b]$，有

$$0 \leqslant |F(x+h) - F(x)| = \left|\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_x^{x+h} f(t)dt\right| \leqslant |h|\,|M|$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{h\to 0} F(x+h) = F(x)$，从而 F 连续.

□

定义 3.3.12 (函数的振幅)**.** 设 $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in X$，称

$$\omega(f;S) = \sup_{x_1,x_2\in S} |f(x_1) - f(x_2)|$$

为 f 在 S 上之**振幅**.称

$$\omega(f;a) = \lim_{\delta\to 0+} \omega(f; B_\delta(a) \cap X)$$

为 f 在点 a 处的**振幅**.并且我们约定当 $\{f(x_1) - f(x_2)\}_{x_1,x_2\in S}$ 无界时，$\omega(f;S) = +\infty$.

注 3.3.13. 若 $\exists\tilde{\delta} > 0$，使得

$$\omega(f, B_{\tilde{\delta}}(a) \cap X) < +\infty$$

则 $\forall 0 < \delta < \tilde{\delta},\ \{\omega(f, B_\delta(a) \cap X)\}_{0<\delta<\tilde{\delta}}$ 非空，且单调有下界，从而极限存在且为其下确界.

命题 3.3.14. *f 在点 a 处连续 $\Longleftrightarrow \omega(f;a) = 0$.*

证明. f 在点 a 处连续等价于，对 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得

$$f(B_\delta(a) \cap X) \subseteq B_\varepsilon\big(f(a)\big)$$

即 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists = \exists(\varepsilon) > 0$，使得

$$\omega(f; B_\delta(a) \cap X) < 2\varepsilon$$

等价于

$$\omega(f;a) = 0$$

□

引理 3.3.11(2) 的证明.

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt = f(x_0)h + \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)dt}_{\alpha(h;x_0)}$$

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \omega(f, B_{|h|}(x_0) \cap [a,b])dt\right| = \omega(f, B_{|h|}(x_0) \cap [a,b]) \cdot |h|$$

故

$$f \text{ 在 } x_0 \text{ 连续} \Longleftrightarrow \omega(f;x_0)=0 \xlongequal{\triangle} \lim_{h\to 0}\omega(f,B_{|h|}(x_0)\cap[a,b])=0$$

从而 $\alpha(h;x_0)=o(|h|)$. □

定义 3.3.15 (原函数)**.** 给定 $[a,b]$ 上的函数 f，若在 $[a,b]$ 上 F 可微且 $F'=f$，则称 F 为 f 在 $[a,b]$ 上的**原函数**.

命题 3.3.16. 设 F_1,F_2 为 f 之两个原函数，则 $\exists C$，使得 $F_2=F_1+C$.

证明. 由

$$(F_2-F_1)'=f-f=0$$

利用常值函数检验法知结论成立. □

定理 3.3.17. 设 $f\in\mathcal{C}([a,b])$，则 f 在 $[a,b]$ 上存在原函数，且 F 具有形式

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$$

证明. $f\in\mathcal{C}([a,b])\Longrightarrow$ 变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上满足 F 可微且

$$F'(x)=f(x)$$

故 F 为一个原函数.由命题知，任一原函数具有形式 $\mathscr{F}=F+C$. □

定义 3.3.18 (不定积分)**.** 给定 f，称 f 的原函数全体为 f 之**不定积分**（具有形式 $\{F+C\}_{C\in\mathbb{R}}$），记 f 之不定积分为 $\int f(x)dx$.

定理 3.3.19 (Newton-Leibniz 公式)**.** 设 $f\in\mathcal{C}([a,b])$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\mathscr{F}(b)-\mathscr{F}(a)$$

其中 $\mathscr{F}$ 为 f 之任一原函数.

证明. $\mathscr{F}$ 的存在性由 $f\in\mathcal{C}([a,b])$ 可得，且此时

$$\mathscr{F}(x)=\underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{F(x)}+C$$

故

$$\mathscr{F}(b)-\mathscr{F}(a)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt-\int_a^a f(t)dt\int_a^b f(t)dt$$

□

3.4 三种积分处理技巧

本节我们讨论三种积分处理的技巧：变量替换（u-substitution）、分部积分（integration by parts）以及部分分式.

命题 3.4.1 (分部积分)**.** 设 u,v 在 $[a,b]$ 上可微，u',v' 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\int_a^b (uv')(x)dx=(uv)(x)\Big|_a^b-\int_a^b (vu')(x)dx$$

证明. 由微分的四则运算知

$$(uv)' = u'v + uv'$$

由条件，各项均连续，故均 Riemann 可积且存在原函数.由 Newton-Leibniz 公式知

$$(uv)(x)\Big|_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b (u'v)(x)dx + \int_a^b (uv')(x)dx$$

□

命题 3.4.2. 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 的前 n 阶导数存在且连续，则

$$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$$

证明.

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x f'(t)(x-t)'dt \\
&= f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt \\
&= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt \\
&= f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt \\
&= \cdots = RHS
\end{aligned}$$

□

推论 3.4.3 (Lagrange 余项公式)**.** 假设同上，则 $\exists \xi \in (a,x)$，使得

$$R_{n-1}(x;a) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

证明. 由

$$R_{n-1}(x;a) = \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

利用积分中值定理可得 $\exists \xi \in (a,x)$，使得

$$R_{n-1}(x;a) = f^{(n)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

□

下面我们来考察变量替换.

命题 3.4.4. *(1)* $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ 上的连续可微函数，$\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(\beta) = b$，且 $f \in \mathcal{C}([a,b])$，则 $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) \in \mathcal{C}([\alpha,\beta])$ 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

(2) $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ 连续可微，$\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$ 且 φ 严格单调递增，$f\in\mathcal{R}([a,b])$，则 $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) \in \mathcal{R}([a,b])$ 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

证明. (1) 令 $\mathscr{F}$ 为 f 在 $[a.b]$ 的某个原函数，由复合函数的微分性质：

$$\Big(\mathscr{F}(\varphi(t))\Big)' = (\partial_x \mathscr{F})\Big|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) = f(x)\Big|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t)$$

由连续函数的复合及四则运算知 $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) \in \mathcal{C}([\alpha,\beta])$，且 $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ 的一个原函数为 $\mathscr{F}\big(\varphi(t)\big)$. 由Newton-Leibniz 公式

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \mathscr{F}\big(\varphi(t)\big)\Big|_\alpha^\beta = \mathscr{F}(x)\Big|_a^b = \int_a^b f(x)dx$$

(2) 分别取 $[a,b]$, $[\alpha,\beta]$ 的带标记点的划分 (P,ξ), (Q,η).由 φ 之单调性知这两种划分一一对应.由 φ 之连续性与 $[\alpha,\beta]$ 紧性知 φ 一致连续，即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,$ 使得对 $\forall t_1, t_2 \in [\alpha,\beta]$, $|t_1 - t_2| < \delta$

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon$$

从而 $\lambda(Q) \to 0$ 时，$\lambda(P) \to 0$.现由 $f \in \mathcal{R}([a,b])$ 知

$$\begin{aligned}
\sigma(P,\xi;f) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\triangle x_k \\
&= \sum_{k=1}^n f\big(\varphi(\eta_k)\big)\big(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\big) \\
&= \sum_{k=1}^n f\big(\varphi(\eta_k)\varphi'(\tilde{\eta}_k)(t_k - t_{k-1})\big),\ \tilde{\eta}_k \in (t_{k-1}, t_k) \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^n f\big(\varphi(\eta_k)\big)\varphi'(\eta_k)\triangle t_k}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n f\big(\varphi(\eta_k)\big)\big(\varphi'(\tilde{\eta}_k) - \varphi'(\eta_k)\big)\triangle t_k}_{\mathrm{II}}
\end{aligned}$$

由 $f \in \mathcal{R}([a,b])$ 知 f 有界，即 $\exists C$，使得

$$|f(x)| \leqslant C,\ \forall x \in [a,b]$$

从而

$$|\mathrm{II}| \leqslant \sum_{k=1}^n C\omega(\varphi', [t_{k-1}, t_k])\triangle t_k$$

由 $\varphi' \in \mathcal{C}([a,b]) \subseteq \mathcal{R}([a,b])$ 及夹逼准则知

$$\lim_{\lambda(Q)\to 0} |\mathrm{II}| = 0$$

从而

$$\lim_{\lambda(Q)\to 0} \sigma(P,\xi;f) = \lim_{\lambda(Q)\to 0} \mathrm{I}$$

而

$$\lim_{\lambda(Q)\to 0} \sigma(P,\xi;f) = \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(P,\xi;f) = \int_a^b f(x)dx$$

故

$$\lim_{\lambda(Q)\to 0} \mathrm{I} = \int_a^b f(x)dx$$

即

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

□

最后我们讨论部分分式法.对有理函数 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 P,Q 为关于 x 之实系数多项式，设

$$Q(x)=k\prod_{i=1}^{M}(x-x_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{N}(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}$$

且 $x^2+b_jx+c_j$ 无实根.从而 $\exists A_{i,1},\cdots,A_{i,m_i}$, $B_{j,1},\cdots,B_{j,n_j}$, $C_{j_1},\cdots,C_{j,n_j}\in\mathbb{R}$，使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{A_{i,1}}{(x-x_i)^1}+\cdots+\frac{A_{i,m_i}}{(x-x_i)^{m_i}}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{B_{j,1}x+C_{j,1}}{(x^2+b_jx+c_j)^1}+\cdots+\frac{B_{j,n_j}x+C_{j,n_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}}\right)+\text{多项式}$$

注意到

$$\int\frac{dx}{(x-x_i)^{m_i}}=\begin{cases}\ln|x-x_i|+C\ ,\ m_i=1\\ \frac{1}{-m+1}(x-x_i)^{-m_i+1}\ ,\ m_i\geqslant 2\end{cases}$$

故可计算有理函数的积分.

3.5 积分的逼近

我们的目标是对 $\int_a^b f(x)dx$ 作近似，并给出误差估计.有两种方法：对被积函数 f 在 $[a,b]$ 作逼近，以及对极限过程 $\lim\limits_{\lambda(P,\xi)\to 0}$ 进行逼近.

先考虑对被积函数 f 在 $[a,b]$ 作逼近.假设 f 在 $[a,b]$ n 阶可导，$f(x)=P_n(x;x_0)=R_n(x;x_0)$，则

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b P_n(x;x_0)dx\right|=\left|\int_a^b R_n(x;x_0)dx\right|$$

进一步假设 $f\in\mathcal{C}^{n+1}([a,b])$，由 Lagrange 余项公式知 $\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$R_n(x;x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

则

$$\begin{aligned}&|R_n(x;x_0)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b|x-x_0|^{n+1}dx\\ \Longrightarrow&\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b P_n(x;x_0)\right|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b|x-x_0|^{n+1}dx\end{aligned}$$

再考虑对极限过程 $\lim\limits_{\lambda(P,\xi)\to 0}$ 进行逼近.取特殊的 (P,ξ)，计算 $\sigma(P,\xi;f)$.

(1) 左端逼近.取

$$\sigma(P,\xi;f)=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\triangle x_k:=L_n$$

误差为

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\triangle x_k\right|\\ =&\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_{k-1})dx\right|\\ =&\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\big(f(x)-f(x_{k-1})\big)dx\right|\\ \xlongequal{f\in\mathcal{C}^1([a,b])}&\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f'(\eta_k)(x-x_{k-1})dx\right|\\ \leqslant&\sum_{k=1}^{n}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2\xlongequal{P\text{ 为等分划分}}\max_{x\in[a,b]}|f'(x)|\cdot\frac{1}{2}\frac{(a-b)^2}{n}\end{aligned}$$

(2) 右端逼近 R_n 类似.

(3) 梯形公式 $T_n=\frac{1}{2}(L_n+R_n)$，则误差

$$\left|\int_a^b f(x)dx-T_n\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\Big(f(x)-\frac{1}{2}\big(f(x_{k+1})+f(x_k)\big)\Big)dx\right|$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\Big(f(x)-\frac{1}{2}\big(f(x_{k-1})+f(x_k)\big)\Big)dx=&\Big(f(x)-\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\Big)\Big(x-\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big)\Big|_{x_{k-1}}^{x_k}\\&-\int_{x_{k-1}}^{x_k}\Big(x-\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big)f'(x)dx\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx-T_n&=-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\Big(x-\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big)\Big(f'\big(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\big)+f''(\eta_k)\big(x-\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\big)\Big)dx\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\Big(x-\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big)f'\Big(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big)dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f''(\eta_k)\Big(x-\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big)^2dx\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)dx-T_n|&\leqslant\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\cdot\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{3}\Big(x-\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big)^3\right|_{x_{k-1}}^{x_k}\\&=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\cdot\frac{(b-a)^3}{12n^2}\end{aligned}$$

(3) M_n 公式 $M_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f\Big(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\Big)\triangle x_k$，其误差小于等于

$$\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}$$

(4) Simpson 公式

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+4f(\frac{x_{k-1}+x_k}{2})+f(x_k)}{6}\triangle x_k$$

其误差小于等于

$$\text{常数}\cdot\frac{(b-a)^5}{n^4}$$

3.6 反常积分及其敛散性判别

定义 3.6.1. 设 $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$ 处处又定义，ω 可为 $+\infty$.设 $\forall b\in[a,\omega)$，$f\Big|_{[a,b]}\in\mathcal{R}([a,b])$，若 $\lim\limits_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx$ 存在，则称其为 f 在 $[a,\omega)$ 上的**反常积分**，记作 $\int_a^\omega f(x)dx$.
或形式地，称 $\int_a^\omega f(x)dx$ 为反常积分，不论其是否存在，当极限 $\lim\limits_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx$ 存在时，则称反常积分 $\int_a^\omega f(x)dx$ 收敛于 $\lim\limits_{b\to\omega}\int_a^b f(x)dx$，否则称其发散.

例 3.6.2. 计算 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$, $\alpha>0$.

解. 注意到

$$\int_1^b\frac{1}{x^\alpha}dx=\begin{cases}\ln b\ ,\ \alpha=1\\ \frac{1}{-\alpha+1}(b^{-\alpha+1}-1)\ ,\ \alpha_i\neq 1\end{cases}$$

故

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^\alpha}dx=\begin{cases}\frac{-1}{1-\alpha}\text{ , }\alpha>1\\ \text{发散 , }0<\alpha<1\end{cases}$$

□

注 3.6.3. 导致 $\int_a^\omega f(x)dx$ 收敛/发散有两种情形：

I. $\omega=+\infty$，f 处处有定义，称为红外发散.

II. ω 有限，f 在 ω 附近无界或极限不存在，称为紫外发散.

下面我们讨论反常积分的收敛性判别，默认 $\omega=+\infty$.

命题 3.6.4 (Cauchy 收敛准则)**.** 若 $\forall\varepsilon>0,\exists M>0,$ 使得对 $\forall b_1,b_2>M$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\right|<\varepsilon$$

则反常积分收敛.

命题 3.6.5 (比较判法)**.** 设 $0\leqslant f(x)\geqslant g(x)$, $\forall[a,\omega]$，则

- $\int_a^\omega g(x)dx$ 收敛 $\Longrightarrow\int_a^\omega f(x)dx$ 收敛.
- $\int_a^\omega f(x)dx$ 发散 $\Longrightarrow\int_a^\omega g(x)dx$ 发散.

证明. 只用证前半部分，后半部分为前半部分之逆否命题.由 Cauchy 收敛准则知 $\forall\varepsilon>0,\exists M,$ 使得对 $\forall b_2>b_1>M$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$$

故 $\forall\varepsilon>0,\exists M,$ 使得对 $\forall b_2>b_1>M$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\right|<\left|\int_{b_1}^{b_2}g(x)dx\right|<\varepsilon$$

故 $\int_a^\omega f(x)$ 收敛. □

命题 3.6.6. 若 $\int_a^\omega f(x)dx$ 绝对收敛，则收敛.

证明. 注意到

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx\right|<\int_{b_1}^{b_2}|f(x)|\,dx$$

利用 Cauchy 收敛准则即得. □

例 3.6.7. $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, $\alpha>1$ 收敛，因为 $\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{x^\alpha}$，故由比较判法及命题*3.6.6* 即得.

命题 3.6.8 (与级数比较)**.** 设 $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f\geqslant0$，且 f 单调递减，$f\Big|_{[1,b)}\in\mathcal{R}([1,b])$，则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}f(k)$ 与 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛性一致.

证明. 由单调性

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)dx\leqslant f(k),\ \forall k\geqslant1$$

令 $S_n\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)$，则

$$S_{n+1}-f(1)\leqslant\int_1^{n+1}f(x)dx\leqslant S_n$$

若 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ 存在，则 $(S_n)_{n\geqslant 1}$ 有界，故 $\int_1^{n+1} f(x)dx$ 有界.注意到 $\int_1^b f(x)dx$ 单调递增，由单调收敛定理知 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

类似地，若 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ 收敛. □

定义 3.6.9. 若 $[a,\omega)$ 中有多个反常点，则将其划分为若干区间，使得每个区间仅有一个反常点，称 $\int_a^{\omega} f(x)dx$ 收敛，若每一段反常积分均收敛.

下面我们讨论 Abel-Dirichlet 判法.

定理 3.6.10. 设 $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$，若

(1) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，g 单调有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

(2) $\{\int_a^x f(t)dt\}_{x\in[a,+\infty)}$ 有界，g 单调趋于 0，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

在证明前，我们先介绍一个代数变形技巧——Abel 变换.

设数列 $(a_k)_{k\geqslant 1}$，$(b_k)_{l\geqslant 1}$，部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$$

特别地，若 $m\leqslant A_k\leqslant M$, $\forall k$, $b_i\geqslant 0$ 且 b_i 单调递减，则

$$mb_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant Mb_1$$

引理 3.6.11 (积分中值定理 II). 设 $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$, $g\geqslant 0$ 且 g 单调递减，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b (fg)(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx$$

注 3.6.12 (积分中值定理 I). $g\geqslant 0$ 或 $g\leqslant 0$，f 连续，则 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b (fg)(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

证明.

$$\int_a^b (fg)(x)dx = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(fg)(x)dx\Big)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(fg)(x)dx = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\big(g(x)-g(x_{k-1})f(x)\big)dx$$

注意到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\big(g(x)-g(x_{k-1})f(x)\big)dx\right| &\leqslant C\cdot\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|g(x)-g(x_{k-1})|\,dx\\ &\leqslant C\cdot\sum_{k=1}^{n}\omega(g,\triangle_k)\triangle x_k\end{aligned}$$

其中 C 为 $|f|$ 之上界.由 $g\in\mathcal{R}([a,b])$，上式在 $n\to+\infty$ 时 $\to 0$.（Riemann 可积 $\Longleftrightarrow$ 振幅和很小）.

从而

$$\int_a^b (fg)(x)dx = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\underbrace{g(x_{k-1})}_{b_k}\ \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx}_{a_k=F(x_k)-F(x_{k-1})}\ \Big)$$

由 $f\in\mathcal{R}([a,b])$ 知 $F\in\mathcal{C}([a,b])$.设 $\min\limits_{x\in[a,b]}F(x)=m,\ \max\limits_{x\in[a,b]}F(x)=M$.由 $g\geqslant 0,\ g$ 单调递减及 Abel 变换知

$$mg(a)\leqslant\int_a^b(fg)(x)dx\leqslant Mg(a)$$

利用连续函数的 Bolzano-Cauchy 介值定理得 $\exists\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b(fg)(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

□

引理 3.6.13. 设 $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$, g 单调，则 $\exists\xi\in(b_1,b_2)$，使得

$$\int_{b_1}^{b_2}(fg)(x)dx=g(b_1)\int_{b_1}^{\xi}f(x)dx+g(b_2)\int_{\xi}^{b_2}f(x)dx$$

证明. 分情况讨论：若 g 单调递增，考虑 $\tilde g(x)=g(b_2)-g(x)$，则 $\tilde g\geqslant 0$ 且 $\tilde g$ 单调递减.利用 积分中值定理 II 于 $f,\tilde g$ 知 $\exists\xi\in(b_1,b_2)$，使得

$$\int_{b_1}^{b_2}(f\tilde g)(x)dx=\tilde g(b_1)\int_{b_1}^{\xi}f(x)dx$$

由 $\tilde g(x)=g(b_2)-g(x)$ 知

$$LHS=g(b_2)\int_{b_1}^{b_2}f(x)dx-\int_{b_1}^{b_2}f(x)g(x)dx$$
$$RHS=g(b_2)\int_{b_1}^{\xi}f(x)dx-g(b_1)\int_{b_1}^{\xi}f(x)dx$$

整理即得.
若 g 单调递增，构造 $\tilde g(x)=g(x)-g(b_2)$，同理即得. □

Abel-Dirichlet 判法的证明. 由积分中值定理 II 知，$\exists\xi\in(b_1,b_2)$，使得

$$\int_{b_1}^{b_2}f(x)g(x)dx=g(b_1)\int_{b_1}^{\xi}f(x)dx+g(b_2)\int_{\xi}^{b_2}f(x)dx$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_a^{+\infty}$ 收敛 $\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0,$ 使得对 $\forall b_1,b_2>M$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2}f(x)g(x)dx\right|<\varepsilon$$

当 (1) 成立或 (2) 成立时，上式均满足. □

对于级数，我们同样有 Abel-Dirichlet 判法，即

(1) 若 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k$ 收敛 + $(b_k)_{k\geqslant 1}$ 单调有界.

(2) 若 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)_{n\geqslant 1}$ 有界 + $(b_k)_{k\geqslant 1}$ 单调趋于 0.

则 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_kb_k$ 收敛.

证明. 利用 Abel 变换

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{m}a_kb_k\right|&=\left|A_mb_m-A_{n-1}b_n+\sum_{k=n}^{m-1}A_k(b_k-b_{k+1})\right|\\&\leqslant|A_m(b_m-b_n)|+|(A_m-A_{n-1})b_n|+\max_{n\leqslant k\leqslant m-1}|A_k|\,|b_n-b_m|\end{aligned}$$

当 (1) 成立或 (2) 成立时，上式均可任意小，由 Cauchy 收敛准则得证. □

4　一致收敛性与极限交换

4.1　反常积分的计算：一致收敛性的引入

考虑反常积分 $I=\int_a^\omega f(x)dx$，其中 ω 为积分瑕点.我们引入额外参数 t，使得 $\lim\limits_{t\to t_0} f(x;t)=f(x)$.考察含参反常积分

$$I_t=\lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x;t)dt=\int_a^\omega f(x;t)dt$$

我们试图交换极限来计算 I:

$$\begin{aligned} I&=\lim_{b\to\omega}\int_a^b\lim_{t\to t_0}f(x;t)dt=\lim_{b\to\omega}\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(x;t)dt\\ &=\lim_{t\to t_0}\lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x;t)dt=\lim_{t\to t_0}I_t\end{aligned}$$

由此确实可以反常积分 I 的值，但 $=$ 两步并不严谨.先看下述例子：

例 4.1.1. 计算 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

解. 考察 $f(x,t)=\frac{\sin x}{x}e^{-xt},t>0$，则：

$$I=\int_0^{+\infty}\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin x}{x}e^{-xt}\right)dx=\lim_{t\to0}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xt}dx\ :=\lim_{t\to0}I_t$$

另一方面，

$$\frac{d}{dt}I_t=\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin x}{x}e^{-xt}\right)dx=\int_0^{+\infty}(-\sin x)e^{-xt}dx\ \overline{\overline{\text{分部积分}}}\ -\frac{1}{1+t^2}$$

对其积分得：$I_t=-\arctan t+C$ 为确定 C，注意到：

$$\lim_{t\to+\infty}I_t=\int_0^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}e^{-xt}\right)dx=0$$

故：$C=\frac{\pi}{2}\Rightarrow I_t=-\arctan t+\frac{\pi}{2}$，从而 $I=\frac{\pi}{2}$. □

但须注意的是上式中 $=$ 仍不严谨，为此我们引入一致收敛性.

注 4.1.2. 上述交换极限的想法可用于处理级数，例如 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k$，此时引入参数的方法不唯一，比如 $f(t)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}kt^k$ 或 $\zeta(s)=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k^{-s}$.

4.2　一致收敛性

定义 4.2.1 (含参函数)**.** 考虑函数 $F:X\times T\to\mathbb{R},(x,t)\mapsto F(x,t)$，指定 x 为变量，t 为参数或参变量，称 F 为**依赖于参数的函数族** $\{f_t:X\to\mathbb{R}\}_{t\in T}$ $f_t(x):=F(x,t)$，此时称 T 为参数集或参数域.

我们将常用的含参函数列举如下：

X	T	F: X×T→ $\mathbb{R}$
X $\subseteq\mathbb{R}^n$	$\mathbb{N}$	$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
X $\subseteq\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$之子集	$\{f_t\}_{t\in T}$
X $=\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$	$\{a_n:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$
X $=\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$之子集	$\{a_t:\mathbb{N}\to\mathbb{R}\}_{t\in T}$

X	T	F: X×T→ ℝ
X=带标记点的划分	ℕ	积分和
X=带标记点的划分	ℝ之子集	积分和

定义 4.2.2 (一致收敛). 设在集合 T 上装备了基 $\mathcal{B}_T$，称 $\{f_t\}_{t\in T}$ **一致收敛于** f，若 $\forall\varepsilon>0,\exists B=B(\varepsilon)$, 使得对 $\forall t\in B$

$$|f_t(x)-f(x)|<\varepsilon\ (\forall x\in X)$$

不依赖于 $x\in X$，记作 $f_t\overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows}f$.

注 4.2.3. 一致收敛可推出点态（逐点）收敛.

例 4.2.4. $T=\mathbb{N}$, $\mathcal{B}_T=\big\{B_M|B_M=\{n>M\}\cap\mathbb{N}\subseteq T\big\}=n\to+\infty$，则 $f_n\overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows}f$ 可定义为 $\forall\varepsilon>0,\exists M=M(\varepsilon)$, 使得对 $\forall n>M$

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

例 4.2.5. $X=\mathbb{R}$, $T=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathcal{B}_T=t\to0$, $f_t(x)=e^{-\frac{x^2}{t^2}}$，考察 $\{f_t:X\to\mathbb{R}\}_{t\in T}$ 的点态与一致收敛性.

点态收敛性： $\forall x$, $\lim\limits_{\mathcal{B}_T}f_t(x)=f(x)=\begin{cases}0\ ,\ x\neq0\\1\ ,\ x=0\end{cases}$

一致收敛性： f_t 在基 $\mathcal{B}_T$ 下不一致收敛.反证：若 f_t 一致收敛，则 $f_t\overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows}f$，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)$, 使得对 $\forall 0<t<\delta$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_t(x)-f(x)|<\varepsilon$$

具体计算：

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_t(x)-f(x)|=\max\Big\{\sup_{x\neq0}|f_t(x)-f(x)|\,,|f_t(0)-f(0)|\Big\}=\sup_{x\neq0}\left|e^{-\frac{x^2}{t^2}}\right|$$

但取 $x=t\neq0$, $\varepsilon_0=\frac{1}{2e}$，则 $e^{-\frac{x^2}{t^2}}=\frac{1}{e}>\varepsilon_0$ ，矛盾！故 f_t 点态收敛于 f，但不一致收敛.
我们更细致地来分析 $\delta=\delta(\varepsilon,x)$ 对 x 的依赖性.事实上，

$$\left|e^{-\frac{x^2}{t^2}}\right|<\varepsilon\Leftrightarrow x>\sqrt{(-\ln\varepsilon)t^2}$$

不可能对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立.

命题 4.2.6 (一致收敛性的判据). 对一致收敛性，我们有如下判据：

(1) *Cauchy* 收敛准则：$f_t\overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows}f\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists B=B(\varepsilon)$, 使得对 $\forall t_1,t_2\in B$

$$|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<\varepsilon,\forall x$$

(2) 与不依赖于 X 的收敛函数列比较：若 $\{g_t:X\to\mathbb{R}\}_{t\in T}$ 不依赖于 X，且 $\{g_t:X\to\mathbb{R}\}_{t\in T}$ 收敛，$|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)|<|g_{t_1}-g_{t_2}|$，则 $\{f_t\}$ 一致收敛.

(3) 通常的判别准则 + 一致收敛性：
例：级数的 *Abel-Dirichlet* 判法：对级数列 $\{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(x):X\to\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$，若满足以下条件之一：

(a) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k(x)$ 一致收敛，$\{b_k\}$ 单调且一致有界.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k(x)$ 一致有界，$\{b_k\}$ 单调且一致趋于*0*.

则级数列 $\{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(x)b_k(x):X\to\mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛.

接下来我们用一致收敛性来研究极限交换.

4.3 极限交换定理

定理 4.3.1. 设 $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 一致收敛于 f，且对 $\forall n$，f_n 连续，则 f 连续.

证明. (3ε 法)只需证：$\forall x_0 \in X \subseteq \mathbb{R}$，$f$ 在点 x_0 处连续.由一致收敛性可得：$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon)$, 使得对 $\forall n > N$

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

特别地，取 $n = N + 1$，有 $|f_{N+1}(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x$
由 f_{N+1} 之连续性，对上述 ε, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$, 使得对 $\forall |x - x_0| < \delta$

$$|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| < \varepsilon$$

故

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| + \left|f_{N+1}(x_0) - f_(x_0)\right| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

故 f 在 x_0 处连续. □

注 4.3.2. 定理结论也可写作 $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$.

定理 4.3.3 (极限交换定理). 考虑含参函数 $\{f_t : X \to \mathbb{R}\}_{t\in T}$，设 X 装备了基 $\mathcal{B}_X$，T 装备了基 $\mathcal{B}_T$.设：①$f_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f$ ②$\forall t$, $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} f_t(x) = A_t$ （即 $\forall t$, $f_t(x) \overset{\mathcal{B}_X}{\to} A_t$），则 $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} \lim\limits_{\mathcal{B}_T} f_t(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}_T} \lim\limits_{\mathcal{B}_X} f_t(x)$.
另一种陈述方式为：存在交换图表

$$\begin{tikzcd}
f_t \arrow[r, Rightarrow, "\mathcal{B}_T"] \arrow[d, "\mathcal{B}_X"'] & f \arrow[d, dashed, "\exists\mathcal{B}_X"] \\
A_t \arrow[r, dashed, "\exists\mathcal{B}_T"] & A
\end{tikzcd}$$

证明. 由 $f_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f$ 可得：$\forall \varepsilon > 0, \exists B_T = B_T(\varepsilon)$, 使得对 $\forall t_1, t_2 \in B_T$

$$\sup_{x\in X} |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon \tag{4.3.1}$$

在不等式 $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$ 上取 $\mathcal{B}_X$ 下之极限，由极限与四则运算、极限与不等式之关系，有：

$$\lim_{\mathcal{B}_X} |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| = |A_{t_1} - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon \tag{4.3.2}$$

结合 (4.3.1)(4.3.2) 知：$\forall \varepsilon > 0, \exists B_T = B_T(\varepsilon)$, 使得对 $\forall t_1, t_2 \in \mathcal{B}_T$

$$|A_{t_1} - A_{t_2}| \leqslant \varepsilon \tag{4.3.3}$$

即 $\lim\limits_{\mathcal{B}_T} A_t$ 存在，记作 A.下证：$\lim\limits_{\mathcal{B}_X} f$ 存在且等于 A.
对 (4.3.3) 中的 ε, $t_1 \in B_T$，由 $A_{t_1} = \lim\limits_{\mathcal{B}_X} f_{t_1}(x)$ 知：$\exists B_X = B_X(\varepsilon, t_1)$，使得对 $\forall x \in B_X$

$$|f_{t_1}(x) - A_{t_1}(x)| < \varepsilon \tag{4.3.4}$$

在 (4.3.1) 和 (4.3.3) 中对 t_2 取基 $\mathcal{B}_T$ 下之极限，得：

$$|f_{t_1}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \ (\forall x \in X) \tag{4.3.5}$$

$$|A_{t_1} - A| \leqslant \varepsilon \ (\forall x \in X) \tag{4.3.6}$$

由 (4.3.4)， (4.3.5)， (4.3.6)，得：$\forall \varepsilon > 0, \exists B_X$, 使得对 $\forall x \in B_X$

$$|f(x) - A| < 3\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} f = A$. □

推论 4.3.4 (极限与无穷求和交换). 设 ①$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x) \rightrightarrows S(x)$，且 ②$\lim\limits_{x\to x_0} a_k(x)$ 对 $\forall k$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\big(\lim\limits_{x\to x_0} a_k(x)\big)$.

证明. 取 $X = a_k,\ k \geqslant 1$ 之定义域，$\mathcal{B}_X = x \to x_0,\ T = \mathbb{N},\ \mathcal{B}_T = n \to +\infty,\ f_t(x) = S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x)$，则有如下交换图表：

$$\begin{tikzcd}
S_n \arrow[r, Rightarrow, "n\to+\infty"] \arrow[d, "x\to x_0"] & f \arrow[d, dashed, "\exists n\to+\infty"] \\
A_n \arrow[r, dashed, "\exists x\to x_0"] & A
\end{tikzcd}$$

从而命题得证. □

推论 4.3.5 (极限与极限交换). 设 ①$f_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f$，且 ②$f_t \overset{\mathcal{B}_X}{\to} A_t$，则 $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} f = \lim\limits_{\mathcal{B}_T} A_t$.

推论 4.3.6 (极限与取值交换). 设 ①$f_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f$，且 ②$\forall t,\ \lim\limits_{x\to x_0} f_t(x) = f_t(x_0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

证明.

$$\begin{tikzcd}
S_n \arrow[r, Rightarrow, "n\to+\infty"] \arrow[d, "x\to x_0"] & f \arrow[d, dashed, "\exists n\to+\infty"] \\
A_n \arrow[r, dashed, "\exists x\to x_0"] & A
\end{tikzcd}$$

□

定理 4.3.7 (极限与微分交换). 设 ①$\{f_t : X \to \mathbb{R}\}_{t\in T}$ 为定义在有界凸集 X 上的可微函数，且 $\partial_x f_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} \varphi$，②$\{f_t\}_{t\in T}$ 至少在一点 $x_0 \in X$ 处收敛，则 $f_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f$ 且 f 可微，$f' = \varphi$.

证明. 先证明 $f_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f$，由 Cauchy 收敛准则，只需估计 $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)|$.注意到

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x) - (f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0))| + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)|$$

应用 Lagrange 有限增量定理于 $g(x) = f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)$ 知：$\exists \xi(x) = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$ 使得

$$g(x) - g(x_0) = g'(\xi(x))(x - x_0)$$

由 X 有界知 $\{|x - x_0|\}_{x\in X}$ 有界，从而

$$|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant \big|f'_{t_1}(\xi(x)) - f'_{t_2}(\xi(x))\big|\,|x - x_0| + |f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)|$$

在 t_1, t_2 充分大时可充分小且不依赖于 x，其中 $\big|f'_{t_1}(\xi(x)) - f'_{t_2}(\xi(x))\big|$ 可充分小是因为 ① 中 $\partial_x f_t$ 一致收敛，$|f_{t_1}(x_0) - f_{t_2}(x_0)|$ 可充分小是因为 ② 中 $\{f_t\}_{t\in T}$ 在 x_0 处收敛.故 $\{f_t\}_{t\in T}$ 一致收敛于 f. 固定 x，考虑

$$\begin{aligned}
F_t : Y = \{h \in \mathbb{R}^n | h \neq 0,\ x + h \in X\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
h &\longmapsto \frac{f_t(x+h) - f_t(x) - \big(\partial_x f_t\big)(x)h}{|h|}
\end{aligned}$$

由 $\{f_t\}_{t\in T}$ 和 $\{\partial_x f_t\}_{t\in T}$ 的一致收敛性及极限的四则运算知：$F_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} \frac{f(x+h) - f(x) - \varphi(x)h}{|h|}$.
在 Y 上取基 $\mathcal{B}_Y = h \to 0$，则由定义，$\lim\limits_{\mathcal{B}_Y} F_t$ 存在且为 0. 故由极限交换定理

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathcal{B}_Y}\lim_{\mathcal{B}_T} F_t(x) = \lim_{\mathcal{B}_T}\lim_{\mathcal{B}_Y} F_t(x) \\
\Longrightarrow &\lim_{h\to 0}\lim_{\mathcal{B}_T} \frac{f_t(x+h) - f_t(x) - \big(\partial_x f_t\big)(x)h}{|h|} = \lim_{\mathcal{B}_T}\lim_{h\to 0} \frac{f_t(x+h) - f_t(x) - \big(\partial_x f_t\big)(x)h}{|h|} \\
\Longrightarrow &\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \varphi(x)h}{|h|} = \lim_{\mathcal{B}_T} 0 = 0
\end{aligned}$$

即 $f' = \varphi$. □

推论 4.3.8 (无穷求和与微分交换). 设 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为有界凸集 X 上的可微函数族，设：①$\sum\limits_{k=1}^{n} f'_k \rightrightarrows \varphi$ 且 ②$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k$ 至少在一点 x_0 处收敛，则：$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f_k$ 一致收敛于 S，且 S 可微，$S' = \varphi$.

证明. 令 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$，取 $T = \mathbb{N}$，及 $\mathcal{B}_T = n \to +\infty$，由条件，$S'_n \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} \varphi$ 且 S_n 至少在一点 x_0 处收敛.由极限与微分交换知结论成立. □

定理 4.3.9 (极限与积分交换). 设 $\{f_t : [a,b] \to \mathbb{R}\}_{t\in T}$，若：①$f_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f$，且 ②$\forall t$, $f_t \in \mathcal{R}([a,b])$，则 $f \in \mathcal{R}([a,b])$ 且 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\mathcal{B}_T} \int_a^b f_t(x)dx$.

证明. 定义 $\mathcal{P} = \{$带标记点的划分$\}$，取基 $\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \lambda(P,\xi) \to 0$，定义 $\{F_t : \mathcal{P} \to \mathbb{R}\}_{t\in T}$，其中 $F_t(P,\xi) = \sigma\big((P,\xi); f_t\big)$.先证明：$F_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} F$，其中 $F = \sigma\big((P,\xi); f\big)$.

$$\begin{aligned}\left|\sigma\big((P,\xi); f_t\big) - \sigma\big((P,\xi); f\big)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f_t(\xi_k)\triangle x_k - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\triangle x_k\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|f_t(\xi_k) - f(\xi_k)\right| \triangle x_k \leqslant \sup_{x\in X} \left|f_t(x) - f(x)\right| (b-a)\end{aligned}$$

由 $f_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f$，故 $F_t \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} F$.又由 $f_t \in \mathcal{R}([a,b])$, $\forall t$，故

$$\lim_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}}} F_t = \lim_{\lambda(p,\xi)\to 0} \sigma\big((P,\xi); f_t\big) = \int_a^b f_t(x)dx$$

存在.由极限交换定理

$$\begin{aligned}&\lim_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}}} \lim_{\mathcal{B}_T} F_t = \lim_{\mathcal{B}_T} \lim_{\mathcal{B}_{\mathcal{P}}} F_t \\ \Longrightarrow &\lim_{\lambda(P,\xi)\to 0} \sigma\big((P,\xi), f\big) = \lim_{\mathcal{B}_T} \int_a^b f_t(x)dx\end{aligned}$$

即 $f \in \mathcal{R}([a,b])$ 且 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\mathcal{B}_T} \int_a^b f_t(x)dx$. □

推论 4.3.10 (无穷求和与积分交换). 设 ①$\sum\limits_{k=1}^{n} f_k \rightrightarrows S$，且 ② $\forall k$, $f_k \in \mathcal{R}([a,b])$，则 $S \in \mathcal{R}([a,b])$ 且 $\int_a^b S(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$.

证明. 令 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k : X \to \mathbb{R}$, $T = \mathbb{N}, \mathcal{B}_T = n \to +\infty$，从而由 ①，$S_n \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} S$，又由 Riemann 函数可积函数之和仍 Riemann 可积，故由极限与积分交换得

$$\int_a^b S(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

□

例 4.3.11. 将 $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ 写为级数形式.

证明. 定义 $P_n(x^2; 0)$ 为 $\sin(x^2)$ 的 n 阶泰勒多项式.由 Lagrange 余项公式，$\sin(x^2) = P_n(x^2; 0) + R_n(x^2; 0)$，其中 $R_n(x^2; 0) = \frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x^2 - 0)^{n+1}$.故

$$\left|R_n(x^2; 0)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \left|x^2\right|^{n+1} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$$

从而 $P_n \xrightarrow[]{n\to+\infty} \sin(x^2)$. 由 P_n 为多项式，从而连续，故可积，由极限与积分交换知：

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} P_n(x^2;0)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 P_n(x^2;0)dx$$

其中 $P_{n+1}(x^2;0) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(x^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}$.故

$$\int_0^1 \sin(x^2)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+3)(2k+1)!}$$

□

4.4 一个处处连续但处处不可微的例子：Weierstrass 函数

定义 4.4.1 (Weierstrass 函数). *考虑*

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} b^k \cos(\pi a^k x) \end{aligned}$$

其中要求 $0<b<1,\ a \geqslant 3, ab>1, \frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$.*称* f *为* ***Weierstrass 函数***.

命题 4.4.2. *Weierstrass 函数* f *处处连续但处处不可微.*

证明. 先证连续性.令 $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b^k \cos(\pi a^k x)$，注意到

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} b^k \cos(\pi a^k x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m+n} \left|b^k\right| \leqslant \frac{b^{n+1}}{1-b}$$

故由 Cauchy 收敛准则知 $S_n \xrightarrow[]{n\to+\infty} f(x)$. 由极限与取值交换知 f 连续.
再证：$\forall x_0 \in \mathbb{R}$，可取 $\{x_n\}_{n\geqslant 1} \to x_0$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ 不存在，由此可知 $f(x)$ 在 x_0 处不可微.
$\forall n \geqslant 1$，可取 $\tilde{x}_n \in \mathbb{Z}$ 满足 $\frac{1}{2} \leqslant \tilde{x}_n - a^n x_0 < \frac{3}{2}$，从而

$$\frac{\tilde{x}_n}{a^n} - \frac{3}{2a^n} < x_0 \leqslant \frac{\tilde{x}_n}{a^n} - \frac{1}{2a^n}$$

令 $x_n = \frac{\tilde{x}_n}{a^n}$.由 $a \geqslant 3$ 及夹逼准则知 $x_n \to x_0 (n\to+\infty)$.
考察 $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$.定义

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{\tilde{x}_n} b^k \frac{\cos(\pi a^k x_n) - \cos(\pi a^k x_0)}{x_n - x_0}$$
$$B_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^{\tilde{x}_n} b^k \frac{\cos(\pi a^k x_n) - \cos(\pi a^k x_0)}{x_n - x_0}$$

我们断言：$|A_n| \leqslant (ab)^n \frac{\pi}{ab-1}$，$|B_n| \geqslant \frac{2}{3}(ab)^n$.若断言成立，则

$$\left|(-1)^n \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right| \geqslant B_n - |A_n| \geqslant (ab)^n \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right)$$

由 $ab>1$, $\frac{2}{3}>\frac{\pi}{ab-1}$ 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$ 不存在.
事实上，由 Lagrange 有限增量定理

$$|A_n|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{\tilde{x}_n}\pi a^k b^k\big(-\sin(\pi a^k\xi_n)\big)\right|\leqslant\pi\sum_{k=0}^{n-1}|ab|^k<\frac{\pi}{ab-1}$$

$$B_n\xlongequal{a^n x_n\in\mathbb{Z}}\sum_{k=n}^{+\infty}b^k\frac{\cos\big(\pi(a^kx_n-a^nx_n)\big)-\cos\big(\pi(a^kx_0-a^nx_n)\big)}{x_n-x_0}$$

$$=b^n\frac{1-\cos\big(\pi a^n(x_0-x_n)\big)}{x_n-x_0}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}b^k\frac{\cos\big(\pi(a^kx_n-a^nx_n)\big)-\cos\big(\pi(a^kx_0-a^nx_n)\big)}{x_n-x_0}$$

$$\underset{\frac{1}{2}\leqslant a^n(x_n-x_0)<\frac{3}{2}}{\overset{a^nx_n\in\mathbb{Z}}{\geqslant}}b^n\frac{1-0}{x_n-x_0}+0\geqslant b^n\frac{1-0}{\frac{3}{2a^n}}=\frac{2}{3}(ab)^n$$

故命题得证. □

注 4.4.3. 若令 $\varphi(x)=|x|$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，并将其以2为周期延拓到 $\mathbb{R}$ 上，即 $\varphi(x+2)=\varphi(x)$.定义 $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(\frac{3}{4})^k\varphi(4^kx)$，则 f 给出了另一个处处连续而处处不可微的函数的例子.

4.5 含参积分的极限交换

定义 4.5.1. 含参积分为形如 $I_t=\int_{X_t}f(x,t)dx$ 的积分，其中 t 为参变量，X_t 为由 t 决定的积分区域，且 $\forall t\in T$, $f(x.t)\in\mathcal{R}(X_t)$.

为方便讨论，我们约定 $R=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2|\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant t\leqslant d\}\subseteq\mathbb{R}^2$ 且 $f\in\mathcal{C}(R)$.

命题 4.5.2 (含参积分关于参数的连续性)**.** 设 $f\in\mathcal{C}(R)$，则 $\forall t_0\in[c,d]$，I_t 在 $t=t_0$ 处连续.

证明. 注意到 $I_{t_0}=\int_a^b f(x,t_0)dx$ 存在，故只需证 $\lim\limits_{t\to t_0}I_t=I_{t_0}$，即

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b f(x,t)dx=\int_a^b\lim_{t\to t_0}f(x,t)dx$$

我们断言：①$f(x,t)\overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows}f(x,t_0)$ 且 ②$\forall t, f(x,t)\in\mathcal{R}([a,b])$，则由极限与积分交换知上式成立. 首先注意到 R 为紧的，故由 $f\in\mathcal{C}(R)$ 知 f 一致连续，即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)$,使得对 $\forall(x_1,t_1),(x_2,t_2)$,
$|(x_1,t_1)-(x_2,t_2)|<\delta$

$$|f(x_1,t_1)-f(x_2,t_2)|<\varepsilon$$

特别地，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)$,使得对 $\forall\,|t-t_0|<\delta$

$$|f(x,t)-f(x,t_0)|<\varepsilon$$

即 $f(x,t)\overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows}f(x,t_0)$.又由 $f(x,t)\in\mathcal{C}([a,b])$ 知 $f(x,t)\in\mathcal{R}([a,b])$，故 ①② 成立. □

注 4.5.3. 设 $f\in\mathcal{C}([a,b]\times U)$，其中 $U\subseteq\mathbb{R}$ 为开集.对 $\forall t_0\in U$，取闭区间 $F\subseteq U$ 包含 t_0，应用上述命题于 $f|_{[a,b]\times F}$，即得 I_t 在 $t_0\in U$ 之连续性.

命题 4.5.4 (含参积分关于参数的可微性)**.** $f\in\mathcal{C}(R)$，设 $\partial_t f$ 存在且连续，则 $\partial_t I$ 存在且连续，且 $\partial_t I=\int_a^b\partial_t f(x,t)dx$.

证明. 由 $\partial_t f\in\mathcal{C}(R)$ 知 $\partial_t f\rightrightarrows\partial_t\big|_{t=t_0}f$ 且 $\partial_t f,\partial_t\big|_{t=t_0}f\in\mathcal{R}([a,b])$.又由 $\partial_t f$ 连续及 R 为紧的知 $\partial_t f$ 一致连续.故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon)$,使得对 $\forall\,|t-t_0|<\delta$

$$|\partial_t f(x,t)-\partial_t f(x,t_0)|<\varepsilon$$

故由极限与积分交换知

$$\lim_{t\to t_0}\int_a^b |\partial_t f(x,t)-\partial_t f(x,t_0)|\,dx=\int_a^b \lim_{t\to t_0}|\partial_t f(x,t)-\partial_t f(x,t_0)|=0 \tag{4.5.1}$$

从而

$$\begin{aligned}&\left|I_{t_0+h}-I_{t_0}-\int_a^b \partial_t f(x,t_0)dx\cdot h\right|=\left|\int_a^b \big(f(x,t_0+h)-f(x,t_0)-\partial_t f(x,t_0)h\big)dx\right|\\ \leqslant&\int_a^b |f(x,t_0+h)-f(x,t_0)-\partial_t f(x,t_0)h|\,dx=|h|\int_a^b|\partial_t f(x,t_0+\xi)-\partial f(x,t_0)|\,dx\end{aligned}$$

又由 (4.5.1) 知上式 $=o(h)$, $h\to 0$，故命题得证. □

例 4.5.5. 证明 $I_t=\int_0^\pi \cos(n\varphi-t\sin\varphi)d\varphi$ 满足 *Bessel* 方程 $\big(t^2\partial_t^2+t\partial t+(t^2-n^2)\big)I_t=0$.

证明. $f(\varphi,t)=\cos(n\varphi-t\sin\varphi)$ 在矩形 $R=[0,\pi]\times[-M,M]$ 上连续，且 $\partial_t f=\sin(n\varphi-t\sin\varphi)\sin\varphi$ 连续，类似 $\partial_t^2 f$连续，故由含参积分关于参数的可微性知

$$\partial_t I=\int_0^\pi \partial_t f(x,t)dx,\ \partial_t^2 I=\int_0^\pi \partial_t^2 f(x,t)dx$$

故

$$\begin{aligned}&\big(t^2\partial_t^2+t\partial t+(t^2-n^2)\big)I_t\\=&-\int_0^\pi \big(t^2(\sin\varphi)^2+(n^2-t^2)\big)\cos(n\varphi-t\sin\varphi)d\varphi+\int_0^\pi t\sin\varphi\ \sin(n\varphi-t\sin\varphi)d\varphi\\=&\cos(n\varphi-t\sin\varphi)\Big|_0^\pi=0\end{aligned}$$

□

命题 4.5.6. $f\in\mathcal{C}^1(R)$ 且 $\alpha(t),\ \beta(t)\in\mathcal{C}([c,d])$, $\alpha(t),\ \beta(t)\in[a,b]$，则 $I_t=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx$ 存在，$\partial_t I$ 存在且连续，且

$$\partial_t I=f(\beta(t),t)\beta'(t)-f(\alpha(t),t)\alpha'(t)+\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\partial_t f(x,t)dx$$

证明. 定义

$$\begin{aligned}\Phi:[a,b]\times[a,b]\times[c,d]&\to\mathbb{R}\\(\alpha,\beta,t)&\mapsto\int_\alpha^\beta f(x,t)dx\end{aligned}$$

记 $\Phi(\alpha,-,t)$ 为变上限积分，得 $\partial_\beta\Phi=f(\beta,t)$，同理，$\partial_\alpha\Phi=-f(\alpha,t)$.由含参积分关于参数的可微性知 $\partial_t\Phi=\int_\alpha^\beta\partial_t f(x,t)dx$.由 $f,\partial_t f$ 之连续性，故 Φ 所有偏导数均存在且连续.由下述引理知 Φ 连续可微，且 $\partial_t\Phi(\alpha(t),\beta(t),t)$ 可由链式法则求得.

引理：若多元函数的所有偏导均存在且连续，则该函数连续可微.

引理的证明：只证 $n=2$ 情形，一般情形类似.

$$\begin{aligned}&f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)=f(x+h_1,y+h_2)-f(x+h_1,y)+f(x+h_1,y)-f(x,y)\\=&\partial_y f(x+h_1,y+\theta_2h_2)h_2+\partial_x f(x+\theta_1h_1,y)h_1,\ \theta_1,\theta_2\in(0,1)\\=&\partial_y f(x,y)h_2+\partial_x f(x,y)h_1+\underbrace{\big(\partial_y f(x+h_1,y+\theta_2h_2)-\partial_y f(x,y)\big)}_{\mathrm{I}}h_2+\underbrace{\big(\partial_x f(x+\theta_1h_1,y)-\partial_x f(x,y)\big)}_{\mathrm{II}}h_1\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to 0}\mathrm{I}\xlongequal{\partial_y f\in\mathcal{C}(R)}0,\ \lim\limits_{(h_1,h_2)\to 0}\mathrm{II}\xlongequal{\partial_x f\in\mathcal{C}(R)}0$

故 f 可微且 $f'(x,y)=(\partial_x f(x,y),\partial_y f(x,y))$，即 $f'\in\mathcal{C}(R)$. □

注 4.5.7. 上述引理中将条件换为 $(n-1)$ 个偏导数存在且连续及第 n 个偏导数存在，则函数仍可微.

命题 4.5.8 (含参积分关于参数之可积性/Fubini 定理)**.** $f\in\mathcal{C}(R)$，则 $I_t\in\mathcal{R}([c,d])$且

$$\int_c^d I_t dt=\int_a^b dx\int_c^d f(x,t)dt$$

证明. 构造 $\varphi(u)=\int_c^u I_t dt$, $\psi(u)=\int_a^b dx\int_c^u f(x,t)dt$.其中由于 $f\in\mathcal{C}(R)$，由含参积分关于参数的连续性知 I_t 可积，故 $\varphi(u)$ 存在.又由变上限积分关于参数的连续性知 $\int_c^u f(x,t)dt$ 关于 u 连续，再由含参积分关于参数的连续性知 $\psi(u)$ 存在.更进一步，$\psi(u)$ 关于 u 连续且可微.类似地，$\varphi(u)$ 关于 u 连续且可微（I_t 关于 t 连续 $\Longrightarrow\varphi(u)$ 关于 u 可微）且 $\varphi'(u)=I_u$.从而

$$(\varphi-\psi)'(u)=\varphi'(u)-\psi'(u)=I_u-\int_a^b dx\Big(\frac{\partial}{\partial u}\int_c^u f(x,t)dt\Big)=\int_a^b f(x,u)dx-\int_a^b f(x,u)dx=0$$

由常值函数检验法知 $\varphi-\psi$ 为常数.而 $(\varphi-\psi)\Big|_{u=c}=0$，故 $\varphi\equiv\psi$，特别地，$\varphi(d)=\psi(d)$. □

4.6 含参反常积分的极限交换

在以下讨论中，都假设 ω 为积分瑕点（可以为 $\pm\infty$）.

定义 4.6.1. $b\in[a,\omega)$, $J_b=\int_a^b f(x,t)dx$，称形如 $J_\omega=\int_a^w f(x,t)dx$ 的积分为**含参反常积分**.

命题 4.6.2. 由极限与四则运算和不等式之关系，反常积分与含参反常积分满足对被积函数的线性性、对区域的可加性、对被积函数之单调性、*Newton-Leibniz* 公式、变量替换，如

$$\begin{aligned}\int_a^w f(x,t)dx&=\lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x,t)dx=\lim_{b\to\omega}\big(F(b)-F(a)\big)=F(\omega)-F(a)\\ \int_a^w uv'dx&=\lim_{b\to\omega}\big(\int_a^b f(x,t)dx\big)=\lim_{b\to\omega}\big(uv\Big|_a^b-\int_a^b uv'dx\big)\end{aligned}$$

定义 4.6.3. 称 $\{J_b\}_{b\in[a,\omega)}$ **一致收敛于** J_ω，若 $\forall\varepsilon>0,\exists B=B(\varepsilon)\in$ 基 $b\to\omega$,使得对 $\forall b\in B$

$$\sup_{t\in T}|J_b-J_\omega|<\varepsilon$$

记作 $J_b\overset{b\to\omega}{\rightrightarrows}J_\omega$.

注 4.6.4. 此处一致收敛指与 t 无关.

命题 4.6.5 (含参反常积分之极限)**.** 设 ①$J_b\overset{b\to\omega}{\rightrightarrows}J_w$（特别地，$J_\omega=\int_a^\omega f(x,t)dx$ 存在）且 ②$\forall b\in[a,\omega)$, $f_t\big|_{[a,b]}\overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows}\varphi\big|_{[a,b]}$，则 $\int_a^\omega\varphi(x)dx$ 收敛且

$$\lim_{\mathcal{B}_T}\int_a^\omega f(x,t)dx=\int_a^\omega\lim_{\mathcal{B}_T}f(x,t)dx=\int_a^\omega\varphi(x)dx$$

证明. 由假设，$f_t\big|_{[a,b]}\overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows}\varphi\big|_{[a,b]}$ 且 $f_t\big|_{[a,b]}\in\mathcal{R}([a,b])$，故由极限与积分交换知

$$\lim_{\mathcal{B}_T}\int_a^b f_t(x)dx=\int_a^b\lim_{\mathcal{B}_T}f_t(x)dx=\int_a^b\varphi(x)dx$$

又由 $J_b\overset{b\to\omega}{\rightrightarrows}J_w$，故由极限交换定理，存在交换图表

$$\begin{tikzcd} J_b \arrow[r, Rightarrow, "b\to\omega"] \arrow[d, "\mathcal{B}_T"] & J_\omega \arrow[d, dashed, "\exists\mathcal{B}_T"] \\ A_b=\int_a^b\varphi(x)dx \arrow[r, dashed, "\exists b\to\omega"] & A \end{tikzcd}$$

即

$$\lim_{\mathcal{B}_T} J_\omega = \lim_{b\to\omega} A_b \Longrightarrow \lim_{\mathcal{B}_T} \int_a^\omega f(x,t)dx = \lim_{b\to\omega} \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^\omega \varphi(x)dx$$

□

例 4.6.6. $T=\{t\in\mathbb{R}|t>0\}$, $\mathcal{B}_T = t\to+\infty$, $f(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{t}\ ,\ 0<x\leqslant t \\ 0\ ,\ x>t \end{cases}$

对 ①$J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} J_w$ 及 ②$\forall b\in[a,\omega)$, $f_t\big|_{[a,b]} \overset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} \varphi\big|_{[a,b]}$.此时 f 满足 ② 但不满足 ① 且结论 $\lim\limits_{\mathcal{B}_T}\int_a^\omega f(x,t)dx = \int_a^\omega \varphi(x)dx$ 不成立.

事实上，② 成立是显然的，取 $\varphi\equiv 0$ 即可.J_b, J_ω 均存在，下证 $\{J_b\}$ 不一致收敛.注意到 $\exists\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,使得对 $\forall M>0, \exists b_1 = M+1>M$, $b_2=2(M+1)>M$

$$\sup_{t\in T}\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,t)dt\right| = \sup_{t\in T}\left|\int_{M+1}^{2(M+1)} f(x,t)dx\right| \geqslant \left|\int_{M+1}^{2(M+1)} \frac{1}{2(M+1)}dx\right| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0$$

故 $\{J_b\}$ 不一致收敛.结论不成立是因为左式为*1*，右式为*0*.

命题 4.6.7 (含参反常积分之连续性)**.** 设 $R=[a,b]\times[c,d]$ 且 $f\in\mathcal{C}(R)$, $b\in[a,\omega)$，设 $J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} J_\omega$，则 J_ω 关于 t 连续.

证明. 由含参积分 J_b 关于 t 之连续性，且 $J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} J_\omega$，利用极限与取值交换即得 J_ω 关于 t 之连续性. □

命题 4.6.8 (含参反常积分之可微性)**.** $f, \partial_t f\in\mathcal{C}(R)$，设 ①$\int_a^b \partial_t f dx \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} \int_a^\omega \partial_t f dx$，且 ②$J_\omega$ 至少在 t_0 一点处存在，则 $J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} J_\omega$, J_ω 关于 t 可微且 $\partial_t J_\omega = \int_a^\omega \partial_t f dx$

证明. 由含参积分关于参数的可微性知：$\forall b$, $J_b=\int_a^b f(x,t)dx$ 可微且 $\partial_t J_b = \int_a^b \partial_t f dx$.由假设，$\int_a^b \partial_t f dx \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} \int_a^\omega \partial_t f dx$.故 $\partial_t J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} \int_a^\omega \partial_t f dx$.另一方面，$J_\omega(t_0)$ 存在，故由极限与微分交换知

$$J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} g,\ \partial_t g = \int_a^\omega \partial_t f dx$$

特别地，$J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} g$，而由定义，$J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} J_\omega$.由极限之唯一性得，$g=J_\omega$. □

命题 4.6.9 (含参反常积分之可积性)**.** $f\in\mathcal{C}(R)$，设 $J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} J_\omega$，则 J_ω 关于 t 可积，且

$$\int_c^d J_\omega(t)dt = \int_a^\omega dx \int_a^b f(x,t)dt$$

证明. 由含参积分关于参数之可积性/Fubini 定理知

$$\int_c^d dt \underbrace{\int_a^b f(x,t)dx}_{J_b} = \int_a^b dx \int_c^d f(x,t)dt \tag{4.6.1}$$

由极限与积分交换($J_b \overset{b\to\omega}{\rightrightarrows} J_\omega$, $\{J_b\}_{b\in[a,\omega)}$ 可积）知

$$\lim_{b\to\omega}\int_c^d dt \int_a^b f(x,t)dx = \int_c^d dt\int_a^\omega f(x,t)dx \tag{4.6.2}$$

故对(4.6.1)取极限并与(4.6.2)比较知结论成立. □

注 4.6.10. 上述定理可推广到 $\int_c^d dt$ 为反常积分之情形.

例 4.6.11. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$

解.

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du \xlongequal{\text{变量代换}} \int_0^{+\infty} te^{-x^2t^2}dx,\ t>0\\ \Longrightarrow &\Big(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\Big)^2 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \int_0^{+\infty} te^{-x^2t^2}dx\end{aligned}$$

考虑 $f(x,t)=te^{-t^2(1+x^2)}$，则 f 连续且

$$\int_0^b f(x,t)dt \overset{b\to+\infty}{\rightrightarrows} \int_0^{+\infty} f(x,t)dt,\ \forall x\geqslant 0$$

这是因为

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leqslant \int_b^{+\infty} te^{-t^2}dt = \frac{1}{2}e^{-b^2} \rightrightarrows 0\ (b\to 0)$$

故类似含参反常积分之可积性有

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \int_0^{+\infty} te^{-x^2t^2}dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} te^{-t^2(x^2+1)}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(x^2+1)}dx = \frac{\pi}{4}$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. □

5 渐近分析

5.1 渐近展开的引入

我们先来回顾 Taylor 逼近：给定 x，选取合适的 x_0、合适的 n，使得 $|R_n(x;x_0)| <$ 任意给定精度 ε.应用余项公式 $R_n(x;x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $\xi\in(x_0,x)$，选合适的 n，使得 $|R_n(x;x_0)|<\varepsilon$（x_0,x 给定），此时需要 $R_n(x;x_0)\to 0$.

自然的问题是如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x;x_0)\neq 0$ 时，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(x;x_0)\neq f$ 时，如何对 $f(x)$ 做逼近？甚至 $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(x;x_0)$ 不存在时，何种意义下，$P_n(x;x_0)$ 为 $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(x;x_0)$ 的近似？
我们先来看两个例子.

例 5.1.1 ($\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x;x_0)\neq 0$). $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.此时逼近 $f(x)$, x 给定且很小，取 $x_0=0$, $R_n(x;x_0)=e^{-\frac{1}{x^2}}$，则不满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x;x_0)=0$.

例 5.1.2 ($\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(x;x_0)$ 不存在). $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+tx}dx$, $t\in[0,+\infty)$.由含参反常积分之可微性知 I 为关于 t 之光滑函数，对 I 做分部积分得：

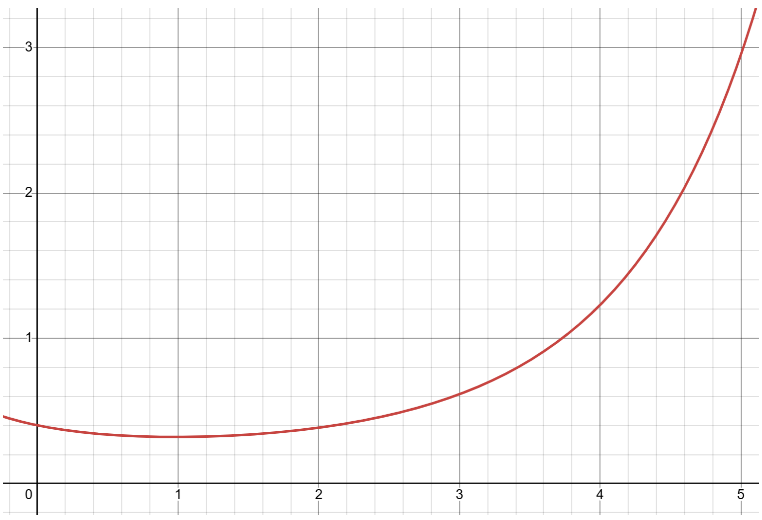
$$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{-d(e^{-x})}{1+tx}=\left.\frac{-e^{-x}}{1+tx}\right|_0^{+\infty}-t\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{(1+xt)^2}dx=1-t\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{(1+xt)^2}dx$$
$$=\cdots\xlongequal{\text{分部积分}}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\cdot t^k}_{\mathrm{I}}+(-1)^{n+1}(n+1)!\cdot t^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{(1+xt)^{n+2}}dx$$

我们断言：I 即为 $I(t)$ 的以 0 为中心的 n 阶 *Taylor* 多项式 $P_n(t;0)$.只需证 $R_n(t;0)=o(t^n)$, $t\to 0$，则由 n 阶最佳逼近的唯一性即得.事实上我们有

$$\lim_{t\to0}\left|\frac{R_n(t;0)}{t^n}\right|=\lim_{t\to0}\left((n+1)!\cdot t\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{(1+xt)^{n+2}}dx}_{\leqslant 1}\right)=0$$

而另一方面 $P_n(t;0)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot k!\cdot t^k$ 在 $n\to+\infty$ 时由第 N 项判法知 $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n(t;0)$ 不存在，即该 *Taylor* 级数不收敛.

事实上，上述 $P_n(t;0)$ 为 $I(t)$ 的合理逼近，在给定的很小的 t 下，$|R_n(t;0)|\leqslant(n+1)!\cdot|t|^{n+1}$.当 $t=0.4$ 时，$(n+1)!\cdot|t|^{n+1}$ 与 n 的图像如下图.



此时取图像最低点对应的 n_0，将 $P_{n_0}(t;0)$ 作为 $I(t)$ 之逼近，其误差 $\leqslant (n_0+1)!\cdot t^{n_0+1}$.而在数学上，我们所需修正：

(1) 何种意义下，上述近似确实为合理的近似.（为此，我们采用**渐进分析**.）

(2) 给定发散的 $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot k!\cdot t^k$，如何恢复 $I(t)$.（为此，我们采用**收敛（解析）提升**.）

5.2 渐近展开的概念和基本性质

定义 5.2.1. 给定函数 f，称 $x\to x_0$ 时 g **渐进于** f *(asymptotic to f)*，若

$$f(x)-g(x)=o\big(g(x)\big),\ x\to x_0$$

取定函数列 $\{\phi_k(x)\}_{k\geqslant 0}$，称其为 $x\to x_0$ 时的**渐进列**，若

$$\phi_{k+1}(x)=o\big(\phi_k(x)\big),\ x\to x_0$$

称 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k\phi_k(x)$ 为 $x\to x_0$ 时 f 之**渐近展开**，若 $\forall n$

$$f-\sum_{k=0}^{n}a_k\phi_k(x)=\o\big(\phi_n(x)\big),\ x\to x_0$$

此时记作 $f\sim\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k\phi_k,\ x\to x_0$.

注 5.2.2. 定义中不要求 $\phi_n(x)=o(1),\ x\to x_0$，也不要求 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k\phi_k(x)$ 收敛.

例 5.2.3.

$$I(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\cdot t^k+(-1)^{n+1}(n+1)!\cdot t^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{(1+xt)^{n+2}}dx$$

考虑 $I(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k k!\cdot t^k$，此时 $(-1)^{n+1}(n+1)!\cdot t^{n+1}\neq o(1)$，而 $(-1)^{n+1}(n+1)!\cdot t^{n+1}=o(t^n),t\to 0$.

我们先来考察 $\mathcal{O}$ 和 o 在积分下的行为.

命题 5.2.4. 设 $g\in\mathcal{C}^0$ 且 $x>0$ 时，$g>0$.

(1) 若对 $a>0$, $f\in\mathcal{R}([a,+\infty])$ 且 $f=\mathcal{O}(g),\ x\to+\infty$，则

$$\int_a^x f(t)dt=\mathcal{O}\Big(\int_a^x g(t)dt\Big),\ x\to+\infty$$

(2) 若还有 $\int_a^{+\infty}g(t)dt<\infty$，则

$$\int_x^{\infty}f(t)dt=\mathcal{O}\Big(\int_x^{\infty}g(t)dt\Big),\ x\to+\infty$$

证明. 有定义，存在 $+\infty$ 的去心邻域 U 及常数 C，使得

$$|f(x)|\leqslant C\cdot g(x),\ \forall x\in U$$

由积分的单调性，我们有

$$\Big|\int_x^y f(t)dt\Big|\leqslant\int_x^y Cg(t)dt$$

故 $x\to+\infty$ 时

$$\int_a^x f(t)dt=\mathcal{O}\Big(\int_a^x g(t)dt\Big)$$

另一断言证明类似. □

命题 5.2.5. 设 $g \in \mathcal{C}^0$ 且 $x > 0$ 时，$g > 0$.若对 $a > 0$, $f \in \mathcal{R}([a, +\infty])$ 且 $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to +\infty$，则

(1) 当 $\int_a^{+\infty} g(t) = +\infty$ 时

$$\int_a^x f(t)dt = o\Big(\int_a^x g(t)dt\Big),\ x \to +\infty$$

(2) 当 $\int_a^{+\infty} g(t) < +\infty$ 时

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = o\Big(\int_x^{+\infty} g(t)dt\Big),\ x \to +\infty$$

证明. $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0,$ 使得对 $\forall t > M$

$$|f(t)| < \varepsilon\, |g(t)|$$

故

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\left|\int_a^x f(t)dt\right|}{\int_a^x g(t)dt} \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\left|\int_a^M f(t)dt\right|}{\int_a^x g(t)dt} + \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\left|\int_M^x f(t)dt\right|}{\int_a^x g(t)dt}$$

对 (1)，$RHS \leqslant 0 + \varepsilon$.对 (2)

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\left|\int_x^{+\infty} f(t)dt\right|}{\int_x^{+\infty} g(t)dt} = 0$$

□

注 5.2.6. 当 $f = \mathcal{O}(g)$ 或 $f = o(g)$ 时，不一定有 $f' = \mathcal{O}(g')$ 或 $f' = o(g')$，即使 $f \sim g$.见如下例子.

例 5.2.7. $f(x) = x + \sin(x^2)$, $g(x) = x$，则 $f \sim g$, $x \to +\infty$，而 $f'(x) = 1 + 2x\cos(x^2)$, $g(x) = 1$ 不满足 $f' = \mathcal{O}(g')$ 或 $f' = o(g'), x \to +\infty$.

常见的渐进列有：

$$\phi_k(x) = (x - x_0)^k,\ x \to x_0$$
$$\phi_k(x) = x^{-k},\ x \to +\infty$$
$$\phi_k(x) = e^{-x}x^{-k},\ x \to +\infty$$

定义 5.2.8. 取 $\phi_k(x) = \begin{cases} (x - x_0)^k\ ,\ x \to x_0 \\ x^{-k}\ ,\ x \to +\infty \end{cases}$，称相应的渐近展开 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k\phi_k(x)$ 为**渐进级数**.

命题 5.2.9. 函数 f 的渐进展开若存在，则必唯一.

证明. 仅对 $\{\phi_k(x) = (x - x_0)^k\}_{k\geqslant 0}$ 证明，一般情形 $\phi_k(x)$ 类似.设 f 在 $x \to x_0$ 时有两个渐近展开

$$f \sim \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x - x_0)^k,\ f \sim \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(x - x_0)^k$$

反设 $a_k = b_k, \forall k$ 不成立，即 $\exists n_0 \geqslant 0$，使得

$$a_0 = b_0, \cdots, a_{n_0-1} = b_{n_0-1}, a_{n_0} \neq b_{n_0}$$

由定义

$$\frac{f - \sum\limits_{k=0}^{n_0} a_k(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n_0}} \to 0,\ x \to x_0$$
$$\frac{f - \sum\limits_{k=0}^{n_0} b_k(x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n_0}} \to 0,\ x \to x_0$$

利用极限与四则运算交换性有

$$\frac{(a_{n_0}-b_{n_0})(x-x_0)^{n_0}}{(x-x_0)^{n_0}}\to 0,\ x\to x_0 \implies a_{n_0}=b_{n_0}$$

矛盾！故渐近展开若存在必唯一. □

注 5.2.10. 存在 $f\neq g$，但 f 与 g 的渐近展开相同.如 $x\to+\infty$，$\phi_k(x)=x^{-k}$，$f\equiv 0$，$g=e^{-x}$.若 $g(x)\sim\sum\limits_{k=0}^{+\infty}b_kx^{-k}, x\to+\infty$.我们断言 $b_k=0$.由

$$g(x)-b_0x^{-0}=o(x^{-0}) \implies b_0=0$$

以此计算即得，$b_k=0$.同理 $f\sim\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_kx^{-k}\implies a_k=0$.

命题 5.2.11 (渐近展开与四则运算交换). 设 $\{\phi_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 为 $x\to x_0$ 或 $x\to+\infty$ 时的渐进列.

$$f(x)\sim\sum a_k\phi_k(x),\ x\to x_0\ (\text{或 } x\to+\infty)$$
$$g(x)\sim\sum b_k\phi_k(x),\ x\to x_0\ (\text{或 } x\to+\infty)$$

则 $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，有

$$\lambda f+\mu g\sim\sum(\lambda a_k+\mu b_k)\phi_k(x),\ x\to x_0\ (\text{或 } x\to+\infty)$$
$$f\cdot g\sim\sum a_k\phi_k(x)\cdot\sum b_l\phi_l(x),\ x\to x_0\ (\text{或 } x\to+\infty)$$

证明. 仅证 $\lambda f+\mu g$ 之情形，余下类似.注意到

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或 } x\to+\infty)}}\frac{(\lambda f+\mu g)-\sum\limits_{k=0}^{n}(\lambda a_k+\mu b_k)\phi_k(x)}{\phi_n(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或 } x\to+\infty)}}\frac{\lambda(f-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\phi_k)}{\phi_n(x)}+\lim_{\substack{x\to x_0\\(\text{或 } x\to+\infty)}}\frac{\mu(g-\sum\limits_{k=0}^{n}b_k\phi_k)}{\phi_n(x)}=0$$

□

命题 5.2.12 (渐近展开与四则运算交换). 假设 $x\to x_0$ 或 $x\to+\infty$ 时，f，ϕ_k $(k\geqslant 0)$ 黎曼可积，ϕ_k $(k\geqslant 0)$ 符号恒定，且 $f(x)\sim\sum a_k\phi_k(x)$，则

$$\int_{x_0}^{x}f(t)dt\sim\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\int_{x_0}^{x}\phi_k(t)dt$$

证明. 只需证

$$\int_{x_0}^{x}f(t)dt-\sum_{k=0}^{n}a_k\int_{x_0}^{x}\phi_k(t)dt=o\Big(\int_{x_0}^{x}\phi_n(t)dt\Big)$$

即

$$\int_{x_0}^{x}\Big(f(t)-\sum_{k=0}^{n}a_k\phi_k(t)\Big)dt=o\Big(\int_{x_0}^{x}\phi_n(t)dt\Big)\tag{5.2.1}$$

设 $f(t)-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\phi_k(t)dt=\alpha(t;x_0)\phi_n(t)$，其中 $\alpha(t;x_0)=o(1)$，$t\to x_0$.故 $\forall\varepsilon>0,\exists\ \mathring{U}\ (x_0)$,使得对 $\forall t\in\mathring{U}$

$$|\alpha(t;x_0)|<\varepsilon$$

故由积分关于被积函数的单调性

$$\left|\int_{x_0}^{x}\Big(f(t)-\sum_{k=0}^{n}a_k\phi_k(t)\Big)dt\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\alpha(t;x_0)\phi_n(t)dt\right|\leqslant\int_{x_0}^{x}|\alpha(t;x_0)|\,|\phi_n(t)|\,dt<\varepsilon\left|\int_{x_0}^{x}\phi_n(t)dt\right|,\ x\to x_0$$

故(5.2.1)成立. □

注 5.2.13. 渐近展开与微分不相容，这是因为渐进列 $\{\phi_k(x)\}_{k\geqslant 0}$ 诱导的 $\{\phi'_k(x)\}$ 不一定为渐进列（o 与微分不相容）.即使 $\{\phi'_k(x)\}_{k\geqslant 0}$ 为渐进列，$f(x)\sim\sum a_k\phi_k(x)$ 也无法推出 $f'\sim\sum a_k\phi'_k(x)$.

例 5.2.14. $x\to+\infty$, $\phi(x)=x^{-k}$, $k\geqslant 0$.取 $f(x)=e^{-x}\sin(e^x)$，则 $f(x)\sim\sum 0\cdot\phi_k(x)$.而

$$f'(x)=-e^{-x}\sin(e^x)+\cos(e^x)$$

我们断言：$f'(x)$ 在 $x\to+\infty$, $\phi_k(x)=x^{-k}$ 下无渐近展开.事实上，设 $f'(x)\sim\sum\limits_{k=0}^{+\infty}b_kx^{-k}$，则

$$f'(x)-b_0x^{-0}=o(x^{-0}),\ x\to+\infty$$

这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(e^x)$ 不存在矛盾!

5.3 渐近级数的微分

我们来具体考察渐近级数的微分：设

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k,\ x\to x_0\in\mathbb{R}$$

问下式

$$f'(x)-\sum_{k=1}^{n}ka_k(x-x_0)^{k-1}\overset{?}{=\!=}o\big((x-x_0)^{n-1}\big)$$

能否成立？事实上，设

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k=\alpha(x;x_0)(x-x_0)^n$$

则

$$f'(x)-\sum_{k=1}^{n}ka_k(x-x_0)^{k-1}=\alpha'(x-x_0)^n+\alpha n(x-x_0)^{n-1}$$

而 $\alpha'(x-x_0)^n$ 无法保证其为 $o\big((x-x_0)^{n-1}\big)$.故我们需要在 f 上加强条件，希望 f 在 $x_0\in\mathbb{R}$ 附近解析，对不解析的情形我们对其在复数域中考虑.

下设 f 在 x_0 附近解析，设

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k,\ x\to x_0$$

我们断言：$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k$ 为 f 的以 x_0 为中心的 Taylor 级数.这是因为

$$f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k=o\big((x-x_0)^n\big)$$

由 f 的 n 阶最佳逼近唯一性，且为 n 阶 Taylor 多项式即知断言成立.由 f 解析知 $\exists R>0$，使得在 (x_0-R,x_0+R) 上

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k(x-x_0)^k$$

由 Cauchy-Hadamard 定理知

$$R\leqslant(\overline{\lim}\,|a_k|^{\frac{1}{k}})^{-1}$$

在 $(x_0-\frac{R}{2},x_0+\frac{R}{2})$ 上 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ka_k(x-x_0)^{k-1}$ 一致收敛（与 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\Big(\frac{\frac{R}{2}}{R}\Big)^{k-1}$ 比较）由无穷求和与微分交换知

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}ka_k(x-x_0)^{k-1},\ x\in(x_0-\frac{R}{2},x_0+\frac{R}{2})$$

特别地，$f'(x)\sim\sum\limits_{k=1}^{+\infty}ka_k(x-x_0)^{k-1}$, $x\to x_0$.

我们再来考虑 f 在 x_0 附近不解析的情形.为此，我们需要一些复分析的知识.

定义 5.3.1. 称 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto f(z)$ 在 $z_0\in\mathbb{C}$ 处**可微**，若：$\exists\mathscr{A}_{z_0}:V_{z_0}=\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，使得

$$f(z)-f(z_0)=\mathscr{A}_{z_0}(z-z_0)+o(|z-z_0|),\ z\to z_0$$

注 5.3.2. 若将 $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2,\ z\mapsto x+iy$，则 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在 z_0 处可微可推出 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 在 x_0+iy_0 处可微，而反之不然.具体来说，设 $f'(z_0)=a+ib:V_{z_0}\to\mathbb{C},\ v\mapsto(a+ib)v$，若将 $V_{z_0}=\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$，则

$$f'(z_0):v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

定义 5.3.3. 称 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在 $z_0\in\mathbb{C}$ 处**复解析**，若存在 z_0 的邻域 $U(z_0)$，使得 f 的以 z_0 为中心的 *Taylor* 级数在 $U(z_0)$ 中收敛于 f.称 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 在 $z_0=\infty$ 处**复解析**，若 $g(w)=f(\frac{1}{w})$ 在 $w=0$ 处复解析.

例 5.3.4. $f(z)=z^{-n}(n>0)$ 在 $z_0=\infty$ 处复解析.而 $f(z)=e^z$ 在 $z_0=\infty$ 处不复解析，因为 $g(w)=f(\frac{1}{w})=e^{\frac{1}{w}}$ 在 $w=0$ 处极限不存在.

定理 5.3.5 (Cauchy 积分公式). 设 f 在 $\mathbb{C}$ 中开集 Ω 中解析，则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

其中 γ 为包含于 Ω 中的简单闭曲线，包围 z，且方向为逆时针方向.

证明. 我们分三步证明如下：

- 对区域做划分.
  由 f 在 $z\in\Omega$ 解析知，$\exists B(z_0)\subseteq\Omega$，使得 f 的 Taylor 级数在 $B(z_0)$ 中收敛于 f.
  取三角形 $\triangle\subseteq B(z_0)$.$\forall\xi\in\gamma,\ \exists B(\xi)\subseteq\Omega$，对 γ 作开覆盖 $\bigcup\limits_{\xi\in\gamma}B(\xi)$，由 γ 为有界闭集知，存在有限开覆盖 $\bigcup\limits_{\xi_i\in\gamma}B(\xi_i)$，从而存在有界闭集 K，使得 $\gamma\subseteq K\subseteq\Omega$ 且 $K\cap\partial\Omega=\varnothing$.对 K 做三角剖分.

- 直接计算 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\triangle}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$
  由第一步构造
  $$f(\xi)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}(\xi-z)^k,\ \forall\xi\in\triangle\subseteq B(z)$$
  利用一致收敛性直接用 Newton-Leibniz 公式计算得
  $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\triangle}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=f(z)$$

- 比较 $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ 与 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\triangle}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$
  利用 $K\backslash\triangle$ 上闭合路径 $\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$ 之积分为0（因为其存在原函数，利用 Newton-Leibniz 公式可证）归纳即得：
  $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\triangle}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

□

推论 5.3.6. 假设同上，有

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$$

定理 5.3.7. 设 f 在扇形区域 $S_{\alpha\beta} := \{0 < |z| \leqslant |z_0|,\ \alpha \leqslant \arg z \leqslant \beta\}$ $(\beta > \alpha)$ 中复解析且 $f(z) \sim \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,\ z \to z_0$，则 $f'(z) \sim \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k a_k z^{k-1},\ z \to 0$ 且 $z \in S_{\alpha^*\beta^*}$，其中 $\alpha < \alpha^* < \beta^* < \beta$.

证明. 由定义

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + E(z) z^n,\ E(z) = o(1),\ z \to 0$$

则

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} + E'(z) z^n + E(z) n z^{n-1}$$

令 $\rho > 0$ 充分小，使得对 $\forall z_0 \in S_{\alpha^*\beta^*}$，$\exists B_{\rho(z_0)} \subseteq S_{\alpha\beta}$.令 $M(z_0) = \max\limits_{z \in \partial B(z_0)} |E(z)| = o(1)$，由 $E(z)$ 在 $\overline{B_{\rho|z_0|}(z_0)}$ 解析知

$$|E'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{z_0}} \frac{E(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi \right| \leqslant \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \frac{M(z_0) \cdot 2\pi\rho |z_0|}{\rho^2 |z_0|^2} = \frac{M(z_0)}{\rho |z_0|}$$

从而

$$\left| f'(z) - \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} \right| \leqslant |z|^{n-1} |zE'(z) + nE(z)| \leqslant (\frac{M}{\rho} + n |E(z)|) = |z|^{n-1} o(1)$$

□

例 5.3.8. 考察 $\sin z,\ |z| \to +\infty$ 之渐进逼近.

解. 利用形如 $\{e^{\alpha z} z^{-k}\}_{k \geqslant 0}$ 这样得渐进列对 $\sin z$ 做渐近展开.令 $z = re^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi)$，则

$$f(z) = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{-r\sin\theta} e^{ir\cos\theta} - e^{r\sin\theta} e^{-ir\cos\theta})$$

分情况讨论，若 $\sin\theta > 0$，则

$$\left| \frac{e^{-r\sin\theta} e^{ir\cos\theta}}{e^{r\sin\theta} e^{-ir\cos\theta}} \right| = o(1),\ r \to +\infty$$

此时

$$\sin z \sim \frac{-1}{2} e^{-iz}, |z| \to +\infty,\ \delta < \arg z < \pi - \delta$$

同理当 $\sin\theta < 0$ 时

$$\sin z \sim \frac{1}{2} e^{iz}, |z| \to +\infty,\ -\pi + \delta < \arg z < -\delta$$

□

注 5.3.9. 这是著名的斯托克斯现象 *(Stokes Phenomenon)*，将渐近展开的主要项突变的线称为斯托克斯线 *(Stokes line)*，在上个例子中即为实轴；将渐进展开的主要项增长或下降最快的线称为反斯托克斯线 *(Anti-Stokes line)*，在上个例子中即为虚轴.

5.4 实积分的渐近展开——Watson Lemma 和 Laplace method

在讨论实积分的渐近展开之前，我们先来看两个具体的例子，也是实积分的渐近展开的原型，即 Stieltjes 积分和 Laplace 积分.

例 5.4.1 (Stieltjes 积分的渐近展开). $I(x) = \int_0^\infty \frac{\rho(t)}{1+xt} dt$，其中 ρ 非负且不恒为0，且 $c_n \int_0^{+\infty} t^n \rho(t) dt$ 存在，考察 $I(x)$ 在 $x \to 0$ 时的渐近展开.

解. 注意到

$$\frac{1}{1+xt}=1-xt+x^2t^2+\cdots+(-1)^nx^nt^n+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}t^{n+1}}{1+xt}$$

故

$$\begin{aligned}I(x)&=\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty}(-1)^kx^kt^k\rho(t)dt+(-1)^{n+1}x^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}\rho(t)}{1+xt}dt\\&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kc_kx^k+\underbrace{(-1)^{n+1}x^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}\rho(t)}{1+xt}dt}_{R_n(x)}\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{x\to0}\left|\frac{R_n(x)}{x^n}\right|=\lim_{x\to0}\left|x\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}\rho(t)}{1+xt}dt\right|\leqslant\lim_{x\to0}|xc_{n+1}|=0$$

故

$$I(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^kc_kx^k$$

□

我们常采用分部积分的方法处理积分的渐近展开，如下例.

例 5.4.2. $I(x)=\int_x^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，考察 $I(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的渐近展开.

解.

$$\begin{aligned}I(x)&\xlongequal{v=\frac{1}{t},u'=(-e^{-\frac{t^2}{2}})'}\frac{1}{t}(-e^{-\frac{t^2}{2}})\Big|_x^{+\infty}-\int_x^{+\infty}(-e^{-\frac{t^2}{2}})(-\frac{1}{t^2})dt=\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}+\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\&=\cdots=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{x^{2n}})+(2n-1)!!\int_x^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{t^{2n+2}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\end{aligned}$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2n-1)!!\int_x^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{t^{2n+2}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt}{\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{x^{2n}}}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x^2}\frac{\int_x^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt}{e^{-\frac{x^2}{2}}}\right|=0$$

故

$$I(x)\sim\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}(\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{x^{2n}})$$

□

例 5.4.3 (Laplace 积分的渐近展开). $I(x)=\int_a^b f(t)e^{xt}dt$，其中 f 在 $[a,b]$ 光滑，$f(b)\neq0$，考察 $I(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的渐近展开.

解. 由分部积分

$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)dt=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(t)g^{(n-k)}(t)\Big|_a^b+(-1)^n\int_a^b f^{(n)}(t)g(t)dt$$

应用于 $g(t)=e^{xt}$ 得：

$$\begin{aligned}I(x)&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(t)e^{xt}x^{-k}(t)\Big|_a^b+\frac{(-1)^n}{x^n}\int_a^b f^{(n)}(t)e^{xt}dt\\&=e^{bx}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(b)x^{-k}-\underbrace{e^{ax}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(a)x^{-k}}_{\mathrm{I}}+e^{bx}\frac{(-1)^n}{x^n}\underbrace{\int_a^b f^{(n)}(t)e^{(t-b)x}dt}_{\mathrm{II}}\end{aligned}$$

其中

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\mathrm{I}}{\frac{e^{bx}}{x^n}}\right|=0$$

$$|\mathrm{II}|\leqslant\max_{t\in[a,b]}\left|f^{(n)}(t)\right|\frac{1-e^{-x(b-a)}}{x}=o(1)$$

故

$$I(x)\sim e^{bx}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}f^{(k-1)}(b)x^{-k}$$

特别地，此渐近展开与 a 无关，且由第 N 项判别法知渐近级数不收敛. □

推论 5.4.4. 设 $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}t^k$ 在 $t=0$ 处附近解析，$b>0$，则

$$\int_0^b f(t)e^{-xt}dt\sim\sum_{k=0}^{+\infty}f^{(k)}(0)x^{-k},\ x\to+\infty$$

推论 5.4.5. $f(b)\neq 0$，设 ϕ' 在 $[a,b]$ 上恒正，$I(x)=\int_a^b f(t)e^{x\phi(t)}dt$，则

$$I(x)\sim e^{x\phi(b)}\frac{f(b)}{\phi'(b)}\frac{1}{x}$$

证明. 做变量替换 $u=\phi(t)$，则

$$I(x)=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)}\left.\frac{f(t)}{\phi'(t)}\right|_{t=\phi^{-1}(u)}e^{xu}du$$

应用关于Laplace 积分的渐近展开即得. □

我们即将讨论的实积分的渐近展开需要利用到 Γ 函数.为此，我们先给出 Γ 函数的一些性质.

定义 5.4.6. 设 $\mathrm{Re}(z)>0$，定义Γ **函数**为

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt$$

命题 5.4.7. Γ 函数满足如下性质：

(1) $\Gamma(z)$ 为复解析函数.（利用一致收敛性）

(2) 若 $n\geqslant 0$，则 $\Gamma(n+1)=n!$.（归纳）

(3) 设 $x>0$，则 $\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-xt}dt=\frac{\Gamma(z)}{x^z}$.

(4) $\frac{1}{\Gamma(z)}=z\exp(\gamma z-\sum\limits_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{\zeta(k)z^k}{k})$，其中 γ 为欧拉常数，$\zeta(k)$ 为黎曼 ζ 函数.

(5) $\Gamma(z)\sim\sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}(1+\frac{1}{12}\frac{1}{z}+\frac{1}{288}\frac{1}{z^2}+\cdots),\ |z|\to+\infty,\ \mathrm{Re}(z)>0$
特别地，有 *Stirling* 公式 $\Gamma(n+1)\sim\sqrt{2\pi n}\,n^ne^{-n}(1+\frac{1}{12n})$

下面我们进入正题.

定理 5.4.8 (Watson Lemma)**.** 设 $0<b\leqslant+\infty$，设 $f(t)\sim t^\alpha\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_kt^{\beta k}$, $,t\to 0^+$, $\alpha>-1$, $\beta>0$，且 f 光滑，假设

(1) $|f(t)|<C_2e^{C_1t},\ \forall t>0$

(2) $\int_0^b|f(t)|\,dt<+\infty$

中某个成立，则

$$I(x)=\int_0^b e^{-xt}f(t)dt\sim\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\Gamma(\alpha+\beta k+1)\frac{1}{x^{\alpha+\beta k+1}},\ x\to+\infty$$

证明. 设 $\delta>0$ 充分小，对 $I(x)$ 做拆分

$$I(x)=\int_0^\delta e^{-xt}f(t)dt+\int_\delta^b e^{-xt}f(t)dt$$

将 $f(t)=t^\alpha\sum\limits_{k=0}^n c_kt^{\beta k}+R_n(t)$ 代入上式得

$$\begin{aligned}I(x)&=\int_0^\delta e^{-xt}\ t^\alpha\sum_{k=0}^n c_kt^{\beta k}dt+\int_0^\delta e^{-xt}R_n(x)dt+\int_\delta^b e^{-xt}f(t)dt\\&=\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-xt}\ t^\alpha\sum_{k=0}^n c_kt^{\beta k}dt}_{M}-\underbrace{\int_\delta^{+\infty} e^{-xt}\ t^\alpha\sum_{k=0}^n c_kt^{\beta k}dt}_{\mathrm{III}}+\underbrace{\int_0^\delta e^{-xt}R_n(x)dt}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int_\delta^b e^{-xt}f(t)dt}_{\mathrm{II}}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}M&=\sum_{k=0}^n c_k\int_0^{+\infty}e^{-xt}t^{\alpha+\beta k}dt=\sum_{k=0}^n c_k\frac{1}{x^{\alpha+\beta k+1}}\Gamma(\alpha+\beta k+1)\\|\mathrm{III}|&=e^{-\delta x}\left|\int_\delta^{+\infty}e^{-x(t-\delta)}\ t^\alpha\sum_{k=0}^n c_kt^{\beta k}dt\right|=\frac{e^{-\delta x}}{x}\left|\int_0^{+\infty}e^{-u}\ \sum_{k=0}^n c_k(\delta+\frac{u}{x})^{\alpha+\beta k}du\right|\\&<\frac{e^{-\delta x}}{x}\cdot\text{常数}=o(x^{-\alpha-\beta n-1})\end{aligned}$$

又注意到

$$R_n(t)=o(t^\alpha\cdot t^{\beta n})(t\to0)=t^\alpha\cdot t^{\beta n}\cdot E(t)$$

故

$$|\mathrm{I}|=\left|\int_0^\delta e^{-xt}t^{\alpha+\beta n}E(t)dt\right|\leqslant\sup_{t\in[0,\delta]}|E(t)|\cdot\left|\int_0^\delta e^{-xt}t^{\alpha+\beta n}dt\right|\leqslant\sup_{t\in[0,\delta]}|E(t)|\cdot\Gamma(\alpha+\beta n+1)\cdot x^{-\alpha-\beta n-1}$$

由于

$$\lim_{t\to0}E(t)=0$$

故

$$|\mathrm{I}|=o(x^{-\alpha-\beta n-1})$$

最后对 II，若条件 (1) 成立，则

$$|\mathrm{II}|<\left|\int_\delta^b C_2e^{C_1t}e^{-xt}dt\right|\leqslant\left|\int_\delta^{+\infty}C_2e^{(C_1-x)t}dt\right|=\mathcal{O}(x^{-1}e^{-\delta x})=o(x^{-\alpha-\beta n-1}),\ x\to+\infty$$

若条件 (2) 成立，则

$$|\mathrm{II}|\leqslant e^{-\delta x}\int_\delta^b|f(t)|\,dt\leqslant e^{-\delta x}\int_0^b|f(t)|\,dt=\mathcal{O}(e^{-\delta x})=o(-\alpha-\beta n-1),\ x\to+\infty$$

至此，我们完成了 Watson Lemma 的证明. □

例 5.4.9. $I(x)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\sin t\,dt$，考察 $I(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的渐近展开.

解. 取 $f(t)=\sin t$，则

$$f(t)=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1},\ t\to 0^+$$
$$|f(t)|\leqslant 1\cdot e^{1\cdot t},\ \forall t>0$$

由 Watson Lemma 得

$$I(x)\sim\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\Gamma(2k+2)}{x^{2k+2}}=\frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x^{2k}},\ x\to+\infty$$

□

注 5.4.10. 直接利用分部积分也可得上述结果，事实上，$I(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

我们接下来考虑指数型速降函数的渐近展开，所用方法为 Laplace method.具体来说，Laplace method 是局部化原理 (localization principle) 和 Watson Lemma 的结合.

我们考察 $I(x)=\int_a^b f(t)e^{x\phi(t)}dt$，其中 ϕ 在 $[a,b]$ 上不单调.我们简化假设，设 $[a,b]$ 上 $\phi'(t)$ 有唯一零点 t_0 且为 ϕ 之最大值.

Case 1：先考虑 t_0 为 $[a,b]$ 之内点，下证：

$$I(x)\sim f(t_0)e^{x\phi(t_0)}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\triangle}},\ \triangle:=-x\phi''(t_0) \tag{5.4.1}$$

事实上，对 ϕ 和 f 做展开

$$\phi(t)=\phi(t_0)+\phi'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2+\mathcal{O}\big((t-t_0)^3\big),\ t\to t_0$$
$$f(t)=f(t_0)+O(t-t_0),\ t\to t_0$$

由 t_0 为最大值点知 $\phi'(t_0)=0,\ \phi''(t_0)\leqslant 0$，现仅考虑 $\phi''(t_0)<0$.则

$$\phi(t)=\phi(t_0)+\frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2+\mathcal{O}\big((t-t_0)^3\big),\ t\to t_0$$

我们需要如下几个的引理.

引理 5.4.11. 设 $M_\delta=\sup\limits_{t\in[a,b]\setminus B_\delta(t_0)}\phi(t)<\phi(t_0)$ （δ 如证明），则

$$\int_a^b f(t)e^{x\phi(t)}dt=\int_{B_\delta(t_0)}f(t)e^{x\phi(t)}dt\Big(1+o(\frac{1}{x^\infty})\Big)$$

证明. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon,x)$,使得对 $\forall t\in B_\delta(t_0)$

$$|f(t)|\geqslant\frac{1}{2}\left|f(t_0)\right|,\ \phi(t_0)-\varepsilon\leqslant\phi(t)\leqslant\phi(t_0)$$

由 f 之光滑性和 $f(t_0)\neq 0$ 知 $f(t)$ 在 $B_\delta(t_0)$ 中符号恒定，则

$$\left|\int_{B_\delta(t_0)}f(t)e^{x\phi(t)}dt\right|=\int_{B_\delta(t_0)}|f(t)|\,e^{x\phi(t)}dt\geqslant\frac{1}{2}\left|f(t_0)\right|\int_{B_\delta(t_0)}e^{x(\phi(t_0)-\varepsilon)}dt=e^{x(\phi(t_0)-\varepsilon)}\left|f(t_0)\right|\delta$$

另一方面

$$\left|\int_{(a,b)\setminus B_\delta(t_0)}f(t)e^{x\phi(t)}dt\right|\leqslant\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|\,e^{xM_\delta}(b-a)$$

取 $\varepsilon>0$ 充分小，取 $\delta=\delta(\varepsilon,x)$，使得

$$M_{\delta(\varepsilon,x)}=\sup_{t\in[a,b]\setminus B_\delta(t_0)}\phi(t)<\phi(t_0)-\varepsilon$$

从而

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{(a,b)\setminus B_\delta(t_0)} f(t)e^{x\phi(t)}dt\right| \Big/ \left|\int_{B_\delta(t_0)} f(t)e^{x\phi(t)}dt\right| \\
\leqslant&\Big(\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|\,e^{xM_\delta}(b-a)\Big)\Big/\Big(e^{x(\phi(t_0)-\varepsilon)}\,|f(t_0)|\,\delta\Big) \\
=&o(x^{-\infty}),\ x\to+\infty
\end{aligned}
$$

□

引理 5.4.12.

$$
f(t)^{x\phi(t)} \sim f(t_0)e^{x(\phi(t_0)+\frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2)},\ t\to t_0
$$

证明.

$$
f(t)^{x\phi(t)} = \big(f(t_0)+\mathcal{O}(t-t_0)\big)e^{x(\phi(t_0)+\frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2+\mathcal{O}(t-t_0)^3)}
$$

注意到

$$
e^{x\mathcal{O}(t-t_0)^3} = 1+o\big((t-t_0)^1\big),\ t\to t_0
$$

即得证. □

引理 5.4.13.

$$
\int_{B_\delta(t_0)} f(t_0)e^{x(\phi(t_0)+\frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2)}dt \sim \int_{\mathbb{R}} f(t_0)e^{x(\phi(t_0)+\frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2)}dt
$$

证明. 作变换

$$
s^2 = -x\phi''(t_0)(t-t_0)^2 = \triangle(t-t_0)^2,\ \triangle = -x\phi''(t_0)
$$

则

$$
f(t_0)e^{x\phi(t_0)}\int_{B_\delta(t_0)} e^{x\cdot\frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2)}dt = \frac{f(t_0)e^{x\phi(t_0)}}{\sqrt{\triangle}}\int_{-\sqrt{\triangle}\delta}^{\sqrt{\triangle}\delta} e^{-\frac{1}{2}s^2}ds
$$

当 $x\to+\infty$ 时，$\triangle\to+\infty$，又 δ 固定，故命题得证. □

由上述三个引理可得

$$
\int_a^b f(t)e^{x\phi(t)}dt \sim \int_{\mathbb{R}} f(t_0)e^{x(\phi(t_0)+\frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2)}dt = \frac{f(t_0)e^{x\phi(t_0)}}{\sqrt{\triangle}}\sqrt{2\pi}
$$

Case 2: ϕ 在边界上，不妨设在 a 处取最大值.

- $\phi'(a)\neq 0 \Longrightarrow \phi'(a)<0$，则 $\phi(t)\sim\phi(a)+\phi'(a)(t-a)$，故

$$
\begin{aligned}
I(x) = \int_a^b f(t)e^{x\phi(t)}dt &\sim \int_a^{a+\delta} f(t)e^{x\phi(t)}dt \sim \int_a^{a+\delta} f(a)e^{x\left(\phi(a)+\phi'(a)(t-a)\right)}dt \\
&\sim \int_a^{+\infty} f(a)e^{x\left(\phi(a)+\phi'(a)(t-a)\right)}dt = f(a)e^{x\phi(a)}\frac{1}{-x\phi'(a)}
\end{aligned}
$$

- $\phi'(a)=0 \Longrightarrow \phi''(a)<0$，则

$$
I(x) \sim \int_a^{+\infty} f(a)e^{x\left(\phi(a)+\frac{1}{2}\phi''(a)(t-a)^2\right)}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-x\phi''(a)}}f(a)e^{x\phi(a)},\ x\to+\infty
$$

Case 3: ϕ 在内点 $t_0\in[a,b]$ 取最大值，$f(t_0)\neq 0,\ \phi'(t_0)=0,\ \phi''(t_0)=0$，设存在偶数 p，使得

$$
\phi(t) = \phi(t_0)+\frac{1}{p!}\phi^{(p)}(t_0)(t-t_0)^p,\ \phi^k(t_0)=0,\ k=1,\cdots,p-1,\ \phi^{(p)}(t_0)\neq 0
$$

此时

$$I(x)\int_{-\infty}^{+\infty}f(t_0)e^{x\left(\phi(t_0)+\frac{1}{p!}\phi^{(p)}(t_0)(t-t_0)^p\right)}dt=\Big(-\frac{x}{p!}\phi^{(p)}(t_0)\Big)^{-\frac{1}{p}}f(t_0)e^{x\phi(t_0)}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^p}ds$$

其中

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^p}ds=2\int_0^{+\infty}e^{-s^p}ds\xlongequal{u=s^p}2\int_0^{+\infty}e^{-u}\frac{du}{p\cdot u^{\frac{p-1}{p}}}=\frac{2}{p}\Gamma(\frac{1}{p})=2\Gamma(1+\frac{1}{p})$$

Case 4: $\phi(t)$ 在边界点，如 a，取最大值，则类似 **Case 1**$\Longrightarrow$**Case 3** 可得 **Case 2**$\Longrightarrow$**Case 4**.

我们用 Watson Lemma 再计算一下 **Case 1** 的情形.

$$fe^{x\phi}=\underbrace{fe^{xR\phi}e^{x\phi(t_0)}}_{g}e^{\frac{x}{2}\left(\phi''(t_0)\right)(t-t_0)^2}$$

故

$$\int_{B_\delta(t_0)}ge^{\frac{x}{2}\left(\phi''(t_0)\right)(t-t_0)^2}=\int_{t_0}^{t_0+\delta}ge^{x\frac{1}{2}\left(\phi''(t_0)\right)(t-t_0)^2}+\int_{t_0-\delta}^{t_0}ge^{x\frac{1}{2}\left(\phi''(t_0)\right)(t-t_0)^2}$$

令

$$\tilde{t}=\frac{1}{2}\big(\phi''(t_0)\big)(t-t_0)^2$$

则

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta}ge^{x\frac{1}{2}\left(\phi''(t_0)\right)(t-t_0)^2}=\int_0^{-\frac{1}{2}\phi''(t_0)\delta^2}g\big(t(\tilde{t})\big)e^{-x\tilde{t}}\,\frac{d\tilde{t}}{\big(-\phi''(t_0)\big)\sqrt{-\tilde{t}\Big/\frac{1}{2}\phi''(t_0)}}$$

故可用 Watson Lemma 来计算，因此我们可以说 Laplace method 只能计算渐近展开的首项，但 Watson Lemma 可给出所有项.在具体讨论 Watson Lemma 是如何给出所有项之前，我们先来看一个例子.

例 5.4.14. $I(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-xt^2}e^{ct}dt$，*考察* $I(x)$ *在* $x\to+\infty$ *时的渐近展开.*

解. 令 $f(t)=e^{ct}$，$\phi(t)=-t^2$，则 ϕ 在 $(\infty,+\infty)$ 上有唯一最大值点 $t_0=0$，且 $\phi'(t_0)=0$，$\phi''(t_0)=-2$，$f(t_0)=1$，故由 Laplace method 可得

$$I(x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

□

另解.

$$I(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(t-\frac{c}{2x})^2}e^{\frac{c^2}{4x}}dt=e^{\frac{c^2}{4x}}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

□

另解.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-xt^2}e^{ct}dt=\int_{\infty}^{+\infty}e^{-xt^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(ct)^k}{k!}dt\xlongequal{\text{一致收敛性}}\sum_{k=0}^{ar+\infty}\frac{c^k}{k!}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-xt^2}t^kdt$$

□

现在我们来考察 Laplace method 中的高阶项，注意到，在局部化原理中，$\int_{[a,b]\setminus B_\delta(t_0)}f(t)e^{x\phi(t)}dt$ 为指数型无穷小，不贡献 $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-x\phi''(t_0)}}f(t_0)e^{x\phi(t_0)}(1+\cdots)$ 中的高阶无穷小，故我们只需考虑 $\int_{B_\delta(t_0)}f(t)e^{x\phi(t)}dt$ 的渐近展开中的高阶项.取

$$\begin{aligned}
f(t)&=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2+R_f\\
\phi(t)&=\phi(t_0)+\cancel{\phi'(t_0)(t-t_0)}+\frac{1}{2}\phi''(t_0)(t-t_0)^2+\frac{1}{3!}\phi'''(t_0)(t-t_0)^3+\frac{1}{4!}\phi^{(4)}(t_0)(t-t_0)^4+R_\phi
\end{aligned}$$

则

$$\int_{B_\delta(t_0)} f(t)e^{x\phi(t)}dt \xlongequal{s^2=\triangle(t-t_0)^2} \frac{e^{x\phi(t_0)}}{\sqrt{\triangle}}\int_{-\sqrt{\triangle}\delta}^{\sqrt{\triangle}\delta}\Big(f(t_0)+f'(t_0)\frac{s}{\sqrt{\triangle}}+\frac{f''(t_0)}{2}(\frac{s}{\sqrt{\triangle}})^2+\cdots\Big)$$
$$\Big(e^{-\frac{1}{2}s^2}\big(1+\frac{x}{3!}\phi^{(3)}(t_0)(\frac{s}{\sqrt{\triangle}})^3+\frac{x}{4!}\phi^{(4)}(t_0)(\frac{s}{\sqrt{\triangle}})^4+\mathcal{O}(s^5)+\frac{1}{2!}(\frac{x}{3!}\phi^{(3)}(t_0)(\frac{s}{\sqrt{\triangle}})^3)^2+\mathcal{O}(s^7)\big)\Big)ds$$

由奇偶性可得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\delta(t_0)} f(t)e^{x\phi(t)}dt=\frac{e^{x\phi(t_0)}}{\sqrt{\triangle}}\int_{-\sqrt{\triangle}\delta}^{\sqrt{\triangle}\delta}e^{-\frac{1}{2}s^2}\Big(f(t_0)+\frac{f''(t_0)}{2}(\frac{s}{\sqrt{\triangle}})^2+\big(f(t_0)\frac{x}{4!}\phi^{(4)}(t_0)(\frac{s}{\sqrt{\triangle}})^4\\
&+\frac{f^{(4)}(t_0)}{4!}(\frac{s}{\sqrt{\triangle}})^4+f'(t_0)\frac{s}{\sqrt{\triangle}}\frac{x}{3!}\phi^{(3)}(t_0)(\frac{s}{\sqrt{\triangle}})^3\big)+o(s^6)\Big)ds\\
\sim&\frac{e^{x\phi(t_0)}}{\sqrt{\triangle}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}s^2}(\cdots)ds\\
=&\frac{e^{x\phi(t_0)}}{\sqrt{\triangle}}\sqrt{2\pi}\Big(f(t_0)+\frac{1}{x}\big(\frac{f''(t_0)}{-2\phi''(t_0)}+\frac{f'(t_0)\phi^{(3)}(t_0)}{2(-\phi''(t_0))^2}+\frac{f(t_0)\phi^{(3)}(t_0)}{8(-\phi''(t_0))^2}+\frac{f(t_0)(\phi^{(3)}(t_0))^2}{24(-\phi''(t_0))^3}\big)\Big)
\end{aligned}$$

从上述计算中也可发现高阶项的计算量非常大.

5.5 复积分的渐近展开——stationary phase method 和 steepest descent method

定义 5.5.1. 称形如 $I(x)=\int_a^b f(t)e^{ix\phi(t)}dt$（$f(t),\phi(t)$ 均为实函数）的积分为**振荡型积分**.

振荡型积分的原型是 $I(x)=\int_a^b f(t)e^{ixt}dt$，处理这个积分只需分部积分即可

$$\int_a^b f(t)e^{ixt}dt=f(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\Big|_a^b-\frac{1}{ix}\int_a^b f'(t)e^{ixt}dt=\frac{f(b)e^{ixb}-f(a)e^{ixa}}{ix}+\mathcal{O}(\frac{1}{x^2}),\ x\to+\infty$$

接下来我们考察一般的振荡型积分.

Case 0: 对 $\phi'(t)>0$ 或 $\phi'(t)<0$ 的情形，应用变量替换 $u=\phi(t)$，可将其化为 $\int_a^b f(t)e^{ixt}dt$ 情形.

Case 1: 存在 $t_0\in[a,b]$，使得 $\phi'(t_0)=0$.我们采用 stationary phase method，具体来说，stationary phase 是局部化原理和复 Watson Lemma 的结合.

命题 5.5.2. 设 t_0 为内点，则

$$\int_a^b f(t)e^{ix\phi(t)}\sim f(t_0)e^{x\phi(t_0)}\frac{1}{\sqrt{-x\phi''(t_0)}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\frac{s^2}{2}}ds$$

证明. 采用局部化原理，利用分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\int_{(a,b)\setminus B_\delta(t_0)} f(t)e^{ix\phi(t)}dt=\Big(\int_a^{t_0-\delta}+\int_{t_0+\delta}^b\Big)f(t)e^{ix\phi(t)}dt\\
\xlongequal{u=\phi(t)}&\Big(\frac{f(t)}{\phi'(t)}e^{ix\phi(t)}\Big|_a^{t_0-\delta}+\frac{f(t)}{\phi'(t)}e^{ix\phi(t)}\Big|_{t_0+\delta}^b\Big)\frac{1}{ix}+\mathcal{O}(\frac{1}{x^2})
\end{aligned}$$

由将要证明的结论知

$$\int_{(a,b)\setminus B_\delta(t_0)} f(t)e^{ix\phi(t)}dt=o\Big(\int_{B_\delta(t_0)}f(t)e^{ix\phi(t)}dt\Big)$$

事实上，由复 Watson Lemma 可得

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\delta(t_0)} f(t)e^{ix\phi(t)}dt=\int_{\mathbb{R}}f(t_0)e^{ix\phi(t_0)}e^{ix\frac{\phi''(t_0)}{2}(t-t_0)^2}dt+o(\frac{1}{\sqrt{x}})\\
=&\frac{f(t_0)e^{ix\phi(t_0)}}{\sqrt{-x\phi''(t_0)}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{i}{2}s^2}ds+o(\frac{1}{\sqrt{x}})\sim\frac{f(t_0)e^{ix\phi(t_0)}}{\sqrt{-x\phi''(t_0)}}\sqrt{\frac{\pi}{-\frac{1}{2}}}e^{i\frac{\pi}{4}}
\end{aligned}$$

至此，我们完成了证明. □

下面我们来考虑指数不为纯虚数的积分的渐近展开，需要用 steepest descent method.

考察 $I(x) = \int_\gamma f(t)e^{x\phi(t)}dt$，其中 $t \in \mathbb{C}$，γ 为 $\mathbb{C}$ 中一条道路，f, ϕ 均为复变量解析函数.设 $t = \sigma + i\tau$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = u(\sigma,\tau) + iv(\sigma,\tau)$，$u, v$ 为 ϕ 之实虚部.Steepest descent method 主要分为两步：

(1) 将 γ 形变为 γ_*，使得 γ_* 满足足够好的性质（与 γ 端点相同），例如通过 ϕ 之若干极值点.

(2) 对 $\int_{\gamma_*} f(t)e^{x\phi(t)}dt$ 利用 Laplace method 或 stationary phase.

构造 γ_* 的原则：使得在极值点附近，u 下降或上升速度最快.

定义 5.5.3. 称 γ_* 为一个 ***steepest descent contour***，如果 γ_* 在各点的切线与 $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial \sigma}, \frac{\partial u}{\partial \tau})$ 平行.

注 5.5.4. ∇ 算子有如下性质

$$u(t_0 + \triangle t) - u(t_0) = \nabla u \cdot \triangle t + o\big((\triangle t)^1\big)$$

命题 5.5.5. *steepest descent contour* γ_* 为 v 的水平集，即形如 $v \equiv C$.

证明. 由 ϕ 复解析知 ϕ' 存在，且 $\phi(\sigma,\tau) = \phi(\frac{t+\bar{t}}{2}, \frac{t-\bar{t}}{2})$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}}\phi(\sigma,\tau) = 0 \Longrightarrow \Big(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \sigma} - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial \tau}\Big)\phi = 0$$

即

$$(\partial_\sigma + i\partial_\tau)(u + iv) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \partial_\sigma u = \partial_\tau v \\ \partial_\sigma v = -\partial_\tau u \end{cases}$$

故 $\nabla u = (\partial_\sigma u, \partial_\tau u)$ 与 $\nabla v = (\partial_\sigma v, \partial_\tau v)$ 垂直，从而命题得证. □

注 5.5.6. 常见的应用中的积分具有形式 $\int_a^b f(t)e^{\frac{1}{n}S(t)}dt$, $\frac{1}{n} \to 0^+$，此时积分的主要贡献来源为极值点 t_0, $S'(t_0) = 0$，且 $\operatorname{Im} S(t)$ 在 t_0 处取极小值.

注 5.5.7. 满足 $\nabla u //$ 切线：*steepest descent method*；满足 $\nabla u //$ 切线且过极值点：*saddle point approximation.*

例 5.5.8. $\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2x}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\frac{1}{3}it^3 + ixt)dt$，考察 $I(x)$ 在 $|x| \to +\infty$ 的渐近展开.

解. 先考虑 $x \to +\infty$ 的情形，令 $s = x^{-\frac{1}{2}}t$，则

$$\operatorname{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(ix^{\frac{3}{2}}(\frac{1}{3}s^3 + s)\big)x^{\frac{1}{2}}ds = \frac{1}{2\pi}x^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iy\phi(s))ds$$

其中 $y = x^{\frac{3}{2}}$, $\phi(s) = \frac{1}{3}s^3 + s$，利用分部积分可得 Ai(x) 之渐近展开. ← stationary phase
此时 $\gamma = (-\infty, +\infty)$ 上无极值点，非 steepest descent contour.设 $s = \sigma + i\tau$，则

$$\phi(\sigma + i\tau) = \underbrace{(\frac{1}{3}\tau^3 - \sigma^2\tau - \tau)}_{u} + i\underbrace{(\frac{1}{3}\sigma^3 - \sigma\tau^2 + \sigma)}_{v}$$

其 steepest descent contour 为 $v = c$，即

$$\frac{1}{3}\sigma^3 - \sigma\tau^2 + \sigma = c$$

为使其过 $\phi(s)$ 的极值点 $s = \pm i$，则要求 $c = 0$.又积分收敛，故

$$\exp\big(\frac{1}{3}i\,|t|^3\,(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)\big)\exp(ixt) \to 0,\ t = e^{i\theta}\,|t|\,,\ |t| \to +\infty$$
$$\Longrightarrow \sin 3\theta > 0$$

此时过极值点的 steepest descent contour 只能取成 $\gamma_* = \{\frac{1}{3}\sigma^3 - \sigma\tau^2 + \sigma = 0,\ \sigma > 0\}$，其过极值点 $s_0 = i$（saddle point），且 $\int e^{y\phi(s)}ds$ 收敛.由 Laplace method 可得

$$\int_{\gamma_*} e^{y\phi(s)}ds = 1 \cdot e^{y\phi(s_0)}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-y\phi''(s_0)}} = e^{-\frac{2}{3}y}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{-(-2)y}}$$

再考虑 $x \to -\infty$ 的情形，令 $s = (-x)^{-\frac{1}{2}}t$，则

$$\mathrm{Ai}(x) == \frac{1}{2\pi}(-x)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\phi(s)}ds,\ \phi(s) = \frac{1}{3}s^3 - s$$

由 stationary phase method 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ai}(x) &\sim \frac{1}{2\pi}(-x)^{\frac{1}{2}}\Big(e^{iy\phi(1)}\frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}s^2}}{\sqrt{-y\phi''(1)}} + e^{iy\phi(-1)}\frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}s^2}}{\sqrt{-y\phi''(-1)}}\Big) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(-x)^{-\frac{1}{4}}\Big(\frac{e^{-i\frac{2}{3}y}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{1}} + \frac{e^{i\frac{2}{3}y}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{-1}}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(-x)^{-\frac{1}{4}}\cos\Big(\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\Big)
\end{aligned}$$

□