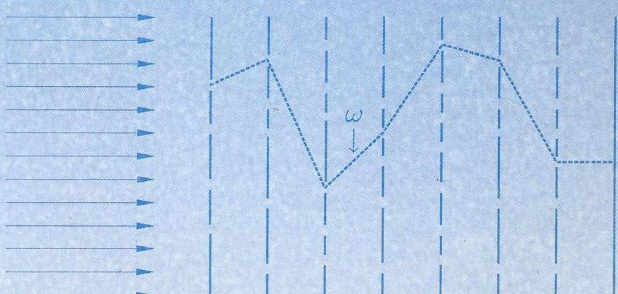
TEXTOS DE MATEMÁTICA

TEORIA DOS OPERADORES

A. Bivar Weinholtz



$$\text{“}e^{it\left(\frac{\hbar}{2m}\triangle-\frac{V}{\hbar}\right)}u(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\Omega^t_{x_0,x}}e^{\frac{i}{\hbar}S(\omega)}\,d\omega\right)u(x_0)\,dx_0\text{”}$$

UNIVERSIDADE DE LISBOA
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

TEORIA DOS OPERADORES

A. Bivar Weinholtz

UNIVERSIDADE DE LISBOA
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática
1998

Classificação A.M.S. (1991): 47-01, 46-01

ISBN:972-8394-09-8

à Maria João

aos meus Pais

Prefácio

Este volume é uma versão remodelada do nº 35 dos "Textos e Notas" do CMAF, editado em 1986. Reproduz-se adiante o prefácio do referido texto, onde o leitor poderá encontrar a descrição e justificação do conteúdo científico da monografia. Com efeito, manteve-se a estrutura fundamental do curso, embora a divisão em três capítulos que se seguiam à Introdução tenha dado lugar à organização da matéria em onze capítulos também divididos em secções mas ainda agrupados em três partes correspondentes aos primitivos capítulos. Por este motivo, completa-se o "prefácio da 1ª edição" com indicações destinadas a facilitar as referências ao texto actual.

Para além de modificações de pormenor na apresentação de alguns dos temas, diversas simplificações em demonstrações e alguns novos exercícios, assinale-se a reformulação do primeiro capítulo; o estudo da noção de adjunto passa a ser feito no quadro mais geral das "correspondências lineares" ("operadores multívocos") o que permite clarificar decisivamente os resultados fundamentais. Acrescentou-se, além disso, o estudo das formas sesquilineares e operadores associados, com o teorema de representação para formas fechadas (secção 1.4), bem como uma introdução ao estudo de operadores diferenciais a mais que uma dimensão (secção 1.5), nomeadamente dos operadores associados ao "momento linear" e à "energia cinética", motivando-se a definição e propriedades elementares da noção de "derivada (parcial) fraca". Fica assim complementado o estudo que já era feito de operadores diferenciais a uma dimensão.

Partes substanciais do conteúdo deste volume foram leccionadas em diversos cursos de mestrado e do ano terminal da licenciatura em Matemática. Para além das disciplinas já referidas no prefácio da 1ª edição e da Teoria dos Operadores e Física-Matemática do 4º ano da Licenciatura em Matemática da FCUL, tratou-se também de dois cursos de Teoria dos Operadores respectivamente nos mestrados de Álgebra (ano lectivo de 1987/88) e Análise (ano lectivo de 1990/1991) na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, bem como cursos de Análise Funcional (ano lectivo de 1988/89) e Álgebras de Operadores (ano lectivo de 1992/93) no Mestrado em Matemática Aplicada do Instituto Superior Técnico. A regência destas disciplinas, nomeadamente pelo contacto que proporcionou com estudantes orientados para diferentes áreas científicas no campo da Matemática, constituiu experiência inestimável a que se fica a dever de modo essencial a remodelação levada a cabo do texto primitivo; aqui fica expresso o meu agradecimento a todos os alunos dos referidos cursos, bem como às instituições universitárias que os acolheram. Para terminar, agradeço ao Luís Trabucho, editor desta colecção, o entusiasmo estimulante com que tem desempenhado essa tarefa, factor decisivo para a finalização deste trabalho.

Lisboa, Fevereiro de 1998

N.B.: Em toda a monografia *os espaços vectoriais são sobre o corpo complexo*, salvo indicação em contrário. Além disso adopta-se a definição de *compacto* que inclui *o axioma de Hausdorff de separação*. Para evitar complicações desnecessárias supõe-se que *os espaços de medida são "não-triviais"*, ou seja, que a medida *não é identicamente nula*.

Prefácio da 1ª edição

"Um analista funcional é, em primeiro lugar e acima de tudo, um analista e não uma espécie degenerada de topologista." [1]

"Nous avons découvert sur les vastes plaines de l'ennui
Ce que savait Feynman *sans sortir de chez lui"* [2]

Este trabalho é essencialmente a versão escrita do curso de Análise Funcional II leccionado pelo autor na Faculdade de Ciências de Lisboa, no ano lectivo de 1984/85; algumas ideias então desenvolvidas já tinham sido "ensaiadas" no curso de Teoria dos Operadores do mestrado de Física-Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, no ano lectivo de 1983/84. A escolha dos assuntos foi determinada em primeiro lugar pelas exigências curriculares do ramo científico da Licenciatura em Matemática (como o autor as entende…) e, em segundo, evidentemente, por gosto pessoal. Como é habitual, inclui-se, tanto no texto como nos exercícios, ligeiramente mais do que é normalmente abordado num semestre lectivo, embora se pense ser possível, em condições favoráveis, cumprir todo o programa proposto nestas páginas.

Parece pacífico que na gama de conhecimentos habitualmente designada por "Teoria dos Operadores" se deva incluir o estudo dos operadores auto-adjuntos não necessariamente limitados em espaços de Hilbert, nomeadamente do que se designa por "Teorema espectral" para tais operadores; a natureza deste resultado é tal que torna possível construir um curso semestral em torno da sua demonstração e de algumas das suas consequências fundamentais, embora a viagem que leva das definições e resultados elementares da teoria à demonstração do Teorema espectral seja pontuada por etapas com excursões variadas e, por vezes, talvez inesperadas.

Tratando-se de elaborações matemáticas particularmente inspiradas por problemas surgidos no seio da Física, parece útil traçar as linhas de desenvolvimento histórico desta ciência que levaram directamente aos trabalhos de Von Neumann acerca de operadores auto-adjuntos. É esse o objecto da Introdução, em que se discutem algumas ideias simples surgidas nos primórdios da Mecânica Quântica, nomeadamente quando Louis de Broglie apresentava as bases da sua "Mecânica Ondulatória". Utilizou-se livremente o texto escrito pelo autor como introdução à

[1] E. Hille (citado em [RS2])
[2] P.R. Chernoff (paráfrase de um célebre aforismo; in Math. Rev., 85g:35088)

monografia de licenciatura [BW1], onde também se pode encontrar alguma bibliografia acerca das questões de Física referidas. Não se procurou, obviamente, escrever um curso, ainda que introdutório, de Mecânica Quântica, mas apenas esboçar um pano de fundo que fosse acompanhando o desenvolvimento matemático dos assuntos tratados, constituindo elos de ligação extra-matemáticos para as diversas etapas, sem deixar de ter em conta as enormes carências de conhecimentos que, no campo da Física, são infelizmente comuns ao autor e a alguns dos previsíveis leitores desta monografia. Mostra-se, em particular, como a Transformação de Fourier surge naturalmente no quadro da Mecânica Ondulatória, como ponte entre os observáveis "momento" e "posição". Termina-se a Introdução com o enunciado, previamente motivado, das propriedades características da classe de operadores em espaços de Hilbert "associados a observáveis físicos", em que se devem incluir operadores não limitados e, portanto, atendendo ao Teorema de Hellinger-Toeplitz (único que se enuncia e demonstra nesta Introdução) com domínio menor que o espaço. Utilizam-se, neste ponto, ideias contidas em [Sc1].

Com o capítulo I[3] inicia-se o percurso matemático propriamente dito do texto. Supõe-se que o leitor possui conhecimentos básicos de Análise Funcional e de Teoria da Medida, como sejam os aspectos elementares da teoria dos operadores limitados em espaços normados, incluindo as particularidades próprias dos espaços de Banach e de Hilbert (com os exemplos habituais), as consequências fundamentais dos Teoremas de Baire (aplicação aberta, gráfico fechado…), Banach-Steinhaus, Hahn-Banach, Stone-Weierstrass, Riesz-Markov, Radon-Nikodim, etc.; não se requer qualquer estudo prévio de operadores ilimitados ou do Teorema espectral mesmo para o caso limitado, ainda que seja desejável (mas não obrigatório) um contacto prévio com as noções de espectro e resolvente de operadores limitados e eventualmente do Teorema espectral para operadores auto-adjuntos *compactos*. Introduzem-se as definições e propriedades básicas relativas a espaços de Hilbert, nomeadamente a noção de adjunto e conceitos afins, e termina-se o capítulo identificando a classe dos operadores "associados a observáveis físicos" com a dos operadores auto-adjuntos. Sacrifica-se o grau de generalidade a uma certa fluência de exposição, evitando, por enquanto, colocar as questões num quadro mais geral, como seria o dos espaços de Banach ou mesmo normados (com a noção de operador transposto). Apresentado o caso do operador de multiplicação por uma função mensurável real num espaço L^2 como exemplo simples de operador auto-adjunto, e tendo em mente o objectivo enunciado na Introdução de dar uma definição de "função de operador" como tradução matemática do conceito físico fundamental de "função de observável", anuncia-se que aquele exemplo é, de certo modo, o "único" existente, já que todo o operador auto-adjunto é, como se verá, "unitariamente equivalente" a um operador de mutiplicação. Esta forma de abordar o Teorema espectral é essencialmente a preconizada em [RS1]; procurou-se, nestas páginas, explorar esta ideia tão utilmente quanto possível. Estabelecida, por exame do caso da dimensão finita, a ligação entre "equivalência unitária com operador de multiplicação", "função de operador" e noções relativas a valores espectrais, convida-se o leitor a acom-

[3] Actual 1ª Parte, coincidente com o Capítulo 1.

panhar uma digressão a estruturas mais abstractas em que faça sentido falar de "função de um elemento", pelo menos, à partida, no caso simples de funções polinomiais, e introduzir a noção de espectro — trata-se da teoria das álgebras de Banach, objecto do capítulo seguinte.

Inicia-se o Capítulo II[4] com uma secção centrada nas definições e propriedades gerais relativas a álgebras de Banach. Em todo o capítulo é largamente utilizada bibliografia consagrada sobre estes assuntos, como seja, por exemplo, [GRS] ou [Br], além de diversas obras gerais de Análise Funcional que dedicam capítulos especiais às álgebras de Banach ([TL], [Ru2], [Y] e, em menor proporção, [KF]). Nesta primeira secção[5] estuda-se a chamada "representação regular", que reduz a classe das álgebras de Banach à das sub-álgebras fechadas dos $\mathcal{L}(E)$ (aplicações lineares contínuas de E em E), a menos de isomorfismo isométrico; introduz-se a noção de espectro de um elemento, acompanhada dos conceitos e propriedades afins e demonstra-se um dos resultados fundamentais da teoria — a menos de isomorfismo isométrico, o único corpo de Banach é $\mathbb{C}$. Termina-se a secção com alguns exemplos importantes de álgebras de Banach.

A segunda secção do Capítulo II[6] é essencialmente dedicada à introdução da Transformação de Gelfand, apresentando-se como aplicações directas das suas propriedades mais elementares os Teoremas de Wiener e Wiener-Lévy clássicos (relativos à possibilidade de desenvolver em série de Fourier absolutamente convergente o inverso algébrico de uma função, ou, mais geralmente, a composta de uma função holomorfa na vizinhança da imagem com uma função também com série de Fourier absolutamente convergente), e o chamado cálculo operacional holomorfo para os elementos de uma álgebra de Banach com unidade, de que se dá uma aplicação ao caso das matrizes. Termina-se a secção com um lema geométrico relativo à existência de certos domínios de Cauchy, utilizado em alguns resultados anteriores, sendo a demonstração apresentada de [Sc2][7]. Registe-se um primeiro passo visível (ainda que não indispensável…) no sentido da definição geral de "função de operador auto-adjunto") (com a introdução de funções holomorfas de um elemento) e acredite-se que também foram dados alguns passos (mais decisivos!) na sombra…

Na terceira secção[8] tira-se ainda partido da generosidade da Transformação de Gelfand que fornece, sem exigir grande esforço, os resultados fundamentais acerca da convolução e Transformação de Fourier em L^1 (exemplo fundamental de álgebra sem unidade), com aplicação directa a certas equações integrais e muitas outras potenciais aplicações. Com um pequeno desvio por L^2 obtém-se de passagem a Transformação de Fourier-Plancherel, exemplo privilegiado de operador unitário, inestimável para certas representações espectrais que mais tarde ocorrerão. Nesta secção utilizou-se também [Ru1].

---

[4] Actual 2ª Parte que se inicia no Capítulo 2.
[5] Nas actuais secções 2.1, 2.2, 2.3.
[6] Actuais secções 2.4 e 2.5.
[7] A demonstração foi omitida nesta edição, sendo apenas esboçada em nota de rodapé.
[8] Actual Capítulo 3.

A secção II-4[9] sistematiza e desenvolve alguns aspectos da Transformação de Gelfand de que já se poderia suspeitar por alguns factos constatados nas secções anteriores — estudam-se certas propriedades topológicas daquela transformação, sendo estabelecida a representação homomorfa contínua das álgebras de Banach comutativas em álgebras das funções contínuas em certos compactos, com condições necessárias e suficientes de injectividade, bicontinuidade, isometria e densidade da representação. Como ilustração destas técnicas, apresenta-se a construção do compactificado de Stone-Čech de um espaço topológico completamente regular.

Na secção II-5[10] inicia-se a viagem de regresso ao reino dos operadores auto-adjuntos, abordando o estudo das álgebras-B^*, estrutura que acrescenta à de álgebra de Banach algumas das qualidades da passagem ao adjunto na classe dos operadores lineares limitados. Este enriquecimento da estrutura reduz sensivelmente a classe sobre que nos debruçamos: no caso comutativo ficamos reduzidos às cópias isométricas de espaços de funções contínuas sobre compactos. Esta constatação é o resultado fundamental da secção, e permite dar mais um passo, este fulcral, em direcção ao objectivo inicialmente proposto — para elementos *normais* (ou seja, comutando com os respectivos adjuntos) estabelece-se um cálculo operacional contínuo que generaliza o cálculo operacional holomorfo da secção 2[11]; para funções contínuas no *espectro* de um elemento normal define-se o "valor" da função com o argumento substituído pelo elemento em questão. Munidos das armas adequadas, podemos agora atacar sem receio uma primeira versão do Teorema espectral, entrando no capítulo seguinte.

No último capítulo[12] do curso, explicitamente dedicado ao teorema espectral, reserva-se a primeira secção[13] ao caso dos operadores normais limitados. Começa-se por notar que a diagonalização de matrizes *normais* resulta imediatamente do cálculo operacional contínuo desenvolvido no final do capítulo anterior. Além disso, a diagonalização permite obter de modo elementar a equivalência unitária do operador correspondente à matriz (numa base ortonormada pré-fixada) com um operador de multiplicação num espaço L^2. Este facto sugere que processo semelhante possa ser levado a cabo no caso geral de operadores normais limitados em espaços de Hilbert — de facto, a consideração das chamadas *medidas espectrais* e a introdução da noção de vector cíclico permite mostrar que, a menos de equivalência unitária, os operadores normais limitados se reduzem aos de multiplicação por funções complexas mensuráveis limitadas em espaços L^2. Como o operador resolvente em i (unidade imaginária) de um operador auto-adjunto (mesmo não limitado) é normal limitado, podemos utilizar o resultado anterior para obter a primeira forma do Teorema espectral para aqueles operadores, termo provisório do nosso percurso. Antes, porém, é necessário estender a operadores não limitados as noções de espectro, resolvente, etc. e respectivas propriedades; é

[9]Actuais secções 2.6 e 2.7.
[10]Actual Capítulo 4.
[11]Actual secção 2.5.
[12]Actual 3ª Parte, constando dos Capítulos 5 a 11.
[13]Actual Capítulo 5.

esse o objecto da segunda secção do Capítulo III[14], onde também se estuda com algum pormenor o caso particular dos operadores de multiplicação por funções mensuráveis (arbitrárias) em espaços L^2.

Chegados finalmente a uma das metas inicialmente propostas, podemos, na secção 3[15], acompanhar a construção de mais uma versão do cálculo operacional, agora já para operadores auto-adjuntos não necessariamente limitados e funções limitadas mensuráveis em $\mathbb{R}$ quaisquer; segue-se a sugestão de [RS1], utilizando--se de modo essencial a representação por operadores de multiplicação.

É altura de procurar concretizar algumas das possíveis razões que justificam a importância de definir funções de observáveis físicos — e *a fortiori* de operadores auto-adjuntos: na secção III-4[16] mostra-se como a Dinâmica Quântica introduz naturalmente certas funções limitadas de observáveis, a partir da equação de Schrödinger, que se apresenta e motiva, retomando o fio da Introdução. Feito o estudo dos grupos unitários a partir do cálculo operacional limitado, mostra-se que os postulados da estrutura de grupo unitário resultam naturalmente da consideração dos processos dinâmicos em Mecânica Quântica; o teorema de Stone revela que, partindo da Dinâmica, se pode chegar aos observáveis através, mais uma vez, dos operadores auto-adjuntos. Do estudo do comportamento dos grupos unitários associados a *somas* de operadores resulta uma fórmula (de *Trotter*) que será o fulcro de nova ligação entre o modelo matemático e a teoria física da Mecânica Quântica. Concretizando a equação de Schrödinger para o caso da partícula livre a uma dimensão de espaço, estudam-se em pormenor os operadores diferenciais envolvidos, utilizando-se a Transformação de Fourier-Plancherel atrás introduzida; mostra-se como os resultados teóricos desta secção (em particular a fórmula de Trotter) permitem levar à formulação de Feynman da Mecânica Quântica, que se centra nas trajectórias das partículas em lugar de partir dos observáveis momento e posição. Expõem-se os problemas matemáticos daí resultantes e que motivam a inserção da secção seguinte[17] acerca da medida de Wiener e de certas equações de difusão.

A abordagem dos assuntos expostos na secção 5 do capítulo III (*cf.* nota 17), além de aparecer naturalmente na sequência dos resultados da secção anterior, permite abrir diversas portas para ramos em franca expansão da Análise e Física--Matemática (Integração Funcional, Teoria Quântica de Campos, Processos Estocásticos, etc.); além disso constitui mais uma ilustração directa do cálculo operacional limitado atrás introduzido. Quanto à medida de Wiener, segue-se de perto a excelente exposição contida em apêndice de [N] e, em parte, [RS2].

Na secção 6 deste último capítulo[18] aplica-se ainda o cálculo operacional limitado à construção das projecções espectrais que permitem abordar a forma talvez mais clássica do Teorema espectral; simultaneamente desenvolve-se o cálcu-

[14] Actual Capítulo 6.
[15] Actual secção 7.2.
[16] Actual Capítulo 8.
[17] Actual Capítulo 9.
[18] Actual Capítulo 10.

lo operacional geral (para funções apenas mensuráveis) estabelecendo-se as ligações adequadas entre medidas projectivas e espectro de um operador. Parte-se, mais uma vez, da motivação física, analisando-se o significado probabilístico das projecções espectrais. Nas demonstrações utiliza-se fortemente a ideia inicial de procurar reduzir as dificuldades ao caso dos operadores de multiplicação, o que, na opinião do autor, clarifica consideravelmente o desenrolar dos raciocínios. Como veremos, deixa-se para os exercícios parte considerável das aplicações apresentadas para o Teorema espectral na forma consagrada.

Termina-se o capítulo (e esta monografia) com alguns complementos acerca da estrutura dos operadores auto-adjuntos e respectivos espectros[19]. O objectivo essencial é abrir horizontes, dando ideia de possíveis desenvolvimentos da teoria exposta; esboça-se a teoria da multiplicidade, introduzem-se as subdivisões do espectro ligadas à decomposição de Lebesgue das medidas espectrais e indica-se um possível campo de aplicação importante destes conceitos — a teoria do *scattering*, último elo de ligação com a física apresentado no curso (desta vez a título meramente informativo).

Antes de se apresentarem as páginas dedicadas a exercícios, convém falar dos assuntos afins ausentes… Evitou-se desenvolver as consequências do Teorema espectral para operadores normais limitados e não se abordou a questão dos normais não limitados; parece, no entanto, ter ficado aberta a via para um estudo pessoal largamente facilitado destas questões, que se omitiram por falta de tempo e opção pessoal do autor, no sentido de evitar desvios desnecessários numa certa linha de exposição (*cf.* [TL], [Ru2]). Falta mais lamentável é sem dúvida a das formas quadráticas em espaços de Hilbert e respectivos teoremas de representação[20], em ligação com a teoria da perturbação para operadores auto-adjuntos; é o tema que se seguiria naturalmente a este curso, em consonância com aplicações a operadores diferenciais mais gerais que os abordados e com o estudo mais sistemático das extensões de operadores simétricos (teoria dos índices de defeito). Escusado será dizer que as limitações de tempo devem ser tidas, como habitualmente, por culpadas desta omissão. Tomada também a opção de tornar os exemplos independentes de conhecimentos no campo da teoria "moderna" das equações de derivadas parciais (em particular da definição de derivada generalizada e da teoria das Distribuições e espaços de Sobolev), ficou-se pela dimensão 1 ("de espaço"), ou seja, pelos operadores diferenciais ordinários, em que é suficiente a noção e propriedades da derivada (clássica) para funções absolutamente contínuas; esta abordagem preliminar (ou em paralelo relativamente a outros cursos) de algumas equações de derivadas parciais "a uma dimensão de espaço" mas utilizando métodos relativamente poderosos da teoria dos operadores parece útil, na medida em que permite isolar as dificuldades especificamente analíticas funcionais das estruturais particulares relativas à "regularidade" dos espaços em que se procuram as soluções. Além disso, este estudo constitui boa motivação para a introdução da teoria das Distribuições, como necessidade resultante da tentativa

[19]Estes complementos constituem o actual Capítulo 11.
[20]Assunto agora abordado na secção 1.4.

de estender certos resultados a operadores diferenciais a mais de uma dimensão, para os quais as eventuais realizações auto-adjuntas têm necessariamente domínios contendo funções não deriváveis no sentido clássico[21].

A introdução de numerosos exercícios no final de cada secção tem por objectivo primordial permitir ao leitor testar o grau de compreensão atingido nos assuntos estudados. Não parece ser possível apreender utilmente uma noção matemática elaborada sem esforço individual de resolução de problemas envolvendo essa noção e estabelecendo o máximo de interligações com noções já conhecidas. Nesse sentido procurou-se que os exercícios obrigassem a fazer entrar em jogo conceitos provenientes dos mais diversos ramos da Matemática, de modo a dar uma ideia tão real quanto possível do enorme poder unificador da Análise Funcional, sem esquecer que este conjunto de teorias nasceu para resolver problemas concretos da Matemática e que, portanto, o seu estudo deveria implicar um progresso efectivo no conhecimento dos campos clássicos da Análise; por outras palavras, tão ou mais importante que a familiaridade com as diversas estruturas abstractas é o conhecimento dos entes matemáticos que as povoam e lhes dão razão de ser.

O estudo de alguns operadores diferenciais elementares (fundamentalmente o operador de derivação com domínios variados) é um dos *leitmotiv* que percorre os exercícios de diversas secções. Começa por aparecer na Introdução, em que se pede para demonstrar que tais operadores não podem ser contínuos nos domínios e espaços "razoáveis" neste quadro; dominam os exemplos do Capítulo I de cálculo de adjuntos, aparecem no Capítulo II (secção 3[22]) em que se pormenorizam alguns comportamentos relacionados com a Transformação de Fourier, já abordados no texto, e em que se estuda o problema de Dirichlet no semi-plano (no quadro L^1). Constituem finalmente objecto de alguns exercícios fundamentais do Capítulo III (*cf.* nota 12) em que se estudam propriedades importantes das equações de Schrödinger e do calor, completando o estudo feito no texto, e se pede o exame das diversas partes do espectro de alguns operadores diferenciais. Nas sugestões dadas para a resolução de alguns destes exercícios introduzem-se, em casos simples, algumas técnicas importantes da teoria dos operadores e equações diferenciais; assim aparece, por exemplo, no exercício 5 do Capítulo I[23], o método de *regularização por convolução* e, no exercício 3 da secção III-4[24], o método de *truncatura*, em relação com o estudo dos domínios em que tais operadores são auto-adjuntos ou essencialmente auto-adjuntos.

Outro princípio director na escolha dos exercícios foi, sempre que possível, a apresentação de formas alternativas de abordar as questões estudadas no texto e de complementos menos inseridos na linha "natural" de desenvolvimento dos assuntos, mas ainda assim considerados importantes. Certos resultados com demonstração "decomposta" em exercícios com sugestões adequadas são mesmo

[21]Esboça-se a referida generalização na actual secção 1.5.
[22]Actual Capítulo 3.
[23]Actual exercício 17).
[24]Actual exercício 133).

importantes teoremas de Análise (mais ou menos Funcional…) como, por exemplo, o Teorema Tauberiano de Wiener (exercícios 9 a 13 da secção II-3[25]), ou o Teorema de Bochner (exercício 19 da secção III-6[26]); outros, menos fundamentais, têm todavia importantes consequências em diversos ramos da Análise, como por exemplo resultados relativos a partes polinomialmente convexas de $\mathbb{C}^N$ (exercício 5 da secção II-4[27]), a representação de espaços L^∞ (exercício 8 da mesma secção[28]), a espectros de operadores não necessariamente fechados em espaços normados (ex. 1 de III-2[29]), a equações diferenciais com segundo membro (versões abstractas das equações de Schrödinger e do calor — resp. ex. 1 de III-4 e 4 de III-5[30]), a propriedades de regularidade de equações "tipo calor" (ex. 2 de III-5[31]), a geração de semi-grupos auto-adjuntos (ex. 5 de III-5[32]), a positividade de soluções (ex. 8 de III-5[33]), à raíz quadrada de operadores positivos (ex. 18-b de III-6[34]), à decomposição polar de operadores fechados (ex. 18-c de III-6[35]), à convergência de funções de operador (ex. 21 de III-6[36]) e finalmente à dedução do Teorema espectral para operadores compactos a partir do caso geral (ex. 15 de III-6[37]).

Procura-se também, em muitos casos, estimular a busca de "contra-exemplos" para conjecturas que possam naturalmente surgir a propósito das noções que vão sendo introduzidas; trata-se de um meio insubstituível para firmar a compreensão de conceitos novos. Os enunciados dos exercícios resultam largamente da pesquisa bibliográfica efectuada; trata-se quer de problemas já apresentados como tais em obras já publicadas (citadas na bibliografia), quer de adaptações de partes expositórias dessas mesmas obras, quer, apesar de tudo, em alguns casos, de ideias do autor (sem qualquer pretensão de originalidade quanto aos resultados…). Em dois casos pedem-se contra-exemplos para afirmações "menos verdadeiras" (!) encontradas na bibliografia (ex. 2 e 10-e de II-2[38]) — *errare humanum est*…

Não se apresentam neste curso quaisquer resultados originais; os teoremas estudados ou são de há muito resultados básicos de Análise ou produções mais recentes mas já consagradas, pelo menos no campo da investigação. É legítimo reconhecer alguma contribuição pessoal na escolha e encadeamento dos assuntos versados e consequentemente nos pormenores de algumas demonstrações, em particular no que respeita ao Teorema espectral e cálculo operacional gerais em que se desenvolveu a já citada ideia de [RS1] de privilegiar a representação por

[25]Actuais 81) a 85).
[26]Actual 168).
[27]Actual 62)
[28]Actual 65).
[29]Actual 112).
[30]Actuais 131) e 141), respectivamente.
[31]Actual 139).
[32]Actual 142).
[33]Actual 145).
[34]Actual 167-b).
[35]Actual 167-c).
[36]Actual 170).
[37]Actual 164).
[38]Respectivamente, actuais 39) e 47); *cf.* [TL], VII-3, p. 400 e [Ru2], exercício 7 do Capítulo 10, p. 260.

operadores de multiplicação. Também se procurou uma ligação com motivações físicas mais estreita do que é habitual, ainda que na linha de, por exemplo, [Sc1].

Apresentado o conteúdo desta monografia não posso deixar de agradecer aos colegas do C.M.A.F. por muitas frutuosas discussões em torno de assuntos nela versados, aos alunos dos cursos citados no início deste prefácio por todas as sugestões e melhoramentos tornados possíveis pelo diálogo desenvolvido durante o período lectivo e finalmente à Maria do Carmo Monteiro Fernandes pelo excelente trabalho de dactilografia que pode se apreciado na totalidade das páginas que se seguem[39].

Lisboa, Março de 1986

[39]Referência à edição de 1986, como é óbvio.

Índice

3ª Parte — Teorema Espectral e Aplicações

Introdução

Introdução

Nota histórica e considerações acerca da motivação física de alguns dos temas fundamentais da Análise Funcional

Se procurarmos investigar a génese das ideias fundamentais que estão na base das teorias matemáticas de que nos ocuparemos neste curso, seremos naturalmente levados a sair do campo da Matemática e a entrar em contacto com a profunda crise que abalou a Física nos finais do século XIX e princípios deste século.

Do estado de relativa satisfação intelectual que reinava nos meios científicos na época imediatamente anterior, é exemplar a atitude de Thomson (Lord Kelvin) que parecia desencorajar os jovens cientistas de dedicarem os seus esforços à investigação fundamental em Física já que esta estaria praticamente terminada, restando apenas integrar nas teorias gerais conhecidas alguns pontos obscuros de que destacava três: o *resultado negativo da experiência de Michelson e Morley,* a *catástrofe do ultravioleta na radiação do corpo negro* e o *efeito fotoeléctrico*. Com esta ressalva, a Física parecia ter atingido um ponto em que praticamente todos os fenómenos acessíveis à experiência se podiam explicar recorrendo a uma das teorias até então desenvolvidas e repetidamente confirmadas por inúmeras observações e realizações técnicas. Com efeito, a Mecânica Newtoniana encontrava uma concordância espectacular com as observações astronómicas realizadas ao longo de séculos; a Termodinâmica dava conta das relações existentes entre fenómenos mecânicos e caloríficos e, junta à hipótese molecular, parecia admitir uma redução conceptual à Mecânica, entrando em jogo com a agitação das moléculas, regida pelas Leis de Newton. Mesmo os fenómenos luminosos e electromagnéticos encontravam explicação cabal no quadro da teoria do electromagnetismo de Maxwell-Lorentz; reduzindo a luz a radiação electromagnética, Maxwell determina finalmente a verdadeira natureza dos fenómenos ópticos, pondo fim a uma velha discussão que durava desde o tempo de Newton (que defendia a teoria corpuscular da luz) e Huygens (partidário da teoria ondulatória). Aliás, já no início do século XIX, as experiências de Young, Fresnel e Fraunhofer sobre interferência e difracção haviam posto em destaque a natureza ondulatória dos fenómenos luminosos. No entanto, já nesse campo, era detectável certo "mal-estar" nos meios científicos da época; com efeito, grande parte dos fenómenos ondulatórios pode ser facilmente reduzida a fenómenos mecânicos, considerando uma onda como a propagação de uma vibração (portanto de um movimento) através de um meio material. Temos assim a propagação de vibrações de uma corda esticada, a propagação de ondas à superfície de um líquido ou a propagação de ondas sonoras através de um meio sólido, líquido ou gasoso, como exemplos de fenómenos ondulatórios (uni-, bi- ou tri-dimensionais) que se podem reduzir a movimentos de partículas materiais, cabendo portanto no quadro da Mecânica. Já no caso das ondas electromagnéticas, pergunta-se, qual o sujeito para o verbo "ondular"? À falta de melhor resposta, "baptizou-se" tal sujeito com o nome de "éter electromagnético" ou simplesmente "éter". Mas a própria natureza das ondas electromagnéticas impunha ao "éter" propriedades verdadeiramente desconcertantes; a par de rigidez infinita, o éter deveria preencher todo o espaço entre os corpos (visto que as ondas electromagnéticas, ao contrário das sonoras, se propagam no vazio) e, no entanto, não afectar de nenhum modo visível o movimento dos mesmos corpos. O resultado negativo da experiência de Michelson e Morley (realizada em 1887), que se destinava a determinar a velocidade da Terra em relação ao éter, sugeriu que se deveria renunciar à redução pretendida do electromagnetismo a modelos mecânicos acessíveis à intuição; mas, mais do que isso, levou a uma revisão completa dos conceitos de espaço e tempo, até então universalmente aceites, baseados no princípio de relatividade de Galileu. Einstein, substituindo este princípio pelo seu próprio princípio de relatividade, no quadro da teoria da relatividade restrita, consegue dar conta do fenómeno verificado de constância da velocidade da luz relativamente a dois referenciais movendo-se um em relação ao outro com movimento rectilíneo e uniforme.

Foi este um dos abalos sofridos pelo edifício da Física clássica e no entanto não se tratou de abalo tão violento quanto poderia parecer à primeira vista. Com efeito, muitas das ideias básicas que presidiam à edificação das teorias físicas mantinham-se inalteradas com a introdução do princípio de relatividade de Einstein; continuava a não ser posta em dúvida a possibilidade de melhorar indefinidamente os resultados das medições das diversas grandezas físicas, independentemente umas das outras, ou seja, continuava a atribuir-se aos diversos corpos, em qualquer escala, uma trajectória bem determinada que podia ser conhecida tão precisamente quanto o desejássemos desde que pudéssemos dispor de instrumentos de medida suficientemente aperfeiçoados. O objectivo da Física continuava a ser o de determinar com precisão "absoluta" o comportamento da Natureza em face de determinadas acções e condições iniciais; o maior ou menor acordo das previsões com a realidade dependeria apenas do grau de acuidade com que essas acções e condições fossem conhecidas, mas não era posta em dúvida a possibilidade de enunciar leis físicas a partir das quais fosse possível controlar perfeitamente os diversos parâmetros (posição, momento, energia, etc.) que caracterizam os movimentos dos sistemas materiais. O que a Teoria da Relatividade fez foi modificar algumas das leis da Mecânica Clássica e certas relações estabelecidas entre os diversos observáveis, mas deixou intactos, quer os pressupostos clássicos acerca das possibilidades de medição das grandezas, quer o próprio conceito de lei física.

Mas havia outras pequenas manchas no quadro geral da Física dos finais do século XIX. Uma dessas "manchas" era conhecida como *catástrofe do ultravioleta na radiação do corpo negro*. As leis fundamentais da radiação térmica, ou seja, das radiações electromagnéticas emitidas pelos corpos aquecidos eram bem conhecidas dos físicos da época. Uma dessas leis estabelecia que a "quantidade de radiação" (radiância) emitida por um corpo aumenta rapidamente com a respectiva temperatura (no caso do corpo negro — que se toma para padrão por ser aquele que absorve o máximo de radiação — é proporcional a T^4, em que T é a temperatura absoluta); outra — a lei de Wien — estabelecia que, à medida que a temperatura aumenta, o comprimento de onda correspondente ao máximo da intensidade da luz emitida pelo corpo, diminui progressivamente, aproximando-se da zona violeta do espectro. Estas duas leis davam conta dos fenómenos observados, por exemplo, quando se aquece uma barra de ferro: a intensidade da luz emitida aumenta rapidamente com a temperatura (aumento de radiância) e a cor dessa mesma luz vai-se progressivamente aproximando do branco, começando pelo vermelho (o que significa que se vão adicionando sucessivamente radiações de comprimento de onda cada vez menor até se atingir — de acordo com a lei de Wien — a zona violeta do espectro, a partir da qual todo o espectro visível é coberto e portanto a luz é branca). Qualquer destas leis tinha assim, por si, confirmação experimental indiscutível; restava conjugá-las numa só lei que desse conta dos diversos fenómenos observados. Foi o que Rayleigh e Jeans procuraram ao declarar que a luminosidade de um corpo aquecido seria directamente proporcional à sua temperatura absoluta e inversamente proporcional ao quadrado do comprimento de onda da luz emitida pelo corpo. Mas se esta lei revelava uma aproximação satisfatória da realidade até à parte média do espectro, começava a falhar estrondosamente à medida que se consideravam comprimentos de onda mais próximos da zona violeta e ultravioleta (daí o nome de "catástrofe do ultravioleta" dado a este fenómeno). Além disso o próprio enunciado da lei fazia prever a possibilidade de aumento ilimitado da luminosidade, bastando considerar comprimentos de onda arbitrariamente curtos, o que, além de não ter confirmação experimental, é difícil de conceber em si.

Talvez ninguém tivesse suspeitado, ao surgir esta dificuldade, que ela seria o ponto de partida para uma reformulação completa do modo de entender a Física, revolução bastante mais profunda que a efectuada pela Relatividade. Com efeito, no final do ano de 1900, Planck apresenta a sua explicação da "catástrofe do ultravioleta", enunciando um novo modo de conjugar as duas leis da radiação térmica através de uma fórmula que traduz perfeitamente os fenómenos observados. Mas se esta fórmula estava de acordo com a realidade, por outro lado não se podia deduzir dos princípios da Física Clássica e apresentava certas combinações de grandezas que não tinham qualquer sentido aparente. Para a fundamentar, Planck viu-se obrigado a emitir a sua hipótese dos "quanta" de energia; ou seja, renunciou ao pressuposto essencial da Física clássica que dizia respeito à continuidade da energia. De facto, se a Física admitia, sem qualquer dificuldade, a descontinuidade essencial da matéria, através da hipótese molecular, já as trocas de energia, ninguém o duvidava, se faziam de modo contínuo e gradual. Com efeito, se se admitia ser possível, com rigor arbitrário, seguir, por exemplo, o movimento de um corpo em queda livre ou o processo de colisão de duas moléculas com consequente transferência de energia cinética era porque, sem dúvida, o aumento de energia cinética do corpo ou de uma das moléculas era um processo contínuo; se as variações de energia se fizessem por porções fixas ou *quanta*, isso levaria a que o corpo não poderia ter movimento contínuo mas "saltaria" instantaneamente de uma posição para outra correspondente a nível de energia diferindo do anterior por um *quantum*. Do mesmo modo, nem todas as transferências de energia entre as duas moléculas seriam possíveis, mas apenas as que correspondessem a múltiplos do *quanto* de energia. Também a energia dos fenómenos ondulatórios não se propagaria continuamente, o que parecia incompatível, por exemplo, com a natureza contínua dos fenómenos luminosos.

Em resumo: admitir a *hipótese dos quanta* era renunciar aos conceitos clássicos que informavam todas as descrições dos fenómenos físicos até então; não a admitir era renunciar a compreender a fundamentação duma fórmula que apresentava acordo notável com a realidade.

Mas outros fenómenos surgiam que punham também em xeque os conceitos clássicos. Um deles era o chamado *efeito fotoeléctrico*: colocando em recipiente onde previamente se realizou o vácuo duas placas metálicas separadas e ligando-as aos pólos de uma pilha eléctrica, não há passagem de corrente visto que não há condutor entre as placas; no entanto, iluminando uma das placas com luz de determinados comprimentos de onda, verifica-se passagem de corrente entre as placas, cessando a corrente logo que se interrompe a iluminação. Conclui-se então que a incidência da radiação electromagnética obriga alguns dos electrões, por transferência de energia, a "saltar" da placa, estabelecendo assim a corrente. É natural pensar, e de facto assim acontece, que aumentando a intensidade da luz, ou seja, aumentando a energia transferida para a placa, o número de electrões "soltos" aumenta, intensificando-se a corrente. Mas o facto estranho é que para cada metal existe um comprimento de onda limite tal que fazendo incidir luz de comprimentos de onda superior não há qualquer corrente, ainda que fraca, por mais intensa que seja a luz emitida. Trata-se de facto inexplicável classicamente, pois não há qualquer razão para os electrões se "recusarem" a absorver energia proveniente de luz de grandes comprimentos de onda quando absorvem facilmente a mesma energia quando associada a menores comprimentos de onda. Einstein, em 1905, apresentou uma explicação coerente para este fenómeno, servindo-se em parte dos trabalhos de Planck acerca dos *quanta*. Planck havia estabelecido uma relação de proporcionalidade entre a frequência ν de uma radiação e o *quantum* E de energia corespondente a essa radiação:

$$E = h\nu,$$

onde h é a constante de Planck ($h \approx 6,6 \times 10^{-27}$ erg.s). A ideia de Einstein foi interpretar o fenómeno do efeito fotoeléctrico considerando que a radiação electromagnética interagiria com os electrões como se se tratasse de pequenos corpúsculos — os *fotões* — transportando cada um exactamente *um quantum* de energia $h\nu$. Do choque de um fotão com um electrão da placa resultaria a transferência da energia $h\nu$, contida no fotão, para o electrão; se essa energia fosse suficiente para para vencer a energia de ligação W do electrão (característica do metal) o electrão seria ejectado com certa energia cinética:

$$E_{cin} = h\nu - W.$$

Caso contrário (se $h\nu < W$) o electrão não seria ejectado. Fica assim explicado porque é que para cada metal existe um limiar para a frequência da radiação, a partir do qual não há corrente, por mais intensa que seja a radiação incidente — essa intensidade corresponde a um aumento do número de fotões que atingem a placa simultaneamente: por maior que seja esse número, ou seja, por maior que seja o número de choques de fotões com electrões, se cada fotão não tiver energia $h\nu$ suficiente para afectar o electrão com o qual choca, nenhum electrão será ejectado e não haverá corrente. Aumentando ν suficientemente de modo a que $h\nu > W$, cada fotão ejecta o electrão com que choca e agora já o aumento do número de fotões (aumento da intensidade) intensifica o número de electrões expulsos e portanto a corrente.

Esta explicação, quase simplista, de Einstein para o efeito fotoeléctrico vinha agora pôr em causa um dos princípios já considerados bem estabelecidos pela Física do século XIX: a natureza ondulatória da luz; afinal, em certas situações, a luz apresentava natureza corpuscular bem nítida! e, no entanto, as experiências sobre difracção, polarização, etc., mostravam bem a necessidade de admitir que a luz se propaga por ondas…

Outro escolho encontrado pelos físicos do início do século XX dizia respeito à própria estrutura atómica. Durante a segunda metade do século XIX, e sobretudo por iniciativa dos químicos, tinha havido grande incremento no estudo do espectro dos diversos elementos; ou seja, da decomposição da "luz" emitida pelas diversas substâncias quando incandescentes. Tratava-se afinal de repetir a experiência de Newton de decomposição da luz solar por um prisma triangular transparente, utilizando agora luz proveniente de outras fontes como por exemplo um pano embebido em solução salina incandescente. O estudo sistemático dos espectros — a Análise Espectral — permitia concluir que cada elemento tinha espectro bem determinado, ou seja, quando suficientemente aquecido emitia radiações electromagnéticas de comprimentos de ondas bem determinados. A Física clássica não encontrava explicação satisfatória para estes factos; com efeito, o aumento de temperatura de um corpo traduz um incremento nos choques entre as moléculas desse corpo. Poderíamos ser levados a supor que era do aumento de energia de algumas moléculas, por acção desses choques, que provinha a emissão de luz; mas nesse caso não se compreenderia porque não havia emissão de luz, ainda que pouco intensa, quando o corpo não tinha atingido certa temperatura — em qualquer caso não deixa de haver choques entre as moléculas. O modelo atómico de Thomson iluminava um pouco esta questão; o átomo seria constituído por uma "nuvem" carregada positivamente onde se moviam as cargas negativas — os electrões (cuja existência como cargas negativas elementares se encontrava já plenamente verificada). A atracção exercida pela carga positiva abrandava o movimento dos electrões e era do domínio da Electrodinâmica clássica que partículas carregadas em movimento que sofressem abrandamento nesse movimento deveriam emitir radiação electromagnética; quanto maior fosse o aquecimento, maior lugar haveria para abrandamento, que se traduziria por maior emissão de radiação. No entanto este modelo era insatisfatório sob diversos aspectos; não era claro que fosse possível a coexistência dos electrões com a nuvem positiva sem neutralização das cargas respectivas e a existência dos espectros característicos de cada elemento continuava inexplicada. O estudo da dispersão das partículas α (carregadas positivamente) pelos átomos de diversos elementos, efectuado por Rutherford, mostrou que a carga positiva do átomo, ao contrário do que propunha Thomson, se encontrava concentrada em porção ínfima do volume total do átomo. Rutherford propõe então (em 1911) novo modelo atómico em que o átomo é figurado como "sistema solar" com centro de carga positiva — o núcleo — em torno do qual "gravitam" os electrões; assim, a força de atracção eléctrica é compensada pela força centrífuga de rotação dos electrões em torno do núcleo. Quanto à radiação electromagnética emitida, provém da existência de cargas eléctricas aceleradas, de acordo com a teoria electromagnética clássica; mas o problema subsiste — se os electrões emitem radiação, perdem energia. Ao fim de pouco tempo acabam por cair sobre o núcleo em órbita espiral, não se podendo manter em órbita estável, visto a respectiva energia dinimuir progressivamente. Além disso, como explicar as riscas espectrais que mostram que, para certos elementos, a radiação emitida só pode ter determinados comprimentos de onda, não cobrindo um *continuum* de radiações possíveis? Mais uma vez nos deparamos com um fenómeno que obriga a abandonar o pressuposto clássico de continuidade da emissão da energia. Tendo em mente o fotão descoberto por Einstein e os trabalhos de Planck sobre os "quanta", Niels Bohr propõe-se, em 1912, aperfeiçoar o modelo de Rutherford. Já que os electrões não podem radiar continuamente, pois acabariam por cair no núcleo, Bohr postula que existem certas órbitas privilegiadas, características de cada elemento, onde os electrões se encontram, não emitindo qualquer radiação, o que explica a estabilidade dos átomos. Enquanto um elemento não é suficientemente aquecido não há assim emissão de luz; quando, pelo contrário, os átomos são excitados por incremento dos choques moleculares (aumento de temperatura), certos electrões "saltam" para órbitas correspondentes a maior energia. Rapidamente a atracção do núcleo obriga-os a voltar às órbitas originais, correspondentes à energia minimal para esses electrões; o excedente de energia liberta-se sob a forma de um "quanto", ou seja de um fotão, transportando a diferença entre os níveis de energia das duas órbitas. Assim, com o aumento de temperatura, aumenta o número e "amplitude" dos saltos dos electrões de umas órbitas permitidas para as outras, o que explica a variação sucessiva da intensidade e frequência correspondentes às riscas dos espectros. As órbitas características de cada elemento determinam riscas espectrais também características para cada elemento. Esta teoria dava explicação satisfatória para os espectros e permitia mesmo calcular as frequências das riscas, o que era impossível pela teoria clássica. No entanto, os seus fundamentos eram obscuros e inconciliáveis com os princípios básicos até então aceites em Física; como explicar que cargas eléctricas aceleradas — os electrões em órbita — não emitam continuamente energia? Como se faz a transição entre as órbitas? Classicamente poderíamos pensar em seguir o trajecto do electrão ao passar de uma órbita para a outra; mesmo que na prática não existissem meios técnicos para efectuar essa observação, a teoria clássica não punha em dúvida que o electrão tinha trajectória bem definida — em que momento e porquê se dava então a libertação de energia sob a forma de um fotão? Mais uma vez a ideia clássica que atribuía a qualquer partícula, em qualquer instante, posição e velocidade bem deteminadas, era assim posta em xeque. Além disso a teoria de Bohr não permitia a determinação da intensidade das riscas espectrais — a contagem dos fotões não se apresentava fácil de conceber; nesse campo a teoria clássica tomava a dianteira, pois a determinação da intensidade de uma radiação electromagnética não apresentava dificuldades conceptuais. Bohr tentou uma forma de compromisso entre a teoria clássica da radiação e a teoria dos quanta que falhou totalmente quanto ao seu acordo com os dados experimentais referentes à intensidade das riscas espectrais.

Os três exemplos atrás referidos mostram bem o impasse em que se encontrava a Física no início do século XX; a teoria dos "quanta" permitia explicar uma série de fenómenos sobretudo no campo da interacção entre matéria e radiação, mas não tinha qualquer fundamentação clara nos princípios gerais da Física e punha mesmo em causa alguns pressupostos que até então pareciam inatacáveis e essenciais à formulação de qualquer teoria Física consistente. Impunha-se uma reformulação total das teorias físicas que desse conta dos fenómenos surpreendentes atrás descritos.

Em 1924, Louis de Broglie apresenta a sua teoria das "ondas de matéria". Tratava-se afinal de uma tentativa de unificação dos conceitos de matéria e radiação, ambição partilhada pela maioria dos físicos desde que a falência da teoria do "éter" tinha retirado substracto "material" à propagação das ondas electromagnéticas. A *dualidade onda-corpúsculo* tornada patente, no caso da luz, pela descoberta do fotão por Einstein, sugeriu a de Broglie que talvez esse carácter de dualidade fosse extensivo às partículas materiais; do mesmo modo que em certas circunstâncias as ondas electromagnéticas se comportam como feixes de partículas (os fotões), de Broglie conjectura que em certas ocasiões as partículas materiais em movimento (por exemplo, os electrões) devem apresentar comportamento característico dos fenómenos ondulatórios. Mais precisamente, a cada corpo em movimento é associada uma "onda", de modo análogo ao que se passa com os fotões que se encontram associados à "onda electromagnética" luminosa. O tipo mais simples de movimento ondulatório é a propagação de uma sinusóide com movimento uniforme e rectilíneo. A uma dimensão de espaço, a sinusóide mais geral ("de média nula"[40]) é a função:

$$f(x) = A\sin(kx - \alpha),$$

onde $k > 0$ e $A > 0$ é a *amplitude*. f é periódica de período (*comprimento de onda*) $\lambda = 2\pi/k$, e $\alpha \in [0, 2\pi[$ é a *fase*.

[40]Ou seja, "oscilando em torno do valor zero".

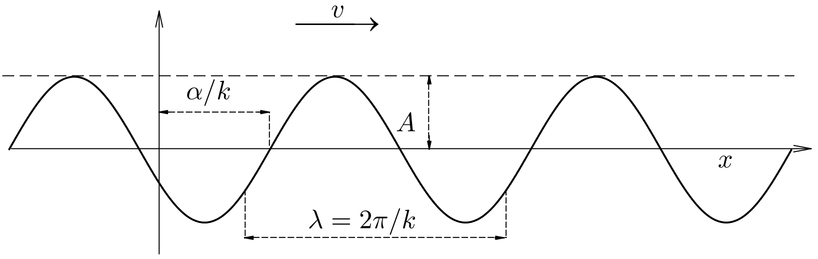


Figura 1

O *"movimento rectilíneo e uniforme de f ao longo do eixo dos xx com velocidade v"* será representado, evidentemente, pela função:

$$F(x,t) = f(x - vt) = A\sin(kx - kvt - \alpha).$$

Examinemos o que se passa com cada "partícula" x_0 do meio "em vibração" quando o tempo t varia. x_0 é actuada por um movimento oscilatório dado pela função:

$$F(x_0,t) = A\sin(kx_0 - kvt - \alpha),$$

portanto com *período* $T = 2\pi/k|v|$, ou seja, *frequência* (número de oscilações por unidade de tempo) $\nu = k|v|/2\pi = |\omega|/2\pi$, pondo $\omega = kv$. O movimento ondulatório é assim dado por:

$$F(x,t) = A\sin(kx - \omega t - \alpha),$$

tendo *amplitude A, comprimento de onda* $\lambda = 2\pi/k$, frequência $\nu = |\omega|/2\pi$ (portanto *período* $T = 2\pi/|\omega|$) e *velocidade* (dita *"de fase"*):

$$v = \frac{\omega}{k} = \pm\frac{\lambda}{T},$$

dependendo o sinal do sentido do movimento. No espaço teremos analogamente, como movimento ondulatório elementar:

$$F(\vec{x},t) = A\sin(\vec{k}.\vec{x} - \omega t - \alpha)$$

(*onda plana monocromática de vector de onda* $\vec{k}$[41]). Note-se que, para cada t fixo, F é constante em cada plano perpendicular a $\vec{k}$; com efeito, dois pontos de vectores posição respectivamente $\vec{x}, \vec{y}$ estarão num tal plano sse $\vec{k}.(\vec{x} - \vec{y}) = 0$, ou seja, sse $\vec{k}.\vec{x} = \vec{k}.\vec{y}$. O valor de $F(\vec{x},t)$ para t fixo dependerá portanto apenas da *projecção ortogonal* de $\vec{x}$ segundo o versor de $\vec{k}$, ou seja, F ficará determinada (para t fixo) pelos valores que toma na recta gerada por $\vec{k}$. Para um ponto

[41]Se se tratar da propagação do som na atmosfera, por exemplo, $F(\vec{x},t)$ será a *pressão* exercida pelo meio no ponto de vector posição $\vec{x}$ no instante t.

$\vec{x} = x(\vec{k}/|\vec{k}|) = x \operatorname{v\hat{e}rs} \vec{k}$ dessa recta podemos reescrever:

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, t) &= A \sin(\vec{k}.(x \operatorname{v\hat{e}rs} \vec{k}) - \omega t - \alpha) = \\ &= A \sin(|\vec{k}|(x - \frac{\omega}{|\vec{k}|} t) - \alpha), \end{aligned}$$

pelo que a restrição (em $\vec{x}$) de F à recta gerada por $\vec{k}$ se reduz ao caso unidimensional acima estudado: trata-se do movimento rectilíneo e uniforme de uma sinusóide ao longo do eixo com direcção e sentido de $\vec{k}$, com velocidade (escalar) $v = \omega/|\vec{k}|$. Notemos ainda que o mesmo movimento pode ser descrito pela função que se obtém de F passando simultaneamente $\vec{k}$ e ω aos simétricos, desde que haja o cuidado de ajustar a fase α; embora seja óbvio geometricamente, pode verificar-se directamente:

$$\begin{aligned} A \sin(\vec{k}.\vec{x} - \omega t - \alpha) &= -A \sin((-\vec{k}).\vec{x} - (-\omega)t + \alpha) = \\ &= A \sin((-\vec{k}).\vec{x} - (-\omega)t - (-\alpha \pm \pi + 2\pi)), \end{aligned}$$

onde $-\alpha \pm \pi + 2\pi$ pode ainda ser escolhido no intervalo $[0, 2\pi[$. Deste modo, não se perde generalidade considerando apenas *ondas planas monocromáticas* com ω (*"número de onda"*) *positivo*. Para simplificar as notações continuaremos a examinar o caso unidimensional; por conveniência de cálculo consideremos a representação exponencial de F. Passaremos a considerar como "onda elementar" a função complexa:

$$F(x, t) = A\, e^{i\,(kx - \omega t - \alpha)}$$

(ou a que lhe corresponde em $\mathbb{R}^3$). Se F descreve um movimento de *velocidade* bem determinada, o mesmo não se pode dizer da *posição*. Em cada instante t nenhum ponto do espaço fica individualizado de modo a poder dizer-se que F descreve, ainda que aproximadamente, as sucessivas posições de uma partícula. Deste modo, ao querer utilizar-se o modelo ondulatório para "representar" o movimento de uma partícula clássica, é-se levado a considerar *sobreposições* de ondas planas monocromáticas com diferentes vectores de onda; ou seja:

$$\psi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} A(k)\, e^{i\,(kx - \omega(k)t - \alpha(k))} dk,$$

onde $A(k) \geq 0$ funciona como *densidade de amplitude* e, atendendo ao que acima se viu, supomos $\omega(k) \geq 0$. Façamos uma análise heurística com a finalidade de associar ψ ao movimento rectilíneo e uniforme de uma partícula clássica (portanto com posição bem definida em cada instante e velocidade constante). Para tal supomos que A só toma valores "consideráveis" numa "pequena região" em torno de certo k_0. Desenvolvendo o expoente até à primeira ordem em torno de k_0 obtém-se:

$$\psi(x, t) = e^{i\,(k_0 x - \omega(k_0)t - \alpha(k_0))} \int_{\mathbb{R}} A(k)\, e^{i\,(k - k_0)(x - \omega'(k_0)\,t - \alpha'(k_0))}\, e^{i\,o(|k - k_0|)} dk.$$

Como $A(k)$ só toma valores consideráveis na vizinhança de k_0 e, nessa vizinhança, $o(|k-k_0|)$ é "desprezável", podemos eliminar o factor $\exp(i\ o(|k-k_0|))$, obtendo, "aproximadamente":

$$|\psi(x,t)| \approx \left|\int_{\mathbb{R}} A(k)\, e^{i\,(k-k_0)(x-\omega'(k_0)\,t-\alpha'(k_0))} dk\right|,$$

que atinge obviamente o máximo quando o expoente se anula, ou seja, para cada t, no ponto:

$$x_0(t) = \omega'(k_0)\,t + \alpha'(k_0).$$

$x_0(t)$ diz-se *centro do grupo de ondas* ψ, já que, em valor absoluto, ψ se "concentra", para cada t, numa "pequena região em torno de $x_0(t)$" (note-se que, quando x se afasta indefinidamente de $x_0(t)$, $|\psi(x,t)|$ tende para zero, por compensação dos integrais nas regiões onde a exponencial toma valores com partes real e imaginária positivas e negativas[42]).

Chamamos *velocidade de grupo* à velocidade do centro do grupo de ondas:

$$v_g = x_0'(t) = \omega'(k_0).$$

Faz agora sentido associar o grupo de ondas ψ a uma partícula que tenha o movimento de x_0. Estamos assim em condições de relacionar os observáveis físicos classicamente associados ao movimento de uma partícula material, com os parâmetros de um movimento ondulatório. Uma partícula de massa m em movimento rectilíneo e uniforme de velocidade v terá energia:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m},$$

onde $p = mv$ é o chamado *momento linear*. Por outro lado, para que seja válida a relação de Einstein, deverá ter-se:

$$E = h\nu = h\frac{\omega(k)}{2\pi} = \hbar\,\omega(k),$$

onde $\hbar = h/2\pi$ é a *constante de Dirac* (por vezes também chamada *constante de Planck*, em lugar de h). Deste modo E é, por um lado, função do momento linear p e, por outro, função do vector de onda k. Procuremos então saber como p deve variar com k para que haja coerência destes factos *qualquer que seja o grupo de ondas associável a uma partícula clássica do modo acima descrito*. Tal função $p(k)$ deverá satisfazer simultaneamente a:

[42]O Lema de Riemann-Lebesgue garante que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{iat}\, dt \xrightarrow[|a|\to\infty]{} 0, \forall f \in L^1(\mathbb{R}),$$

como veremos (Prop. 3.3).

$(i)\ E(p(k)) = \hbar\,\omega(k)$ *(relação de Einstein, válida para qualquer onda)*

$(ii)\ v(k) = \dfrac{p(k)}{m} = E_p'(p(k))$ *(relação clássica entre velocidade e energia)*

$(iii)\ v(k_0) = v_g = \omega'(k_0)$ *(relação a que deve satisfazer uma "onda-partícula")*

donde:

$$E_p'(p(k_0)) = v(k_0) = \omega'(k_0) = \frac{1}{\hbar}(E \circ p)'(k_0) = \frac{1}{\hbar}E_p'(p(k_0))\,p'(k_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p'(k_0) = \hbar \text{ ou } v(k_0) = E_p'(p(k_0)) = 0 \Rightarrow p(k_0) = \hbar k_0 + C$$

(supondo que $v \neq 0$). Além disso devemos tomar $C = 0$ para que a um vector de onda $k = 0$, que corresponde a uma "onda" constante no espaço e no tempo, corresponda uma velocidade nula. As relações:

(1) $$E = \hbar\omega\,,\ p = \hbar k,$$

permitem-nos agora reescrever o grupo de ondas pondo em evidência as variáveis dinâmicas clássicas:

(2) $$\psi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} B(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}\, dp$$

(note-se que englobámos em B a "fase" exp $(i\alpha)$). De (1) obtém-se, além disso, a chamada *relação de Louis de Broglie*:

(3) $$|p| = \hbar|k| \Leftrightarrow |p| = \frac{h}{\lambda},$$

onde λ é o comprimento de onda, h a constante de Planck.

Ao aparecer a teoria de de Broglie das *ondas de matéria*, pôs-se de imediato o problema da respectiva detecção; um dos fenómenos característicos de um comportamento ondulatório é a possibilidade de difracção das ondas pelos cristais. No entanto, para que tais fenómenos sejam observados, é necessário que o comprimento de onda seja suficientemente elevado, por exemplo da ordem de 10^{-7} cm (caso dos raios X). Ora, para um corpo de dimensões correntes, os comprimentos de ondas associados são muito menores que 10^{-7} cm (a não ser que se considerem velocidades de tal modo pequenas que tornem impossível a observação de qualquer fenómeno em tempo útil); consideremos, por exemplo, uma pedra com 100 g lançada a uma velocidade de 100 cm/s. Da relação (3) vem:

$$\lambda = \frac{h}{|p|} = \frac{h}{|mv|} = \frac{6,6 \times 10^{-27}}{100 \times 100} = 6,6 \times 10^{-31} \text{ cm.}$$

Não é de esperar, portanto, que se possam detectar ondas associadas a objectos correntes. Consideremos agora um electrão (cuja massa é aproximadamente 10^{-27} g) movendo-se num campo eléctrico com 1 volt de diferença de potencial; tendo vencido essa diferença de potencial, a velocidade do electrão é aproximadamente de $6,7 \times 10^7$ cm/s. Portanto:

$$\lambda = \frac{h}{|mv|} = \frac{6,6 \times 10^{-27}}{6,7 \times 10^{7} \times 10^{-27}} \approx 10^{-7}\ \mathrm{cm}\,!$$

Então, se a teoria de de Broglie tem alguma validade, deverá ser possível obter figuras de difracção dos electrões pelos cristais, análogas às obtidas para os raios X. As experiências realizadas por Davisson e Germer em 1927 vieram confirmar as previsões de de Broglie, dando crédito à sua teoria; aliás, mais tarde (Stern em 1932) obtiveram-se figuras de difracção com feixes de átomos de hélio e moléculas de hidrogénio, mostrando a universalidade das características ondulatórias das partículas materiais. A experiência de difracção dos electrões consistia em fazer incidir um feixe de electrões numa placa cristalina extremamente fina (de modo a absorver o mínimo possível de electrões) e a registar (por meio de uma placa fotográfica impressionável, por exemplo) os electrões que atravessavam a placa. Obtém-se uma série de anéis alternadamente claros e escuros, correspondendo a zonas de maior ou menor frequência de impacto de electrões. Se se encurtar drasticamente a duração da experiência o resultado obtido é diferente: a placa regista uma série de impactos isolados sem qualquer ligação aparente. Poderíamos ser tentados a concluir que as propriedades ondulatórias do electrão só se manifestam quando este se encontra integrado em grupo numeroso de outros electrões agindo simultaneamente; no entanto, obtêm-se exactamente os mesmos anéis de difracção utilizando um feixe muito intenso de electrões actuando durante pouco tempo ou um feixe extremamente fraco de electrões actuando ao longo de intervalo de tempo relativamente extenso. Isso significa que mesmo no caso em que os electrões atravessam a placa quase “um por um” as propriedades ondulatórias não deixam de se manifestar para cada electrão, independentemente dos outros.

Estas experiências apoiam a interpretação dada por Max Born das ondas broglianas, pouco mais de um ano após a publicação do primeiro artigo de de Broglie sobre o assunto. Segundo Born, a intensidade da onda (ou seja, o respectivo módulo) em dado instante e em dado ponto deve estar relacionada com a densidade de probabilidade de, por meio de uma experiência qualquer, se verificar que o electrão ocupa essa posição nesse instante. Assim, os anéis de difracção correspondem a zonas em que a probabilidade de impacto de um electrão tem determinados valores (maiores nas zonas mais escuras) correspondentes à intensidade de onda de de Broglie nessas zonas no instante do impacto. Note-se que classicamente seria de esperar resultado bastante diferente das experiências atrás descritas; fazendo passar os electrões por um orifício, de modo a obter-se um feixe bem determinado antes de incidir na lâmina cristalina e mantendo estas condições no decorrer da experiência, era possível conceber que por qualquer processo se poderia seguir a trajectória dos electrões e, como a trajectória não deveria diferir muito de electrão para electrão, estes deveriam distribuir-se com uma lei Gaussiana, reproduzindo sensivelmente, na placa, a forma do orifício.

Consideremos então a seguinte esquematização, em que a placa cristalina é substituída por um obstáculo com apenas dois orifícios:

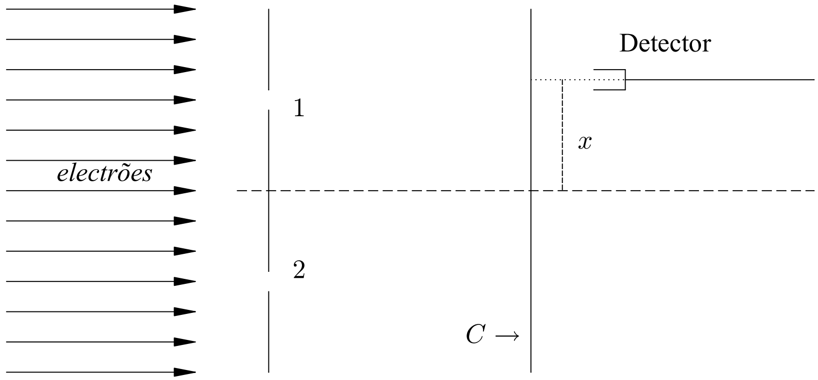


Figura 2

Repete-se a experiência com o detector em várias posições (x) e regista-se a frequência de electrões que atingem C em cada ponto x.

Podem fazer-se experiências análogas tapando alternadamente 1 e 2 e comparar a curva de frequência que se obtém com a primeira experiência (orifícios 1 e 2 abertos) com a soma das curvas de frequências que se obtêm nas outras duas experiências (1 ou 2 fechado). O resultado é o da figura 3:

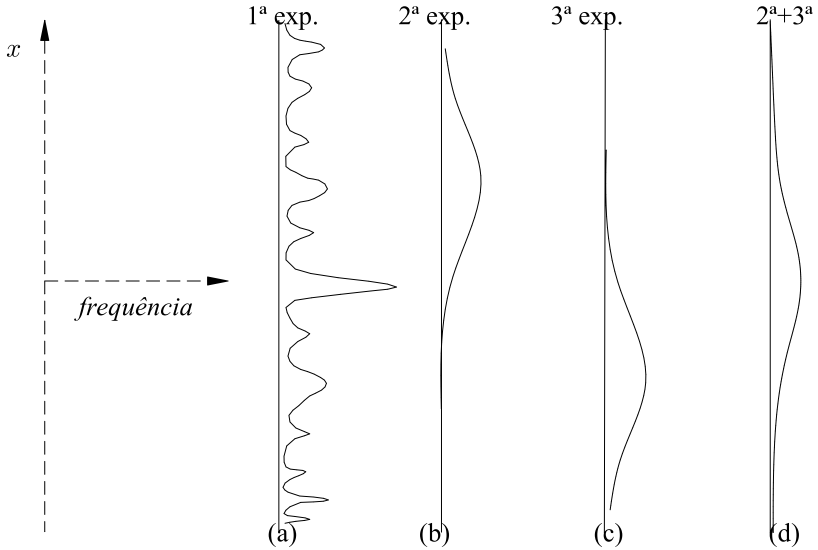


Figura 3

Deste modo, em lugar do que a teoria clássica faria prever (figura 3-d), obtém-se algo de notavelmente semelhante às figuras de difracção dos raios X. Justifica-se assim a designação *ondas de probabilidade* dada por Born às "ondas de matéria" de de Broglie. As probabilidades já tinham entrado no domínio da Física, através da *Mecânica Estatística*; simplesmente, nesse campo, ninguém punha em causa que os sistemas físicos (sobretudo gases), estudados com o auxílio de conceitos probabilísticos, obedeciam às leis da mecânica Newtoniana — cada molécula estava sujeita às leis clássicas do movimento e o estado, por exemplo, de um gás, era o resultado do movimento das diversas moléculas que o compunham; era apenas a complexidade das equações que intervinham neste estudo, caso se utilizassem as leis de Newton directamente, que obrigava a introduzir conceitos estatísticos. No caso das "ondas de probabilidade" a situação é completamente distinta — a "onda" está indissociavelmente ligada à partícula e contém toda a informação que nos é acessível quanto ao comportamento da mesma partícula. Como vimos, no caso da difracção, se admitíssemos a possibilidade de conhecer com precisão arbitrária o movimento dos electrões, nunca poderíamos explicar a distribuição obtida na placa fotográfica, bem diferente da gaussiana.

Ainda antes das experiências de difracção com electrões, a teoria de de Broglie despertou enorme interesse nos meios científicos da época e durante os três anos que se seguiram ao aparecimento da teoria das ondas de matéria pode dizer-se que o fundamental do edifício da Mecânica Quântica foi construído independentemente por Heisenberg, discípulo de Born, e Schrödinger. Assim, em 1927, no Congresso Solvay de Física, reunido em Bruxelas, estes dois cientistas apresentaram as suas respectivas formulações da Mecânica Quântica cuja equivalência foi provada por Schrödinger. Mais tarde (em 1930) Dirac apresentaria um formalismo geral da Mecânica Quântica de que as teorias de Schrödinger e Heisenberg eram "representações" particulares.

A *Mecânica das Matrizes* de Heisenberg parte de uma análise crítica da antiga "teoria dos quanta" de Planck; segundo Heisenberg, numa teoria há que distinguir as noções e quantidades fisicamente observáveis das que o não são. Enquanto que as primeiras devem figurar obrigatoriamente na teoria, as segundas são simples artifícios matemáticos que podem variar e mesmo ser abandonados, visto não poderem ser directamente confrontadas com a realidade. Consideremos, por exemplo, a noção de órbita electrónica do átomo de Bohr; supondo que queríamos seguir o electrão no seu movimento em torno do núcleo, teríamos que efectuar sucessivas medidas de posição com margem de erro bastante inferior ao raio médio da órbita. Para efectuar uma observação usando radiação electromagnética (luz visível, raios γ, etc.) é necessário que o comprimento de onda seja de ordem inferior às dimensões do objecto a observar para que não haja difracção. No caso do electrão, a luz visível tem comprimento de onda elevado de mais; poderíamos então pensar na utilização de raios γ. Mas os fotões também satisfazem à relação de L. de Broglie (3):

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Uma diminuição excessiva de λ traduz-se em aumento considerável da impulsão

p dos fotões e o choque de um fotão com o electrão implica uma enorme perturbação no movimento do electrão, inutilizando a experiência para o objectivo em vista: deteminação do movimento na órbita electrónica. Concluímos assim que a noção clássica de movimento — em particular a de órbita electrónica — é daquelas que podem ser abandonadas numa teoria que pretenda dar conta dos fenómenos à escala atómica. Na nova teoria não faz portanto sentido atribuir, por exemplo ao electrão, simultaneamente posição e momento precisos. A Mecânica das Matrizes parte exclusivamente de grandezas fisicamente observáveis (frequência e intensidade da radiação emitida pelos átomos, etc.) às quais associa matrizes obedecendo a certas equações matriciais formalmente idênticas às da Mecânica clássica. A perturbação incontrolável causada pelos instrumentos de medida em certas grandezas quando se pretende determinar outras ("incompatibilidade" de certos observáveis) traduz-se pela não-comutatividade da álgebra matricial — ponto fundamental de discordância com a teoria clássica.

A *Mecânica Ondulatória* de Schrödinger tem origem mais directa nos trabalhos de Louis de Broglie. Schrödinger, seguindo de Broglie, associa a cada partícula uma "onda" — que designa por *função de onda* — dando-lhe a interpretação estatística de Born. Trata-se de função complexa ψ da posição e do tempo (definida em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, por exemplo, no caso de uma partícula que se mova no espaço tridimensional) que, segundo os postulados de Schrödinger, define completamente o estado dinâmico do sistema; ou seja, todas as previsões que se podem fazer relativamente às propriedades dinâmicas do sistema no instante t devem ser dedutíveis do conhecimento de ψ nesse instante. Nesta nova formulação desempenha papel fundamental a equação de evolução que permite, em cada caso, determinar ψ – a chamada *equação de Schrödinger*, de que voltaremos a falar adiante. Por agora interessa-nos examinar com mais pormenor que tipo de informações podemos obter do conhecimento pressuposto da função de onda, ou seja, que valores devem ser confrontados com os resultados das experiências físicas. Dado o carácter estatístico da interpretação adoptada para a função de onda, interessa-nos particularmente o valor médio de cada observável físico; designando por ρ a densidade de probabilidade da medida de posição (que segundo Born deverá estar relacionada com $|\psi|$) o valor médio da *posição* será, segundo a definição habitual da Teoria das Probabilidades:

$$\langle x\rangle = \int_{\mathbb{R}} x\,\rho(x)\,dx.$$

de modo análogo se pode calcular o valor médio de qualquer função da posição. Para termos ideia de qual deverá ser a densidade de probabilidade das medidas de *momento linear* reescrevamos ψ (para t fixo) como grupo de ondas, destacando o parâmetro p; segundo (2), podemos concluir, substituindo B por outra função complexa φ, que:

$$\psi(x) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}px}\, dp \tag{4}$$

(onde se pôs em evidência a constante $(2\pi\hbar)^{-1/2}$ por razões que adiante se tornarão claras).

A fórmula (4) exprime que ψ é a *transformada de Fourier*[43] *inversa de* φ (supondo evidentemente a convergência do integral). ψ pode portanto ser considerada como *sobreposição de ondas elementares* $\exp\left((i/\hbar)px\right)$ afectadas dos coeficientes $(2\pi\hbar)^{-1/2}\,\varphi(p)$, estando cada onda elementar associada a um *momento linear* p bem determinado. Deste modo, para uma "partícula" de função de onda ψ, a densidade de probabilidade σ de numa medição se encontrar a respectiva impulsão (momento linear) em dada gama de valores, deverá depender fundamentalmente de $|\varphi|$. Como veremos adiante, ao tratar da transformação de Fourier, (4) implica que, com hipóteses convenientes de regularidade, φ seja *transformada de Fourier* de ψ, ou seja:

$$\varphi(p) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,px}\, dx;$$

abreviadamente,

$$\varphi = \widehat{\psi}\,,\ \psi = \check{\varphi}\,.$$

As densidades de probabilidade ρ e σ estão assim ligadas a $|\psi|$ e $|\widehat{\psi}|$. Para que as probabilidades totais se possam normalizar simultaneamente para 1, ou seja, para que se tenha:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \sigma(p)\, dp = 1,$$

ρ e σ devem ser definidos a partir de $|\psi|$ e $|\widehat{\psi}|$ através de certa função crescente

$$f : [0, +\infty[\ \to [0, +\infty[,$$

tal que:

$$\text{(5)} \qquad \int_{\mathbb{R}} f(|\psi(x)|)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(|\widehat{\psi}(p)|)\, dp.$$

O estudo que faremos da transformada de Fourier permitirá concluir que (5) é satisfeita com $f(s) = s^2$; ou seja, veremos que a aplicação $\psi \mapsto \widehat{\psi}$ se pode estender como *isometria* (operador unitário) ao espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, tendo por inversa a aplicação $\varphi \mapsto \check{\varphi}$. É natural, então, que, a menos de normalização (ou seja, supondo que $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$) se *defina*:

- $\rho = |\psi|^2$,
- $\sigma = |\widehat{\psi}|^2$;

assim, as médias da *posição* e *momento linear* virão dadas, respectivamente, por:

[43]Para tudo o que se segue com respeito à Transformação de Fourier, ver Capítulo 3.

(6) $$\langle x\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} x\,|\psi(x)|^2\,dx = (x\,\psi,\psi)_{L^2(\mathbb{R})},$$

(7) $$\langle p\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} p\,|\widehat{\psi}(p)|^2\,dp = (p\,\widehat{\psi},\widehat{\psi})_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Utilizando mais uma vez propriedades da *Transformação de Fourier*, podemos reescrever (7) em termos de ψ em lugar de $\widehat{\psi}$. De $\widehat{\cdot}$ ser isometria resulta que mantém o produto interno, e do comportamento da transformação de Fourier relativamente à derivação concluímos que:

$$\bullet\; p\,\widehat{\psi}(p) = \frac{\hbar}{i}\,\widehat{\frac{d\psi}{dx}}(p)$$

(basta efectuar uma integração por partes na expressão que define $(d\psi/dx)\widehat{}$, com hipóteses convenientes acerca de ψ e ψ'). De (7) resulta portanto:

(8) $$\langle p\rangle_\psi = (\frac{\hbar}{i}\,\widehat{\frac{d\psi}{dx}},\widehat{\psi})_{L^2(\mathbb{R})} = (\frac{\hbar}{i}\,\frac{d\psi}{dx},\psi)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Sintetizando as considerações feitas anteriormente, fomos levados a escolher $L^2(\mathbb{R})$ como espaço das *funções de onda* associadas em cada instante a dado sistema físico (com um grau de liberdade). Para efeitos da interpretação probabilística interessa-nos *normalizar* as funções de onda, ou seja, dividi-las por $\|\psi\|_{L^2}$ (supomos $\|\psi\|_{L^2} \neq 0$) e a densidade de probabilidade não varia se multiplicarmos ψ por um número complexo de módulo 1; deste modo, a associação *sistema físico em dado estado — função de onda (não nula)* é feita a menos de normalização e produto por um complexo $\exp(i\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, ou seja, todas as funções não nulas no subespaço complexo de L^2 gerado por dado $\psi \neq 0$ ficam associadas a um mesmo *estado físico*.

Por outro lado, fomos levados a associar aos *observáveis físicos posição e momento* dois operadores *lineares* (definidos pelo menos para certas funções de $L^2(\mathbb{R})$), respectivamente $A_1 = x.$ (*produto por* x) e $A_2 = (\hbar/i)(d/dx)$, de tal maneira que a *média* daqueles observáveis para um sistema físico num estado de função de onda ψ seja dada por:

(9) $\bullet\; (A_j\psi,\psi)_{L^2(\mathbb{R})}$ ($j = 1, 2$, respectivamente).

Para o cálculo de *médias de funções* $f(x)$ *da posição* utilizaremos naturalmente expressões do tipo:

$$\bullet\; \langle f\rangle_\psi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,|\psi(x)|^2\,dx = (f.\psi,\psi)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Para *funções* $g(p)$ *do momento linear* podemos evidentemente utilizar expressões idênticas onde ψ é substituída por $\widehat{\psi}$; um problema surge se estivermos interessados em expressar tais médias através de ψ, pois não sabemos *a priori* que significado atribuir a "$g((\hbar/i)(d/dx))$". Sem procurarmos, por agora, resolver o problema geral, examinaremos o que se passa com o caso particular da função $g(p) = p^2$. Teremos:

$$\langle g\rangle = \int_{\mathbb{R}} p^2\, |\widehat{\psi}(p)|^2\, dp = (p^2\, \widehat{\psi}, \widehat{\psi})_{L^2(\mathbb{R})} =$$
$$= (-\hbar^2 \widehat{\frac{d^2\psi}{dx^2}}, \widehat{\psi})_{L^2(\mathbb{R})} = (-\hbar^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}, \psi)_{L^2(\mathbb{R})},$$

(utilizando mais uma vez propriedades da transformação de Fourier já citadas; nomeadamente:

$$p^2\, \widehat{\psi}(p) = p\frac{\hbar}{i}\widehat{\frac{d\psi}{dx}}(p) = \frac{\hbar}{i}\frac{\hbar}{i}\widehat{\frac{d}{dx}\Big(\frac{d\psi}{dx}\Big)}(p) = -\hbar^2\widehat{\frac{d^2\psi}{dx^2}}(p).)$$

Concluímos que a p^2 corresponde:

$$(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx})^2,$$

no sentido da composição de operadores, o que nos dá uma primeira indicação de como devemos definir "função de operador", pelo menos no caso mais simples de função polinomial.

De modo geral, somos levados a associar a um *observável físico* $\mathfrak{a}$ qualquer um *operador linear* A num espaço de Hilbert (por exemplo $L^2(\mathbb{R})$ no caso de sistemas com um grau de liberdade), impondo certas restrições, atendendo ao que atrás se disse. Uma primeira restrição, resultante de, nas medidas físicas, não se obterem senão *números reais*, é impor que a *média de um observável* seja, em qualquer *estado*, real, ou seja:

(10) $$\bullet\ (A\psi, \psi) = \langle\mathfrak{a}\rangle_\psi \in \mathbb{R},$$

(para qualquer ψ no subespaço $D(A)$ de $\mathcal{H}$ — *domínio de* A — onde A está definido, e representando por $(.,.)$ o *produto interno* de $\mathcal{H}$).

É fácil verificar (e deixado como exercício…) que, sendo $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert complexo (hipótese que a partir de agora será sempre feita) é esta condição equivalente a A ser *simétrico*, ou seja:

(11) $$\bullet\ (A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)\,,\ \forall\varphi, \psi \in D(A).$$

Consideremos agora as restrições a impor a $D(A)$. Seria evidentemente desejável tomar $D(A) = \mathcal{H}$, o que permitiria, para cada observável, calcular a média em *qualquer estado*. No entanto, um caso particular importante que nos interessa incluir na classe de operadores que procuramos caracterizar é o "operador momento", ou seja, $(\hbar/i)(d/dx)$ em $L^2(\mathbb{R})$. Ora é fácil verificar (*cf.* exercício 3) que o operador de derivação *não é contínuo para a topologia de* $L^2(\mathbb{R})$ em qualquer domínio que inclua as funções de classe C^∞ e de suporte compacto em $\mathbb{R}$, ou seja em qualquer domínio "razoável" para d/dx. Devemos pois "aceitar" como válidos certos operadores *não contínuos*. Vamos ver que um operador *simétrico não contínuo* não pode ter domínio igual a $\mathcal{H}$!

TEOREMA DE HELLINGER–TOEPLITZ: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador simétrico; então $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, ou seja, A é limitado.***

Demonstração: Provemos que A é fechado (o que terminará a demonstração atendendo ao Teorema do gráfico fechado, já que $\mathcal{H}$ é espaço de Banach). Seja $u_n \underset{n}{\longrightarrow} u$ em $\mathcal{H}$ tal que $Au_n \underset{n}{\longrightarrow} v$ em $\mathcal{H}$; então:

- $(Au_n, w) \underset{n}{\longrightarrow} (v, w)$,
- $(Au_n, w) = (u_n, Aw) \underset{n}{\longrightarrow} (u, Aw) = (Au, w)$,

$\forall w \in \mathcal{H}$. Logo:

$$(v, w) = (Au, w)\,,\ \forall w \in \mathcal{H},$$

donde,

$$\bullet\ Au = v,$$

ou seja, A é, de facto, fechado.☐

Concluímos, portanto, que não podemos restringir-nos a operadores com domínio igual ao espaço. Havendo observáveis para os quais não é possível definir a média em todos os estados, exigiremos que, pelo menos, se possa "aproximar indefinidamente" qualquer estado por estados em que a média esteja definida. Por outras palavras, faremos a hipótese:

(12) • *$D(A)$ é denso em $\mathcal{H}$.*

Uma vez que se pode ter $D(A) \neq \mathcal{H}$, é possível que A possa ser estendido a um domínio maior como operador linear simétrico; interessa-nos, evidentemente, associar aos observáveis físicos operadores que tenham domínios o mais extensos possíveis, ou seja, operadores *maximais* na classe dos operadores simétricos com domínio denso[44]. Esta hipótese de maximalidade pode ser expressa do seguinte modo:

(13) • *Se B for operador linear simétrico tal que $D(A) \subset D(B)$*
e $Au = Bu, \forall u \in D(A)$ (ou seja, tal que $A \subset B$),
então $A = B$.

Finalmente, a necessidade já referida de considerar *funções reais* dos observáveis físicos (muitas vezes não se obtêm directamente das experiências os observáveis básicos mas sim certas funções deles) leva-nos a pretender que uma "função de A" (em sentido a definir) seja ainda operador *maximal simétrico com domínio denso*. O exemplo atrás examinado das funções dos operadores *posição* e *mo-*

[44] *O Lema de Zorn garante que todo o operador simétrico pode ser estendido a um operador maximal simétrico [exercício!].*

mento leva-nos a definir $f(A)$, no caso particular em que $f(s) = s^2$, como sendo A^2 no sentido $A \circ A$. Devemos então fazer a hipótese seguinte:

(14) • *O operador* A^2 *(definido por* $D(A^2) = \{u \in D(A) : Au \in D(A)\}$, $A^2u = (A \circ A)\,u = A(Au), \forall u \in D(A^2)$*) é também maximal simétrico com domínio denso.*

Um dos objectivos fundamentais deste curso será demonstrar que *na classe dos operadores lineares* A *em* $\mathcal{H}$ *satisfazendo a (10), (12), (13) e (14) é possível dar sentido preciso a* $f(A)$ *para uma classe extremamente vasta de funções* f *complexas de variável real (não se saindo da classe inicial de operadores no caso de* f *ser real), "mantendo-se" (com "tradução" natural na classe dos operadores) algumas das propriedades algébricas e topológicas essenciais das referidas funções*.

No Capítulo 1 ocupar-nos-emos de dar uma caracterização mais simples dos *operadores associados a observáveis físicos* (ou seja, satisfazendo às condições (10) a (14)), estudando as propriedades mais elementares destes operadores e das noções que convém introduzir a propósito.

Para terminar esta Introdução, sem perder de vista o contexto histórico, cumpre referir os trabalhos de Von Neumann que remontam a 1932 e onde, pela primeira vez, é apresentada uma formulação matemática rigorosa da Mecânica Quântica no quadro da teoria dos operadores auto-adjuntos não limitados em espaços de Hilbert, dando significado preciso a parte importante do formalismo de Dirac. Grande parte do desenvolvimento da matemática desde então até à actualidade encontra-se, de um modo ou de outro, ligado a estes trabalhos, sem que se possa dizer que a questão da fundamentação da Mecânica Quântica esteja definitivamente resolvida.

Exercícios

1) Adaptando ao caso tridimensional as considerações heurísticas feitas acerca de "Mecânica Ondulatória" (considerando, por exemplo, o caso de uma partícula livre em movimento no espaço a três dimensões), mostre que um grupo de ondas associado a uma partícula clássica deve assumir a forma:

$$\psi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} B(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}.\vec{x}-Et)}\, d\vec{p} \;\; (\vec{x} \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}),$$

onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momento linear e E a energia [Sugestão: Ao procurar estabelecer a relação entre o momento linear $\vec{p}$ e o vector de onda, deve impor que tal relação seja invariante por rotação dos eixos coordenados, o que fixará a constante que eventualmente ficaria indeterminada.]

2) Seja A operador linear num espaço de Hilbert complexo $\mathcal{H}$ com domínio $D(A)$ (subespaço de $\mathcal{H}$). Mostre que A é *simétrico* (ou seja $(Au, v) = (u, Av), \forall u, v \in D(A)$) sse $(Au, u) \in \mathbb{R}, \forall u \in D(A)$.

3) Mostre que um operador (dito *"de derivação"*)

$$d : D(d) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

tal que:

$$\bullet\ C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset D(d)$$

(onde $C_0^\infty(\mathbb{R}) = \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ é o conjunto das funções de classe C^∞ de suporte compacto),

$$\bullet\ d\psi = \psi'\ ,\ \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

não pode ser contínuo para a topologia de $L^2(\mathbb{R})$. [Sugestão: Comece por mostrar que existe uma função $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\psi \not\equiv 0$ — considere, por exemplo:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} & \text{se } x \in \,]a, b[\\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \,]a, b[\end{cases},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ — e construa, a partir de ψ, uma sucessão $\psi_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$ em $L^2(\mathbb{R})$ tal que $\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}_1, d\psi_n \underset{n}{\not\longrightarrow} 0$ em $L^2(\mathbb{R})$].

4) Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador (linear) simétrico. Mostre que A é restrição (eventualmente imprópria) de um operador maximal simétrico em $\mathcal{H}$.

5) Sejam $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ espaços de Hilbert (sobre o mesmo corpo, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ aplicação sobrejectiva; mostre que são equivalentes as condições:

(i) U é *isomorfismo de espaços de Banach* (ou seja, a aplicação U é, por definição, isomorfismo vectorial tal que:

$$\|Uu\|_{\mathcal{H}'} = \|u\|_{\mathcal{H}}\ ,\ \forall u \in \mathcal{H}).$$

(ii) $\|Uu\|_{\mathcal{H}'} = 1\ ,\ \forall u \in \mathcal{H}$ tal que $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$, e U é linear.

(iii) $(Uu, Uv)_{\mathcal{H}'} = (u, v)_{\mathcal{H}}, \forall u, v \in \mathcal{H}$ (ou seja, U é *isomorfismo de espaços de Hilbert*).

(iv) U é *operador unitário*, ou seja, isomorfismo vectorial contínuo tal que:

$$\bullet\ U^{-1} = U^*.$$

(v) $\|Uu - Uv\| = \|u - v\|, \forall u, v \in \mathcal{H}$ (ou seja, U é *isometria*) e $U(0) = 0$; além disso, se $\mathcal{H}$ for complexo, $U(iu) = iUu, \forall u \in \mathcal{H}$.

[Recorde-se que $U^* : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ é definido por:

$$(U^*v, w) = (v, Uw), \forall v \in \mathcal{H}', w \in \mathcal{H},$$

atendendo ao Lema de Riesz].

6) Pretende-se obter as chamadas *"relações de incerteza de Heisenberg"*. Definindo o *"desvio médio quadrático"* de um observável $\mathfrak{a}$ (num estado ψ fixado), como é habitual em Estatística, por:

$$\triangle \mathfrak{a} = \sqrt{\langle \mathfrak{a}^2 \rangle_\psi - \langle \mathfrak{a} \rangle_\psi^2} = \sqrt{\langle (\mathfrak{a} - \langle \mathfrak{a} \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi}$$

e considerando dois operadores A, B associados respectivamente aos observáveis físicos $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ resolva sucessivamente as seguintes questões:

a) Se $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ forem respectivamente os observáveis *momento linear* e *posição* (no caso unidimensional estudado neste capítulo) mostre que:

$$\text{“}AB - BA = \frac{\hbar}{i} I \text{”},$$

onde I é o operador identidade e a igualdade deve ser entendida como tendo lugar quando se aplicam os operadores em cada membro a vectores (*estados físicos*) para os quais faça sentido efectuar os cálculos requeridos.

b) Supondo que:

$$(AB - BA)\psi = \frac{\hbar}{i} \psi,$$

para todos os vectores ψ no domínio de $AB - BA$, mostre que:

$$\triangle \mathfrak{a} \, \triangle \mathfrak{b} \geq \frac{\hbar}{2} \left(= \frac{h}{4\pi} \right)$$

(Relações de incerteza de Heisenberg). [Sugestão: procure exprimir $\triangle \mathfrak{a}$, $\triangle \mathfrak{b}$ como normas de determinados vectores e utilize a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter a relação pretendida].

c) Interprete fisicamente o resultado da alínea anterior, nomeadamente no caso em que $\mathfrak{a} = p, \mathfrak{b} = x$ (respectivamente *momento linear* e *posição*, o que corresponde às *Relações de incerteza de Heisenberg momento-posição*).

1ª Parte
Correspondências, Operadores e Formas

Capítulo 1

Operadores, correspondências lineares e Formas sesquilineares

As considerações feitas acerca da formulação matemática da Mecânica Quântica mostram a importância do estudo de *operadores lineares em espaços de Hilbert*, não necessariamente limitados e com domínios não necessariamente iguais ao espaço. De agora em diante será fixado um *espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ que, salvo indicação em contrário, será suposto *complexo*; representaremos o *produto interno* em $\mathcal{H}$ por $(.,.)$, pelo que reservaremos a notação $\langle .,. \rangle$ para *pares ordenados*. Uma aplicação linear:

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset \mathcal{H} &\to \mathcal{H} \\ u &\mapsto Au \end{aligned}$$

($D(A)$ subespaço vectorial de $\mathcal{H}$) será designada doravante simplesmente por ***operador*** (*em* $\mathcal{H}$, *com domínio* $D(A)$). Identificá-la-emos com o respectivo ***gráfico***:

$$\mathcal{G}(A) = \{\langle u, Au \rangle : u \in D(A)\}.$$

Se:

$$B : D(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

for também operador em $\mathcal{H}$ é evidente que $A \subset B$ (ou seja, $\mathcal{G}(A) \subset \mathcal{G}(B)$) sse:

$$D(A) \subset D(B) \text{ e } Au = Bu, \forall u \in D(A)$$

(A dir-se-á, nesse caso, ***restrição*** de B a $D(A)$ e B ***extensão*** de A a $D(B)$). Além disso, para dois quaisquer operadores A, B em $\mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, definem-se os operadores $\boldsymbol{\lambda A}$, $\boldsymbol{A + B}$ e $\boldsymbol{AB}$, como é habitual para aplicações com valores em espaços vectoriais, por:

- $D(\lambda A) = D(A)\,,\ (\lambda A)u = \lambda(Au), \forall u \in D(A)$;
- $D(A + B) = D(A) \cap D(B)\,,\ (A + B)u = Au + Bu, \forall u \in D(A + B)$;
- $D(AB) = B^{-1}(D(A)) = \{u \in D(B) : Bu \in D(A)\}$,
  $(AB)u = A(Bu), \forall u \in D(AB)$.

Quando não houver perigo de confusão, designaremos por $\mathbf{0}$ o ***operador nulo*** com domínio $\mathcal{H}$ (ou seja, o gráfico $\mathcal{H} \times \{0\}$), por $\boldsymbol{I}$ o ***operador identidade*** em $\mathcal{H}$ e define-se $\boldsymbol{A^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ por recorrência, pondo:

- $A^0 = I$;
- $A^n = A(A^{n-1})\,(n \in \mathbb{N}_1)$.

Se A for *injectivo* designa-se por ***inverso*** de A o operador A^{-1} de domínio:

$$D(A^{-1}) = R(A) = \{Au : u \in D(A)\},$$

tal que:

$$A^{-1}(Au) = u, \forall u \in D(A).$$

É fácil concluir que as definições anteriores conduzem sempre, de facto, a *operadores*, ou seja, trata-se de aplicações lineares.

Particularmente importante será a classe $\mathcal{O}$ dos operadores A em $\mathcal{H}$ ***associados a observáveis físicos***, no sentido da Introdução; como foi postulado, caracteriza-se pela condição:

$\boldsymbol{A \in \mathcal{O}}$ sse $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A^2}$ são operadores maximais simétricos com domínios densos em $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

A condição de *simetria*:

$$(Au, v) = (u, Av)\,, \forall u, v \in D(A),$$

sugere que se procure associar a cada operador A um novo operador B definido em domínio tão extenso quanto possível e tal que:

$$(Au, v) = (u, Bv)\,, \forall u \in D(A), v \in D(B);$$

será então natural pocurar definir B pelas condições:

- $v \in D(B)$ sse $\exists v^* \in \mathcal{H} : (Au, v) = (u, v^*)\,, \forall u \in D(A)$,
- $Bv = v^*$.

Note-se, no entanto, que, no caso de $D(A)$ *não ser denso* em $\mathcal{H}$, pode existir uma infinidade de elementos v^* satisfazendo à condição acima; com efeito, se existir um tal elemento, seja ele v^* (ou seja, se $v \in D(B)$, como acima foi definido este espaço), qualquer $v^* + w$, com $w \in D(A)^\perp$ satisfará, evidentemente, à mesma condição, pelo que "Bv" não ficará, nesse caso, bem definido. Se $D(A)$ for denso, B fica bem definido, como facilmente se conclui, designando-se, nesse caso, por ***adjunto*** de A o operador $A^* = B$, mas, mesmo nesta situação, nada nos garante que $D(A^*)$ seja denso (como adiante veremos, nem sempre o será) o que torna por vezes impossível definir $(A^*)^*$ *como operador*. Estas constatações levam-nos a alargar o estudo a objectos ligeiramente mais gerais que os *operadores*.

1.1 Correspondências lineares; generalidades.

Chamamos ***correspondência linear*** em $\mathcal{H}$ a qualquer subespaço vectorial C de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, ou seja, a uma ***correspondência*** em $\mathcal{H}$ (subconjunto de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$) que é além disso *subespaço vectorial*. Um *operador* (identificado com o respectivo gráfico, como acima referimos) é, evidentemente, correspondência linear, mas nem todas as correspondências são gráficos de operadores [exercício].

Seja então C *correspondência* (linear ou não) em $\mathcal{H}$; chamamos ***inversa*** de C à correspondência:

$$C^{-1} = \{\langle u, v\rangle : \langle v, u\rangle \in C\}.$$

A ***imagem*** de $u \in \mathcal{H}$ por C será o conjunto:

$$Cu = \{v \in \mathcal{H} : \langle u, v\rangle \in C\}.$$

É evidente que C fica determinada pela *aplicação* $\widetilde{C} : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$, tal que:

$$\widetilde{C}(u) = Cu, \forall u \in \mathcal{H}$$

$(C = \{\langle u, v\rangle : u \in \mathcal{H}$ e $v \in \widetilde{C}(u)\})$. Designaremos por ***domínio*** de C o conjunto:

$$\begin{aligned} D(C) &= \{u \in \mathcal{H} : Cu \neq \emptyset\} = \{u \in \mathcal{H} : \widetilde{C}(u) \neq \emptyset\} \\ &= \{u \in \mathcal{H} \,|\, \exists\, v \in \mathcal{H} : \langle u, v\rangle \in C\}. \end{aligned}$$

Se $M \subset \mathcal{H}$, a ***imagem*** de M por C será, por definição, o conjunto:

$$C(M) = \bigcup_{u \in M} Cu;$$

$C(\mathcal{H})$ designa-se por ***Imagem*** ou ***Range*** de C e representa-se por:

$$R(C)(= \{v \in \mathcal{H} : \exists\, u \in \mathcal{H}, \langle u, v\rangle \in C\}),$$

coincidindo, evidentemente, com o domínio de C^{-1} [exercício].

É fácil concluir que uma correspondência $C \neq \emptyset$ em $\mathcal{H}$ é *linear* sse:

$$\lambda Cu + \mu Cv \subset C(\lambda u + \mu v)\,, \forall u, v \in \mathcal{H}, \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

ou seja,

$$\lambda\widetilde{C}(u) + \mu\widetilde{C}(v) \subset \widetilde{C}(\lambda u + \mu v)\,, \forall u, v \in \mathcal{H}, \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

com a noção habitual de soma e produto por escalar de partes de um espaço vectorial [exercício].

De agora em diante passaremos a considerar apenas correspondências *lineares*, pelo que, por abuso de linguagem, designá-las-emos apenas por *correspondências*.

Supondo então que C é ***correspondência (linear)*** é fácil concluir que $\boldsymbol{C^{-1}}$ ***também é linear***, que ***se $\boldsymbol{M}$ for subespaço de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, $\boldsymbol{C(M)}$ também o será*** e que ***$\boldsymbol{D(C)}$ e $\boldsymbol{R(C)}$ são subespaços de $\boldsymbol{\mathcal{H}}$***, uma vez que são imagens de $\mathcal{H}$, respectivamente por C^{-1} e C; mais geralmente, ter-se-á para quaisquer *subconjuntos* M, N de $\mathcal{H}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\lambda C(M) + \mu C(N) \subset C(\lambda M + \mu N)$$

[exercício].

O ***Núcleo*** ou ***Kernel*** de C é o subespaço de $\mathcal{H}$:

$$\ker(C) = C^{-1}0\,(\,= \{u \in \mathcal{H} : \langle u, 0\rangle \in C\}).$$

É fácil concluir que ***$\boldsymbol{C}$ é (gráfico de) operador sse $\boldsymbol{C0 = \{0\}}$, ou seja sse*** $\boldsymbol{\ker(C^{-1}) = \{0\}}$ [exercício].

Podemos estender às correspondências as operações algébricas habituais sobre operadores; a notação que empregaremos é a utilizada para operadores, embora tenha a desvantagem de chocar com a notação habitual para operações com subespaços de espaços vectoriais. Convirá portanto ter em mente que, por exemplo, a *soma* de duas correspondências como a definiremos em seguida *não é* a soma habitual de subespaços de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$!

Feita esta advertência, sejam então B, C correspondências em $\mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$; chamamos ***soma*** de B com C à correspondência determinada por $\widetilde{B} + \widetilde{C}$ (com a habitual noção de soma de aplicações com valores em conjuntos em que esteja definida uma operação designada por "soma"), ou seja, tal que:

$$(B + C)u = Bu + Cu, \forall u \in \mathcal{H};$$

é fácil concluir que:

$$B + C = \{\langle u, v + w\rangle : \langle u, v\rangle \in B \text{ e } \langle u, w\rangle \in C\}.$$

Chamamos ***produto*** de λ por C à correspondência determinada por $\lambda\widetilde{C}$, ou seja, tal que:

$$(\lambda C)u = \lambda(Cu), \forall u \in \mathcal{H};$$

pelo que, como é óbvio:

$$\lambda C = \{\langle u, \lambda v\rangle : \langle u, v\rangle \in C\};$$

em particular representa-se por $-C$ (***simétrica*** de C) a correspondência $(-1)C$. Como é habitual representa-se por $B - C$ (***diferença***) a correspondência $B + (-C)$.

Chamamos ***composta*** de B com C à correspondência determinada por $\widetilde{B}\widetilde{C}$, no sentido natural, ou seja:

$$(BC)u = B(Cu), \forall u \in \mathcal{H};$$

é fácil concluir que:

$$BC = \{\langle u, v\rangle : \exists\, w \in \mathcal{H}, \langle u, w\rangle \in C \text{ e } \langle w, v\rangle \in B\}.$$

Podemos concluir sem dificuldade que as definições conduzem de facto a correspondências *lineares* e que:

- $D(B+C) = D(B) \cap D(C)$,
- $D(\lambda C) = D(C)$,
- $D(BC) = \{u \in D(C) : Cu \cap D(B) \neq \emptyset\}$

[exercício]. Valem propriedades algébricas semelhantes às conhecidas para operadores, com algumas restrições que passaremos a enunciar, deixando as demonstrações como exercícios. Teremos:

PROPOSIÇÃO 1.1: ***Sejam A, B, C correspondências em $\mathcal{H}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e designemos por O o operador nulo com domínio $\mathcal{H}$; então:***

1. $B + C = C + B$

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$

3. $A(B + C) \supset AB + AC$.

4. $(B + C)A \subset BA + CA$.

5. $\lambda(B + C) = \lambda B + \lambda C$.

6. $A + O = O + A = A$.

7. $A - A \supset O_{/D(A)}$.

8. $A(BC) = (AB)C$.

9. $OA = D(A) \times \{0\} = O_{/D(A)}$;
$AO = \mathcal{H} \times A0$.

10. $AI = IA = A$

11. $\lambda(BC) = (\lambda B)C = B(\lambda C)$ ***se*** $\lambda \neq 0$***;***
$0(BC) = (0B)C \subset B(0C)$ ***(sendo*** 0 ***o zero de*** $\mathbb{C}$***).***

12. $(\lambda\mu)C = \lambda(\mu C)$.

13. $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$.

14. $(\lambda C)^{-1} = \lambda^{-1}C^{-1}$, ***se*** $\lambda \neq 0$

15. $CC^{-1} \supset I_{/D(C)}$.

16. $(C^{-1})^{-1} = C$.□

Observações : **1)** É fácil concluir que as inclusões dos pontos 3. e 4. da proposição não podem, em geral, ser substituídas por igualdades, mesmo que se trate de operadores. Basta considerar A e B tais que $D(AB) \neq D(B)$ e notar que, nesse caso, $A(B + (-B))$ tem domínio igual a $D(B)$, ao passo que $AB - AB$ tem domínio igual a $D(AB)$ (e só será o operador 0 nesse domínio se A for ele próprio operador…). As demonstrações destes factos são deixadas como exercícios, tratando-se de simples aplicações das definições.

2) Note-se que, em geral, $A - A \neq 0$! basta considerar, por exemplo, $A = \{0\} \times \mathcal{H}$, caso em que $A - A = A \neq 0$. No entanto, se A for operador, ter-se-á, evidentemente, $A - A = 0_{/D(A)}$.

1.2 Adjunto de correspondência; propriedades

No caso em que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, para cada $v \in \mathcal{H}$ é contínua sobre $\mathcal{H}$ a forma linear:

$$u \mapsto (Au, v),$$

pelo que o ***Teorema de Riesz*** garante a existência de um elemento A^*v bem determinado tal que:

$$(Au, v) = (u, A^*v)\,, \forall u \in \mathcal{H}.$$

É fácil concluir que a aplicação $u \mapsto A^*u$ assim definida está em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; trata-se do ***adjunto*** de A, tal como foi definido no início do capítulo. No caso geral em que A é operador em $\mathcal{H}$, sem qualquer hipótese suplementar acerca do domínio ou da limitação, como referimos no início do capítulo, somos levados a procurar, para $v \in \mathcal{H}$ dado, os elementos $v^* \in \mathcal{H}$, para os quais:

(15) $$(Au, v) = (u, v^*)\,, \forall u \in D(A).$$

Recordemos, no entanto, que se fixarmos v, e admitindo a existência de v^* nestas condições, a relação continua a verificar-se substituindo v^* por $v^* + w$ em que $w \in D(A)^\perp$. Portanto, a não ser que $D(A)^\perp = \{0\}$ (ou seja, $D(A)$ *denso* em $\mathcal{H}$), v^* não ficará bem determinado, pelo que a relação (15) não define *um operador*. Foi, em parte, esta observação que nos levou a ultrapassar o quadro dos operadores e examinar esta questão no âmbito mais vasto das correspondências. Comecemos por traduzir (15) em termos de gráficos, utilizando o produto interno de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ (definido por $(\langle u_1, u_2\rangle, \langle v_1, v_2\rangle) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$); ter-se-á:

$$(15) \Leftrightarrow (\langle -Au, u\rangle, \langle v, v^*\rangle) = 0, \forall u \in D(A).$$

Ou seja, os pares $\langle v, v^*\rangle$ que satisfazem a (15) constituem exactamente o chamado ***ortogonal*** em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ do conjunto:

$$\{\langle -Au, u\rangle : u \in D(A)\}.$$

Este conjunto é obtido do gráfico de A por aplicação da transformação:

$$V : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$
$$\langle u, v \rangle \mapsto \langle -v, u \rangle.$$

As considerações anteriores motivam a seguinte definição que estende às correspondências a noção de adjunto introduzida no final da secção anterior para operadores com domínio denso:

DEFINIÇÃO: C*hamamos **adjunto** de uma correspondência C (ou **correspondência adjunta** de C) em $\mathcal{H}$ à correspondência:*

$$C^* = (VC)^{\perp}.$$

É fácil concluir que V é ***operador unitário*** de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ sobre si próprio, ou seja, é ***automorfismo*** de espaços de Hilbert (bijecção que mantém os produtos internos); em particular *comuta com a passagem ao ortogonal* [exercício]. Temos assim também $C^* = V(C^{\perp})$. Mais precisamente, podemos exprimir V em termos das operações sobre correspondências atrás introduzidas; tem-se obviamente:

$$VC = (-C)^{-1} = -(C^{-1}),$$

resultando a última igualdade do facto de C ser subespaço de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, e portanto invariante por multiplicação de todos os seus elementos pelo escalar -1. Mais uma vez é trivial verificar que as operações de *inversão* e *passagem ao simétrico* são o resultado de aplicação aos elementos de C de dois *operadores unitários* em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$, respectivamente:

$$\langle u, v \rangle \mapsto \langle u, -v \rangle$$

e:

$$\langle u, v \rangle \mapsto \langle v, u \rangle.$$

Como acabámos de verificar que estas operações comutam, quando aplicadas a uma correspondência C, e atendendo a que comutam com a passagem ao ortogonal por se tratar de operadores unitários, podemos concluir que ***o adjunto C^* de C se pode obter por aplicação sucessiva a C, por qualquer ordem, das operações de inversão, passagem ao simétrico e passagem ao ortogonal***. Em particular:

$$\boldsymbol{C^* = -C^{-1\perp}}.$$

Estas considerações permitem-nos demonstrar sem qualquer dificuldade as propriedades fundamentais da noção de adjunto de uma correpondência. Podemos distinguir dois grupos de propriedades : as *geométrico-topológicas* e as *algébricas*. Nas demonstrações e praticamente em tudo o que se segue utilizaremos de modo fundamental as consequências do chamado *Teorema da Projecção* que, em forma restrita, garante que *todo o subespaço fechado não vazio M de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tem $M^{\perp}$ por suplementar topológico,* ou seja:

$$\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}.$$

Trata-se, no fundo, de um teorema de *existência* (garante a existência da projecção ortogonal de qualquer ponto de $\mathcal{H}$ sobre qualquer subespaço fechado não vazio), donde se deduz o *Teorema de Riesz* e outro resultado fundamental, a saber:

$$\overline{M} = M^{\perp\perp},$$

para qualquer subespaço vectorial M de $\mathcal{H}$ ($\overline{M}$ aderência de M em $\mathcal{H}$).

PROPOSIÇÃO 1.2 (Propriedades geométrico-topológicas da noção de adjunto): ***Sejam B, C correspondências lineares em $\mathcal{H}$; tem-se:***

1. ***C^* é fechado em $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.***
2. ***$C^{**} = \overline{C}$.***
3. ***$\overline{C}^* = C^*$***
4. ***$(C^*)^{-1} = (C^{-1})^*$***
5. ***$B \subset C \Rightarrow C^* \subset B^*$***
6. ***$\ker(C^*) = R(C)^{\perp}$***

Demonstração: 1. C^*, sendo um ortogonal, é obviamente fechado.

2. $C^{**} = -(-C^{-1\perp})^{-1\perp} = --C^{-1^{-1\perp^{\perp}}} = C^{\perp\perp} = \overline{C}$.

3. $(\overline{C})^* = (C^{**})^* = (C^*)^{**} = \overline{C^*} = C^*$, já que C^* é fechado, como vimos.

4. $(C^*)^{-1} = (-C^{-1\perp})^{-1} = -(C^{-1})^{-1\perp} = (C^{-1})^*$.

5. $B \subset C \Rightarrow -B^{-1} \subset -C^{-1} \Rightarrow -C^{-1\perp} \subset -B^{-1\perp} \Rightarrow C^* \subset B^*$.

6. $\ker C^* = (C^*)^{-1}0 = (-C^{-1\perp})^{-1}0 = -C^{-1^{-1\perp}}0 = -C^{\perp}0$, pelo que:

$$\begin{aligned} v \in \ker(C^*) &\Leftrightarrow v \in -C^{\perp}0 \Leftrightarrow \langle 0, v\rangle \in -C^{\perp} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\langle u, -u'\rangle, \langle 0, v\rangle) = 0, \forall \langle u, u'\rangle \in C \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (u', v) = 0, \forall \langle u, u'\rangle \in C \Leftrightarrow v \in R(C)^{\perp}. \square \end{aligned}$$

COROLÁRIO: ***1. C^* é operador sse $D(C)$ for denso em $\mathcal{H}$.***

2. ***$\overline{C}$ é operador (ou seja, C é operador fechável) sse $D(C^*)$ for denso em $\mathcal{H}$.***

3. ***$C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sse C for operador fechável e $\overline{C} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (em particular, nesse caso, $D(C)$ é denso em $\mathcal{H}$).***

Demonstração: 1. C^* é operador sse $\ker(C^{*-1}) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(C^{-1^*}) = = \{0\} \Leftrightarrow R(C^{-1})^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow D(C)^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow D(C)$ é denso em $\mathcal{H}$.

2. $\overline{C} = C^{**}$ é operador sse $D(C^*)$ for denso em $\mathcal{H}$, por 1.

3. É imediato, atendendo a que $\overline{C} = C^{**}$ e a que o adjunto de um operador linear contínuo em $\mathcal{H}$ é também operador linear contínuo em $\mathcal{H}$.□

Observação: 1) Atendendo ao *Teorema do gráfico fechado*, o ponto 3. do corolário anterior é equivalente a:

• ***$C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sse C for operador fechável e $D(\overline{C}) = \mathcal{H}$ (em particular, nesse caso, $\overline{C} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $D(C)$ é denso em $\mathcal{H}$).***

De 3. ainda podemos facilmente concluir que:

• ***se $D(C)$ for denso em $\mathcal{H}$ (ou seja, se C^* for operador), então $D(C^*) = \mathcal{H}$ sse C for fechável e $D(\overline{C}) = \mathcal{H}$ (em particular, nesse caso, $\overline{C}, C^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$).***

PROPOSIÇÃO 1.3 (Propriedades algébricas da noção de adjunto): ***Sejam B, C correspondências lineares em $\mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$; então:***

1. • $(\lambda C)^* = \overline{\lambda}\, C^*$, ***se*** $\lambda \neq 0$;
• $(0C)^* = \mathcal{H} \times D(C)^{\perp}$
(donde $(0C)^* = 0C^*$ ***sse*** C^* ***for operador com domínio igual a*** $\mathcal{H}$***).***

2. $(B + C)^* \supset B^* + C^*$***; se*** $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $(B + C)^* = B^* + C^*$.

3. $(BC)^* \supset C^* B^*$***; se*** $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ***ou*** $C^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $(BC)^* = C^* B^*$.

4. $I^* = I$.

Demonstração: 1. $(\lambda C)^* = -(\lambda C)^{-1\perp} = (-\frac{1}{\lambda}\, C^{-1})^{\perp} = \overline{\lambda}\,(-C^{-1\perp}) = = \overline{\lambda}\, C^*$, onde se utilizou a relação trivialmente verificável:

$$(\mu C)^{\perp} = \frac{1}{\overline{\mu}}\, C^{\perp}.$$

Se $\lambda = 0$:

$$(0C)^* = (0_{/D(C)})^* = (D(C) \times \{0\})^* = (\{0\} \times D(C))^{\perp} = \mathcal{H} \times D(C)^{\perp};$$

como $0\, C^*$ é o operador $0_{/D(C^*)}$, valerá a igualdade para $\lambda = 0$ sse $D(C)$ for denso em $\mathcal{H}$ (ou seja sse C^* for operador) e além disso $D(C^*) = \mathcal{H}$.

2. É consequência imediata da relação:

$$B^{\perp^{-1}} + C^{\perp^{-1}} \subset (B + C)^{\perp^{-1}},$$

cuja demonstração resulta imediatamente das definições. Com efeito:

$$\begin{gathered}\langle v, v' + v''\rangle \in B^{\perp^{-1}} + C^{\perp^{-1}} \Leftrightarrow \langle v', v\rangle \in B^{\perp} \text{ e } \langle v'', v\rangle \in C^{\perp} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\langle u, u' + u''\rangle, \langle v' + v'', v\rangle) = (u, v') + (u, v'') + (u', v) + (u'', v) = \\ = (\langle u, u'\rangle, \langle v', v\rangle) + (\langle u, u''\rangle, \langle v'', v\rangle) = 0\,,\ \forall \langle u, u'\rangle \in B, \langle u, u''\rangle \in C \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle v' + v'', v\rangle \in (B + C)^{\perp} \Rightarrow \langle v, v' + v''\rangle \in (B + C)^{\perp^{-1}}.\end{gathered}$$

No caso em que $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, demonstremos a inclusão recíproca:

$$\begin{gathered}\langle v, v'\rangle \in (B + C)^{\perp^{-1}} \Rightarrow \langle v', v\rangle \in (B + C)^{\perp} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\langle u, u' + u''\rangle, \langle v', v\rangle) = 0, \forall \langle u, u'\rangle \in B, \langle u, u''\rangle \in C \Rightarrow \\ \Rightarrow (u, v') + (Bu, v) + (u'', v) = 0\,,\ \forall u \in \mathcal{H}, \langle u, u''\rangle \in C \Rightarrow \\ \Rightarrow (u, v') + (u, B^*v) + (u'', v) = 0\,,\ \forall u \in \mathcal{H}, \langle u, u''\rangle \in C \Rightarrow \\ \Rightarrow (\langle u, u''\rangle, \langle v' + B^*v, v\rangle) = 0\,,\ \forall \langle u, u''\rangle \in C \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle v, v' + B^*v\rangle \in C^{\perp^{-1}} \Rightarrow \langle v, v'\rangle \in C^{\perp^{-1}} - B^* = C^{\perp^{-1}} + B^{\perp^{-1}}.\end{gathered}$$

Neste caso teremos, portanto: $(A + B)^* = A^* + B^*$.

3. É consequência imediata da relação:

$$B^{\perp}C^{\perp} \subset -(BC)^{\perp},$$

e da Proposição 1.1 (10., 11. e 12.). Temos:

$$\langle v, v'\rangle \in B^{\perp}C^{\perp} \Rightarrow \exists\, v'' \in \mathcal{H} : \langle v, v''\rangle \in C^{\perp}, \langle v'', v'\rangle \in B^{\perp};$$

provemos então que $\langle v, v'\rangle \in -(BC)^{\perp}$. Se $\langle u, u'\rangle \in -(BC)$, ou seja, se existir $u'' \in \mathcal{H}$ tal que $\langle u, u''\rangle \in C$, $\langle u'', -u'\rangle \in B$, teremos:

$$(\langle u, u'\rangle, \langle v, v'\rangle) = (u, v) + (u', v').$$

Ora,

$$\begin{gathered}(u, v) + (u'', v'') = (\langle u, u''\rangle, \langle v, v''\rangle) = 0, \\ (u'', v'') - (u', v') = (\langle u'', -u'\rangle, \langle v'', v'\rangle) = 0,\end{gathered}$$

donde:

$$(u, v) + (u', v') = ((u, v) + (u'', v'')) - ((u'', v'') - (u', v')) = 0,$$

pelo que, de facto, $\langle v, v'\rangle \in -(BC)^{\perp}$. Suponhamos agora que $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; provemos que, nesse caso, vale a inclusão contrária:

$$\begin{gathered}\langle v, v'\rangle \in -(BC)^{\perp} \Rightarrow (\langle u, -Bu'\rangle, \langle v, v'\rangle) = 0, \forall \langle u, u'\rangle \in C \Rightarrow \\ \Rightarrow (u, v) = (u', B^*v'), \forall \langle u, u'\rangle \in C \Rightarrow \langle v, B^*v'\rangle \in -C^{\perp}.\end{gathered}$$

Ora $\langle B^*v', v'\rangle \in B^{*^{-1}} = -B^{\perp}$, donde $\langle v, v'\rangle \in (-B^{\perp})(-C^{\perp}) = B^{\perp}C^{\perp}$. Neste caso tem-se, portanto,

$$-(BC)^{\perp} = B^{\perp}C^{\perp},$$

donde,

$$(BC)^* = (-(BC)^\perp)^{-1} = (B^\perp C^\perp)^{-1} = (-C^{-1\perp})(-B^{-1\perp}) = C^* B^*.$$

Se for $C^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, teremos, aplicando o resultado anterior às correspondências C^{-1} e B^{-1}:

$$(BC)^* = ((C^{-1}B^{-1})^*)^{-1} = ((B^{-1})^*(C^{-1})^*)^{-1} = C^* B^*.$$

4. $$I^* = \{\langle -u, u\rangle : u \in \mathcal{H}\}^\perp = \{\langle v, v'\rangle \in \mathcal{H}\times\mathcal{H} : (u,v) = \\ = (u, v'), \forall u \in \mathcal{H}\} = \{\langle v, v'\rangle \in \mathcal{H}\times\mathcal{H} : v = v'\} = I. \square$$

Observação: 2) Examinando as demonstrações, é fácil verificar que, no ponto 2. da proposição anterior, para se obter $(B+C)^* = B^* + C^*$, pode substituir-se a hipótese $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ por $D((B+C)^*) \subset D(B^*)$ e $D(C) \subset D(B)$; analogamente, no ponto 3., para se obter $(BC)^* = C^* B^*$, pode substituir-se a hipótese feita por:

$$D((BC)^*) \subset D(B^*) \text{ e } R(C) \subset D(B),$$
$$\text{ou}$$
$$R((BC)^*) \subset R(C^*) \text{ e } D(B) \subset R(C)$$

[exercício].

3) O facto de nem sempre se ter $(B+C)^* = B^* + C^*$ (ainda que B, C, B^*, C^* sejam operadores) tem vastas consequências na formulação matemática da Mecânica Quântica. Com efeito, em particular, de $B = B^*, C = C^*$ não se pode em geral concluir que $B + C = (B+C)^*$, o que significa que a classe dos operadores que coincidem com o respectivo adjunto (crucial em Mecânica Quântica, como veremos adiante) *não é, em geral, fechada para a adição!*[45]

Como estamos particularmente interessados em estudar os adjuntos de operadores, notemos que, no caso particular em que A é operador, nos podemos servir do *Teorema de Riesz* em $\overline{D(A)}$ para caracterizar $D(A^*)$. Considerando, para cada $v \in \mathcal{H}$, a forma linear l_v definida em $D(A)$ por:

$$l_v(u) = (Au, v),$$

a respectiva continuidade é equivalente à possibilidade de a prolongar a $\overline{D(A)}$ como forma linear contínua e portanto, pelo Teorema de Riesz, à existência, em $\overline{D(A)}$, de v^* tal que:

$$(Au, v) = (u, v^*)\,, \forall u \in D(A).$$

A existência de tal v^* em $\overline{D(A)}$ é equivalente à sua existência em $\mathcal{H}$, pois a *projecção ortogonal* em $\overline{D(A)}$ de $v^* \in \mathcal{H}$ satisfazendo à condição acima, obedece, como é óbvio, à mesma condição, pelo que a referida continuidade de l_v é equivalente a $v \in D(A^*)$.

[45] Para um exemplo de operadores A, B auto-adjuntos tais que $D(A+B) = \{0\}$, *cf.* [C].

1.3 Operadores simétricos, auto-adjuntos e essencialmente auto-adjuntos; critério fundamental.

É óbvio, da definição de adjunto de correspondência, que, para um operador A, a condição $A \subset A^*$ caracteriza os operadores ***simétricos***, ou seja, é equivalente a:

$$(Au, v) = (u, Av)\,,\ \forall u, v \in D(A).$$

DEFINIÇÃO: *Chamamos* ***operador auto-adjunto*** *em* $\mathcal{H}$ *a um operador* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *tal que* $A = A^*$.

Da Proposição 1.2 resulta facilmente que se A for *operador simétrico*:

(16) $$\bullet\ A \subset \overline{A} = A^{**} \subset A^*;$$

do Corolário da mesma Proposição podemos então concluir que se, além disso, $D(A)$ for *denso* virá A^* *operador* e, consequentemente, também $\overline{A}$ operador. Ou seja, acabámos de demonstrar que ***todo o operador simétrico com domínio denso é fechável***[46]. De (16) também é fácil concluir que ***todo o operador simétrico fechável tem fecho simétrico***[47].

A partir de (16) imediatamente se conclui que, para um operador *auto-adjunto* A:

$$\bullet\ A = \overline{A} = A^{**} = A^*;$$

em particular, ***os operadores auto-adjuntos são fechados e têm domínio denso*** [exercício]. Da definição de operador auto-adjunto resulta também imediatamente que um operador A auto-adjunto é ***maximal simétrico***, ou seja, é maximal no conjunto parcialmente ordenado (por inclusão), dos operadores simétricos em $\mathcal{H}$; com efeito, se $A \subset B$, sendo B operador simétrico em $\mathcal{H}$, virá:

$$B \subset B^* \subset A^* = A \Rightarrow B = A.$$

De maneira geral, os operadores *simétricos fechados* caracterizam-se por:

$$\bullet\ A = \overline{A} = A^{**} \subset A^*.$$

Resta considerar o caso de igualdade na *segunda* inclusão em (16) que motiva a introdução de novo conceito:

[46]Se definíssemos, mais geralmente, *correspondência simétrica* pela condição $C \subset C^*$, o mesmo argumento mostraria que *toda a correspondência simétrica com domínio denso é operador fechável* [exercício].
[47]Mais geralmente o *fecho de um operador simétrico* é sempre *correspondência simétrica*, no sentido da nota anterior.

DEFINIÇÃO: *Um operador* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *diz-se* ***essencialmente auto-adjunto*** *se tiver domínio denso e:*

$$\bullet\ A \subset \overline{A} = A^{**} = A^*,$$

ou seja, se o respectivo fecho for operador auto-adjunto, ou, de modo equivalente, se A^* *for operador auto-adjunto, ou ainda se* A, A^* *forem operadores simétricos; nesse caso* $D(A)$ *diz-se um* ***domínio essencial*** *para* $\overline{A}$. [Exercício: demonstre a equivalência das quatro condições que caracterizam os *operadores essencialmente auto-adjuntos*].

Antes de enunciarmos um critério fundamental que permite reconhecer os operadores *auto-adjuntos* entre os *simétricos*, estabeleçamos algumas propriedades gerais dos operadores simétricos. De agora em diante representaremos também por $C + \lambda$ a correspondência $C + \lambda I$ (para C correspondência em $\mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$).

PROPOSIÇÃO 1.4: ***Seja*** $\boldsymbol{A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}}$ ***operador simétrico; então:***

1. $\ker(A+i) = \ker(A-i) = \{0\}$;
2. $(A+i)^{-1}$ ***e*** $(A-i)^{-1}$ ***são operadores limitados;***
3. A ***é fechado sse*** $R(A+i)$ ***ou*** $R(A-i)$ ***for fechado; nesse caso ambos o são. Ou seja,*** $A, R(A+i)$ ***e*** $R(A-i)$ ***são fechados sse um dos três o for.***

Demonstração: Para qualquer $u \in D(A)$ tem-se:

$$\|Au \pm iu\|^2 = \|Au\|^2 \mp 2\,\Re[\underbrace{i\,(Au,u)}_{\in \mathbb{R}}] + \|u\|^2 = \|Au\|^2 + \|u\|^2; \tag{17}$$

em particular:

$$\|(A \pm i)u\| \geq \|u\|\,,\ \forall u \in D(A),$$

donde se deduz directamente 1. e 2..

De (17) resulta também que as aplicações $(A \pm i)u \mapsto \langle u, Au\rangle$ são isometrias respectivamente de $R(A+i)$ e $R(A-i)$ em $\mathcal{G}(A)$, o que prova 3.; outro processo de demonstração seria utilizar 2. e a observação trivial de que um operador limitado é fechado sse o respectivo domínio o for, em conjunto com o facto, facilmente demonstrável, de ser fechada a soma de um operador fechado com um operador de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.□

Observação: 1) É fácil concluir que a Proposição anterior se estende a correspondências, com a noção de *correspondência simétrica* introduzida na nota de rodapé 46 [exercício].

TEOREMA 1.5 (Critério fundamental): ***Seja*** A ***operador simétrico em*** $\mathcal{H}$***; se existir*** $\lambda \in \mathbb{C}$ ***tal que*** $R(A+\lambda) = R(A+\overline{\lambda}) = \mathcal{H}$***, então*** A ***é auto-adjunto.***

Demonstração: Por hipótese $A \subset A^*$, donde, atendendo também aos pontos 1., 2. e 4. da Proposição 1.3:

$$(A + \lambda I)^{-1} \subset (A^* + \lambda I)^{-1} = ((A + \overline{\lambda} I)^*)^{-1}.$$

Provemos que $(A^* + \lambda I)^{-1}$ é operador; basta verificar que:

$$\ker((A + \overline{\lambda} I)^*) = \{0\},$$

ou seja, que $R(A + \overline{\lambda} I)^\perp = \{0\}$, consequência imediata da hipótese:

$$R(A + \overline{\lambda} I) = \mathcal{H}.$$

Como, por outro lado, $D((A + \lambda I)^{-1}) = R(A + \lambda I) = \mathcal{H}$, também por hipótese, é óbvio que $(A^* + \lambda I)^{-1}$ não pode ser extensão *própria* de $A + \lambda I$, pelo que:

$$(A + \lambda I)^{-1} = (A^* + \lambda I)^{-1} \Rightarrow A = A^*. \square$$

Observação: 2) Mais uma vez é fácil concluir que o Teorema anterior se estende a correspondências, (*cf.* nota de rodapé 46), substituindo *"A operador"* por *"C correspondência"* e *"A é auto-adjunto"* por *"$C = C^*$"* [exercício].

COROLÁRIO 1 (Critério fundamental — condições necessárias e suficientes): ***Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador simétrico; então são equivalentes as condições:***

1. ***A é auto-adjunto;***
2. ***A é fechado e $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$;***
3. ***$R(A \pm i) = \mathcal{H}$.***

Demonstração: 1. $\Rightarrow$ 2. é imediato, já que se supõe $A = A^*$, pelo que A é fechado, por ser um adjunto, e sendo a outra conclusão consequência da Proposição 1.4 aplicada a A^* ($= A$ e portanto simétrico).

2. $\Rightarrow$ 3.) Resulta do ponto 6. da Proposição 1.2 e dos pontos 1., 2. e 4. da Proposição 1.3 que:

$$R(A \pm i)^\perp = \ker(A \pm i)^* = \ker(A^* \mp i) = \{0\} \Rightarrow \overline{R(A \pm i)} = \mathcal{H};$$

por outro lado, sendo A, e portanto $A \pm i$, fechado, concluímos do ponto 3. da Proposição 1.4 que $R(A \pm i)$ são fechados, pelo que, sendo densos, coincidem com $\mathcal{H}$.

3. $\Rightarrow$ 1. é consequência imediata do Teorema anterior, tomando $\lambda = i$. $\square$

COROLÁRIO 2 (Critério fundamental para operadores essencialmente auto-adjuntos): ***Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador simétrico com domínio denso; então são equivalentes as condições:***

1. ***A é essencialmente auto-adjunto;***
2. ***$\ker(A^* \pm i) = \{0\}$;***
3. ***$\overline{R(A \pm i)} = \mathcal{H}$.***

Demonstração: 1. $\Rightarrow$ 2. é imediato, já que, por hipótese, A^* é simétrico e atendendo ao ponto 1. da Proposição 1.4.

2. $\Leftrightarrow$ 3. é consequência imediata de:

$$R(A \pm i)^{\perp} = \ker(A^* \mp i),$$

identidades acima verificadas (*cf.* demonstração do Corolário 1).

2. $\Rightarrow$ 1. resulta imediatamente de $\overline{A}^* = A^*$ e do Corolário 1 aplicado a $\overline{A}$, atendendo a que se A for operador simétrico *com domínio denso*, A é *fechável* e portanto $\overline{A}$ também é *operador* simétrico, como se viu no início da secção.$\square$

Observação: 3) Também estes corolários podem ser facilmente estendidos, *mutatis mutandis*, a correspondências [exercício].

Examinemos um exemplo particular importante de aplicação dos resultados anteriores. Seja (Ω, μ) espaço de medida e:

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

mensurável. Verifiquemos que é *auto-adjunto* em $L^2(\Omega, d\mu)$ o operador T_f *"de multiplicação por f"* definido por:

- $D(T_f) = \{u \in L^2(\Omega, d\mu) : f.u \in L^2(\Omega, d\mu)\}$,
- $T_f\, u = f.u\,,\ \forall u \in D(T_f)$.

É fácil verificar que T_f é *simétrico*, pelo facto de f ser *real*, o que torna óbvio que é real, para todo o $u \in D(T_f)$:

$$(T_f u, u)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f.u.\overline{u}\, d\mu = \int_\Omega f.|u|^2\, d\mu.$$

Para concluir que T_f é, de facto, auto-adjunto (atendendo ao *critério fundamental*), basta agora mostrar que coincidem com $L^2(\Omega, d\mu)$ as imagens dos operadores:

$$T_f \pm i,$$

ou seja, mostrar que dado $u \in L^2(\Omega, d\mu)$ existem $v, w \in D(T_f)$ tais que:

- $fv + iv = u$,
- $fw - iw = u$.

Ora, sendo f *real*, nunca toma o valor i, pelo que v, w, a existirem, serão dadas por:

- $v = \dfrac{u}{f+i}$,
- $w = \dfrac{u}{f-i}$.

É fácil concluir que as funções[48] v, w assim definidas estão efectivamente em $D(T_f)$, já que:

$$\bullet \left|\frac{u}{f \pm i}\right|^2 = \frac{|u|^2}{f^2+1} \leq |u|^2,$$
$$\bullet \left|f.\frac{u}{f \pm i}\right|^2 = \frac{f^2|u|^2}{f^2+1} \leq |u|^2,$$

estimativas das quais imediatamente decorre que:

$$v, w, fv, fw \in L^2(\Omega, d\mu),$$

e portanto, de facto $v, w \in D(T_f)$, ficando demonstrado que T_f é auto-adjunto.

Um dos resultados fundamentais que demonstraremos neste curso é o carácter *"universal"* do exemplo anterior, no seguinte sentido:

- ***Todo o operador auto-adjunto é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação por uma função real num espaço L^2***;

ou seja, se $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ for auto-adjunto, então existe um espaço de medida (Ω, μ), um operador unitário:

$$U : \mathcal{H} \to L^2(\Omega, d\mu)$$

e uma função mensurável:

$$f : \Omega \to \mathbb{R},$$

tais que:

$$\bullet\ A = U^{-1} T_f U,$$

ou seja:

$$\bullet\ D(A) = \{u \in \mathcal{H} : f.Uu \in L^2(\Omega, d\mu)\},$$
$$\bullet\ U(Au) = f(Uu)\,,\ \forall u \in D(A).$$

Este resultado é uma das formas do chamado *Teorema espectral para operadores auto-adjuntos*, que, uma vez estabelecido, abrirá também o caminho para a resolução do problema de definir "função de operador auto-adjunto" (possibilidade que, como veremos, resolverá o problema colocado na Introdução de definir os operadores associados a "funções de um observável físico"). Com efeito, no caso de T_f, é natural (e coerente com a definição de T_f^2 habitual, assim como de "função do operador posição") definir:

[48]Os elementos de $L^2(\Omega, d\mu)$ são, de facto, classes de equivalência de funções para a relação de igualdade $p.p.$–μ, como é sabido, mas adoptaremos sistematicamente o abuso de linguagem que consiste em identificar cada elemento do referido espaço com um seu representante e portanto com uma função (sempre que não haja perigo de confusão).

$$g(T_f) = T_{g\circ f}$$

para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mensurável boreliana (note-se que poderíamos mesmo tomar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, embora, nesse caso, o operador $g(T_f)$ não viesse necessariamente auto-adjunto).

Antes de nos ocuparmos da caracterização da classe $\mathcal{O}$ dos operadores associados a observáveis físicos, analisemos alguns processos importantes de obter operadores auto-adjuntos não triviais.

1.4 Formas sesquilineares e operadores; Teorema de representação para formas.

Seja $Q(\boldsymbol{a})$ subespaço ***denso*** de $\mathcal{H}$ e:

$$\boldsymbol{a} : Q(\boldsymbol{a}) \times Q(\boldsymbol{a}) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

forma sesquilinear[49], ou seja:

- $u \mapsto \boldsymbol{a}(u, v)$ *é forma linear, para todo o* $v \in Q(\boldsymbol{a})$
- $v \mapsto \boldsymbol{a}(u, v)$ *é forma semilinear*[50]*, para todo o* $u \in Q(\boldsymbol{a})$

Se $u \in Q(\boldsymbol{a})$ for tal que a *forma semilinear* $v \mapsto \boldsymbol{a}(u, v)$ é contínua, poderemos prolongá-la de maneira única por continuidade e densidade a uma forma semilinear contínua sobre $\mathcal{H}$, donde, pelo *Teorema de Riesz*, existirá um vector $Au \in \mathcal{H}$ único tal que:

$$\boldsymbol{a}(u, v) = (Au, v), \forall v \in Q(\boldsymbol{a}).$$

Podemos portanto considerar um operador A ***associado à forma*** $\boldsymbol{a}$, definido como atrás, portanto com domínio:

$$D(A) = \{u \in Q(\boldsymbol{a}) : v \mapsto \boldsymbol{a}(u, v) \text{ é contínua sobre } Q(\boldsymbol{a}), \text{ para a topologia de } \mathcal{H}\}.$$

Note-se que nada nos garante, em geral, que o domínio de A seja diferente de $\{0\}$. É fácil concluir que o operador A é simétrico se a forma $\boldsymbol{a}$ for ***hemi-simétrica***, ou seja, se:

$$\boldsymbol{a}(u, v) = \overline{\boldsymbol{a}(v, u)}\,, \forall u, v \in Q(\boldsymbol{a}).$$

Uma forma sesquilinear $\boldsymbol{a}$ fica determinada pela ***forma quadrática*** ou ***diagonal*** associada, aplicação:

[49]"Sesqui" é um prefixo de origem grega que significa "uma vez e meia"; neste caso refere-se ao facto de $\boldsymbol{a}(u, v)$ ser linear na primeira variável e "semilinear" (ou seja, anti-linear) na segunda, e portanto, de certo modo, "uma vez e meia" linear.

[50]ou seja: $\boldsymbol{a}(u, \lambda v + \mu w) = \overline{\lambda}\, \boldsymbol{a}(u, v) + \overline{\mu}\, \boldsymbol{a}(u, w), \forall u, v, w \in Q(\boldsymbol{a}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q} : Q(\boldsymbol{a}) &\to \mathbb{C} \\ u &\mapsto \boldsymbol{q}(u) = \boldsymbol{a}(u,u). \end{aligned}$$

Com efeito, vale a chamada ***identidade de polarização***, de verificação imediata [exercício]:

$$4\boldsymbol{a}(u,v) = \boldsymbol{q}(u+v) - \boldsymbol{q}(u-v) + i(\boldsymbol{q}(u+iv) - \boldsymbol{q}(u-iv)).$$

Desta relação deduz-se facilmente que *uma forma sesquilinear é hemi-simétrica sse a forma quadrática associada for* ***real***. No caso particular em que $\boldsymbol{q}$ só toma valores *não negativos* $\boldsymbol{a}$ diz-se ***positiva***. Nesse caso é ***produto interno*** sobre $Q(\boldsymbol{a})$ a aplicação:

$$\langle u, v\rangle \mapsto (u,v)_a = \boldsymbol{a}(u,v) + (u,v),$$

e o operador A associado a $\boldsymbol{a}$ é ***positivo*** no sentido:

$$(Au,u) \geq 0\,,\ \forall u \in D(A).$$

Se $Q(\boldsymbol{a})$ *for espaço de Hilbert* para este produto interno (ou seja, se for *completo),* a forma $\boldsymbol{a}$ diz-se ***fechada***.

PROPOSIÇÃO 1.6 (Teorema de representação para formas): ***Se a for forma sesquilinear fechada, então o operador A associado é auto-adjunto positivo, tendo-se:***

$$\boldsymbol{R(A+I) = \mathcal{H}}.$$

Além disso o domínio $D(A)$ de A é denso em $Q(a)$ para a topologia associada ao produto interno $(.\,,.)_a$.

Demonstração: Uma vez que $\boldsymbol{a}$ é hemi-simétrica, A é simétrico. Para demonstrar que A é auto-adjunto basta então verificar que $R(A+I) = \mathcal{H}$ (atendendo ao critério fundamental — *cf.* Teorema 1.5 — com $\lambda = 1$). Seja $v \in \mathcal{H}$; a aplicação:

$$w \mapsto (w,v)$$

é forma linear sobre $Q(\boldsymbol{a})$, obviamente *contínua* para a topologia definida por $(.,.)_{\boldsymbol{a}}$. Uma vez que, por hipótese, $Q(\boldsymbol{a})$ é espaço de Hilbert para este produto interno, pelo *Teorema de Riesz* existirá $u \in Q(\boldsymbol{a})$ tal que:

$$(w,v) = (w,u)_a = \boldsymbol{a}(w,u) + (w,u)\ \forall w \in Q(\boldsymbol{a}).$$

Teremos então:

$$w \mapsto \boldsymbol{a}(u,w) = \overline{\boldsymbol{a}(w,u)} = \overline{(w,v) - (w,u)} = (v,w) - (u,w),$$

contínua sobre $Q(\boldsymbol{a})$, *para a topologia de* $\mathcal{H}$, pelo que:

$$u \in D(A) \text{ e } (Au,w) = \boldsymbol{a}(u,w) = (v,w) - (u,w), \forall w \in Q(\boldsymbol{a}).$$

Portanto, $Au + u - v \in Q(\boldsymbol{a})^{\perp} = \{0\}$, donde $v = Au + u$, com $u \in D(A)$, o que acaba a demonstração de que $R(A + I) = \mathcal{H}$.

Resta demonstrar a densidade de $D(A)$ em $Q(A)$. Seja então $v \in Q(\boldsymbol{a})$ ortogonal a $D(A)$ para o produto interno de $Q(A)$; teremos:

$$\boldsymbol{a}(u,v) + (u,v) = 0, \forall u \in D(A) \Rightarrow (Au,v) + (u,v) = 0, \forall u \in D(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v \in R(A+I)^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\} \Rightarrow v = 0,$$

pelo que $[D(A)]^{\perp_{Q(\boldsymbol{a})}} = \{0\}$, donde, de facto, $D(A)$ é denso em $Q(\boldsymbol{a})$.□

Uma classe importante de formas fechadas é a obtida através de *operadores fechados*. Dado um operador linear:

$$S : D(S) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}',$$

($D(S)$ subespaço denso de $\mathcal{H}$ — $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ espaços de Hilbert), podemos definir uma forma sesquilinear com domínio $Q(\boldsymbol{s}) = D(S)$:

$$\boldsymbol{s}(u,v) = (Su, Sv)_{\mathcal{H}'}.$$

É fácil concluir, a partir das definições, que ***s* é fechada sse *S* o for**. Provemos, por exemplo, que se S for fechado, $\boldsymbol{s}$ também o é. Seja u_n sucessão de Cauchy em $Q(\boldsymbol{s})$ para $(.,.)_{\boldsymbol{s}}$; então, obviamente, u_n é de Cauchy em $\mathcal{H}$ e Su_n é de Cauchy em $\mathcal{H}'$, pelo que u_n converge em $\mathcal{H}$ para certo u e Su_n converge para certo v em $\mathcal{H}'$. Sendo S fechado concluimos que $u \in D(S) = Q(\boldsymbol{s})$ e $Su = v$, pelo que, também obviamente, $u_n \underset{n}{\longrightarrow} u$ em $Q(\boldsymbol{s})$, para $(.,.)_{\boldsymbol{s}}$ e portanto $Q(\boldsymbol{s})$ é Hilbert, ou seja, $\boldsymbol{s}$ é fechada.

Como caso particular deste tipo de formas, consideremos:

$$S = A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

A fechado com domínio denso. Pelo que acabámos de ver, a forma sesquilinear de domínio $Q(\boldsymbol{a})$ dada por:

$$\boldsymbol{a}(u,v) = (Au, Av)\,, \forall u, v \in D(A),$$

é fechada, e portanto, pelo Teorema de representação para formas, o operador B associado a $\boldsymbol{a}$ é *auto-adjunto*. Ora a continuidade, para a topologia de $\mathcal{H}$, da forma semi-linear:

$$v \mapsto (Au, Av),$$

(para $u \in D(A)$ fixo), definida em $D(A)$, caracteriza simultaneamente "$u \in$ $\in D(B)$" e "$Au \in D(A^*)$", e o elemento de $\mathcal{H}$, dado pelo Teorema de Riesz, que permite representar esta forma como produto interno, tanto coincide com Bu como com $A^*(Au)$ (por definição), donde se conclui facilmente que, de facto, $B = A^*A$.

Do Teorema de representação para formas também sabemos que $D(B)$ $(= D(A^*A))$ é *denso* em $Q(\boldsymbol{a})$ $(= D(A))$ para a topologia dada por $(.,.)_{\boldsymbol{a}}$, ou seja, em termos de operadores, A é o *fecho da sua restrição a* $D(A^*A)$, tendo-se ainda:

$$R(A^*A + I) = \mathcal{H}.$$

Em resumo, acabámos de demonstrar o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 1.7: ***Sendo A operador fechado com domínio denso num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então A^*A é auto-adjunto positivo, A é o fecho da sua restrição a $D(A^*A)$ (ou seja, $D(A^*A)$ é domínio essencial para A) e:***

$$R(A^*A + I) = \mathcal{H}. \square$$

1.5 Caracterização dos operadores associados a observáveis físicos; os operadores *posição*, *momento linear* e *energia*

TEOREMA 1.8 (Caracterização dos operadores associados a observáveis físicos): ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert complexo; então $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é operador auto-adjunto sse A for simétrico e A^2 maximal simétrico com domínio denso; ou seja, a classe $\mathcal{O}$ dos operadores em $\mathcal{H}$ associados a observáveis físicos coincide com a classe dos operadores auto-adjuntos em $\mathcal{H}$.***

Demonstração: Seja A auto-adjunto; então, como sabemos, A é maximal simétrico com domínio denso e $A^2 = A^*A$ é, pela proposição anterior, auto--adjunto, e portanto também maximal simétrico com domínio denso, donde, de facto, $A \in \mathcal{O}$.

Reciprocamente, suponhamos que A é simétrico e A^2 maximal simétrico com com domínio denso; então $D(A)(\supset D(A^2))$ é também denso, pelo que, em particular, A é fechável (*operador simétrico com domínio denso*). Então $\overline{\mathrm{A}}$ é operador fechado com domínio denso e portanto, pela proposição anterior:

- $\overline{A}^*\overline{A}$ é auto-adjunto,
- $R(\overline{A}^*\overline{A} + I) = \mathcal{H}$.

Por outro lado, atendendo a que A^2 é maximal simétrico:

- $A^2 \subset \overline{A}^*\overline{A} \Rightarrow A^2 = \overline{A}^*\overline{A}$,

pelo que, em particular:

$$R(A^2 + I) = \mathcal{H}.$$

Ora:

$$A^2 + I = (A+i)(A-i) = (A-i)(A+i),$$

donde:

$$R(A+i) = R(A-i) = \mathcal{H},$$

pelo que, atendendo ao critério fundamental (Teorema 1.5), com $\lambda = i$, ou ao respectivo Corolário 1, A é auto-adjunto.□

Retomemos os exemplos de observáveis físicos apresentados na Introdução.

Ao observável *posição* (a uma dimensão de espaço) pretendíamos associar o *operador de multiplicação pela função identidade em* $\mathbb{R}$. Sabemos agora que este operador, com domínio constituído pelas funções de $L^2(\mathbb{R})$ cujo produto pela função identidade ainda está em $L^2(\mathbb{R})$, é, de facto, auto-adjunto naquele espaço de Hilbert, uma vez que a função identidade é *mensurável real* (*cf.* secção 1.3). Do mesmo modo, podemos associar um operador de multiplicação auto-adjunto a qualquer observável que seja função real (mensurável) da posição.

Quanto ao observável *momento linear*, associado a "$(\hbar/i)\, d/dx$", como se verá no exercício 18), *infra*, este operador de derivação, com domínio $C_0^\infty(\mathbb{R}) = \mathfrak{D}(\mathbb{R})$[51], é *essencialmente auto-adjunto* (no quadro de $L^2(\mathbb{R})$); o respectivo fecho tem domínio constituído pela funções *absolutamente contínuas* de $L^2(\mathbb{R})$ com derivada em $L^2(\mathbb{R})$, sendo definido pela mesma expressão diferencial. Ao *momento linear* (para um sistema unidimensional em todo o espaço) ficará então associado este último operador, única extensão auto-adjunta do operador inicialmente considerado.

Para dimensões superiores e domínios distintos do espaço $\mathbb{R}^N$, há que generalizar as considerações anteriores. Relativamente ao observável *posição* e a funções deste, bastará considerar as respectivas *coordenadas* e associar-lhes os operadores de multiplicação pelas funções correspondentes, eventualmente em espaços $L^2(\Omega)$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (para sistemas físicos com movimentos restringidos a Ω). Quanto ao observável *momento*, no exercício 17) *infra* examinam-se operadores "de derivação" no espaço $L^2([0,1])$, entre os quais alguns auto-adjuntos, podendo assim ser associados ao momento linear para sistemas físicos para os quais este observável esteja "confinado" ao intervalo $[0,1]$ (de modo análogo se poderia proceder para qualquer outro intervalo compacto).

Em dimensões superiores podemos procurar seguir o caminho traçado no referido exercício 18); à coordenada de índice $j\ (\in \{1, \ldots, N\})$ do momento linear pretendemos associar "$(\hbar/i)\partial/\partial x_j$". Sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto não vazio, podemos definir este operador de maneira óbvia em $C_0^\infty(\Omega) = \mathfrak{D}(\Omega)$ e designá-lo-emos por D_j tomando $\hbar = 1$ (obviamente sem perda de generalidade); procuremos estudar o respectivo adjunto no quadro de $L^2(\Omega)$. Comecemos por notar que, por processos semelhantes aos sugeridos no exercício 17) *infra* (*regularização por convolução*), é fácil demonstrar a densidade de $\mathfrak{D}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, partin-

[51]Recordemos que se trata do espaço das funções de classe C^∞ e suporte compacto em $\mathbb{R}$.

do da densidade de $C_c(\Omega)$ (espaço das funções complexas contínuas de suporte compacto contido em Ω); D_j^* é, portanto, operador. Também é fácil demonstrar que D_j é *simétrico*, bastando, para tal, invocar o *Teorema de Fubini* e *integrar por partes* em ordem à coordenada de índice j, atendendo também a que as funções têm suporte compacto (podemos considerá-las estendidas a $\mathbb{R}^N$ com o valor zero fora de Ω, o que permite integrar no espaço todo). Temos então:

$$\begin{aligned} v \in D(D_j^*) &\Leftrightarrow \exists v^* \in L^2(\Omega) : \int_\Omega i(\partial_j\varphi)\,\overline{v} = \int_\Omega \varphi\,\overline{v^*}\,,\ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists v^* \in L^2(\Omega) : -i\int_\Omega (\partial_j\overline{\varphi})\,v = \int_\Omega \overline{\varphi}\,v^*\,,\ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists v^* \in L^2(\Omega) : -\int_\Omega (\partial_j\varphi)\,v = \int_\Omega \varphi\,(-iv^*)\,,\ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega); \end{aligned}$$

como D_j^* é *extensão* de $D_j = i(\partial/\partial x_j) = i\partial_j$ (atendendo a que este operador é simétrico) é natural designar $-iv^* = -i\,D_j^*\,v$ por ***derivada generalizada***, ou ***derivada fraca, de v em ordem a x_j***, estendendo-se a este caso os símbolos habituais de derivação. Ou seja, por definição, diremos que $v \in L^2(\Omega)$ ***tem derivada generalizada***, ou ***derivada fraca, em ordem a x_j, em $L^2(\Omega)$*** se existir $w \in$ $\in L^2(\Omega)$ (que se representará por $\partial_j v$ ou $\partial v/\partial x_j$) tal que:

$$\int_\Omega w\,\varphi = -\int_\Omega v\,\partial_j\varphi\,,\ \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega). \tag{18}$$

Esta definição pode ser estendida a funções *localmente somáveis em* Ω (ou seja, funções complexas definidas em Ω que são somáveis em qualquer *compacto* contido em Ω, constituindo o espaço $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$); dir-se-á que $w \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ é a ***derivada generalizada, ou derivada fraca, de $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ em ordem a x_j*** se tiver lugar a propriedade (18)[52]. Mantêm-se algumas das propriedades clássicas associadas às operações de derivação; em particular, no caso de Ω ser *convexo*, por exemplo, se $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\partial_j v$ é o elemento nulo de $L^2(\Omega)$ sse *v não depender da coordenada de índice j* (ou seja, se for igual *p.p.* a uma função que não depende de x_j). Façamos a demonstração para o caso $\Omega = \mathbb{R}^N$; temos:

LEMA 1: ***Seja $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $j \in \{1,\dots,N\}$; então v tem derivada generalizada $\partial_j v$ nula p.p. sse existir uma função complexa $\widetilde{v}$ definida em $\mathbb{R}^{N-1}$ (localmente somável) tal que:***

$$v(x_1,\dots,x_N) = \widetilde{v}(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_N)\,,\ \textit{p.p. em } \mathbb{R}^N.$$

---

[52]Que (18) determina $w = \partial_j v$ de maneira única resulta, por exemplo, de ficar determinada por (18) a medida boreliana complexa associada a w sobre cada compacto de Ω, atendendo a que cada função contínua de suporte compacto contido em Ω pode ser aproximada uniformemente por funções de $\mathfrak{D}(\Omega)$, como acima se referiu (para o estudo das medidas complexas *cf.* [Ru1]). Esta noção de derivada generalizada pode estender-se a objectos mais gerais que funções localmente somáveis, no quadro da chamada *Teoria das Distribuições* (*cf.* [Sw]), razão pela qual também se designam as derivadas fracas por *derivadas no sentido das distribuições*.

Demonstração: Por definição:

$$\partial_j v = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} v\,\partial_j\varphi = 0\,,\ \forall\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N);$$

se v não depender da coordenada de índice j, teremos, atendendo ao Teorema de Fubini e a que φ tem suporte compacto:

$$\int_{\mathbb{R}^N} v\,\partial_j\varphi = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \widetilde{v}\underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}} \partial_j\varphi\,dx_j\Big)}_{=0}\,dx_1\ldots dx_{j-1}dx_{j+1}\ldots dx_N = 0.$$

Reciprocamente, se $\partial_j v = 0$, comecemos por notar que as funções da forma $\partial_j\varphi$ com $\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ se identificam com as funções de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ cujo integral paramétrico "em ordem a x_j" é identicamente nulo; de facto, é óbvio que $\int_{\mathbb{R}}\partial_j\varphi\,dx_j \equiv$ $\equiv 0$ (se $\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$) e se $\psi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}}\psi\,dx_j\equiv 0$, está em $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ a função:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1,\ldots,x_N) = \int_{-\infty}^{x_j}\psi(x_1,\ldots,x_{j-1},s,x_{j+1},\ldots,x_N)\,ds$$

(sendo $[a,b]^N$ um cubo fora do qual ψ se anula, é fácil ver que o mesmo se passa com φ). Ora é óbvio que:

$$\psi\equiv\partial_j\varphi.$$

Concluímos portanto que:

$$\partial_j v = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} v\,\psi = 0\,,\ \forall\psi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)\,:\,\int_{\mathbb{R}}\psi\,dx_j\equiv 0.$$

Para obtermos a "forma geral" das funções v satisfazendo a esta última condição consideremos a seguinte decomposição para as funções de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$; comecemos por fixar $\varphi_0\in\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ com integral igual a 1. Para qualquer $\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ podemos escrever:

$$\varphi(x) = \underbrace{\Big(\varphi(x) - \Big(\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx_j\Big)\varphi_0(x_j)\Big)}_{=\psi(x)} + \Big(\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)\,dx_j\Big)\varphi_0(x_j),$$

em que ψ está em $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ e tem "média em x_j nula" ("integral dx_j" identicamente igual a 0). Então, para qualquer $\varphi\in\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, representando por dx^j o símbolo $dx_1\ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1}\ldots dx_N$ e invocando os Teoremas de Fubini e Tonnelli (*cf.* [BW2]):

$$\int_{\mathbb{R}^N} v\,\varphi = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} v\,\psi}_{=0} + \int_{\mathbb{R}^N} v(x)\Big(\Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx_j\Big)\varphi_0(x_j)\Big)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x_1,\dots,x_{j-1},s,x_{j+1},\dots,x_N)\,\varphi_0(x_j)ds\Big)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \varphi(x_1,\dots,x_{j-1},s,x_{j+1},\dots,x_N)\Big(\int_{\mathbb{R}} v(x)\,\varphi_0(x_j)dx_j\Big)\,dx^j\Big)ds =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_{\mathbb{R}} v(x)\,\varphi_0(x_j)dx_j\Big)\,\varphi\,dx,$$

pelo que, pondo:

$$\widetilde{v}(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_N) = \int_{\mathbb{R}} v(x)\,\varphi_0(x_j)dx_j,$$

ter-se-á:

$$v(x_1,\dots,x_N) = \widetilde{v}(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_N)\,,\ p.p. \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

pelo motivo indicado na nota 52.□

Observações: 1) No caso $N=1$ concluímos que *as únicas funções localmente somáveis com derivada nula p.p. são as constantes (p.p.).*

2) Ainda no caso $N=1$ é fácil adaptar a demonstração anterior substituindo $\mathbb{R}$ por um intervalo $[a,b]$ (limitado ou não).

3) No caso geral da dimensão N, para abertos *conexos* Ω, *as únicas funções localmente somáveis com* todas *as derivadas de primeira ordem nulas p.p. (ou seja, com gradiente nulo p.p.) são as constantes (p.p.)*. Com efeito, é fácil ver, adaptando a demonstração do Lema 1, que uma tal função é *localmente constante (p.p.)*, o que permite mostrar que é igual *p.p.* a uma constante em todo o Ω, por simples argumento de *conexão*.

Outra propriedade de utilização frequente diz respeito à "derivada do produto":

LEMA 2: ***Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto não vazio, $j \in \{1,\dots,N\}$, $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ com derivada generalizada $\partial_j v$ em $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $u \in C^\infty(\Omega)$; então uv tem derivada generalizada $\partial_j(uv)$ em $L^1_{loc}(\Omega)$, dada por:***

$$\partial_j(uv) = (\partial_j u)v + u(\partial_j v).$$

Demonstração: Atendendo às hipóteses, é óbvio que $(\partial_j u)v + u(\partial_j v) \in$ $\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, pelo que basta demonstrar que (*cf.* (18)):

$$\int_\Omega uv\,\partial_j\varphi = -\int_\Omega ((\partial_j u)v + u(\partial_j v))\,\varphi, \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega);$$

ora, atendendo a que $u \in C^\infty(\Omega)$, e a que, portanto, $u\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega uv\,\partial_j\varphi + \int_\Omega (\partial_j u)\,v\,\varphi = \int_\Omega v\,(u\,\partial_j\varphi + \varphi\,\partial_j u) = \int_\Omega v\,\partial_j(u\varphi) =$$
$$= -\int_\Omega (\partial_j v)\,u\varphi \Rightarrow \int_\Omega uv\,\partial_j\varphi = -\int_\Omega ((\partial_j u)v + u(\partial_j v))\,\varphi, \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).\square$$

Podemos então afirmar que $D(D_j^*)$ *é o conjunto das funções* v *de* $L^2(\Omega)$ *com derivada (generalizada)* $\partial_j v$ *em* $L^2(\Omega)$, tendo-se:

$$D_j^* v = i\,\partial_j v\,,\ \forall v \in D(D_j^*).$$

É fácil agora concluir que, pelo menos no caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, D_j é *essencialmente auto-adjunto* (generalizando assim uma das conclusões do exercício 18)). Atendendo ao Corolário 2 do Critério fundamental (Teorema 1.5), basta verificar que:

$$\ker(D_j^* \pm i) = \{0\};$$

ora (atendendo aos Lemas 1 e 2 *supra* e ao que se sabe acerca de D_j^*):

$$u \in \ker(D_j^* \pm i) \Leftrightarrow u \in L^2(\Omega), i\,\partial_j u \pm iu = 0 \Leftrightarrow u \in L^2(\Omega), \partial_j u \pm u = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u \in L^2(\Omega), \partial_j(e^{\pm x_j}\,u) = e^{\pm x_j}\,\partial_j u \pm e^{\pm x_j} u = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u \in L^2(\Omega), e^{\pm x_j}\,u(x) = \widetilde{u}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u \in L^2(\Omega), u(x) = e^{\pm x_j}\,\widetilde{u}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)$$

(para certo $\widetilde{u}$, função complexa definida em $\mathbb{R}^{N-1}$). Mas a última condição implica que (representando por dx^j, como acima, o símbolo $dx_1 \ldots dx_{j-1}\,dx_{j+1} \ldots dx_N$):

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left|e^{\pm x_j}\,\widetilde{u}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)\right|^2 dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{\pm 2x_j}\,dx_j \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widetilde{u}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)|^2\,dx^j \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |\widetilde{u}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N)|^2\,dx^j = 0 \Rightarrow \widetilde{u} = 0\,p.p. \Rightarrow u = 0\,p.p.,$$

o que permite concluir. D_j^* é assim, neste caso, o *fecho* do operador D_j definido em $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$, tratando-se de operador *auto-adjunto*. É agora natural tomar para operador associado à *coordenada* j *do momento linear* (para sistemas físicos com N graus de liberdade sem restrições de domínio) precisamente o operador *auto-adjunto*:

$$\frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial x_j}$$

de domínio constituído pelas funções de $L^2(\mathbb{R}^N)$ *com derivada generalizada* ∂_j em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Relativamente ao momento linear, não tratarermos o caso $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, para $N > 1$; como se pode ver no exercício 17) *infra*, a situação complica-se, mesmo no caso $N = 1$.

Estamos agora preparados para abordar os operadores associados aos observáveis *energia*; a uma dimensão, temos, para um sistema não sujeito a potencial:

$$E = \frac{p^2}{2m},$$

pelo que o operador associado a E será exactamente:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right)^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2},$$

operador auto-adjunto, como *quadrado* do operador associado ao momento linear (a menos de constante positiva). O respectivo domínio será constituído pelas funções de $L^2(\mathbb{R}) \cap C^1$ com primeira derivada absolutamente contínua e primeira e segunda derivadas em $L^2(\mathbb{R})$; veremos mais adiante que a condição "u' em $L^2(\mathbb{R})$" é, neste caso, supérflua, sendo consequência das restantes (*cf.* exercício 132), Capítulo 8). Para domínios diferentes do espaço podem em geral obter-se diversos operadores auto-adjuntos associados à "segunda derivada", correspondentes a distintas "condições de fronteira" (*cf.* exercício 25, *infra*).

Para dimensão N qualquer, procuremos utilizar os resultados teóricos atrás obtidos para construir operadores auto-adjuntos associados à *energia cinética*:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\vec{p}.\vec{p}}{2m};$$

formalmente, tratar-se-á do operador:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{j=1,\ldots,N}.\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{j=1,\ldots,N} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle$$

(*menos Laplaciano*, a menos de constante). Para se obterem *realizações auto-adjuntas* deste "operador", pode utilizar-se a teoria acima desenvolvida das *formas sesquilineares*. Comecemos por designar por ***espaço de Sobolev de ordem* $\mathbf{1}$ *(ou de ordem* $(\mathbf{1},\mathbf{2})$[53]*)*** o subespaço (denso[54]) de $L^2(\Omega)$:

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \bigcap_{j=1}^{N} D(D_j^*);$$

se $N = 1$ e $\Omega =]a, b[$ intervalo não vazio (limitado ou não), concluímos dos exercícios 17), 18) *infra* que $H^1(\Omega)$ é constituído por funções *absolutamente contínuas*, o que em geral não se passa para $N > 1$. Em qualquer caso, uma vez que os operadores D_j^* são *fechados* (por se tratar de adjuntos), é também fecha-

[53]O índice 1 refere-se à ordem de derivação; 2 refere-se ao espaço L^2.

[54]Contém $\mathfrak{D}(\Omega)$…

do, obviamente, o operador:

- $\vec{D} : H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to (L^2(\Omega))^N$
- $u \mapsto \vec{D}u = (D_j^* u)_{j=1,\dots,N} = (i\,\partial_j u)_{j=1,\dots,N} = i\,\vec{\nabla} u;$

sendo assim, atendendo ao que foi visto no final da secção 1.4, é fechada a forma sesquilinear com domínio denso, definida para $u, v \in H^1(\Omega)$ por:

$$\boldsymbol{a}(u,v) = (\vec{D}u, \vec{D}u)_{(L^2(\Omega))^N} = \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^N i\partial_j u\, \overline{i\partial_j v}\Big) = \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^N \partial_j u\, \overline{\partial_j v}\Big).$$

Em particular $H^1(\Omega)$ é *espaço de Hilbert* para a norma associada à forma $\boldsymbol{a}$, que se designa por *norma* H^1 e se representa habitualmente por $\|\,.\,\|_1$; ou seja:

$$\|u\|_1^2 = \sum_{j=1}^N \int_\Omega |\partial_j u|^2 + \int_\Omega |u|^2\,,\ \forall u \in H^1(\Omega).$$

Atendendo ao Teorema de representação para formas (Proposição 1.6), é auto--adjunto o operador A associado a $\boldsymbol{a}$, definido por:

- $D(A) = \{u \in H^1(\Omega) : \exists w \in L^2(\Omega) : \displaystyle\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^N \partial_j u\, \partial_j \overline{v}\Big) = \int_\Omega w\,\overline{v}, \forall v \in H^1(\Omega)\}$
- $Au = w;$

em particular, para $u \in D(A)$, tem-se (por definição dos $\partial_j u$):

$$\int_\Omega (Au)\,\varphi = \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^N \partial_j u\, \partial_j \varphi\Big) = -\int_\Omega \Big(u \sum_{j=1}^N \partial_j^2 \varphi\Big) = -\int_\Omega u \triangle\varphi, \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Resulta imediatamente da caracterização de A que $\mathfrak{D}(\Omega) \subset D(A)$ e, da identidade que acabámos de obter, por integração por partes no último membro:

$$Au = -\triangle u\,,\ \forall u \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

A é portanto *extensão auto-adjunta* do *menos laplaciano* com domínio $\mathfrak{D}(\Omega)$; a caracterização de A atrás obtida sugere que, a exemplo de (18), se defina o ***laplaciano generalizado*** para funções u de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ para as quais exista $w \in$ $\in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que:

$$\int_\Omega w\,\varphi = \int_\Omega u \triangle\varphi\,,\ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Com este novo conceito, podemos afirmar que A é o *menos laplaciano generalizado* com domínio constituído por *funções de $H^1(\Omega)$ com laplaciano generalizado em $L^2(\Omega)$*. Podemos portanto utilizar o operador A para obter realizações auto-adjuntas do observável *energia cinética*; no caso de $\Omega = \mathbb{R}^N$ prova-se que é *essencialmente auto-adjunto* em $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ e que o domínio é constituído por *todas* as funções de $L^2(\mathbb{R}^N)$ cujo laplaciano generalizado está em $L^2(\mathbb{R}^N)$ — ou seja, a condição $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é *consequência* de $u, \triangle u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. No caso geral, podemos obter outros operadores auto-adjuntos naturalmente associados ao *"menos laplaciano"*. Notemos que os operadores D_j são sempre *fecháveis*, uma vez que são *simétricos com domínios densos*; representando por $H_0^1(\Omega)$ o fecho de $\mathfrak{D}(\Omega)$ no espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$ (com a norma $\| \,.\, \|_1$), é fácil ver que:

$$H_0^1(\Omega) \subset \bigcap_{j=1}^{N} D(\overline{D_j})$$

[exercício] e que também é *fechado* o operador:

- $\vec{D}_0 : H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to (L^2(\Omega))^N$
- $u \mapsto \vec{D}u = (D_j^* u)_{j=1,\ldots,N} = (i\,\partial_j u)_{j=1,\ldots,N} = i\,\vec{\nabla} u;$

a partir da forma associada obtemos também um operador auto-adjunto A_0, extensão de $A_{/\mathfrak{D}(\Omega)}$, portanto igual a *"menos laplaciano"*, mas cujo domínio de forma pode estar *estritamente* contido em $Q(\boldsymbol{a})$ ($A_0 = A$ no caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ atendendo a que nesse caso, como já foi referido, A é essencialmente auto-adjunto em $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$).

Para terminar esta análise de operadores associados a observáveis físicos notemos que no caso de existir *potencial* confrontamo-nos com o problema de definir uma *"realização"* auto-adjunta da soma de dois operadores auto-adjuntos — essencialmente o *"menos laplaciano"* (associado à "energia cinética") e o *operador de multiplicação pela função "potencial"*. Se o potencial for *limitado*, o correspondente operador de multiplicação sê-lo-á também, pelo que a respectiva soma com qualquer realização auto-adjunta do "menos laplaciano" será também operador auto-adjunto; no caso geral (que abarca a maioria das situações fisicamente interessantes) dever-se-á proceder a uma análise mais aprofundada, tratando-se ainda de campo activo de investigação.

1.6 Funções de operador e Teorema espectral: caso da dimensão finita e programa de trabalho.

Uma vez "identificados" os operadores associados a observáveis físicos com os auto-adjuntos, o problema de mostrar que *"função de observável é ainda observável"* reduz-se, pelo que atrás se viu, a demonstrar o *Teorema espectral para operadores auto-adjuntos*. Comecemos por examinar o caso de um espaço de Hilbert *de dimensão finita* N; dado um operador auto-adjunto:

$$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

(em dimensão finita tem-se, evidentemente, $D(A) = \mathcal{H}$ [porquê?]) e uma base *ortonormada* $(e_1, \dots, e_N)$ de $\mathcal{H}$, sabemos que nessa base A é representado por uma *matriz hemi-simétrica*:

$$M_A = [a_{jk}]_{j,k=1,\dots,N};$$

ou seja, se

$$\bullet\ x = \sum_{j=1}^{N} x_j\, e_j,\ Ax = \sum_{j=1}^{N} y_j\, e_j$$

$(x_j, y_j \in \mathbb{C}, \forall j = 1, \dots, N)$, então:

$$\bullet\ y_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\, x_k$$

$(\forall j = 1, \dots, N)$, tendo-se:

$$\bullet\ a_{jk} = \overline{a_{kj}}$$

$(\forall j, k = 1, \dots, N)$; com efeito, basta exprimir a condição de simetria para os vectores e_j da base ortonormada. Por outro lado, sabemos que uma matriz hemi-simétrica pode ser *diagonalizada*, ou seja, existe uma matriz *unitária* M_U (portanto M_U é invertível e M_U^{-1} coincide com a *transconjugada* $\overline{M_U}^T$ de M_U, onde:

$$\bullet\ \overline{M_U}^T = [\overline{u_{kj}}]_{j,k=1,\dots,N}\ se\ M_U = [u_{jk}]_{j,k=1,\dots,N})$$

e números *reais* $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_N$ (os *valores próprios* de M_A), tais que:

$$\bullet\ M_U^{-1} M_A M_U = \overline{M_U}^T M_A M_U = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}.$$

Por outras palavras, designando por U o operador em $\mathcal{H}$ de matriz M_U relativamente à base $(e_1, \dots, e_N)$, U é operador *unitário* em $\mathcal{H}$ $(U^{-1} = U^*)$ e:

$$\bullet\ U^{-1} A U x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j\, x_j\, e_j\ \ se\ \ x = \sum_{j=1}^{N} x_j\, e_j.$$

Compondo com U^{-1} o operador unitário de $\mathcal{H}$ em $\mathbb{C}^N$ que a $x = \sum_{j=1}^{N} x_j\, e_j$ faz corresponder $(x_1, \dots, x_N)$, obtemos um operador unitário:

$$W : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^N,$$

para o qual:

$$\bullet\ W A W^{-1} \widetilde{x} = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_N x_N)\ se\ \widetilde{x} = (x_1, \dots, x_N);$$

ora $\mathbb{C}^N$ pode ser identificado com $L^2(\{1, \dots, N\}, d\mu)$ onde μ é a *medida de* *contagem*:

$$\mu(\Omega) = \#\,\Omega.$$

Portanto A fica *unitariamente equivalente* ao operador de multiplicação pela função:

$$j \mapsto \lambda_j$$

no espaço $L^2(\{1, \ldots, N\}, d\mu)$. Esta "representação" não é única; com efeito, suponhamos agora que os valores próprios são todos distintos, e consideremos em $\mathbb{R}$ a medida:

$$\bullet\ \nu = \sum_{j=1}^{N} \delta_{\lambda_j},$$

(onde δ_{λ_j} — o *delta de Dirac* em λ_j — é definida por:

$$\begin{cases} \delta_{\lambda_j}(\Omega) = 0 & se\ \lambda_j \notin \Omega \\ \delta_{\lambda_j}(\Omega) = 1 & se\ \lambda_j \in \Omega \end{cases},$$

para todo o boreliano Ω de $\mathbb{R}$). É fácil concluir que $L^2(\mathbb{R}, d\nu)$ se pode identificar com $\mathbb{C}^N$ já que "ser igual $p.p. - \nu$" é equivalente, para

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

mensuráveis, a:

$$f(\lambda_j) = g(\lambda_j)\ ,\ j = 1, \ldots, N.$$

Nesta representação teremos:

$$(WAW^{-1}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda),$$

para $\lambda \in \mathbb{R}, p.p. - \nu$ (sendo $f \in L^2(\mathbb{R}, d\nu)$, identificada com

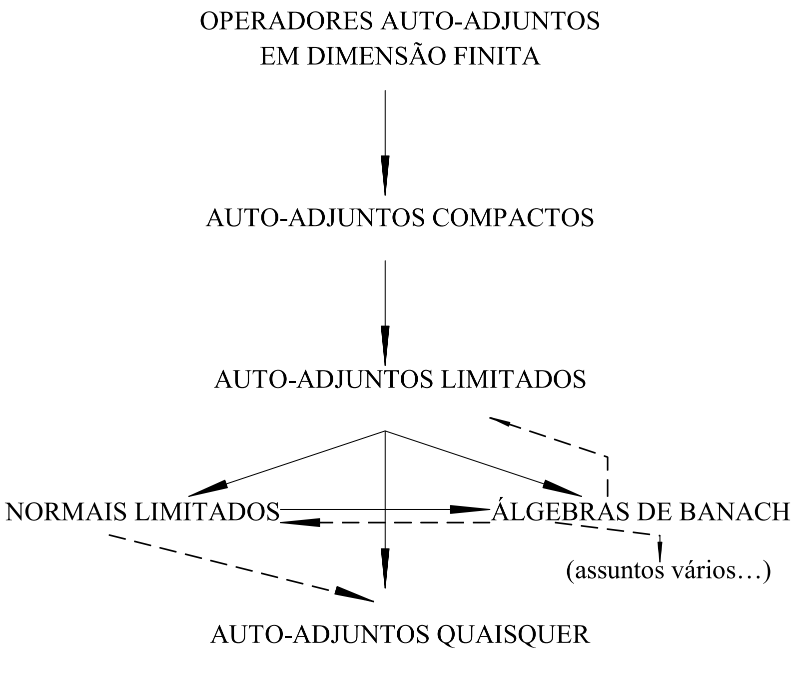
$$(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_N)),$$

ou seja, A fica "representado" em $L^2(\mathbb{R}, d\nu)$ pelo produto por "λ" — função identidade).

O que acabamos de verificar para o caso de um espaço de dimensão finita é, no fundo, caso particular do conhecido *Teorema espectral para operadores auto--adjuntos compactos* em espaços de Hilbert. Resulta do que se disse, a importância do *espectro* de A na construção da *representação diagonal* de A; é pois de esperar que uma generalização do conceito de espectro para operadores *não limitados* venha a desempenhar papel fundamental na teoria dos operadores auto-adjuntos. Fazendo o ponto da situação em que nos encontramos quanto à definição de "função de operador auto-adjunto", pode dizer-se que a questão está resolvida para a dimensão finita (e para os operadores compactos em qualquer dimensão, com uma generalização fácil das considerações acima feitas, desde que se conheça o teorema espectral para estes operadores); tendo por objectivo o caso *não-li-*

mitado em dimensão *qualquer*, podemos pensar no caso “intermédio” de operadores *limitados de domínio igual ao espaço* (não necessariamente compactos) em dimensão qualquer. Nesse caso trabalha-se no quadro de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ onde A^2 está definido mesmo para A não auto-adjunto; sendo “o quadrado” um dos exemplos básicos de *função de operador* podemos pensar em tratar o caso “intermédio” no quadro mais geral de uma estrutura em que faça sentido definir o quadrado de um elemento — tratar-se-á da estrutura de ***Álgebra de Banach*** que, como veremos, permitirá tratar de modo unificado, não só o problema que agora nos ocupa, mas também uma série de outros problemas aparentemente desligados. O que atrás se disse sugere que, também neste novo quadro, seja importante introduzir uma noção apropriada de *espectro* de um elemento.

Esquematicamente teremos a seguinte série de extensões do caso já conhecido da dimenão finita:



(as setas “a cheio” representam uma extensão da teoria “inicial” pela “final” e as “tracejadas” representam os trajectos que seguiremos, começando com a teoria das Álgebras de Banach; dizem-se normais os operadores A tais que $AA^* = A^*A$).

Exercícios

7) Mostre que:

a) Todo o operador linear é correspondência linear mas que existem correspondências lineares que não são operadores.

b) Uma correspondência $C \neq \emptyset$ em $\mathcal{H}$ é *linear* sse:

$$\lambda Cu + \mu Cv \subset C(\lambda u + \mu v)\,,\ \forall u, v \in \mathcal{H}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

c) Sendo C correspondência linear em $\mathcal{H}$, $M, N \subset \mathcal{H}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, então:

$$\lambda C(M) + \mu C(N) \subset C(\lambda M + \mu N)$$

d) Sendo B, C correspondências (lineares) em $\mathcal{H}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, também são lineares as correspondências $B + C, \lambda C, BC$, tendo-se

- $D(B + C) = D(B) \cap D(C)$,
- $D(\lambda C) = D(C)$,
- $D(BC) = \{u \in D(C) : Cu \cap D(B) \neq \emptyset\}$

8) Demonstre a Proposição 1.1 e dê exemplos de correspondências lineares (sempre que possível, operadores) A, B, C tais que:

a) $A(B + C) \not\subset AB + AC$; **b)** $(B + C)A \not\supset BA + CA$;

c) $(0B)C \not\supset B(0C)$.

9) Sejam B, C correspondências (lineares) em $\mathcal{H}$; mostre que:

a) Se $D((B + C)^*) \subset D(B^*)$ e $D(C) \subset D(B)$, então $(B + C)^* = B^* + C^*$.

b) Se:

$$D((BC)^*) \subset D(B^*) \text{ e } R(C) \subset D(B),$$

ou

$$R((BC)^*) \subset R(C^*) \text{ e } D(B) \subset R(C)$$

então $(BC)^* = C^*B^*$.

10) Mostre que sendo $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador unitário, então para todo o $M \subset \mathcal{H}$:

$$(UM)^\perp = U(M^\perp).$$

11) Demonstre a equivalência das quatro condições que caracterizam os *operadores essencialmente auto-adjuntos*, a saber, para $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador com domínio denso:

(i) $A \subset \overline{A} = A^{**} = A^*$;

(ii) $\overline{A}$ é operador auto-adjunto;

(iii) A^* é operador auto-adjunto;

(iv) A, A^* são simétricos.

12) Mostre como os resultados da secção 1.3 se podem estender, *mutatis mutandis*, a correspondências.

13) Mostre que um operador simétrico A tal que um dos espaços $R(A+i)$ ou $R(A-i)$ coincide com $\mathcal{H}$ é *maximal simétrico*.

14) Mostre que um operador limitado $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é fechado sse $D(A)$ o for e que, por outro lado, um operador fechado é limitado sse $D(A)$ for fechado.

15) Sejam f função mensurável limitada de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ tal que $f \notin L^2(\mathbb{R}), u_0 \in$ $\in L^2(\mathbb{R})$; considere o operador T em $L^2(\mathbb{R})$ definido por:

$$\bullet\; D(T) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |f(x)\, u(x)|\, dx < +\infty\},$$

$$\bullet\; Tu = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, u(x)\, dx\right) u_0\,,\ \forall u \in D(T).$$

Mostre que $D(T)$ é denso em $L^2(\mathbb{R})$ e calcule T^*. Será T fechável?

16) Com as notações do exercício anterior considere o espaço de Hilbert:

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C} = \{\langle u, \lambda\rangle : u \in L^2(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{C}\}$$

e a aplicação A definida por:

$$\bullet\; D(A) = D(T) \times \{0\} = \{\langle u, 0\rangle \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)u(x)|\, dx < +\infty\};$$

$$\bullet\; A(\langle u, 0\rangle) = \langle 0, \int_{\mathbb{R}} f(x)\, u(x)\, dx\rangle \in \mathcal{H}\,,\ \forall u \in D(T).$$

a) Mostre que A é operador linear mas que não tem domínio denso.

b) Verifique que A é simétrico e determine a correspondência A^*.

c) Determine a correspondência $\overline{A}$ e os espaços $R(A^* \pm i)$, ker $(A^* \pm i)$.

17) Em $L^2([0,1])$ considere os seguintes operadores definidos nos seus respectivos domínios por $i(d/dx)$:

- $D(A) = \{u \in L^2([0,1]) : u$ é absolutamente contínua em $[0,1]$ e $u' \in L^2\}$;
- $D(A_0) = \{u \in D(A) : u(0) = u(1) = 0\}$;
- $D(A_\alpha) = \{u \in D(A) : u(0) = \alpha u(1)\}$

(para $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha| = 1$). Mostre que os domínios considerados são densos em $L^2([0,1])$ e caracterize A^*, A_0^*, A_α^*, mostrando, em particular, que A_α é auto-adjunto. [Sugestão: Para provar a densidade dos domínios, notar que qualquer deles contém $\mathfrak{D}(]0,1[) = C_0^\infty(]0,1[)$, espaço das funções de classe C^∞ e suporte compacto em $]0,1[$, que é denso em $L^2([0,1])$. Se desconhece este último resultado, pode demonstrá-lo baseando-se em que a classe $C_c(]0,1[)$ das funções contínuas com suporte compacto é densa em $L^2(]0,1[)$ (*cf.* [Ru1]); basta, em seguida, aproximar uma função arbitrária de C_c por funções de $\mathfrak{D}$. Para isso pode usar-se um método de *regularização por convolução* que consiste em substituir a função (em cada ponto x) por uma "média pesada" dos respectivos valores numa vizinhaça de x, utilizando-se como pesos funções de $\mathfrak{D}$ convenientes. Considera-se uma função $\rho \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ com suporte contido em $]-1, 1[$, tal que $\rho \geq 0$ e $\int_{-1}^{1} \rho(x)\, dx = 1$ (a existência de ρ pode resultar da sugestão do exercício 3 da Introdução); pondo:

$$\rho_n(x) = n\, \rho(nx),$$

obtemos uma sucessão de "densidades de probabilidade" com suportes contidos em $[-1/n, 1/n]$, ou seja, em particular, $\rho_n \geq 0$ e $\int_{-1}^{1} \rho_n(x)\, dx = 1$ (*cf.* figura 3, *infra*).

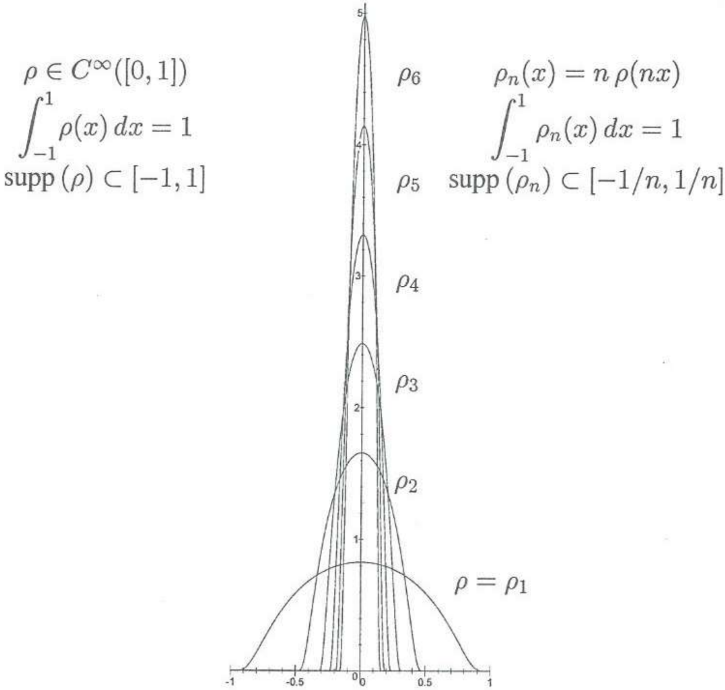


Figura 4

Os ρ_n constituem o que se chama uma *"aproximação da unidade"* e as *regularizadas* de uma função $\varphi \in C_c(]0, 1[)$ são definidas pela *convolução* de φ com os ρ_n, operação dada por:

$$\rho_n * \varphi\,(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x-y)\, \varphi(y)\, dy$$

(onde se consideram as funções prolongadas a $\mathbb{R}$ por zero); é fácil verificar que $\varphi_n = \rho_n * \varphi$ é de classe C^∞ e de suporte compacto contido em $]0, 1[$ para n suficientemente grande ($2/n$ inferior à distância entre o suporte de φ e a fronteira de $[-1, 1]$), tendo-se[55]:

- $\varphi_n \underset{n}{\longrightarrow} \varphi$ uniformemente.

Em particular:

[55] *cf.* a Proposição 3.5 e o Lema 3 que se lhe segue.

• $\varphi_n \xrightarrow[n]{} \varphi$ em $L^2([0,1])$

(visto $[0,1]$ ser limitado) e portanto, de facto $\mathfrak{D}([0,1])$ é denso em $L^2([0,1])$.

Para o estudo do adjunto convém recordar que a fórmula de integração por partes vale para funções absolutamente contínuas; para a demonstrar pode recorrer-se à representação de uma tal função pelo integral indefinido de função localmente somável (que é a respectiva derivada $p.p.$, embora não seja necessário utilizar esta informação[56]), ou seja, se $F \in AC([0,1])$ "com derivada em $L^1([0,1])$", por definição existe uma função $f \in L^1([0,1])$ tal que:

• $F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt\,;\; F' = f\; p.p.$ em $[0,1]$;

se $F \in D(A)$, tem-se $f \in L^2([0,1])$. Então, se $G \in AC([0,1])$ e $G' = g$ (no sentido acima, ou seja, sendo G o integral indefinido de g, a menos de constante aditiva, sabendo-se que, nesse caso, G é derivável $p.p.$ com derivada igual a g $p.p.$), vem:

$$\int_0^1 F(x)\,g(x)\,dx = F(1)G(1) - F(0)G(0) - \int_0^1 f(x)\,G(x)\,dx.$$

Basta, com efeito, substituir F, G pelas respectivas representações como integrais indefinidos e invocar o Teorema de Fubini. Também se podem utilizar os Lemas 1 e 2 da secção 1.5 com $N = 1$, para concluir a caracterização dos adjuntos.

Como referências para a resolução deste exercício por métodos distintos, veja-se [Ru2], 13.4, [RS1] exemplo de VIII-2 e [Y], exemplos 3. e 4. de VII-3].

18) Considere os operadores A_1, A_2 definidos em $L^2(\mathbb{R})$ com domínio $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ e em $L^2(]0,+\infty[)$ com domínio $\mathfrak{D}(]0,+\infty[)$, respectivamente, por:

$$A_j u = iu'\,, \forall u \in D(A_j)$$

$(j = 1, 2)$.

a) Caracterize A_j^* $(j = 1, 2)$.

b) Para cada $j = 1, 2$ será A_j essencialmente auto-adjunto? Justifique.

[Sugestão: Pode utilizar a sugestão do exercício anterior].

19) Mostre que um operador A com domínio denso em $\mathcal{H}$, essencialmente auto-adjunto, admite uma extensão auto-adjunta e uma só. O que pode concluir quanto ao operador A_0 do exercício 17)?

20) Seja $U : D(U) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\|Uu\| = \|u\|, \forall u \in D(U)$ (U diz-se *isometria parcial*). Mostre que:

a) $(Uu, Uv) = (u, v)\,,\ \forall u, v \in D(U)$.

b) Se $R(I - U)$ for denso em $\mathcal{H}$, então $I - U$ é injectivo.

c) Se um dos espaços $D(U)$, $R(U), \mathcal{G}(U)$ for fechado, o mesmo sucede com os restantes.

[56] Trata-se de um teorema devido a Lebesgue.

21) Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador simétrico e:

$$\bullet\, U = (A - i)(A + i)^{-1}$$

(*Transformada de Cayley* de A). Mostre que:

a) $\|Uu\| = \|u\|, \forall u \in D(U)$.

b) U é *fechado* sse A o for.

c) $R(I - U) = D(A), I - U$ é *injectivo* e:

$$\bullet\, A = i(I + U)(I - U)^{-1};$$

em particular, a *Transformação de Cayley* $A \mapsto U$ é uma aplicação *injectiva* no conjunto dos operadores simétricos.

d) U é *unitário* sse A for *auto-adjunto*.

e) Se V for isometria parcial num subespaço $D(V) \subset \mathcal{H}$ tal que $I - V$ é injectiva, V é transformada de Cayley de um operador simétrico em $\mathcal{H}$ (ou seja a Transformação de Cayley é *bijecção* — atendendo também a c) — do conjunto dos operadores simétricos em $\mathcal{H}$ sobre o conjunto das isometrias parciais V em $\mathcal{H}$ tais que $I - V$ é injectiva).

22) Seja

$$\boldsymbol{a} : Q(\boldsymbol{a}) \times Q(\boldsymbol{a}) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

forma sesquilinear e $\boldsymbol{q}$ a *forma quadrática* associada.

a) Demonstre a chamada *identidade de polarização*:

$$4\boldsymbol{a}(u, v) = \boldsymbol{q}(u + v) - \boldsymbol{q}(u - v) + i(\boldsymbol{q}(u + iv) - \boldsymbol{q}(u - iv)),$$

$\forall u, v \in Q(\boldsymbol{a})$.

b) Mostre que $\boldsymbol{a}$ é *hemi-simétrica sse* $\boldsymbol{q}$ for *real*.

c) Supondo $\boldsymbol{a}$ *hemi-simétrica* mostre que:

$$\sup_{\|u\| \leq 1} |\boldsymbol{a}(u, u)| = \sup_{\|u\|, \|v\| \leq 1} |\boldsymbol{a}(u, v)|$$

d) Se $\boldsymbol{a}$ for *positiva*, mostre que:

$$|\boldsymbol{a}(u, v)|^2 \leq \boldsymbol{a}(u, u)\, \boldsymbol{a}(v, v)$$

$\forall u, v \in Q(\boldsymbol{a})$. Conclua que, nesse caso, é *produto interno* sobre $Q(\boldsymbol{a})$ a aplicação:

$$(u, v) \mapsto (u, v)_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}(u, v) + (u, v).$$

e) Se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ for auto-adjunto, mostre que:

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |(Au, u)|.$$

f) Se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, mostre que:

$$\|A^* A\| = \|A\|^2 = \|AA^*\|.$$

23) Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador simétrico *positivo* (ou seja $(Au, u) \geq 0$, $\forall u \in D(A)$). Mostre que:

a) $\|(A + I)u\|^2 \geq \|u\|^2 + \|Au\|^2, \forall u \in D(A)$.

b) Se A for *fechado*, $R(A + I)$ é *fechado*.

c) Se $D(A)$ for *denso* em $\mathcal{H}$, A é *essencialmente auto-adjunto* sse ker $(A^* + + I) = \{0\}$.

d) A é *auto-adjunto* sse $R(A + I) = \mathcal{H}$.

24) Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador simétrico. Seja $D_1 \subset D(A)$ subespaço de $\mathcal{H}$ tal que $A_{/D_1}$ é essencialmente auto-adjunto (ou seja, D_1 domínio essencial para A). Prove que A é essencialmente auto-adjunto e $\overline{A} = \overline{A_{/D_1}}$.

25) A partir dos operadores A, A_0, A_α do exercício 17) construa todos os possíveis operadores "diferenciais de segunda ordem" que se podem obter utilizando a Proposição 1.7, caracterizando os respectivos domínios.

26) Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auto-adjunto e $\mathcal{H}_1$ subespaço fechado de $\mathcal{H}$; então é auto-adjunto em $\mathcal{H}_1$ o operador $A_1 = A_{/\mathcal{H}_1}$ (*restrição de A a $\mathcal{H}_1$*)definido por:

- $D(A_1) = \{u \in D(A) \cap \mathcal{H}_1 : Au \in \mathcal{H}_1\}$,
- $A_1 u = Au, \forall u \in D(A_1)$,

sse $(A \pm i)^{-1}\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$.

27) Seja $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador, F, G subespaços fechados de $\mathcal{H}$ tais que:

$$F \oplus G = \mathcal{H}$$

e P a projecção sobre F nesta soma directa; diz-se que o par (F, G) *reduz* A se:

- $PD(A) \subset D(A), AF \subset F, AG \subset G$.

Mostre que:

a) (F, G) reduz A sse (G, F) reduz A.

b) (F, G) reduz A sse $PA \subset AP$.

c) Se $D(A)$ for denso e (F, G) reduzir A, então $D(A) \cap F$ é denso em F.

d) Se A for simétrico com domínio denso $(F, F^{\perp})$ reduz A sse:

$$PD(A) \subset D(A)\,,\; APD(A) \subset F$$

(nesse caso diz-se simplesmente que F reduz A).

e) Se A for auto-adjunto e F reduzir A, então $A_{/D(A)\cap F}$ é auto-adjunto em F.

2ª Parte
Álgebras de Banach e Aplicações

Capítulo 2

Álgebras de Banach

2.1 Álgebras de Banach; generalidades. Representação regular

Os resultados fundamentais da Teoria das Álgebras de Banach foram obtidos por Gelfand a partir de 1939, ainda que alguns resultados (relativos sobretudo a funções holomorfas de elemento de uma álgebra) tenham sido obtidos independentemente por Lorch, sensivelmente na mesma época; as dificuldades resultantes da segunda guerra mundial explicam as deficiências de comunicação e a publicação tardia de alguns trabalhos neste campo.

DEFINIÇÃO: *Chamamos **Álgebra de Banach** a um par $(\mathcal{A}, .)$ em que $\mathcal{A}$ é espaço de Banach complexo e "." operação binária em $\mathcal{A}$ (que a $\langle x, y\rangle \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ faz corresponder um elemento $x.y$ ou simplesmente $xy \in \mathcal{A}$) designado por **produto** (de $\mathcal{A}$) e, para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$, satisfazendo às condições:*

1. $(xy)z = x(yz)$.
2. $x(y+z) = xy + xz$.
3. $(y+z)x = yx + zx$.
4. $x(\lambda y) = \lambda(xy) = (\lambda x)y$.
5. *O produto é contínuo à esquerda e à direita, ou seja, para cada $a \in \mathcal{A}$ são contínuas as aplicações de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$:*

$$x \mapsto ax\,,\; x \mapsto xa$$

De aqui em diante, sempre que não haja perigo de confusão, designaremos por $\mathcal{A}$, indiferentemente, o espaço de Banach $\mathcal{A}$ e a álgebra $(\mathcal{A}, .)$ fixada de uma vez por todas; representaremos por $\| \, . \, \|$ a norma de $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ dir-se-á ***comutativa*** se tiver lugar a propriedade:

6. $xy = yx\,,\ \forall x, y \in \mathcal{A}$,

e dir-se-á ***álgebra com unidade*** se existir um elemento $e \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ (***unidade** de* $\mathcal{A}$) tal que:

7. $ex = xe = x\,,\ \forall x \in \mathcal{A}$.

A unidade, se existir, é obviamente única, pois se e, e' forem unidades de $\mathcal{A}$:

$$ee' = e, ee' = e' \Rightarrow e = e'.$$

Um elemento $x \in \mathcal{A}$, álgebra com unidade e, diz-se ***invertível*** se existir $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e;$$

o inverso de um elemento, se existir, é único, pois se x' for também inverso de x, tem-se:

$$x' = x'e = x'(xx^{-1}) = (x'x)x^{-1} = ex^{-1} = x^{-1}.$$

O conjunto G dos elementos *invertíveis* de $\mathcal{A}$ constitui um grupo para o produto, como é fácil verificar (***grupo dos elementos invertíveis** de* $\mathcal{A}$); além disso:

$$x, x' \in G \Rightarrow (xx')^{-1} = x'^{-1}x^{-1}.$$

É óbvio que $e \in G, e = e^{-1}, 0 \notin G$ e $0x = (0-0)x = 0x - 0x = 0 = x0$, para todo o $x \in A$ (sendo 0 o zero — elemento neutro para a adição — de $\mathcal{A}$).

Define-se ***potência de expoente n*** $\in \mathbb{N}_1$ de $a \in \mathcal{A}$ por recorrência (representando-se por $\boldsymbol{a^n}$), através de:

- $a^1 = a$
- $a^{n+1} = a(a^n)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}_1;$

se $\mathcal{A}$ tiver unidade e põe-se:

- $a^0 = e\,,\ \forall a \in \mathcal{A}.$

É fácil provar [exercício] que se $a \in \mathcal{A}, n, m \in \mathbb{N}_1$ (ou $n, m \in \mathbb{N}$ no caso de $\mathcal{A}$ ter unidade):

(19)
- $a^n a^m = a^{n+m};$
- $(a^n)^m = a^{nm}.$

Se $\mathcal{A}$ tiver unidade, $a \in \mathcal{A}$ for invertível e $n \in \mathbb{N}$, então a^n é invertível, tendo-se [exercício]:

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n,$$

elemento que passaremos também a representar por a^{-n}, ***potência de expoente menos n de a***. Para elementos invertíveis, fica assim definida a potência de qualquer expoente *inteiro*, podendo estender-se a $\mathbb{Z}$ as propriedades (19) [exercício].

Dado um polinómio de grau $N \in \mathbb{N}$ a uma indeterminada de coeficientes complexos $c_0, \dots, c_N$ $(c_N \neq 0)$[57], que podemos identificar com uma função complexa de variável complexa:

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} c_j \, \lambda^j,$$

podemos agora definir $p(a)$ para $a \in \mathcal{A}$, álgebra com unidade[58], através de:

$$p(a) = \sum_{j=0}^{N} c_j \, a^j.$$

O conjunto $\mathcal{P}$ das funções polinomiais acima definidas (incluindo a função *nula*) constitui subálgebra (no sentido apenas algébrico) de $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ com as operações habituais sobre funções. Fixado $a \in \mathcal{A}$ (álgebra com unidade) a aplicação:

$$p \mapsto p(a),$$

é *homomorfismo* de $\mathcal{P}$ em $\mathcal{A}$, tratando-se mesmo do *único* homomorfismo entre as duas álgebras tal que:

- $1 \mapsto e$
- $\widehat{\lambda} \mapsto a$

(sendo 1 o polinómio de grau zero constante igual a 1 e $\widehat{\lambda}$ a aplicação identidade — polinómio de grau 1), como é fácil verificar [exercício]. Em particular, sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ as raízes do polinómio p (de grau $N \in \mathbb{N}_1$) de multiplicidades respectivamente $r_1, \dots, r_k$ $(r_1 + \cdots + r_k = N)$, teremos:

$$p(a) = c_N (a - \lambda_1 e)^{r_1} \dots (a - \lambda_k e)^{r_k},$$

identidade de que nos serviremos adiante.

Se $\mathcal{A}$ *não tiver unidade* podemos sempre "injectar" $\mathcal{A}$ *isometricamente* (através de um homomorfismo algébrico) numa álgebra $\mathcal{A}'$ com unidade. Formalmente o processo consiste em estender as operações de $\mathcal{A}$ aos elementos "da forma $x + \lambda e$", com $x \in \mathcal{A}$, e uma "unidade que se acrescenta a $\mathcal{A}$" e $\lambda \in \mathbb{C}$; um modelo pode consistir em:

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times \mathbb{C}$$

com a estrutura de *Espaço de Banach produto*, a norma:

- $\|\langle x, \lambda \rangle\|' = \|x\| + |\lambda|,$

$\forall \langle x, \lambda \rangle \in \mathcal{A}'$, e o produto:

[57] Também consideraremos como polinómio a função *identicamente nula*, a que se atribui o grau $-\infty$, de modo que se mantém a propriedade "grau do produto igual à soma dos graus dos factores".
[58] Se $c_0 = 0$ não é necessário supor que existe unidade em $\mathcal{A}$.

$$\bullet\ \langle x,\lambda\rangle.\langle y,\mu\rangle = \langle xy + \lambda y + \mu x, \lambda\mu\rangle,$$

$\forall x, y \in \mathcal{A}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. É fácil verificar que se obtém uma álgebra de Banach *com unidade* $e = \langle 0, 1\rangle$ e que a aplicação:

$$\bullet\ x \mapsto \langle x, 0\rangle$$

de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}'$ é isometria de $\mathcal{A}$ na respectiva imagem que é também homomorfismo de álgebras (mantém o produto, para além de ser linear). Identificando x com $\langle x, 0\rangle$ e designando $\langle 0, 1\rangle$ por e, os elementos de $\mathcal{A}'$ ficam identificados univocamente com os elementos da forma $x + \lambda e$. Por vezes, por abuso de linguagem, fala-se da *"unidade de $\mathcal{A}$"* ($\mathcal{A}$ álgebra *sem unidade*), querendo significar, evidentemente, a unidade de $\mathcal{A}'$.

Importante exemplo de álgebra de Banach é $\mathcal{L}(E)$, onde E é espaço de Banach complexo, com o produto definido através da composição de operadores; recordemos que a norma de $A \in \mathcal{L}(E)$ é dada por:

$$\|A\| = \sup_{\|u\|\le 1} \|Au\| = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|,$$

estando bem definida pelo facto de $A : E \to E$ ser operador contínuo, ou seja, de modo equivalente, limitado na bola fechada de raio 1 de E. A conhecida desigualdade:

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|,$$

$\forall A, B \in \mathcal{L}(E)$, garante a continuidade direita e esquerda do produto. Mais precisamente, neste caso o produto é mesmo *bicontínuo*, ou seja, contínuo como função de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ em $\mathcal{L}(E)$, como é fácil concluir. A convergência de sucessões para a topologia de $\mathcal{L}(E)$ designa-se habitualmente por ***uniforme*** (por o ser na bola unitária). É usual introduzir também o conceito de ***convergência forte*** de operadores; diz-se que A_n converge para A ***fortemente*** ($A_n, A \in \mathcal{L}(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$) se:

$$A_n u \underset{n}{\longrightarrow} Au\,,\ \forall u \in E.$$

A utilização de outras topologias em E permite obter correspondentes noções de convergência em $\mathcal{L}(E)$ (a convergência *fraca*, ou a fraca-$*$ quando se trata de um espaço *dual*, por exemplo).

Vamos ver que *a menos de isomorfismo bicontínuo de álgebras*, os $\mathcal{L}(E)$, juntamente com as respectivas subálgebras fechadas, esgotam *todos* os possíveis exemplos de álgebras de Banach. Bastar-nos-á considerar álgebras com unidade, atendendo ao que atrás se viu.

TEOREMA 2.1 (Representação regular esquerda): ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade e; então a aplicação:***

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} : \mathcal{A} &\to \mathcal{A}^{\mathcal{A}} \\ a &\mapsto \mathfrak{T}_a \end{aligned}$$

tal que:

$$\bullet\, \mathfrak{T}_a(x) = ax\,,\ \forall x \in \mathcal{A},$$

tem imagem em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ e é isomorfismo bicontínuo da álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ tal que $\mathfrak{T}_e = I$ (identidade em $\mathcal{A}$); em particular $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ é fechado em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ e existe uma norma sobre $\mathcal{A}$, $\|\,.\,\|'$ que define a topologia de $\mathcal{A}$ e tal que:

$$\begin{aligned} &\bullet\, \|x.y\|' \leq \|x\|'\|y\|'\,,\ \forall x \in \mathcal{A}, \\ &\bullet\, \|e\|' = 1. \end{aligned}$$

Além disso $a \in \mathcal{A}$ é invertível sse $\mathfrak{T}_a$ for invertível em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Demonstração: É óbvio, a partir dos axiomas relativos ao produto, que $\mathfrak{T}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$ e que $\mathfrak{T}$ é homomorfismo de álgebras. A injectividade de $\mathfrak{T}$ resulta da existência de unidade em $\mathcal{A}$, pois $\mathfrak{T}_a = 0 \Rightarrow a = ae = \mathfrak{T}_a e = 0$. Resta provar que $\mathfrak{T}$ é homomorfismo vectorial topológico; comecemos por verificar que $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ é fechado em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Os elementos de $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ têm a seguinte propriedade:

$$\bullet\, \mathfrak{T}_a(xy) = a(xy) = (ax)y = (\mathfrak{T}_a x)y\,,\ \forall x, y \in \mathcal{A},$$

e é fácil verificar que esta propriedade é *característica* de $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ entre os elementos de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$; com efeito, se $B \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ e:

$$B(xy) = (Bx)y,$$

$\forall x, y \in \mathcal{A}$, pondo $a = Be$ obtém-se:

$$Bx = B(ex) = (Be)x = ax, \forall x \in \mathcal{A} \Rightarrow B = \mathfrak{T}_a \in \mathfrak{T}(\mathcal{A}).$$

Esta caracterização permite imediatamente concluir que $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ é *fechado*, pois se:

$$\mathfrak{T}_{a_n} \xrightarrow[n]{} B$$

em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, ter-se-á:

$$B(xy) = \lim_n\, (\mathfrak{T}_{a_n} x)y = (Bx)y,$$

$\forall x, y \in \mathcal{A}$, donde $B \in \mathfrak{T}(\mathcal{A})$ ($\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ é mesmo fechado para a *topologia forte dos operadores*, mais *fraca* que a *uniforme* — ou seja, que a topologia de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ como espaço normado).

Sendo $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ fechado, é espaço de Banach para a norma de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$; atendendo ao *teorema da aplicação aberta*, basta então, para concluir a demonstração da primeira parte do teorema, verificar que $\mathfrak{T}^{-1}$ é contínua de $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ em $\mathcal{A}$, o que é consequência imediata da desigualdade:

$$\|\mathfrak{T}_a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} = \sup_{\|x\|=1} \|ax\| \geq \left\| a\frac{e}{\|e\|} \right\| = \frac{\|a\|}{\|e\|}$$

(atendendo a que, obviamente, $\|e\| \neq 0$). O isomorfismo $\mathfrak{T}$ permite "transportar" para $\mathcal{A}$ a norma de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, que define em $\mathcal{A}$ a mesma topologia; ou seja, mais precisamente, é equivalente a $\|\,.\,\|$ em $\mathcal{A}$ a norma $\|\,.\,\|'$ definida por:

$$\|a\|' = \|\mathfrak{T}_a\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$$

$(a \in \mathcal{A})$. As propriedades de $\|\,.\,\|'$ resultam, evidentemente, das correspondentes propriedades conhecidas de $\|\,.\,\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$ e do facto óbvio de $\mathfrak{T}_e = I$.

Quanto à última asserção do Teorema, note-se que se a for invertível em $\mathcal{A}$:

$$\mathfrak{T}_{a^{-1}}\mathfrak{T}_a x = a^{-1}(ax) = x = \mathfrak{T}_a\mathfrak{T}_{a^{-1}}x\,,\ \forall x \in \mathcal{A},$$

donde $\mathfrak{T}_a$ é invertível em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ com inverso $(\mathfrak{T}_a)^{-1} = \mathfrak{T}_{a^{-1}}$. A recíproca não é tão evidente, já que o inverso de $\mathfrak{T}_a$ *como operador* ainda que existisse *podia não estar em* $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ (trata-se do inverso *em* $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, cuja existência é equivalente a $\mathfrak{T}_a$ ser bijecção, atendendo ao teorema do gráfico fechado); no entanto, supondo que $\mathfrak{T}_a$ tem inverso $B \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, seja $a' = Be$ ("candidato natural" para inverso de a). Ter-se-á:

$$aa' = a(Be) = \underbrace{\mathfrak{T}_a B}_{=I} e = e \Rightarrow ae = ea = (aa')a = a(a'a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathfrak{T}_a e = \mathfrak{T}_a(a'a) \Rightarrow a'a = e,$$

visto $\mathfrak{T}_a$ ser, por hipótese, *injectiva*; logo, de facto, $aa' = e = a'a$, donde:

- *a é invertível em $\mathcal{A}$ com inverso* $a' = Be$. □

COROLÁRIO: ***Toda a álgebra de Banach $\mathcal{A}$ é isomorfa algébrica e topologicamente a uma subálgebra fechada de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Em particular, o produto de $\mathcal{A}$ é aplicação contínua de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$.***

Demonstração: Se $\mathcal{A}$ não tiver unidade basta considerar uma álgebra $\mathcal{A}'$ com unidade em que $\mathcal{A}$ se injecte isométrica e algebricamente e aplicar o Teorema anterior. A continuidade do produto resulta da continuidade da composição em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.□

De aqui em diante, salvo indicação em contrário, tomaremos sempre para norma em $\mathcal{A}$ uma norma equivalente à dada mas satisfazendo às condições:

- $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|\,,\ \forall x, y \in \mathcal{A}$
- $\|e\| = 1$ ***(se a álgebra tiver unidade e).***

Para tal norma, no caso de $\mathcal{A}$ ter unidade, $\mathfrak{T}$ será, evidentemente, *isometria* [exercício]. Como consequência destas propriedades ter-se-á, obviamente, para todo o $x \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}_1$ ($n \in \mathbb{N}$, no caso de existir unidade em $\mathcal{A}$):

$$\|x^n\| \leq \|x\|^n.$$

2.2 Elementos invertíveis, espectro e resolvente; Teorema de Gelfand-Mazur. Divisores topológicos de zero e variação do espectro.

A *representação regular* $\mathfrak{T}$ permite-nos transportar para $\mathcal{A}$ os conceitos e propriedades conhecidas em $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ e que digam apenas respeito à respectiva estrutura de álgebra de Banach com unidade; atendendo ainda a que a noção de invertibilidade em $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ coincide com a noção de invertibilidade para funções de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$, ou seja, com a de $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ como parte de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, podemos também transportar para $\mathcal{A}$ conceitos e propriedades envolvendo a noção de invertibilidade em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. Por exemplo, em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ os elementos da bola aberta $B(I, 1)$ são todos invertíveis; utilizando a representação regular torna-se óbvio que:

$$B(e, 1) \subset \mathcal{G}$$

($\mathcal{G}$ grupo dos elementos invertíveis de $\mathcal{A}$), sendo o inverso de um elemento $x \in$ $\in B(e, 1)$ ($\|e - x\| < 1$) dado pela ***série de Neumann***:

(20) $$\bullet\ x^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (e - x)^n,$$

absolutamente convergente em $\mathcal{A}$. Podemos demonstrar directamente este facto, verificando que a série de Neumann converge absolutamente e satisfaz à definição de *inverso de* x (multiplicando à esquerda e à direita por $x = e - (e - x)$ e utilizando as propriedades 2. e 3. das álgebras e a continuidade do produto). Teremos assim:

(21) $$\left\|x^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|e - x\|}, \ \forall x \in B(e, 1).$$

Note-se, aliás, que a convergência da série de Neumann *implica sempre* que $x \in \mathcal{G}$ (como é óbvio — [exercício]). Evidentemente que acabámos de *repetir* para $\mathcal{A}$ os raciocínios feitos em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$, em lugar de invocar a representação regular! *Como revisão* demonstremos outras propriedades da noção de invertibilidade em $\mathcal{A}$, cuja validade conhecemos por resultarem das correspondentes propriedades em $\mathcal{L}(A)$, mas sem utilizar a representação regular:

PROPOSIÇÃO 2.2: ***Se*** $\boldsymbol{x \in \mathcal{G}}$***, então*** $\boldsymbol{B(x, 1/\|x^{-1}\|) \subset \mathcal{G}}$ ***e se*** $\boldsymbol{y \in}$ $\boldsymbol{\in B(x, 1/\|x^{-1}\|)}$***:***

- $\boldsymbol{\|y^{-1}\| \leq \dfrac{\|x^{-1}\|}{1-\|x^{-1}\|\|x-y\|}}$;
- $\boldsymbol{\|x^{-1}-y^{-1}\| \leq \dfrac{\|x^{-1}\|^2\|x-y\|}{1-\|x^{-1}\|\|x-y\|}}$.

Em particular $\mathcal{G}$ é aberto e a aplicação $x \mapsto x^{-1}$ de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{G}$ é homeomorfismo.

Demonstração: Para verificar que $y \in \mathcal{G}$ basta provar que $x^{-1}y \in \mathcal{G}$, o que resulta de:

$$\|e - x^{-1}y\| = \|x^{-1}(x-y)\| \leq \|x^{-1}\|\|x-y\| < 1,$$

se $y \in B(x, 1/\|x^{-1}\|)$. Além disso (atendendo também à série de Neumann — *cf.* (20)), tem-se, nesse caso:

$$\|y^{-1}\| = \|(xx^{-1}y)^{-1}\| = \|(x^{-1}y)^{-1}x^{-1}\| \leq \|x^{-1}\|\frac{1}{1-\|e-x^{-1}y\|} \leq$$
$$\leq \frac{\|x^{-1}\|}{1-\|x^{-1}\|\|x-y\|},$$

donde:

$$\|x^{-1}-y^{-1}\| = \|(x^{-1}y-e)y^{-1}\| \leq \|e-x^{-1}y\|\|y^{-1}\| \leq$$
$$\leq \|x^{-1}\|\|x-y\|\|y^{-1}\| \leq \frac{\|x^{-1}\|^2\|x-y\|}{1-\|x^{-1}\|\|x-y\|} \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0.$$

Conclui-se do exposto que $\mathcal{G}$ é aberto e $x \mapsto x^{-1}$ contínua; como esta aplicação é bijecção de $\mathcal{G}$ sobre $\mathcal{G}$ coincidente com a respectiva inversa, trata-se, evidentemente, de homeomorfismo.☐

DEFINIÇÃO: *Chamaremos **espectro** de um elemento $a \in \mathcal{A}$ ao conjunto $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ ou simplesmente $\sigma(a)$ (quando não houver perigo de confusão) dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que:*

- *$a - \lambda e$ não é invertível.*

Atendendo ao Teorema 2.1 (representação regular), tem-se obviamente:

- $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma(\mathfrak{T}_a)$.

DEFINIÇÕES: *Chamamos **conjunto resolvente** (ou simplesmente **resolvente**) de $a \in \mathcal{A}$ a $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ e **aplicação resolvente**[59] ou simplesmente **resolven-***

[59]No caso de $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$, E espaço de Banach, ou mesmo simplesmente normado, com definição adequada, chama-se *operador resolvente* à aplicação resolvente, designação que por vezes se utiliza em $\mathcal{A}$, por abuso de linguagem.

te *(quando não houver perigo de confusão) à aplicação:*

- $R : \rho(a) \subset \mathbb{C} \to \mathcal{A}$
  $\lambda \mapsto R_\lambda = (a - \lambda e)^{-1}.$

Tem-se então:

PROPOSIÇÃO 2.3: ***Para cada $\boldsymbol{a \in \mathcal{A}}$, $\boldsymbol{\sigma(a)}$ é compacto não vazio e $\boldsymbol{R}$ é holomorfa (analítica[60]) do aberto $\boldsymbol{\rho(a)}$ em $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, tendo-se:***

$$\boldsymbol{R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu \,,\ \forall \lambda, \mu \in \rho(a);}$$

em particular $\boldsymbol{R_\lambda}$ e $\boldsymbol{R_\mu}$ comutam para quaisquer $\boldsymbol{\lambda, \mu \in \rho(a)}$.

Demonstração: $\sigma(a) \subset \overline{B}(0, \|a\|)$, pois, para $|\lambda| > \|a\|$, vem:

(22) $$\left\| e - \frac{1}{\lambda}(\lambda e - a) \right\| = \frac{\|a\|}{|\lambda|} < 1,$$

o que mostra a invertibilidade de $(1/\lambda)(\lambda e - a)$ e portanto de $a - \lambda e$, donde $\lambda \in \rho(a)$, ou seja $\lambda \notin \sigma(a)$. Por outro lado é óbvio que $\rho(a)$ é aberto, já que:

- $\|(a - \lambda e) - (a - \mu e)\| = |\lambda - \mu|,$

donde (atendendo à Proposição 2.2):

$$\lambda \in \rho(a) \Rightarrow a - \lambda e \in \mathcal{G} \Rightarrow a - \mu e \in \mathcal{G} \,,\ \forall \mu \in B(\lambda, \frac{1}{\|(a - \lambda e)^{-1}\|}),$$

pelo que:

$$B(\lambda, \frac{1}{\|(a - \lambda e)^{-1}\|}) \subset \rho(a);$$

portanto $\sigma(a)$ é, de facto, limitado e fechado, ou seja, compacto. Quanto a R_λ, tem-se:

$$(a - \mu e) R_\lambda = (a - \lambda e + (\lambda - \mu) e) R_\lambda = e + (\lambda - \mu) R_\lambda,$$

donde, multiplicando por R_μ:

$$R_\lambda = R_\mu + (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda \,,\ \forall \lambda, \mu \in \rho(a).$$

Trocando os papéis de λ e μ concluímos que $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ e:

---

[60] Ou seja, R é $\mathbb{C}$-diferenciável de $\rho(a)$ em $\mathcal{A}$ — para todo o $\lambda_0 \in \rho(a)$ existe o limite:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R(\lambda) - R(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

em $\mathcal{A}$. *Mutatis mutandis* vale toda a teoria conhecida das funções analíticas de abertos de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, com demonstrações idênticas.

(23) $$\bullet\ R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu;$$

ora $\lambda \mapsto R_\lambda$ é contínua, por ser composição das aplicações contínuas:

$$\begin{array}{l} \rho(a) \to \mathcal{G} \to \mathcal{G} \\ \lambda \mapsto a - \lambda e \mapsto (a - \lambda e)^{-1}; \end{array}$$

então:

$$\bullet\ \frac{R_\lambda - R_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = R_\lambda R_{\lambda_0} \xrightarrow[\lambda \to \lambda_0]{} R_{\lambda_0}^2,\ \forall \lambda_0 \in \rho(a),$$

o que mostra que R é *holomorfa* e:

$$\frac{dR}{d\lambda}(\lambda_0) = R_{\lambda_0}^2.$$

Se $\sigma(a)$ fosse vazio, R seria holomorfa em $\mathbb{C}$ — função *inteira*. Mas para $\lambda > \|a\|$ obtém-se de (22) (e da série de Neumann — *cf.* (21)):

(24) $$\|R_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda e - a)\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} \xrightarrow[|\lambda| \to +\infty]{} 0;$$

portanto R_λ é *limitada*; pelo Teorema de Liouville (válido com “a mesma” demonstração para funções holomorfas de $\mathbb{C}$ em $\mathcal{A}$), R_λ teria que ser constante e igual a zero (já que tende para zero no infinito), o que é absurdo, pois $R_\lambda \in \mathcal{G}$, $\forall \lambda \in \rho(a)$. Portanto, de facto, $\sigma(a) \neq \emptyset$.□

Este último resultado ($\sigma(a) \neq \emptyset$) tem uma consequência, crucial em toda a teoria das álgebras de Banach, que foi demonstrada, independentemente, em primeiro lugar por Mazur, seguido, por esta ordem, de Gelfand e Lorch, nas vizinhanças de 1940. No entanto, foi Gelfand quem veio a demonstrar as consequências mais importantes do resultado.

TEOREMA 2.4 (Gelfand-Mazur): ***Uma álgebra de Banach que é corpo, é isometricamente isomorfa ao corpo complexo.***

Demonstração: Estando $\mathcal{A}$ nas condições da hipótese, se $x \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \sigma(x)$ (que, como sabemos, não é vazio), $x - \lambda e$ *não é invertível*; sendo $\mathcal{A}$ corpo, $x - \lambda e = 0$, donde:

$$\bullet\ \mathcal{A} = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

A aplicação:

$$\bullet\ \lambda \mapsto \lambda e$$

é, então, obviamente, isomorfismo isométrico de $\mathbb{C}$ sobre $\mathcal{A}$.□

Para terminar a revisão dos conceitos que a representação regular permite transportar para $\mathcal{A}$, examinemos as propriedades do ***raio espectral***, ou seja, para cada $a \in \mathcal{A}$, do número real *não negativo*:

$$\bullet\ \boldsymbol{r_\sigma(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}};$$

tem-se, evidentemente:

(25) $$\bullet\ r_\sigma(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Com efeito a fórmula vale para $\mathfrak{T}_a$, donde:

$$r_\sigma(a) = r_\sigma(\mathfrak{T}_a) = \lim_n \|(\mathfrak{T}_a)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|\mathfrak{T}_{a^n}\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Continuando a revisão, demonstremos (25) sem utilizarmos a representação regular:

Demonstração de (25)**:** Como $\sigma(a) \subset \overline{B}(0, \|a\|)$, é óbvio que:

$$\bullet\ r_\sigma(a) \leq \|a\|;$$

mas de:

$$a^n - \mu e = (a - \lambda_1 e) \dots (a - \lambda_n e)$$

($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são as n determinações de $\sqrt[n]{\mu}$ em $\mathbb{C}$, e a ordem dos factores é arbitrária), resulta que $a^n - \mu e$ é *invertível* sse todos os $a - \lambda_j e$ o forem, donde, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

$$\bullet\ \sigma(a^n) = \{\lambda^n : \lambda \in \sigma(a)\},$$

e portanto:

$$\bullet\ r_\sigma(a^n) = (r_\sigma(a))^n.$$

Então:

$$(r_\sigma(a))^n = r_\sigma(a^n) \leq \|a^n\|\,, \forall n \in \mathbb{N},$$

o que permite concluir que:

$$r_\sigma(a) \leq \underline{\lim}_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sabemos, por outro lado, que R_λ é *analítica* em ρ(a) e que em $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, \|a\|)$ admite o desenvolvimento em série (de *Neumann* — *cf.* (21), (22), (24)):

(26) $$\bullet\ R_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n}{\lambda^n} = -\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}};$$

reconhecemos o desenvolvimento *de Laurent* de R_λ relativamente à origem, que, como sabemos, vale no exterior *do menor círculo* centrado na origem em cujo exterior R_λ seja analítica. Como R_λ é analítica em $\rho(a)$, *a fortiori* em $\mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, r_\sigma(a))$, concluímos que a série em (26) é convergente se $|\lambda| > r_\sigma(a)$. Tratando-se de série de potências de $1/\lambda$, com raio de convergência:

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n}}\, \|a^n\|^{\frac{1}{n}}},$$

concluímos que:

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n}}\, \|a^n\|^{\frac{1}{n}}} \geq \frac{1}{r_\sigma(a)}$$

(visto que, para

$$\frac{1}{|\lambda|} < \frac{1}{r_\sigma(a)},$$

a série converge); logo:

$$\overline{\lim_{n}}\, \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r_\sigma(a) \leq \underline{\lim_{n}}\, \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow r_\sigma(a) = \lim_{n} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.\square$$

Pudémos transportar sem dificuldade, de $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ para $\mathcal{A}$, os conceitos relativos ao espectro atendendo a que o conceito de invertibilidade em $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ coincide com o conceito de *operador invertível*, ou seja com o de invertibilidade *em* $\mathcal{L}(A)$. Nem sempre é este o caso quando comparamos o conceito de invertibilidade *numa sub-álgebra fechada* $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ com o de invertibilidade em $\mathcal{A}$; $a \in \mathcal{B}$ pode, em princípio, ser invertível em $\mathcal{A}$ sem que o seja em $\mathcal{B}$ (supondo que $e \in \mathcal{B}$), ou seja, a^{-1}, ainda que exista, pode *não pertencer* a $\mathcal{B}$. Interessa-nos caracterizar classes de elementos *"estavelmente não invertíveis"*; é o caso, por exemplo, dos ***divisores de zero***, ou seja, elementos x tais que existe $x' \neq 0$ para o qual:

$$x'x = 0$$

(divisor de zero *direito*). É evidente que se x for divisor de zero em $\mathcal{B}$, também o será em $\mathcal{A}$, e um divisor de zero *não é invertível*, pois se x for invertível:

$$x'x = 0 \Rightarrow x' = x'(xx^{-1}) = (x'x)x^{-1} = 0\, x^{-1} = 0$$

(do mesmo modo x não pode ser divisor de zero *esquerdo*, com a definição óbvia); portanto, *os divisores de zero são elementos estavelmente não invertíveis*. Mais geralmente também o são os chamados ***divisores topológicos de zero*** (esquerdos e direitos).

DEFINIÇÃO: *Um elemento $x \in \mathcal{A}$ diz-se* ***divisor topológico de zero esquerdo*** *(respectivamente* ***direito****), se existir uma sucessão y_n de elementos de $\mathcal{A}$ tal que:*

- $\|y_n\| = 1$
- $xy_n \xrightarrow[n]{} 0$ *(respectivamente, $y_n x \xrightarrow[n]{} 0$).*

x diz-se ***divisor topológico de zero*** *se for simultaneamente divisor topológico de zero esquerdo e direito.*

É fácil verificar que os divisores topológicos de zero (esquerdos e direitos) são, de facto, *estavelmente não invertíveis*.

PROPOSIÇÃO 2.5: ***A fronteira* fr $(\mathcal{G})$ *do grupo $\mathcal{G}$ dos elementos invertíveis de uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ com unidade é inteiramente constituída por divisores topológicos de zero.***

Demonstração: Se $x \in \text{fr}\,(\mathcal{G})$, como $\mathcal{G}$ é aberto, $x \notin \mathcal{G}$, mas existe uma sucessão z_n em $\mathcal{G}$ tal que $z_n \underset{n}{\longrightarrow} x$; ora:

$$\bullet\ z_n^{-1}x \notin \mathcal{G} \Rightarrow 1 \leq \left\|e - z_n^{-1}x\right\| \leq \left\|z_n^{-1}\right\| \|z_n - x\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\|z_n^{-1}\right\| \geq \frac{1}{\|z_n - x\|} \underset{n}{\longrightarrow} +\infty.$$

Então, pondo $y_n = z_n^{-1}/\|z_n^{-1}\|$, tem-se, evidentemente, $\|y_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}_1$, e:

$$\|y_n x\| = \frac{\|z_n^{-1}x\|}{\|z_n^{-1}\|} \leq \frac{\|z_n^{-1}x - e\|}{\|z_n^{-1}\|} + \frac{\|e\|}{\|z_n^{-1}\|} \leq \frac{\|z_n^{-1}\|}{\|z_n^{-1}\|}\|x - z_n\| +$$
$$+ \frac{1}{\|z_n^{-1}\|} = \|x - z_n\| + \frac{1}{\|z_n^{-1}\|} \underset{n}{\longrightarrow} 0;$$

do mesmo modo se verifica que $xy_n \underset{n}{\longrightarrow} 0$, donde, de facto, x é divisor topológico de zero.□

COROLÁRIO 1: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade e e $\mathcal{B}$ sub-álgebra fechada de $\mathcal{A}$ contendo e; então, para todo o $a \in \mathcal{B}$:***

1. $\boldsymbol{\sigma_{\mathcal{B}}(a) \supset \sigma_{\mathcal{A}}(a)}$;
2. **fr** $\boldsymbol{(\sigma_{\mathcal{B}}(a)) \subset}$ **fr** $\boldsymbol{(\sigma_{\mathcal{A}}(a))}$,

ou seja, o espectro de um elemento não se amplia quando se passa de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{A}$ mas também não perde pontos fronteiros (quando muito pode perder pontos interiores).

Demonstração: 1. é imediato, já que se $a - \lambda e$ não for invertível em $\mathcal{A}$ também o não será, obviamente, em $\mathcal{B}$, parte de $\mathcal{A}$. Para demonstrar 2., notemos que se $\lambda \in \text{fr}\,(\sigma_{\mathcal{B}}(a))$, então $a - \lambda e \in \text{fr}\,(\mathcal{G}_{\mathcal{B}})$; com efeito $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ é fechado em $\mathbb{C}$, donde $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(a)$, ou seja $a - \lambda e \notin \mathcal{G}_{\mathcal{B}}$. Por outro lado, $\lambda = \lim_n \mu_n$ com $\mu_n \in$ $\in \rho_{\mathcal{B}}(a)$, ou seja, $a - \mu_n e \in \mathcal{G}_{\mathcal{B}}$. Como, evidentemente, $a - \mu_n e \underset{n}{\longrightarrow} a - \lambda e$, concluímos que, de facto, $a - \lambda e \in \text{fr}\,(\mathcal{G}_{\mathcal{B}})$. Pela proposição anterior, $a - \lambda e$ é divisor topológico de zero em $\mathcal{B}$ e portanto também em $\mathcal{A}$, donde $a - \lambda e \notin \mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ e portanto $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Como λ é limite de valores em $\rho_{\mathcal{B}}(a) \subset \rho_{\mathcal{A}}(a)$ (por 1.), concluímos que $\lambda \in \text{fr}\,(\sigma_{\mathcal{A}}(a))$.□

COROLÁRIO 2: ***Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estiverem nas condições do corolário anterior e $a \in \mathcal{B}$ for tal que $\rho_{\mathcal{A}}(a)$ é conexo, então:***

$$\bullet\ \boldsymbol{\sigma_{\mathcal{B}}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)};$$

em particular, um elemento com espectro real (relativamente a $\mathcal{A}$) tem espectro invariante relativamente à família de todas as sub-álgebras fechadas de $\mathcal{A}$, que o contenham juntamente com a unidade.

Demonstração: É fácil verificar que $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ é *aberto* em $\mathbb{C}$; com efeito, se $\lambda \in \mathrm{fr}\,(\sigma_{\mathcal{B}}(a) \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a)) \cap (\sigma_{\mathcal{B}}(a) \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a))$, λ não poderia estar na fronteira de $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ ou estaria na de $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ e portanto no próprio $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Então λ teria que estar no interior de $\sigma_{\mathcal{B}}(a)$ e, não podendo por isso ser limite de uma sucessão em $\rho_{\mathcal{B}}(a)$, teria que ser limite de uma sucessão em $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$, o que é absurdo, visto $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ ser fechado e $\lambda \notin \sigma_{\mathcal{A}}(a)$.

Portanto $\rho_{\mathcal{A}}(a)$ é união disjunta dos abertos $\rho_{\mathcal{B}}(a)$ e $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a)$; sendo $\rho_{\mathcal{A}}(a)$ conexo, necessariamente $\sigma_{\mathcal{B}}(a) \setminus \sigma_{\mathcal{A}}(a) = \emptyset$ (já que $\rho_{\mathcal{B}}(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(a)$ é sempre não limitado).□

2.3 Exemplos: álgebra gerada por um elemento, álgebras de funções limitadas, álgebra de Wiener

Consideremos alguns exemplos de álgebras de Banach, para além de $\mathcal{L}(E)$ (E espaço de Banach complexo).

DEFINIÇÃO: *Sendo $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade e e $a \in \mathcal{A}$ chamamos **álgebra gerada por a** à menor sub-álgebra fechada $\mathcal{A}_a$ de $\mathcal{A}$ contendo a e a unidade e (ou seja, à intersecção de todas as sub-álgebras fechadas de $\mathcal{A}$ contendo a e e).*

É fácil verificar que $\mathcal{A}_a$ é a aderência do conjunto dos *polinómios* em a de coeficientes complexos, ou seja:

$$\mathcal{A}_a = \mathrm{ader}\,\{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, a^k : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}\};$$

$\mathcal{A}_a$ é obviamente *comutativa*, ainda que $\mathcal{A}$ o não seja.

Outro exemplo fundamental de álgebra de Banach é $\boldsymbol{L(X, \mathbb{C})}$ (que também representaremos, quando não houver perigo de confusão, apenas por $L(X)$), conjunto das funções complexas limitadas num conjunto $X \neq \emptyset$, com as operações definidas pontualmente e a norma:

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|\,, \forall f \in L(X, \mathbb{C}).$$

No caso particular em que X é *espaço topológico*, é sub-álgebra fechada de $L(X, \mathbb{C})$ a parte $C(X)$ desta álgebra constituída pelos elementos de $L(X, \mathbb{C})$ que são *funções contínuas* [exercício]; particularmente importante é o caso em que X é *compacto*, pois, como veremos, qualquer álgebra *comutativa* admite uma representação *homomorfa* num $C(X)$ com X compacto; esta representação é mais *rica* que a representação regular, já que, em muitos casos, a álgebra $C(X)$ em questão é bem conhecida da Análise elementar, e, de qualquer modo, as operações em $L(X, \mathbb{C})$ reduzem-se a operações sobre números complexos.

Examinemos finalmente o exemplo de duas álgebras *isometricamente isomorfas*:

DEFINIÇÕES: *Chamamos* ***álgebra de Wiener*** *à álgebra de Banach* $\boldsymbol{W}$ *constituída pelas funções complexas* f *contínuas em* $[0, 2\pi[$ *com desenvolvimento de Fourier absolutamente convergente:*

$$\bullet\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, e^{int}\,,\ \forall t \in [0, 2\pi[, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty,$$

sendo:

$$\bullet\ \|f\|_W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|,$$

e as operações em W *definidas pontualmente.*

Designaremos por $\boldsymbol{l_1}$ *o espaço normado das sucessões (indiciadas em* $\mathbb{Z}$*)* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *tais que:*

$$\bullet \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < +\infty$$

com as operações de soma e produto por escalar definidas coordenada a coordenada (como é habitual) e a norma dada por:

$$\bullet\ \|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$$

Veremos adiante que W é, de facto, *álgebra de Banach com unidade*, mas é trivial verificar que se trata de *espaço normado*, assim como l_1, estando as operações bem definidas em ambos os casos [exercício].

Também se conclui facilmente que se $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1$ então a função:

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[&\to \mathbb{C} \\ t \mapsto f(t) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, e^{int} \end{aligned}$$

está bem definida e é contínua [exercício], donde $f \in W$, o que, juntamente com a *unicidade do desenvolvimento em série de Fourier*, garante que a aplicação:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mapsto f$$

é bijecção de l_1 sobre W, tratando-se mesmo de *isomorfismo isométrico* entre estes dois espaços. Procuremos agora definir um *produto* em l_1 de tal modo que a referida isometria seja *homomorfismo de álgebras*, e provemos simultaneamente que as estruturas obtidas são *álgebras de Banach isometricamente isomorfas*. Notemos que a definição pontual do produto em W é, de facto, coerente, já que, sendo:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, e^{int}\ ,\ g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\, e^{int}$$

$((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l_1)$, então:

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &= \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m\, e^{imt}\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\, e^{int}\Big) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_m b_n\, e^{i(m+n)t}\Big) = \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\substack{m+n=k\\ m,n\in\mathbb{Z}}} a_m b_n\, e^{i(m+n)t}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{k-n} b_n\Big) e^{ikt} = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} b_k\Big) e^{int}, \end{aligned}$$

justificando-se as identidades por se tratar de séries absolutamente convergentes para as quais valem as propriedades associativa e comutativa generalizadas. Além disso, W tem unidade (a função constante igual a 1, que tem, obviamente, norma 1), e:

$$\begin{aligned} \|fg\|_W &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} b_k\Big|\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_{n-k}||b_k|\Big|\Big) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{\substack{m+k=n\\ m,k\in\mathbb{Z}}} |a_m||b_k|\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m||b_n|\Big|\Big) = \\ &= \Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|\Big) = \|f\|_W \|g\|_W, \end{aligned}$$

pelo que, se *definirmos* o produto em l_1 por:

$$\bullet\ (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}.(b_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{n-k} b_k\Big)_{n\in\mathbb{Z}},$$

a aplicação $f \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ será obviamente homomorfismo de álgebras (ou seja, respeitará o produto, para além de ser linear). Que se trata de álgebras de Banach resulta agora facilmente da completude de l_1 [exercício] (aliás l_1 é o espaço $L^1(\mathbb{Z}, d\mu)$, para a medida de contagem μ em $\mathbb{Z}$). Note-se que tanto l_1 como W são comutativas.

O problema da invertibilidade em W é evidentemente equivalente ao da possibilidade de obter um desenvolvimento de Fourier absolutamente convergente para a função $1/f$, quando f admite tal desenvolvimento. A resposta a este problema é o chamado *Teorema de Wiener* que será consequência de um resultado geral acerca de álgebras de Banach comutativas que estudaremos adiante.

Veremos mais exemplos de álgebras de Banach nos exercícios e secções seguintes.

2.4 Ideais e homomorfismos; álgebra quociente. Ideais maximais e funcionais multiplicativos

Dadas duas álgebras de Banach $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, o núcleo de um homomorfismo algébrico:

$$T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

é, evidentemente, subespaço vectorial de $\mathcal{A}$, visto que T é, em particular, aplicação linear. $\mathfrak{J} = \ker T$ satifaz, além disso, às seguintes propriedades, que resultam imediatamente do comportamento de T relativamente ao produto:

(27) $\qquad x \in \mathcal{A}, j \in \mathfrak{J} \Rightarrow xj \in \mathfrak{J}$ (ou seja, $x\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}, \forall x \in \mathcal{A}$),

(28) $\qquad y \in \mathcal{A}, j \in \mathfrak{J} \Rightarrow jy \in \mathfrak{J}$ (ou seja, $\mathfrak{J}y \subset \mathfrak{J}, \forall y \in \mathcal{A}$).

DEFINIÇÃO: *Um subespaço $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{A}$ satisfazendo a (27) (respectivamente a (28)) diz-se **ideal esquerdo** (respectivamente **direito**); se $\mathfrak{J}$ for subespaço de $\mathcal{A}$ e satisfizer simultaneamente a (27) e (28), diz-se **ideal bilateral**, ou simplesmente **ideal** de $\mathcal{A}$.*

O núcleo de um homomorfismo é portanto *ideal bilateral*. Já a imagem $R(T)$ de um homomorfismo $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *nem sempre* é ideal e nem sempre $T(e)$ é unidade de $\mathcal{B}$. A *sobrejectividade* é, no entanto, condição suficiente para que da existência de unidade em $\mathcal{A}$ se possa deduzir a existência de unidade em $\mathcal{B}$, tendo-se:

$$T(e) = e'$$

(e unidade de $\mathcal{A}$ e e' de $\mathcal{B}$) e:

$$T(x^{-1}) = T(x)^{-1},$$

para todo o elemento invertível x de $\mathcal{A}$; também, para T sobrejectiva, $T(\mathfrak{J})$ é ideal de $\mathcal{B}$ para todo o ideal $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{A}$. Em contrapartida, para qualquer homomorfismo T de $\mathcal{A}$ para $\mathcal{B}$ (ainda que não seja sobrejectivo) a imagem inversa $T^{-1}(\mathfrak{J})$ de um ideal $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{B}$ é sempre ideal de $\mathcal{A}$ [exercícios].

Se $\mathfrak{J}$ for ideal *fechado* de $\mathcal{A}$ sabemos que o espaço quociente[61] $\mathcal{A}/\mathfrak{J}$ é *de Banach* para a norma:

$$\bullet \ \|x + \mathfrak{J}\| = \inf\{\|y\| : y \in x + \mathfrak{J}\}$$

($\forall x \in \mathcal{A}$); podemos introduzir em $\mathcal{A}/\mathfrak{J}$ uma estrutura de álgebra de Banach para o produto:

[61]Recordemos que se trata do conjunto das classes de equivalência dos elementos de $\mathcal{A}$ para a relação $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathfrak{J}$, compatível com as operações de soma e produto por escalar, atendendo ao facto de $\mathfrak{J}$ ser subespaço.

$$\bullet\ (\boldsymbol{x}+\mathfrak{J}).(\boldsymbol{y}+\mathfrak{J}) = \boldsymbol{xy}+\mathfrak{J}\,,\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{\mathcal{A}}.$$

É fácil verificar que o produto está bem definido (ou seja, $x' \in x+\mathfrak{J}, y' \in$ $\in y+\mathfrak{J} \Rightarrow x'y' \in xy+\mathfrak{J}$), satisfaz aos axiomas da estrutura de álgebra e:

$$\bullet\ \|(\boldsymbol{x}+\mathfrak{J}).(\boldsymbol{y}+\mathfrak{J})\| \le \|\boldsymbol{x}+\mathfrak{J}\|\|\boldsymbol{y}+\mathfrak{J}\|\,,\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{\mathcal{A}};$$

além disso, se $\mathcal{A}$ tiver unidade e $\mathfrak{J}\neq\mathcal{A}$, $e+\mathfrak{J}$ *é unidade de* $\mathcal{A}/\mathfrak{J}$ e:

$$\|\boldsymbol{e}+\mathfrak{J}\| = \mathbf{1}$$

[exercício]. A sobrejecção canónica:

$$j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathfrak{J}$$

é evidentemente homomorfismo algébrico (de núcleo $\mathfrak{J}$).

Numa álgebra de Banach $\mathcal{A}$ existem sempre pelo menos dois ideais, ditos ***triviais***, que são $\{0\}$ e $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ também se diz ideal ***impróprio***, por oposição a todos os outros que se dizem ***próprios***).

DEFINIÇÃO: *Um ideal $\mathfrak{M}$ diz-se* ***maximal*** *se for elemento maximal no conjunto parcialmente ordenado por inclusão dos ideais próprios de $\mathcal{A}$; ou seja, se $\mathfrak{M}$ for ideal próprio de $\mathcal{A}$ e para qualquer $\mathfrak{J}$ ideal próprio de $\mathcal{A}$ tal que $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{J}$ se tiver $\mathfrak{M}=\mathfrak{J}$.*

É evidente que um ideal próprio não pode conter a unidade da álgebra, e portanto também não pode conter elementos invertíveis [porquê?], ou seja, é disjunto do grupo $\mathcal{G}$ dos elementos invertíveis. Como da continuidade do produto facilmente se conclui ser ideal o fecho de um ideal, tem-se:

PROPOSIÇÃO 2.6: ***Todo o ideal maximal de uma álgebra de Banach com unidade é fechado.***

Demonstração: Se $\mathfrak{M}$ for ideal maximal, como $\overline{\mathfrak{M}}$ é ideal, tem-se $\overline{\mathfrak{M}}=\mathcal{A}$ ou $\overline{\mathfrak{M}}=\mathfrak{M}$; ora $\mathcal{A}\setminus\mathfrak{M}$ tem interior não vazio, visto conter o grupo $\mathcal{G}$ dos elementos invertíveis ($\mathcal{G}\neq\emptyset$, visto que $e\in\mathcal{G}$), que é aberto, donde $\overline{\mathfrak{M}}\neq\mathcal{A}$ e $\mathfrak{M}$ é fechado.□

Os ideais maximais surgem naturalmente na teoria da álgebras como *núcleos de homomorfismos de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$*. Como sabemos, o núcleo de uma *forma linear* φ sobre $\mathcal{A}$, se não coincidir com $\mathcal{A}$ (ou seja, se $\varphi\not\equiv 0$), é *hiperplano* — subespaço *maximal* na família dos subespaços próprios de $\mathcal{A}$; se φ for homomorfismo algébrico, $\ker\varphi$, sendo simultaneamente *ideal* e *hiperplano*, é obviamente *ideal maximal* (já que é mesmo maximal no conjunto ordenado mais vasto de *todos* os subespaços próprios).

DEFINIÇÕES: *Os homomorfismos de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$ designam-se por* ***funcionais multiplicativos****. Um funcional multiplicativo não nulo designa-se por* ***carácter***[62].

[62]Plural "caracteres", palavra grave.

Concluímos então da Proposição anterior:

COROLÁRIO: ***Todo o funcional multiplicativo de uma álgebra de Banach com unidade é contínuo.***

Demonstração: Com efeito, se $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ for funcional multiplicativo não nulo da álgebra $\mathcal{A}$ com unidade, $\ker \Phi$ é, como vimos, ideal maximal de $\mathcal{A}$, logo fechado (atendendo à proposição anterior). Sendo $\ker \Phi$ hiperplano fechado, Φ é forma linear *contínua*.☐

Deste corolário facilmente se conclui que funcionais multiplicativos não nulos em álgebras de Banach *com unidade* têm *norma* 1 (como elemento do dual topológico $\mathcal{A}^*$ do espaço de Banach $\mathcal{A}$, associado à álgebra de Banach *com unidade* em questão). Com efeito, se Φ for carácter de $\mathcal{A}$, é *sobrejectivo* (visto tratar-se de forma linear *não nula*), donde $\Phi(e) = 1$, e portanto $\|\Phi\| \geq 1$; se existisse $x \in \in \overline{B}(0,1)$ tal que $|\Phi(x)| = M > 1$, ter-se-ia:

- $\|x^n\| \leq \|x\|^n \leq 1\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$,
- $|\Phi(x^n)| = |\Phi(x)^n| = |\Phi(x)|^n = M^n \xrightarrow[n]{} +\infty$,

o que é absurdo, já que Φ é *limitado*. Logo $\|\Phi\| \leq 1$, e portanto $\|\Phi\| = 1$.

A *maximalidade* de um ideal pode ser estudada utilizando a álgebra quociente; com efeito, vale o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 2.7: ***Um ideal fechado próprio $\mathfrak{J}$ de uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ é maximal sse $\mathcal{A}/\mathfrak{J}$ não admitir ideais senão os triviais.***

Demonstração: Se $\mathfrak{J}$ não for maximal, existirá um ideal próprio $\mathfrak{J}'$ de $\mathcal{A}$ tal que:

- $\mathfrak{J} \subsetneqq \mathfrak{J}'$.

Como a aplicação canónica $j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathfrak{J}$ é, como vimos, homomorfismo *sobrejectivo*, $j(\mathfrak{J}')$ será ideal de $\mathcal{A}/\mathfrak{J}$; $j(\mathfrak{J}') \neq \{0\}$, visto que $\mathfrak{J} \subsetneqq \mathfrak{J}'$, e $j(\mathfrak{J}') \neq \mathcal{A}/\mathfrak{J}$, pois tomando $x \in \mathcal{A} \setminus \mathfrak{J}'$ (que sabemos existir visto $\mathfrak{J}'$ ser *próprio*) ter-se-á $x + \mathfrak{J} \notin j(\mathfrak{J}')$, já que, caso contrário existiria $x' \in \mathfrak{J}'$ tal que $x - x' \in \mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}'$ e ter-se-ia $x \in \mathfrak{J}'$ contra a hipótese.

Reciprocamente, se existisse em $\mathcal{A}/\mathfrak{J}$ um ideal *não trivial* $\mathfrak{I}$, $j^{-1}(\mathfrak{I})$ seria ideal de $\mathcal{A}$, $\mathfrak{J} \subsetneqq j^{-1}(\mathfrak{I})$ (visto que $\mathfrak{I} \neq \{0\} = \{\mathfrak{J}\}$) e $j^{-1}(\mathfrak{I}) \neq \mathcal{A}$ porque j é sobrejectiva e $\mathfrak{I} \neq \mathcal{A}/\mathfrak{J}$. Portanto, nesse caso, $\mathfrak{J}$ não seria maximal.☐

Outro modo de garantir a existência de ideais maximais é partir de qualquer ideal próprio e "prolongá-lo" a um maximal:

PROPOSIÇÃO 2.8: ***Todo o ideal próprio de uma álgebra de Banach com unidade está contido num ideal maximal.***

Demonstração: Se $\mathfrak{J}$ for ideal próprio de $\mathcal{A}$, consideremos o conjunto parcialmente ordenado por inclusão:

$$\mathcal{C} = \{\mathfrak{J}' : \mathfrak{J}' \text{ é ideal próprio de } \mathcal{A} \text{ e } \mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}'\}.$$

$\mathcal{C}$ *não é vazio* visto que que $\mathfrak{J} \in \mathcal{C}$ e é *indutivo*, ou seja, se $(\mathfrak{J}_\alpha)_{\alpha \in X}$ for uma cadeia (conjunto *totalmente ordenado*) em $\mathcal{C}$, tem *supremo* em $\mathcal{C}$; com efeito:

$$\sup_{\alpha \in X} \mathfrak{J}_\alpha = \bigcup_{\alpha \in X} \mathfrak{J}_\alpha$$

é, de facto, elemento de $\mathcal{C}$, pois obviamente que se trata de um ideal de $\mathcal{A}$ contendo $\mathfrak{J}$ e é *distinto* de $\mathcal{A}$, visto não conter a unidade, que não pode estar em nenhum dos $\mathfrak{J}_\alpha$. Então, pelo lema de Zorn, $\mathcal{C}$ tem pelo menos um elemento maximal que é, evidentemente, ideal maximal de $\mathcal{A}$ contendo $\mathfrak{J}$.□

Põe-se agora a questão da existência de *ideais não-triviais* numa álgebra com unidade. Se se tratar de corpo (portanto isomorfa a $\mathbb{C}$), é óbvio que não existem; mais precisamente, só podemos esperar que determinado elemento pertença a um ideal próprio se *não for invertível* — pertencer a um ideal próprio é, como sabemos, condição suficiente para não ser invertível. A condição é também *necessária* na classe das álgebras *comutativas*:

PROPOSIÇÃO 2.9: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade; então um elemento a de $\mathcal{A}$ é não-invertível sse pertencer a um ideal maximal de $\mathcal{A}$.***

Demonstração: Se $a \in \mathcal{A}$ não for invertível e:

$$\mathfrak{J} = \mathcal{A}a = \{xa : x \in \mathcal{A}\},$$

$\mathfrak{J}$ é ideal de $\mathcal{A}$ (visto que $\mathcal{A}$ é comutativa); trata-se além disso de ideal *próprio* pois se $e \in \mathfrak{J}$ existiria $x \in \mathcal{A}$ tal que $xa = e$ e a seria invertível. Pela Proposição 2.8, $\mathfrak{J}$ estará contido num ideal maximal a que portanto a pertence. A recíproca é já resultado conhecido.□

Os resultados que acabámos de demonstrar acerca de ideais maximais permitem-nos tornar mais precisa a relação com os funcionais multiplicativos, no caso das álgebras *comutativas* (classe a que nos passaremos a restringir sistematicamente):

TEOREMA 2.10: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade; $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$ é ideal maximal sse $\mathfrak{M}$ for núcleo de um funcional multiplicativo não nulo Φ de $\mathcal{A}$. Além disso $\mathfrak{M}$ determina Φ de maneira única.***

Demonstração: Já sabemos que o núcleo de um funcional multiplicativo não nulo é ideal maximal de $\mathcal{A}$. Reciprocamente, se $\mathfrak{M}$ for ideal maximal de $\mathcal{A}$, pela Proposição 2.7 $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ só tem ideais triviais; então, a Proposição 2.9 garante que todos os elementos *não nulos* de $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ são invertíveis, ou seja, que $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ é *corpo*. Do Teorema de Gelfand-Mazur concluímos então que existe um isomorfismo isométrico i de $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ sobre $\mathbb{C}$. Compondo i com a sobrejecção canónica

$j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathfrak{M}$, obtemos um funcional multiplicativo:

$$\Phi = i \circ j : \mathcal{A} \to \mathbb{C};$$

temos:

$$\bullet\ \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow i(x + \mathfrak{M}) = 0 \Leftrightarrow x + \mathfrak{M} = 0 + \mathfrak{M} \Leftrightarrow x \in \mathfrak{M},$$

ou seja, $\mathfrak{M} = \ker \Phi$. Se Φ' for funcional multiplicativo de núcleo $\mathfrak{M}$, como, em particular, Φ, Φ' são formas lineares com o mesmo núcleo, sabemos que são *proporcionais*, ou seja, existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que:

$$\bullet\ \Phi' = \alpha\Phi;$$

de:

$$1 = \Phi'(e) = \alpha\Phi(e) = \alpha,$$

concluímos que $\Phi' = \Phi$.□

2.5 Espectro de uma álgebra e Transformação de Gelfand; Teoremas de Wiener-Gelfand, Lévy-Gelfand e cálculo operacional holomorfo

O último resultado da secção anterior garante a existência de correspondência biunívoca entre o conjunto $\mathcal{M}$ dos *ideais maximais* de uma *álgebra de Banach comutativa com unidade* $\mathcal{A}$ e o conjunto dos *caracteres* (funcionais multiplicativos não nulos) de $\mathcal{A}$. Nessa correspondência, cada ideal maximal é o *núcleo* do funcional multiplicativo que lhe corresponde.

DEFINIÇÃO: *Designa-se por* ***espectro de*** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *o conjunto* $\boldsymbol{\sigma_{\mathcal{A}}}$ *dos caracteres de* $\mathcal{A}$.

Esta designação e notação são motivadas pela Proposição que se segue.

PROPOSIÇÃO 2.11: ***Seja*** $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ ***álgebra de Banach comutativa com unidade e*** $\boldsymbol{a \in \mathcal{A}}$***; então:***

$$\bullet\ \boldsymbol{\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\Phi(a) : \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}\}.}$$

Demonstração: Se $\Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}$, tem-se:

$$\Phi(a - \Phi(a)e) = \Phi(a) - \Phi(a)\Phi(e) = 0,$$

ou seja, $a - \Phi(a)e \in \ker \Phi$ que é ideal maximal de $\mathcal{A}$, como sabemos; a Proposição 2.9 garante então que $a - \Phi(a)e$ não é invertível, ou seja, que $\Phi(a) \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Reciprocamente, se $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$, $a - \lambda e$ não é invertível e portanto pertence a um ideal maximal de $\mathcal{A}$ que, pelo Teorema 2.10, é núcleo de certo $\Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}$; logo:

$$0 = \Phi(a - \lambda e) = \Phi(a) - \lambda\Phi(e) = \Phi(a) - \lambda \Rightarrow \lambda = \Phi(a).\square$$

DEFINIÇÃO: *Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade; chamamos* ***Transformação de Gelfand*** *à aplicação:*

$$\widehat{\cdot} : \mathcal{A} \to \mathbb{C}^{\sigma_{\mathcal{A}}}$$
$$a \mapsto \widehat{a}$$

que a cada $a \in \mathcal{A}$ faz corresponder a função:

$$\bullet\, \widehat{a} : \sigma_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}$$

(transformada de Gelfand de a)*, tal que:*

$$\bullet\, \widehat{a}(\Phi) = \Phi(a)\,,\ \forall \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}.$$

A transformada de Gelfand de $a \in \mathcal{A}$ pode também ser considerada como função de $\mathcal{M}$ em $\mathbb{C}$, atendendo à bijecção estabelecida entre $\mathcal{M}$ e $\sigma_{\mathcal{A}}$. A proposição anterior identifica a *imagem* de $\widehat{a}$:

$$R(\widehat{a}) = \sigma_{\mathcal{A}}(a);$$

em particular, $\widehat{a}$ é *limitada* e:

$$\bullet\, \|\widehat{a}\|_\infty = \sup_{\Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}} |\widehat{a}(\Phi)| = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|,$$

donde $\widehat{\cdot}$ *é homomorfismo contínuo de* $\mathcal{A}$ na álgebra $L(\sigma_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ das funções complexas *limitadas* de $\sigma_{\mathcal{A}}$ em $\mathbb{C}$, cuja norma é definida, como sabemos, por:

$$\|g\|_\infty = \sup_{\Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}} |g(\Phi)|\,,\ \forall g \in L(\sigma_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$$

[exercício].

Traduzindo a Proposição 2.9 em termos de funcionais multiplicativos, obtemos agora, trivialmente:

TEOREMA 2.12 (Wiener-Gelfand): ***Um elemento a de uma álgebra de Banach comutativa com unidade é invertível sse a respectiva transformada de Gelfand $\widehat{a}$ não se anular em nenhum ponto.*** □

Este resultado é a versão "abstracta" de um conhecido Lema de Wiener que é a sua tradução para o caso particular da álgebra de Wiener W, um dos exemplos examinados na Secção 2.3. Procuremos então identificar os $\sigma_{\mathcal{A}}, \mathcal{M}$ e $\widehat{\cdot}$ correspondentes a alguns daqueles exemplos:

— ***Álgebra $\mathcal{A}_a$, gerada por $a \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade)***; neste caso é óbvio que um funcional multiplicativo fica determinado pelo valor que toma em a, o qual está em $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$. Existe portanto uma correspondência biunívoca $\Phi \mapsto \Phi(a)$ entre $\sigma_{\mathcal{A}_a}$ e $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$; a transformada de Gelfand $\widehat{a}$ pode então identificar-se com a *função identidade* no espectro de a (*relativamente a* $\mathcal{A}_a$). Com essa identificação, a transformada de Gelfand de um polinómio em a será o próprio polinómio como *função* em $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$; a transformada de Gelfand de um elemento de $\mathcal{A}_a$, limite de polinómios em a, $P_n(a)$, será uma função em $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$, limite *uniforme*, nesse conjunto, de $P_n(\lambda)$ [exercício]. Um ideal maximal $\mathfrak{M}$ será determinado por certo $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$: $\mathfrak{M}$ será constituído pelos limites das sucessões convergentes de elementos da forma $P_n(a)$ em que a sucessão de polinómios P_n converge para 0 em λ [exercício].

— ***Álgebra $C(X)$, X espaço topológico compacto***. Sabemos que o dual de $C(X)$ é constituído pelas medidas de Borel regulares sobre X. Como casos particulares de tais medidas, conhecemos os "deltas de Dirac" δ_a $(a \in X)$, definidos por:

$$\bullet\ \delta_a(\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } a \in \Omega \\ 0 & \text{se } a \notin \Omega \end{cases},$$

$\forall \Omega$ boreliano de X. O funcional associado é, como sabemos, dado pelo integral:

$$\langle \delta_a, f \rangle_{C(X)' \times C(X)} = \int_X f \, d\delta_a = f(a)\,,\ \forall f \in C(X).$$

É fácil verificar que δ_a é *funcional multiplicativo*, sendo portanto *ideal maximal* de $C(X)$ o conjunto:

$$\mathfrak{M}_a = \{f \in C(X) : f(a) = 0\} = \ker \delta_a;$$

aliás era fácil verificar directamente que $\mathfrak{M}_a$ é *ideal maximal*, já que é obviamente ideal e facilmente se conclui que é *hiperplano* de $C(X)$. Reciprocamente, *todo o ideal maximal é daquela forma*. Com efeito, se $\mathfrak{M}$ for ideal maximal de $C(X)$ *não pode haver mais que um ponto* em que todos os $f \in \mathfrak{M}$ se anulem (ou $\mathfrak{M}$ não seria evidentemente maximal, atendendo, por exemplo, ao *lema de Urysohn*); mas tem que existir pelo menos um ponto nestas circunstâncias, pois, caso contrário, para cada $x \in X$, existiria $f_x \in \mathfrak{M}$ tal que $f_x(x) \neq 0$. Por continuidade, existiria uma vizinhança aberta Ω_x de x tal que $f_x(y) \neq 0, \forall y \in \Omega_x$; a compacidade de X garante agora que existiriam pontos $x_1, \ldots, x_n \in X$, tais que:

$$\bullet\ X = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_{x_i}.$$

Consideremos então:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} |f_{x_i}(x)|^2\,,\ \forall x \in X;$$

obviamente, $f \in \mathfrak{M}$, já que $\mathfrak{M}$ é ideal e $f_{x_i} \in \mathfrak{M}, \forall i = 1, \ldots, n$, tendo-se:

$$\bullet\ f = \sum_{i=1}^{n} \overline{f_{x_i}}\, f_{x_i}.$$

Por outro lado, evidentemente, $f(x) \neq 0, \forall x \in X$, donde $1/f \in C(X)$, ou seja, f seria invertível em $C(X)$, o que é absurdo, visto $\mathfrak{M}$ ser ideal *próprio*. Logo

$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_a$ para certo $a \in X$. Neste caso existe portanto uma bijecção entre $\mathfrak{M}$ e X e, consequentemente, entre $\sigma_{C(X)}$ e X, tendo-se:

$$\bullet\ \widehat{f}(\delta_x) = \delta_x(f) = f(x)\,,\ \forall \delta_x \in C(X),$$

ou seja, a *transformada de Gelfand* de f pode ser deste modo *"identificada"* com f. Neste caso podemos "transportar" a topologia de X para $\mathcal{M}$ através da bijecção estabelecida, de modo que $\widehat{f}$ ficará contínua; veremos mais adiante que, no caso geral de uma álgebra comutativa com unidade $\mathcal{A}$, se pode introduzir em $\sigma_{\mathcal{A}}$ (e portanto em $\mathcal{M}$) uma topologia para a qual $\sigma_{\mathcal{A}}$ é *compacto* e as transformadas de Gelfand *funções contínuas*, constituindo uma *representação* de $\mathcal{A}$ em $C(\sigma_{\mathcal{A}}) \simeq C(\mathcal{M})$ (em sentido a definir).

— *Álgebras W e l_1*. seja Φ funcional multiplicativo não nulo de W; examinemos como actua sobre a função $e^{it} \in W$. O elemento de l_1 que corresponde a e^{it} é $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\delta_{n1})_{n\in\mathbb{Z}}$ (onde δ_{ij} é o δ de Kronecker); portanto $\|e^{it}\|_W = 1$, donde:

$$\bullet\ \left|\Phi(e^{it})\right| \leq 1.$$

Do mesmo modo:

$$\bullet\ \left|\Phi(e^{-it})\right| \leq 1,$$

pelo que:

$$\bullet\ \left|\Phi(e^{it})\right| = \frac{1}{|\Phi(e^{-it})|} \geq 1,$$

e portanto $|\Phi(e^{it})| = 1$. Logo existe $t_0 \in [0, 2\pi[$ tal que:

$$\Phi(e^{it}) = e^{it_0};$$

mas agora as propriedades algébricas e a continuidade de Φ garantem que:

$$f(t) \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int} \Rightarrow \Phi(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \Phi(e^{it})^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int_0} = f(t_0)$$

(note-se que as somas parciais da série de Fourier de f convergem para f *em* W, se $f \in W$). Concluímos então que existe uma bijecção entre $[0, 2\pi[$ e σ_W que associa a cada $t_0 \in [0, 2\pi[$, Φ_{t_0} dado por:

$$\bullet\ \Phi_{t_0}(f) = f(t_0)\,,\ \forall f \in W;$$

além disso:

$$\bullet\ \widehat{f}(\Phi_{t_0}) = \Phi_{t_0}(f) = f(t_0),$$

ou seja, a transformada de Gelfand de $f \in W$ pode identificar-se com f. Tal como nos exemplos anteriores existe uma bijecção "natural" entre σ_W e um compacto, neste caso a circunferência de centro na origem e raio 1, através da bijecção atrás estabelecida e da aplicação $t \mapsto \exp(it)$ entre $[0, 2\pi[$ e a referida circunferência. Traduzindo o Teorema 2.12 para o caso particular de W obtemos então:

TEOREMA 2.13 (Teorema de Wiener clássico): ***Seja $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{C}$ função contínua com série de Fourier absolutamente convergente e não se anulando em nenhum ponto do intervalo $[0, 2\pi[$; então a função $1/f$ também tem série de Fourier absolutamente convergente.***$\square$

Se $f \in W$ e não se anula, a função $1/\lambda$ é *holomorfa* numa vizinhança (por exemplo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$) do conjunto dos valores que f toma (que coincide com o conjunto dos valores que $\widehat{f}$ toma, ou seja, com $\sigma_W(f)$). Pode pôr-se a questão de saber se para uma função g holomorfa na vizinhança do conjunto dos valores de certo $f \in W$, $g \circ f$ ainda terá série de Fourier absolutamente convergente. A resposta afirmativa a esta questão foi dada por *Lévy*, mas estamos agora em condições de demonstrar um resultado análogo no quadro mais geral das álgebras comutativas:

TEOREMA 2.14 (Lévy-Gelfand): ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade, $a \in \mathcal{A}$ e $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ função holomorfa na vizinhança do espectro $\sigma(a)$ de a, ou seja, Ω é aberto de $\mathbb{C}$ contendo $\sigma(a)$; então existe $b \in \mathcal{A}$ tal que:***

$$\bullet\, \widehat{b} = g \circ \widehat{a}.$$

Além disso podemos tomar para b o elemento de $\mathcal{A}$ definido por:

(29)
$$g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\, d\lambda,$$

onde D é domínio de Cauchy de Ω contendo $\sigma(a)$ na parte interna, com fronteira ∂D orientada no sentido directo, podendo o integral ser definido por somas de Riemann convergentes em $\mathcal{A}$.

Demonstração: A existência do domínio D é resultado clássico de que se pode encontrar sugestiva demonstração elementar em [Sc2], p. 157[63]. O integral em (29) pode ser definido por somas de Riemann, visto ser contínua a função $\lambda \mapsto g(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}$ (definida em $\Omega \setminus \sigma(a)$ com valores em $\mathcal{A}$). Sendo $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ parametrização de ∂D, ter-se-á:

$$g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 g(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, (\gamma(t)e - a)^{-1}\, dt,$$

e as aplicações lineares contínuas *comutam* com o sinal de integral, já que comutam com as somas de Riemann, que convergem na topologia de $\mathcal{A}$. Além disso o integral é independente do domínio D escolhido, nas condições do Teorema,

---

[63]Utilizando uma pavimentação do plano por hexágonos regulares é fácil construir D como união de um número finito de hexágonos, sendo a fronteira (obviamente união de lados de hexágonos) constituída por um número finito de poligonais fechadas simples que não se auto-intersectam, com orientação determinada pela de cada hexágono.

atendendo às propriedades das funções analíticas com valores num espaço de Banach (já que $g(\lambda)\,(\lambda e - a)^{-1}$ é *holomorfa* em $\Omega \setminus \sigma(a)$). Tem-se então:

$$\widehat{g(a)}(\Phi) = \Phi(g(a)) = \Phi(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\,d\lambda) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(\lambda)(\lambda - \Phi(a))^{-1}\,d\lambda = g(\Phi(a)) = g(\widehat{a}(\Phi)) = g \circ \widehat{a}(\Phi),$$

$\forall \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}},$ atendendo ao Teorema de Cauchy clássico, já que D é um domínio de Cauchy contendo $\sigma(a)$ na sua parte interna e $\Phi(a) \in \sigma(a)$.□

COROLÁRIO 1 (Teorema de transformação do espectro — caso comutativo): ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade, $a \in \mathcal{A}$ e $g : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ função holomorfa na vizinhança de $\sigma(a)$. Então:***

$$\bullet\ \sigma(g(a)) = g(\sigma(a)),$$

sendo $g(a)$ o elemento de $\mathcal{A}$ definido por (29).

Demonstração: É imediato, atendendo a que:

$$\sigma(g(a)) = R(\widehat{g(a)}) = R(g(\widehat{a})) = g(R(\widehat{a})) = g(\sigma(a)).\square$$

COROLÁRIO 2 (Teorema de Wiener-Lévy): ***Seja***

$$f : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{C}$$

contínua com série de Fourier absolutamente convergente e

$$g : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

função holomorfa tal que Ω é aberto contendo a imagem de f; então $g \circ f$ tem série de Fourier absolutamente convergente.

Demonstração: Pelo Teorema 2.14 existe $h \in W$ tal que $g \circ \widehat{f} = \widehat{h}$ (já que $\sigma(f) = R(\widehat{f}) = R(f)$, neste caso); então, atendendo ao estudo feito de W:

$$g \circ f(t) = g(f(t)) = g(\widehat{f}(\Phi_t)) = \widehat{h}(\Phi_t) = h(t),$$

ou seja,

$$g \circ f = h \in W.\square$$

No caso da álgebra de Wiener é imediato que as operações algébricas sobre funções holomorfas se mantêm na correspondência $g \mapsto g(a)$ dada por (29), correspondendo a à função $g(\lambda) \equiv \lambda$ e 1 à função $g(\lambda) \equiv 1$. De modo geral é fácil verificar este facto sempre que a correspondência $a \mapsto \widehat{a}$ for *injectiva* (o que nem sempre acontece, como veremos); por exemplo:

$$\widehat{g.h(a)} = (g.h) \circ \widehat{a} = (g \circ \widehat{a}).(h \circ \widehat{a}) = \widehat{g(a)}.\widehat{h(a)} = \widehat{g(a).h(a)},$$

já que $\widehat{\ }$ é homomorfismo, ou, directamente:

$$(\widehat{g(a)}.\widehat{h(a)})(\Phi) = (\widehat{g(a)}(\Phi))(\widehat{h(a)}(\Phi)) = \Phi(g(a))\Phi(h(a)) =$$
$$= \Phi(g(a).h(a)) = \widehat{g(a).h(a)}(\Phi)\,,\ \forall \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}},$$

donde:

$$\bullet\ g.h(a) = g(a)h(a),$$

no caso de se ter a referida injectividade. Vamos ver, no entanto, que a expressão explícita de $g(a)$ dada por (29) nos permite demonstrar este comportamento algébrico no caso geral, *mesmo eliminando a hipótese da comutatividade*. Para isso convém-nos construir uma álgebra a partir das funções holomorfas *na vizinhança do espectro de* a. Das propriedades das funções holomorfas (e do resultado geométrico invocado na nota 63) concluímos que $g(a) = h(a)$ sempre que g e h coincidem numa vizinhança de $\sigma(a)$. Comecemos então por considerar o conjunto $\mathcal{H}_a$ das funções *holomorfas numa vizinhança de* $\sigma(a)$, onde definimos a soma, o produto e o produto por escalar pontualmente, sendo a soma e o produto definidos, como habitualmente, na intersecção dos domínios; no "espaço"[64] assim obtido introduzimos a relação de equivalência $\sim$:

- ***$f \sim h$ sse existir um aberto $\Omega \subset D(f) \cap D(h)$ tal que $\sigma(a) \subset \Omega$ e $f(\lambda) = h(\lambda), \forall \lambda \in \Omega$.***

É fácil verificar que $\sim$ é *compatível* com as operações algébricas — trata-se da relação de equivalência associada ao *"ideal"* $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{H}_a$ constituído pelas funções identicamente nulas definidas em abertos contendo $\sigma(a)$. Fica assim definida a *"álgebra quociente"* (no sentido meramente *algébrico*, ou seja, sem topologia):

$$\bullet\ \widetilde{\mathcal{H}}_a = \mathcal{H}_a/\sim\ = \mathcal{H}_a/\mathfrak{J}^{65},$$

que se designa por *álgebra dos germes de funções holomorfas a respeito do espectro de a*. $\widetilde{\mathcal{H}}_a$ é evidentemente álgebra *comutativa* com *unidade* $(1+\mathfrak{J})$. Além disso, notemos que, como foi observado no decorrer da demonstração do Teorema de Lévy-Gelfand (Teorema 2.14), o elemento definido por (29) depende apenas da classe de g na relação $\sim$. Para simplificar a linguagem e sempre que não haja perigo de confusão identificaremos um elemento $g \in \mathcal{H}_a$ com a respectiva classe $[g] = g + \mathfrak{J} \in \widetilde{\mathcal{H}}_a$.

TEOREMA 2.15 (Cálculo operacional ou simbólico holomorfo): ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade e e $a \in \mathcal{A}$. Então a aplicação de $\widetilde{\mathcal{H}}_a$ em $\mathcal{A}$ que a (a classe de) $g \in \widetilde{\mathcal{H}}_a$ faz corresponder $g(a)$ dado por (29), é homomorfismo de álgebras com unidade que à (classe da) função $g(\lambda) \equiv \lambda$ faz corresponder***

[64] Trata-se de "semi-anel" relativamente a $+$ e $.$.

[65] Com as definições idênticas às utilizadas para álgebras, mas agora para a estrutura mais "pobre" de $\mathcal{H}_a$, que, como foi referido na nota anterior, é apenas "semi-anel" para a soma e produto.

a; em particular, a notação adoptada para $g(a)$ é compatível com a utilizada para polinómios. Além disso $g(a)$ comuta com qualquer $b \in \mathcal{A}$ que comute com a; em particular $\{g(a) : g \in \mathcal{H}_a\}$ é álgebra comutativa com unidade.

Demonstração: As únicas propriedades a verificar que não são triviais dizem respeito ao produto, à identificação de $g(a)$ quando $g \equiv 1$ ou $g(\lambda) \equiv \lambda$, e à permutabilidade de $g(a)$ com os $b \in \mathcal{A}$ que comutam com a. Comecemos por verificar que $g(a) = e$ se $g \equiv 1$. Como neste caso g é *inteira*, podemos tomar para D um círculo de centro na origem e raio R superior a $\|a\|$:

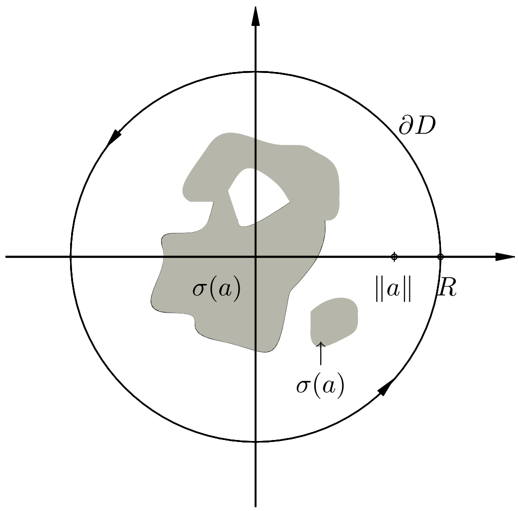


Figura 4

podemos parametrizar ∂D por:

$$\begin{aligned} \gamma &: [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma(t) = Re^{it}. \end{aligned}$$

Ora ∂D fica num domínio em que vale o desenvolvimento *de Neumann*:

$$\bullet\ (\lambda e - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(e - \frac{a}{\lambda})^{-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}},$$

integrável termo a termo, como toda a série uniformemente convergente. Portanto:

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} (\lambda e - a)^{-1}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\geq 0}\Big(\int_{\partial D} \frac{1}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda\Big)a^n = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\partial D} \frac{1}{\lambda}\, d\lambda\Big)e = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}}\, dt\Big)e = \frac{2\pi i}{2\pi i}\, e = e \end{aligned}$$

(note-se que os integrais são nulos para $n > 0$, visto, nesse caso, *ser primitivável* numa vizinhança de ∂D a função $1/\lambda^{n+1}$). De modo análogo se demonstra que $g(a) = a$ se $g(\lambda) \equiv \lambda$ [exercício]. Provemos agora o comportamento com o produto; sendo $g, h \in \mathcal{H}_a$, consideremos dois domínios de Cauchy nas condições da figura seguinte (*cf.*, mais uma vez, a nota 63):

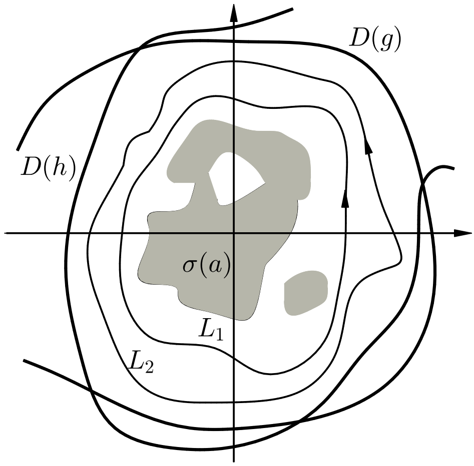


Figura 5

(onde L_1, L_2 são as fronteiras orientadas dos referidos domínios de Cauchy), temos:

$$\begin{aligned}
g(a)h(a) &= \Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} g(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\,d\lambda\Big)\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} h(\mu)(\mu e - a)^{-1}\,d\mu\Big) = \\
&= \Big(\frac{1}{2\pi i}\Big)^2 \int_{L_1}\int_{L_2} g(\lambda)h(\mu)(\lambda e - a)^{-1}(\mu e - a)^{-1}\,d\mu\,d\lambda = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_1}\int_{L_2} g(\lambda)h(\mu)(\lambda - \mu)^{-1}((a-\lambda e)^{-1} - (a - \mu e)^{-1})\,d\mu\,d\lambda = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} g(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\underbrace{\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{h(\mu)}{\mu - \lambda}\,d\mu\Big)}_{=h(\lambda)}d\lambda\, - \\
&\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{L_2} h(\mu)(a - \mu e)^{-1}\underbrace{\Big(\int_{L_1}\frac{g(\lambda)}{\lambda - \mu}\,d\lambda\Big)}_{=0}d\mu = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} g(\lambda)h(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\,d\lambda = g.h(a),
\end{aligned}$$

onde utilizámos o Teorema de Fubini (podemos reduzir-nos, por exemplo, a um integral em $[0,1]\times[0,1]$, parametrizando convenientemente L_1 e L_2), a identidade da resolvente (23) e propriedades conhecidas das funções holomorfas, atendendo a que os pontos de L_1 ficam todos situados na *parte interna* de L_2.

Finalmente, se $ab = ba\,(b \in \mathcal{A})$, é fácil concluir que b comuta com $(\lambda e - a)^{-1}, \forall \lambda \in \rho(a)$ (trata-se de consequência imediata da propriedade trivial segundo a qual b comuta com x^{-1} para todo o elemento invertível x que comute com b). A continuidade e linearidade do produto por b (à esquerda e à direita) garantem agora que b comuta com $g(a), \forall g \in \mathcal{H}_a$.□

Estamos agora em condições de demonstrar o *Teorema de transformação do espectro* para o caso de uma álgebra *não necessariamente comutativa*. Para isso convém-nos introduzir a noção seguinte:

DEFINIÇÃO: *Sendo $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade e $M \subset \mathcal{A}$, chamamos **comutante de M** ao conjunto:*

$$\bullet\ M' = \{x \in \mathcal{A} : xa = ax, \forall a \in M\}.$$

É fácil verificar que M' é *sub-álgebra fechada de $\mathcal{A}$ contendo e* [exercício], tendo-se, além disso, as seguintes propriedades, cuja demonstração é deixada como exercício:

(30) $\bullet\ M \subset N(\subset \mathcal{A}) \Rightarrow N' \subset M'$,

(31) $\bullet\ M \subset M''$,

(32) $\bullet\ M' = M'''$.

Se M for parte *comutativa* de $\mathcal{A}$ (ou seja, $xy = yx, \forall x, y \in M$), tem-se $M \subset M'$ e portanto, aplicando (30) duas vezes (ou (30) e (32)) concluímos que $M'' \subset M'''$, ou seja, que M'' é *álgebra de Banach comutativa com unidade e* (unidade de $\mathcal{A}$), sub-álgebra de $\mathcal{A}$, que se diz ***bicomutante de M***.

Outra propriedade de demonstração trivial é que $x \in M'$ é invertível *em M'* sse $x \in \mathcal{G}$, ou seja, sse x for invertível *em $\mathcal{A}$*. Em particular:

(33) $\bullet\ \sigma_{M'}(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a)\,,\ \forall M \subset \mathcal{A}, a \in M'$.

TEOREMA 2.16 (Teorema de transformação do espectro — caso geral): ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade, $a \in \mathcal{A}$ e $g \in \mathcal{H}_a$; então:***

$$\bullet\ \boldsymbol{\sigma(g(a)) = g(\sigma(a))}.$$

Demonstração: Das considerações anteriores concluímos que $\{a\}''$ é álgebra comutativa com unidade, tendo-se:

$$a, g(a) \in \{a\}''$$

(pelo Teorema 2.15). Então, por um lado:

$$\bullet\ \sigma_{\{a\}''}(g(a)) = \sigma(g(a)), \sigma_{\{a\}''}(a) = \sigma(a),$$

por outro, aplicando o Corolário 1 do Teorema 2.14 (caso comutativo) à álgebra $\{a\}''$, obtemos:

$$\bullet\ \sigma_{\{a\}''}(g(a)) = g(\sigma_{\{a\}''}(a)),$$

o que permite concluir.□

Caso particular importante de aplicação do cálculo simbólico holomorfo é o da álgebra $\mathcal{L}(E)$ (E espaço de Banach); em particular, no caso em que E tem dimensão finita, o Teorema 2.14 permite-nos definir *função de matriz* para uma classe bastante vasta de funções holomorfas, e qualquer matriz quadrada. Neste caso o cálculo *explícito* de "$g(a)$" pode ser efectuado recorrendo a resultados específicos da dimensão finita; um dos resultados que convém recordar é o chamado *Teorema de Hamilton-Cayley* (*cf.* [G]) que estabelece que uma matriz é *raíz do seu polinómio característico*, ou seja, se P_A for o polinómio característico da matriz quadrada A ($N \times N$):

$$P_A(A) = 0,$$

onde 0 é a matriz $N \times N$ com os elementos todos nulos. Identificando A com o elemento da álgebra $\mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ que A define (relativamente a uma base previamente fixada em $\mathbb{C}^N$) e considerando $g, h \in \mathcal{H}_A$, se existir $\Phi \in \mathcal{H}_A$ tal que:

(34) $$\bullet\ g - h = \Phi.P_A,$$

tem-se:

$$\bullet\ g(A) - h(A) = \Phi.P_A(A) = \Phi(A).\underbrace{P_A(A)}_{=0} = 0,$$

ou seja, $g(A) = h(A)$. Duas funções $g, h \in \mathcal{H}_A$ satisfazendo a (34) dizem-se ***equivalentes no espectro de A***; usaremos a notação:

$$\bullet\ g \underset{\sigma(A)}{\sim} h.$$

Portanto:

$$\bullet\ g \underset{\sigma(A)}{\sim} h \Rightarrow g(A) = h(A).$$

Ora existe um critério simples que permite estabelecer quando $g \underset{\sigma(A)}{\sim} h$:

PROPOSIÇÃO 2.17: ***Sendo A matriz $N \times N$ de elementos em $\mathbb{C}$, duas funções $g, h \in \mathcal{H}_A$ são equivalentes no espectro de A sse para todo o $\lambda \in \sigma(A)$, valor próprio de multiplicidade $r \in \mathbb{N}_1$ se tiver:***

$$\boldsymbol{g^{(k)}(\lambda) = h^{(k)}(\lambda)\,,\ \forall k = 0, \ldots, r-1.}$$

Demonstração: Seja $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, tendo λ_j multiplicidade r_j. Então:

$$\bullet\ P_A(\lambda) = (-1)^N(\lambda-\lambda_1)^{r_1}\dots(\lambda-\lambda_p)^{r_p},$$

donde, se $g \underset{\sigma(A)}{\sim} h$, como existe, nesse caso, $\Phi \in \mathcal{H}_A$ tal que $g - h = \Phi P_A$, ter-se--á:

$$g^{(k_i)}(\lambda_i) = h^{(k_i)}(\lambda_i)\,,\ \forall k_i = 0,\dots,r_i-1$$

(por simples derivação sucessiva de $\Phi.P_A$). Reciprocamente, se g, h satisfizerem a esta condição, $g - h$ será função holomorfa com zeros $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ de ordens respectivamente $q_1,\dots,q_p$ (finitas se $g \neq h$, pelo teorema dos zeros), tais que:

$$\bullet\ r_i \le q_i$$

$(i = 1,\dots,p)$; então existe uma função holomorfa Φ_1 em $D(g) \cap D(h)$ tal que:

(35) $$\bullet\ g(\lambda) - h(\lambda) = \Phi_1(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{q_1}\,,\ \forall\lambda \in D(g)\cap D(h)$$

(Φ_1 fica definido por:

$$\frac{g(\lambda)-h(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)^{q_1}}$$

fora de qualquer bola centrada em λ_1 e, atendendo ao desenvolvimento em série de Taylor de $g - h$ em λ_1, fica também definida numa bola aberta centrada em λ_1 com raio suficientemente pequeno — menor ou igual à distância de λ_1 à fronteira do domínio considerado). Podemos agora aplicar a Φ_1 o mesmo raciocínio, pois é fácil verificar (derivando sucessivamente (35)) que $\lambda_2,\dots,\lambda_p$ são zeros de Φ_1 com ordens respectivamente $q_2,\dots,q_p$; por indução, concluímos facilmente que existe $\Phi_p \in \mathcal{H}_A$ tal que:

$$\begin{aligned}\bullet\ g(\lambda) - h(\lambda) &= \Phi_p(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{q_1}\dots(\lambda-\lambda_p)^{q_p} =\\ &= (-1)^N\Phi_p(\lambda)(\lambda-\lambda_1)^{q_1-r_1}\dots(\lambda-\lambda_p)^{q_p-r_p}P_A(\lambda),\end{aligned}$$

donde, de facto: $g \underset{\sigma(A)}{\sim} h$.□

COROLÁRIO: ***Seja A matriz complexa $N \times N$ e $g \in \mathcal{H}_A$; então existe um polinómio P de grau $N-1$ tal que:***

$$\bullet\ \boldsymbol{g(A) = P(A).}$$

Se $\sigma(A) = \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$, sendo r_i a multiplicidade de λ_i $(i = 1,\dots,p)$, P fica determinado pelas N relações:

$$\bullet\ \boldsymbol{P^{(k_i)}(\lambda_i) = g^{(k_i)}(\lambda_i)}$$

$\boldsymbol{(i = 1,\dots,p;\ k_i = 0,\dots,r_i-1).}$

Demonstração: É imediato, pois as relações referidas no enunciado determinam, de facto, um polinómio[66] de grau $N-1$, já que:

$$\sum_{i=1}^{p} r_i = N.$$

Tal polinómio P está nas condições da Proposição 2.17 relativamente a g, e portanto $P \underset{\sigma(A)}{\sim} g$, donde $g(A) = P(A)$.□

Utilizemos este corolário para calcular, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{10};$$

temos, neste caso:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i),$$

donde $\sigma(A) = \{1+i, 1-i\}$. Basta-nos determinar $P(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$ tal que:

$$\bullet \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1(1+i) = (1+i)^{10} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{10} = 32\,i \\ \alpha_0 + \alpha_1(1-i) = (1-i)^{10} = (\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{10} = -32\,i \end{cases},$$

ou seja:

$$\bullet\ \alpha_1 = \frac{32i + 32i}{2i} = 32, \alpha_0 = \frac{32i + i32i}{1-i} = -32,$$

donde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{10} = -32I + 32A = \begin{bmatrix} 0 & 32 \\ -32 & 0 \end{bmatrix}.$$

Este processo permite também o cálculo de soluções de sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, que são dadas, como sabemos, através da *exponencial de matrizes* associadas ao sistema; neste caso, tratando-se de funções *inteiras* de elementos da álgebra das matrizes de certa ordem, podemos dar uma definição alternativa de $g(A)$, através da série de Taylor de g (que tem, por hipótese, raio de convergência infinito). A coerência com o cálculo simbólico atrás desenvolvido e outras propriedades serão examinadas nos exercícios.

[66]Para a existência do polinómio *interpolador* P, ver, por exemplo, [G], V–§2.

2.6 Topologia do espectro; representação de $\mathcal{A}$ em $C(\sigma_{\mathcal{A}})$.

Vimos na secção anterior que a Transformação de Gelfand:

$$\widehat{\cdot} : \mathcal{A} \to L(\sigma_{\mathcal{A}})$$

($\mathcal{A}$ álgebra comutativa com unidade, $L(\sigma_{\mathcal{A}})$ álgebra das funções complexas limitadas de $\sigma_{\mathcal{A}}$ em $\mathbb{C}$, de Banach para $\| \,.\, \|_\infty$, como sabemos) é *homomorfismo contínuo*, tendo-se mesmo:

$$\bullet \ \|\widehat{a}\|_\infty \leq \|a\| \,,\ \forall a \in \mathcal{A}.$$

Constatámos, além disso, que, em todos os exemplos estudados de álgebras comutativas com unidade, existia uma bijecção "natural" (em cada caso) entre certo compacto e $\sigma_{\mathcal{A}}$, ficando contínuas as funções obtidas dos $\widehat{a}$ por composição com a referida bijecção. Procuremos analisar esta questão em contexto geral; se pensarmos no conjunto de todas as topologias sobre $\sigma_{\mathcal{A}}$ que tornam *contínuas* todas as transformadas de Gelfand $\widehat{a}$ $(a \in \mathcal{A})$ existe evidentemente uma que é *mais fina* que todas as outras — a topologia *discreta* . Interessa-nos então procurar uma topologia τ naquele conjunto que seja *menos fina* que todas as outras. τ deverá conter, pelo menos, todos os conjuntos da forma:

$$\begin{aligned}\Omega_{a,\lambda,\varepsilon} &= \widehat{a}^{-1}(B(\lambda,\varepsilon)) = \{\Phi \in \sigma_{\mathcal{A}} : |\widehat{a}(\Phi) - \lambda| < \varepsilon\} = \\ &= \{\Phi \in \sigma_{\mathcal{A}} : |\Phi(a) - \lambda| < \varepsilon\} = \{\Phi \in \sigma_{\mathcal{A}} : |\Phi(a) - l(a)| < \varepsilon\} = \\ &= B_{p_a}(l,\varepsilon) \cap \sigma_{\mathcal{A}}\end{aligned}$$

$(a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{C}, \varepsilon > 0)$, onde l é uma forma linear contínua sobre $\mathcal{A}$ (elemento do dual topológico $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$) tal que $l(a) = \lambda$ (l existe, atendendo ao *Teorema de Hahn-Banach*, já que supomos $a \neq 0$), e p_a a *semi-norma* sobre $\mathcal{A}^*$ associada a a:

$$\bullet \ p_a(l) = |l(a)| \,,\ \forall l \in \mathcal{A}^*.$$

Ora as semi-normas p_a $(a \in \mathcal{A})$ definem em $\mathcal{A}^*$ a *topologia fraca-*$*$, ou seja, os $\Omega_{a,\lambda,\varepsilon}$ constituem *sub-base* para a topologia induzida em $\sigma_{\mathcal{A}}$ pela topologia fraca-$*$ de $\mathcal{A}^*$, que coincide, portanto, com τ, pois é fácil verificar que torna, de facto, contínuas as funções $\widehat{a}$. Com efeito, uma rede $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge para Φ em $\sigma_{\mathcal{A}}$, na topologia fraca-$*$ sse:

$$\Phi_\alpha(a) \xrightarrow[\alpha]{} \Phi(a) \,,\ \forall a \in \mathcal{A},$$

donde:

$$\Phi_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} \Phi \Rightarrow \widehat{a}(\Phi_\alpha) = \Phi_\alpha(a) \xrightarrow[\alpha]{} \Phi(a) = \widehat{a}(\Phi),$$

e portanto $\widehat{a} \in C(\sigma_{\mathcal{A}})$. Como para a topologia fraca-$*$ as bolas fechadas de $\mathcal{A}^*$

(para a norma do dual) são *compactas* (*Teorema de Banach-Alaoglu*[67] — ver [Sa], [RS1]) e $\sigma_{\mathcal{A}}$ é parte da esfera de raio 1 e centro em zero do espaço de Banach $\mathcal{A}^*$ (com a norma do dual), concluiremos que $\sigma_{\mathcal{A}}$ é *compacto para a topologia fraca-$*$* se provarmos que $\sigma_{\mathcal{A}}$ é *fechado* para essa topologia. Ora é fácil ver que se $(\Phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ for rede em $\sigma_{\mathcal{A}}$ tal que:

$$\Phi_\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} l \in \mathcal{A}^*$$

na topologia fraca-$*$, então $l \in \sigma_{\mathcal{A}}$, já que:

- $l(e) = \lim \Phi_\alpha(e) = 1 \neq 0 \Rightarrow l \neq 0,$
- $l(xy) = \lim\limits_{\alpha} \Phi_\alpha(xy) = \lim\limits_{\alpha} (\Phi_\alpha(x)\Phi_\alpha(y)) = l(x)l(y)\,,\ \forall x, y \in \mathcal{A};$

portanto a topologia τ que procurávamos confere a $\sigma_{\mathcal{A}}$ uma estrutura de espaço topológico *compacto* (é evidentemente *separado*). Temos assim:

PROPOSIÇÃO 2.18: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade; então existe uma topologia τ sobre $\sigma_{\mathcal{A}}$ e uma só para a qual $\sigma_{\mathcal{A}}$ é compacto e as transformadas de Gelfand dos elementos de $\mathcal{A}$ são funções contínuas. τ é a topologia menos fina que torna contínuos os $\widehat{a}$ $(a \in \mathcal{A})$ e coincide com a topologia induzida em $\sigma_{\mathcal{A}}$ pela topologia fraca-$*$ de $\mathcal{A}^*$. em particular, introduzindo em $\sigma_{\mathcal{A}}$ a topologia τ, a Transformação de Gelfand é homomorfismo contínuo de $\mathcal{A}$ em $C(\sigma_{\mathcal{A}})$.***

Demonstração: Resta apenas verificar a unicidade expressa no Teorema. Ora qualquer topologia *compacta* para a qual as $\widehat{a}$ são contínuas é mais fina que τ, e duas topologias compactas *comparáveis* coincidem.□

Qualquer álgebra de Banach comutativa com unidade admite portanto uma *representação* homomorfa contínua numa álgebra de funções contínuas num compacto. Examinemos o que se passa em alguns dos exemplos estudados:

— ***Álgebra $\mathcal{A}_a$, gerada por a***; como vimos, $\widehat{a}$ é bijecção de $\sigma_{\mathcal{A}_a}$ sobre $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$. Sendo ambos os espaços compactos e $\widehat{a}$ contínua, concluímos ser $\widehat{a}$ *homeomorfismo* entre $\sigma_{\mathcal{A}_a}$ e $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$ que assim se podem identificar também *topologicamente*.

— ***Álgebra $C(X)$***, X espaço topológico *compacto*; a aplicação $x \mapsto \delta_x$ é bijecção de X sobre $\sigma_{C(X)}$ e é *contínua*, já que se $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ for rede em X tal que $x_\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} x \in X$, então $f(x_\alpha) \underset{\alpha}{\longrightarrow} f(x), \forall f \in C(X)$, e portanto:

[67] Basta notar que a bola unitária de $\mathcal{A}^*$, como subespaço topológico de $\mathcal{A}^*$, é a parte *fechada* do produto cartesiano de compactos:

$$\prod_{x\in\mathcal{A}} \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|x\|\},$$

constituída pelos elementos deste produto que são aplicações *lineares* de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{C}$. É fácil verificar que a topologia fraca-$*$ na bola é exactamente a induzida pela do produto acima, espaço compacto pelo *Teorema de Tychonov*.

$$\delta_{x_\alpha} \xrightarrow[\alpha]{} \delta_x$$

em $\sigma_{C(X)}$. Trata-se portanto de *homeomorfismo* entre X e $\sigma_{C(X)}$, visto ambos serem compactos; como, pelo que vimos na secção anterior:

$$\bullet\ \widehat{f}(\delta_x) = f(x)\,,\ \forall f \in C(X), x \in X,$$

concluímos que a aplicação $f \mapsto \widehat{f}$ é, neste caso *isomorfismo isométrico* entre as álgebras $C(X)$ e $C(\sigma_{C(X)})$ que se diz *induzido* pelo homeomorfismo $x \mapsto \delta_x$.

— *Álgebras W e l_1*; vimos que a aplicação:

$$t \mapsto \Phi_t$$

é bijecção de $[0, 2\pi[$ sobre σ_W, sendo:

$$\bullet\ \Phi_t(f) = f(t)\,,\ \forall f \in W.$$

A continuidade das funções de W, tal como no exemplo anterior, garante que a bijecção é contínua; composta com a bijecção:

$$e^{it} \mapsto t$$

entre a circunferência

$$C(0,1) = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi[\},$$

estabelece um *homeomorfismo* entre esta circunferência (que é um compacto) e σ_W, que induz uma aplicação injectiva $f \mapsto \widehat{f}$ (tal que $\widehat{f}(\Phi_t) = f(t)$) de W em $C(\sigma_W)$, ou seja, neste caso a Transformação de Gelfand é homomorfismo contínuo e *injectivo*. Não é sobrejectivo, já que *nem toda a função contínua em* $[0, 2\pi[$ tal que $f(0) = f(2\pi)$ *tem série de Fourier absolutamente convergente*; no entanto as transformadas de Gelfand $\widehat{f}$ *constituem parte densa de* $C(\sigma_W)$. Com efeito trata-se de uma subálgebra contendo a função 1, fechada para a conjugação e separando pontos, logo densa em $C(\sigma_W)$, pelo Teorema de Stone--Weierstrass.

Os dois últimos exemplos referem-se a álgebras de funções *contínuas num compacto*. Veremos, nos exercícios, condições necessárias e (ou) suficientes para que a Transformação de Gelfand seja, nesse caso, identificável com uma aplicação com valores numa álgebra de funções contínuas *no mesmo compacto*. Em qualquer dos exemplos considerados a Transformação de Gelfand era injectiva; tratando-se de aplicação *linear*, a injectividade é equivalente *ao núcleo se reduzir a zero*. Convém-nos então introduzir a seguinte noção:

DEFINIÇÃO: *Seja $\mathcal{A}$ álgebra comutativa com unidade. Chamamos* ***radical de $\mathcal{A}$*** *à intersecção $\mathfrak{R}$ de todos os ideais maximais de $\mathcal{A}$; ou seja:*

$$\bullet\ \mathfrak{R} = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \mathcal{M}} \mathfrak{M}.$$

Um elemento $a \in \mathcal{A}$ (álgebra de Banach comutativa com unidade) está no *núcleo* da Transformação de Gelfand sse $\widehat{a}(\Phi) = 0, \forall \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}$, ou seja, sse a estiver nos núcleos de todos os funcionais multiplicativos, e portanto *na intersecção de todos os ideais maximais*, ou seja, no *radical* da álgebra. Outro modo de exprimir que $\widehat{a}(\Phi) = 0, \forall \Phi \in \mathcal{A}$ é dizer que $\|\widehat{a}\|_\infty = 0$; ora:

$$\|\widehat{a}\|_\infty = r_\sigma(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Introduzamos então as seguintes definições:

DEFINIÇÃO: *Sendo $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade, um elemento $a \in \mathcal{A}$ diz-se* ***nilpotente generalizado*** *se:*

$$\lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

DEFINIÇÃO: *Uma álgebra de Banach comutativa com unidade diz-se* ***semi--simples*** *se o respectivo radical se reduzir a zero.*

Do que precede, concluímos:

PROPOSIÇÃO 2.19: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade de radical $\mathfrak{R}$. Então são equivalentes as condições:***

1. ***$\mathcal{A}$ é semi-simples.***
2. ***$\mathfrak{R} = \{0\}$.***
3. ***A Transformação de Gelfand de $\mathcal{A}$ é injectiva.***
4. ***Não existem em $\mathcal{A}$ nilpotentes generalizados diferentes de zero.***
5. ***$\lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = 0 \Rightarrow a = 0, \forall a \in \mathcal{A}$.***
6. ***$\mathcal{A}$ é isomorfa (algebricamente) a uma sub-álgebra de $C(\sigma_{\mathcal{A}})$.***

Demonstração: Resta demonstrar, por exemplo, que 6. $\Rightarrow$ 2.; ora, sendo:

$$\Psi : \mathcal{A} \to C(\sigma_{\mathcal{A}})$$

homomorfismo injectivo, se $a \in \mathfrak{R}$ e Φ estiver no espectro de $C(\sigma_{\mathcal{A}})$, é óbvio que $\Phi \circ \Psi \in \sigma_{\mathcal{A}}$ ou $\Phi \circ \Psi = 0$, donde $\Phi(\Psi(a)) = 0$, por definição de radical. Portanto $\Psi(a)$ está no radical de $C(\sigma_{\mathcal{A}})$ que é obviamente álgebra semi-simples; então $\Psi(a) = 0$ e, por injectividade, $a = 0$. Logo, de facto, $\mathfrak{R} = \{0\}$.□

COROLÁRIO 1: ***É semi-simples qualquer subálgebra de Banach, contendo a unidade, de uma álgebra de Banach semi-simples.***

Demonstração: Com efeito, a propriedade 5. da Proposição anterior é obviamente satisfeita em qualquer parte e portanto, em particular, em qualquer subálgebra de uma álgebra semi-simples.

COROLÁRIO 2: ***Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ álgebras de Banach com unidade, $\mathcal{B}$ comutativa e semi-simples. Então todo o homomorfismo $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é contínuo.***

Demonstração: Pelo teorema do gráfico fechado, basta verificar que Ψ é fechado, ou seja, que, se $x_n \xrightarrow[n]{} 0$ em $\mathcal{A}$ e $\Psi(x_n) \xrightarrow[n]{} y$, então $y = 0$. Ora, para todo o $\Phi \in \sigma_{\mathcal{B}}$, $\Phi \circ \Psi$ é funcional multiplicativo sobre $\mathcal{A}$, logo contínuo. Portanto:

$$\bullet \ \Phi \circ \Psi(x_n) \xrightarrow[n]{} 0;$$

por outro lado:

$$\bullet \ \Phi(\Psi(x_n)) \xrightarrow[n]{} \Phi(y),$$

donde:

$$\bullet \ \Phi(y) = 0.$$

Então y está no radical de $\mathcal{B}$, logo $y = 0$, já que $\mathcal{B}$ é semi-simples.□

Sendo $\mathcal{A}$ álgebra de Banach semi-simples, põe-se a questão de saber quando *a inversa* da Transformação de Gelfand é contínua no respectivo domínio

$$\widehat{\mathcal{A}} \subset C(\sigma_{\mathcal{A}});$$

é condição necessária e suficiente para tal que exista uma constante $C > 0$ tal que:

$$r_\sigma(a) = \lim_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \|\widehat{a}\|_\infty \geq C\|a\|\,,\ \forall a \in \mathcal{A}.$$

Ora é fácil concluir (*cf.* exercício 29) *infra*) que esta condição é equivalente a existir uma constante $c > 0$ tal que:

$$\bullet \ \left\|a^2\right\| \geq c\|a\|^2\,,\ \forall a \in \mathcal{A}.$$

Para que a Transformação de Gelfand seja isométrica é condição necessária e suficiente que:

$$r_\sigma(a) = \|\widehat{a}\|_\infty = \|a\|\,,\ \forall a \in \mathcal{A},$$

o que acontece sse:

$$\bullet \ \left\|a^2\right\| = \|a\|^2\,,\ \forall a \in \mathcal{A}$$

(*cf.* ainda o exercício 29)); $\mathcal{A}$ diz-se então ***regular***.

No caso em que a Transformação de Gelfand tem inverso contínuo, a respectiva imagem $\widehat{\mathcal{A}}$ é evidentemente subálgebra fechada de $C(\sigma_{\mathcal{A}})$ contendo 1 (com efeito $\widehat{\cdot}$ é contínua, logo fechada, donde a respectiva inversa também é fechada; sendo contínua tem domínio fechado — ver exercício 14), capítulo 1). Por outro lado é óbvio que $\widehat{\mathcal{A}}$ separa pontos, já que se $\Phi \neq \Psi$, $\Phi, \Psi \in \sigma_{\mathcal{A}}$, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\Phi(a) \neq \Psi(a)$, ou seja $\widehat{a}(\Phi) \neq \widehat{a}(\Psi)$. Então, para que $\widehat{\mathcal{A}} = C(\sigma_{\mathcal{A}})$, é condição necessária e suficiente que $\widehat{\mathcal{A}}$ seja *fechada para a conjugação* (*Teorema de Stone-Weierstrass* — *cf.* [RS1], [Sa], [Y], por exemplo), ou seja, que $\mathcal{A}$ satisfaça à condição:

$$\bullet\, \forall a \in \mathcal{A}, \exists b \in \mathcal{A} : \overline{\widehat{a}} = \widehat{b};$$

$\mathcal{A}$ diz-se, nesse caso, ***simétrica***. Do que precede podemos então concluir:

PROPOSIÇÃO 2.20: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade; então:***

1. ***A Transformação de Gelfand é isomorfismo bicontínuo de $\mathcal{A}$ em $\widehat{\mathcal{A}}$ sse existir $c > 0$ tal que:***

$$\|a^2\| \geq c\|a\|^2, \forall a \in \mathcal{A}.$$

2. ***A Transformação de Gelfand é isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ em $\widehat{\mathcal{A}}$ sse $\mathcal{A}$ for regular, ou seja, sse:***

$$\|a^2\| = \|a\|^2, \forall a \in \mathcal{A}.$$

3. ***$\widehat{\mathcal{A}}$ é densa em $C(\sigma_{\mathcal{A}})$ sse $\mathcal{A}$ for simétrica, ou seja, sse:***

$$\forall a \in \mathcal{A}, \exists b \in \mathcal{A} : \overline{\widehat{a}} = \widehat{b}.$$

Em particular $\mathcal{A}$ é isometricamente isomorfa a uma álgebra $C(X)$ (X espaço topológico compacto) sse $\mathcal{A}$ for regular e simétrica; nesse caso a Transformação de Gelfand é isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ sobre $C(\sigma_{\mathcal{A}})$.

Demonstração: Atendendo às considerações atrás feitas, resta-nos apenas demonstrar que se $\mathcal{A}$ for isomorfa isometricamente a $C(X)$, então $\mathcal{A}$ é regular e simétrica. A regularidade é óbvia, por isometria; quanto à simetria, se:

$$i : \mathcal{A} \to C(X)$$

for isomorfismo isométrico, é fácil verificar que:

$$\overline{\widehat{a}} = \widehat{i^{-1}(\overline{i(a)})}.$$

Com efeito, $\forall \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}$:

$$\overline{\widehat{a}(\Phi)} = \overline{\Phi(a)} = \overline{\Phi \circ i^{-1}(i(a))} = \overline{\widehat{i(a)}(\Phi \circ i^{-1})} =$$

$$= \widehat{\overline{i(a)}}(\Phi \circ i^{-1}) = \Phi \circ i^{-1}(\overline{i(a)}) = \widehat{i^{-1}(\overline{i(a)})}(\Phi),$$

atendendo a que $\Phi \circ i^{-1} \in \sigma_{C(X)}$ e a que, em $C(X)$, se tem, evidentemente:

$$\overline{\widehat{f}} = \widehat{\overline{f}}, \forall f \in C(X),$$

já que:

$$\overline{\widehat{f}}(\delta_x) = \overline{f(x)} = \widehat{\overline{f}}(\delta_x)\,,\ \forall x \in X.\square$$

2.7 Compactificado de Stone-Čech de um espaço completamente regular

Estando completamente estudado o caso da álgebra $C(X)$, X espaço topológico *compacto* (*cf.* exemplos da secção 2.5 e Proposição 2.20) podemos pensar agora no caso mais geral de $C(T)$, T espaço topológico, $C(T)$ constituído pelas funções complexas *contínuas* e *limitadas* em T. Trata-se de álgebra de Banach para as operações habituais e a norma $\|\,.\,\|_\infty$ do supremo (como se viu na secção 2.3), que é obviamente *comutativa*, com *unidade*. Em geral não se terá T *homeomorfo* a $\sigma_{C(T)}$ (basta que T não seja compacto…) mas vamos ver que em certas condições podemos garantir que T é homeomorfo *a uma parte densa de* $\sigma_{C(T)}$; note-se que, em qualquer caso, $C(T)$ é álgebra *regular e simétrica*, e portanto isometricamente isomorfa a $C(\sigma_{C(T)})$ [exercício[68]]. Comecemos por verificar que, no caso em que X é compacto, a topologia *"é determinada pela estrutura de álgebra de $C(X)$"*.

PROPOSIÇÃO 2.21: ***Sejam X, Y espaços topológicos compactos; então X e Y são homeomorfos sse as álgebras de Banach $C(X)$ e $C(Y)$ forem (algebricamente) isomorfas. Além disso, nesse caso, $C(X)$ e $C(Y)$ são isometricamente isomorfas.***

Demonstração: É trivial verificar que se

$$h : X \to Y$$

for homeomorfismo, então a aplicação:

$$\bullet\ f \mapsto f \circ h$$

é isomorfismo isométrico de $C(Y)$ sobre $C(X)$. Reciprocamente, se:

$$i : C(Y) \to C(X)$$

for isomorfismo algébrico, consideremos a aplicação:

$$\bullet\ h : \sigma_{C(X)} \to \sigma_{C(Y)}$$
$$\Phi \mapsto h(\Phi) = \Phi \circ i;$$

é fácil verificar que se trata de homeomorfismo [exercício].

[68]É fácil verificar que se f for real, então $\widehat{f}$ é real, mostrando que, para f real, $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(f)$. Dessa observação resulta imediatamente que a álgebra $C(T)$ é simétrica…

Como $\sigma_{C(X)}$ e $\sigma_{C(Y)}$ são, como sabemos, homeomorfos respectivamente a X e a Y, concluímos que X e Y são homeomorfos.□

DEFINIÇÃO: *Um espaço topológico T diz-se* ***completamente regular*** *se satisfizer às duas condições seguintes:*

1. *T é um espaço T_1, ou seja, dados $x, y \in T$ existe um aberto Ω tal que:*

$$x \in \Omega, y \notin \Omega$$

   (ou, de modo equivalente, os conjuntos reduzidos a um ponto são fechados).

2. *Dado um ponto $x \in T$ e um fechado F de T não contendo x, existe uma função complexa contínua e limitada em T, igual a 1 em x e identicamente nula em F.*

O Lema de Urysohn garante que todo o espaço *normal*[69] é completamente regular, bem como todo o espaço *localmente compacto* (*cf.* [RS1], [Sa], [Y]).

Procuremos então relacionar T (espaço completamente regular) com $\sigma_{C(T)}$. Para cada $x \in T$ podemos, ainda neste caso, considerar $\delta_x \in \sigma_{C(T)}$ tal que:

$$\bullet\ \delta_x(f) = f(x)\,,\ \forall f \in C(T),$$

que é, de facto, funcional multiplicativo, como é fácil concluir. Seja então:

$$\begin{aligned} \bullet\ h : T &\to \sigma_{C(T)} \\ x &\mapsto h(x) = \delta_x; \end{aligned}$$

provemos que h é *homeomorfismo* de T sobre uma parte *densa* de $\sigma_{C(T)}$. É fácil concluir que h é *injectiva*; com efeito, se $x, y \in T, x \neq y$, existe uma função contínua e limitada $f : T \to \mathbb{C}$, tal que $f(x) = 1, f(y) = 0$ (por definição de espaço completamente regular, já que $\{y\}$ é fechado). Então $f \in C(T)$ e:

$$\bullet\ \delta_x(f) = f(x) \neq f(y) = \delta_y(f) \Rightarrow \delta_x \neq \delta_y \Rightarrow h(x) \neq h(y).$$

Por outro lado h é *contínua* pois se $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ for rede em T convergente para $x \in T$, para qualquer $f \in C(T)$ tem-se:

$$h(x_\alpha)(f) = \delta_{x_\alpha}(f) = f(x_\alpha) \underset{\alpha}{\longrightarrow} f(x) = \delta_x(f) = h(x)(f),$$

e portanto $h(x_\alpha) \underset{\alpha}{\longrightarrow} h(x)$ para a topologia fraca-$*$, ou seja, para a topologia de $\sigma_{C(T)}$. Provemos agora que h^{-1} *é contínua*; se

$$\delta_{x_\alpha} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \delta_x$$

em $\sigma_{C(T)}$ ($(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ rede em T), mostremos que:

---

[69] X diz-se normal se for T_1 e, dados dois fechados disjuntos, existirem abertos disjuntos que os contêm respectivamente; em particular X é separado, como é óbvio.

$$\bullet\ x_\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} x$$

em T. Seja V vizinhança aberta de x em T; existe $f \in C(T)$ tal que $f(x) = 1$, $f \equiv 0$ em $T \setminus V$. Por outro lado, como $\delta_{x_\alpha} \underset{\alpha}{\longrightarrow} \delta_x$ em $\sigma_{C(T)}$, concluímos que:

$$\bullet\ f(x_\alpha) \underset{\alpha}{\longrightarrow} f(x),$$

donde existe α' tal que:

$$\alpha \succ \alpha' \Rightarrow |f(x_\alpha) - f(x)| < 1 \Rightarrow |f(x_\alpha)| > 0 \Rightarrow x_\alpha \notin T \setminus V \Rightarrow x_\alpha \in V,$$

o que prova o que pretendíamos.

Resta demonstrar que $h(T)$ *é denso* em $\sigma_{C(T)}$. Obtemos uma *base de vizinhanças* da topologia de $\sigma_{C(T)}$ considerando os conjuntos da forma:

$$\bullet\ \Omega^{\Phi_0}_{f_1,\ldots,f_k;\varepsilon} = \{\Phi \in \sigma_{C(T)} : |\Phi(f_i) - \Phi_0(f_i)| < \varepsilon, \forall i = 1, \ldots, k\},$$

$\Phi_0 \in \sigma_{C(T)}, f_1, \ldots, f_k \in C(T), \varepsilon > 0$. Mostremos que em cada conjunto desta forma existe pelo menos um elemento de $h(T)$, ou seja, certo δ_x com $x \in T$. Se assim não fosse, existiriam $\Phi_0 \in \sigma_{C(T)}, f_1, \ldots, f_k \in C(T), \varepsilon > 0$, tais que:

$$\forall x \in T, \delta_x \notin \Omega^{\Phi_0}_{f_1,\ldots,f_k;\varepsilon},$$

ou seja:

$$\forall x \in T, \exists\, i \in \{1, \ldots, k\} : |f_i(x) - \Phi_0(f_i)| \geq \varepsilon;$$

nessa altura, pondo:

$$\bullet\ g(x) = \sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - \Phi_0(f_i)|^2\,,\ \forall x \in T,$$

teríamos:

$$g \in C(T),\ g(x) \geq \varepsilon^2 > 0\,,\ \forall x \in T,$$

e portanto g seria *invertível* em $C(T)$ (já que $\|1/g\|_\infty \leq 1/\varepsilon^2 < +\infty$), o que impediria a respectiva transformada de Gelfand de assumir o valor zero. Ora:

$$\widehat{g}(\Phi_0) = \Phi_0\Big(\sum_{i=1}^{k}(f_i - \Phi_0(f_i))(\overline{f_i - \Phi_0(f_i)})\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(\Phi_0(f_i) - \Phi_0(f_i))\Phi_0(\overline{f_i - \Phi_0(f_i)}) = 0\,!$$

concluímos assim que $h(T)$ é denso em $\sigma_{C(T)}$. As transformadas de Gelfand dos elementos de $C(T)$ podem então ser consideradas como *“extensões”* desses mesmos elementos, identificados com funções em $h(T)$ através do homeomorfismo h, ou seja, identificando $f \in C(T)$ com $f \circ h^{-1}$, o que estabelece um isomorfismo isométrico entre $C(T)$ e $C(h(T))$. A densidade de $h(T)$ em $\sigma_{C(T)}$ permite concluir que $\widehat{f}$ é a única extensão contínua de $f \circ h^{-1}$ a $\sigma_{C(T)}$ (que se trata de extensão resulta imediatamente da definição de h:

$$f \circ h^{-1}(\delta_x) = f \circ h^{-1}(h(x)) = f(x) = \delta_x(f) = \widehat{f}(\delta_x)).$$

Temos então:

TEOREMA 2.22 (Compactificado de Stone-Čech): ***Seja T espaço topológico completamente regular; então T é homeomorfo a uma parte densa $\widetilde{T}$ de um espaço topológico compacto $\beta(T)$ de tal modo que as funções contínuas limitadas complexas em $\widetilde{T}$ admitem uma extensão contínua (única) a $\beta(T)$. $\beta(T)$ é, a menos de homeomorfismo, o único espaço topológico satisfazendo àquelas condições. Além disso podemos tomar $\beta(T) = \sigma_{C(T)}$ e:***

$$\widetilde{T} = \{\delta_x : x \in T\}.$$

Demonstração: Atendendo ao que atrás vimos, resta-nos apenas demonstrar a unicidade de $\beta(T)$. É fácil concluir que $C(T)$ é isometricamente isomorfo a $C(\beta(T))$, e portanto $C(\beta(T))$ é isometricamente isomorfa a $C(\sigma_{C(T)})$; a unicidade resulta então das compacidades de $\sigma_{C(T)}$ e de $\beta(T)$ e da Proposição 2.21.$\square$

DEFINIÇÃO: *Chamamos* ***compactificado de Stone-Čech*** *de um espaço topológico completamente regular T a qualquer par $(\beta(T), h)$ em que $\beta(T)$ é espaço topológico compacto e h é homeomorfismo de T sobre uma parte densa $\widetilde{T}$ de $\beta(T)$, de tal modo que as funções contínuas limitadas complexas em $\widetilde{T}$ admitem uma extensão contínua (única) a $\beta(T)$.*

Exercícios

28) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade e $T : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(A)$ a representação regular esquerda de $\mathcal{A}$. Caracterize os operadores $B \in \mathcal{L}(A)$ que comutam com *todos* os $T_a \in T(\mathcal{A})$.

29) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade e. Então são equivalentes as seguintes condições:

i) Existe $c > 0$ tal que $c\|x\|^2 \leq \|x^2\|$, $\forall x \in \mathcal{A}$;

ii) Existe $d > 0$ tal que $d\|x\| \leq r_\sigma(x)$, $\forall x \in \mathcal{A}$.

Além disso $\|x\|^2 = \|x^2\|, \forall x \in \mathcal{A},$ sse $\|x\| = r_\sigma(x), \forall x \in \mathcal{A}$.

30) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade e e para cada $x \in \mathcal{A}$:

$$\bullet\ e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$$ [70]

(*exponencial de* x; verifique que e^x está *bem definido*). Mostre que:

a) $\|e^x\| \leq e^{\|x\|}$;

b) Se $xy = yx$, $x, y \in \mathcal{A}$, então $e^{x+y} = e^x e^y$;

c) $e^x \in \mathcal{G}$ e $(e^x)^{-1} = e^{-x}$;

d) $e^x = \lim_n (e + \frac{x}{n})^n = \lim_n (e - \frac{x}{n})^{-n}$ (*fórmula exponencial*).

e) $e^{x+y} = \lim_n (e^{\frac{x}{n}} e^{\frac{y}{n}})^n$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$ (*fórmula de Lie* [Sugestão: *cf.* início da demonstração do Teorema 8.6].).

f) A aplicação $f : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ tal que $f(\lambda) = e^{\lambda a}$ (para certo $a \in \mathcal{A}$), é *inteira*, tendo-se:

$$f'(\lambda) = a.e^{\lambda a} = e^{\lambda a}.a.$$

g) Se $y : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$ for analítica e $y' = a.y$ (para certo $a \in \mathcal{A}$), então:

$$y(\lambda) = e^{\lambda a} y(0)\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

h) Se $y : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ for *diferenciável* e $y' = a.y$ (para certo $a \in \mathcal{A}$), então:

$$y(t) = e^{ta} y(0)\,,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

[Sugestão: Pode utilizar-se o método habitual para resolver a equação diferencial linear de primeira ordem; para isso, basta verificar que uma função $f :]a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ com derivada identicamente nula é constante e utilizar a fórmula de derivação do produto:

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t),$$

para $f, g :]a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ deriváveis. Uma sugestão para demonstrar de modo simples que $f' \equiv 0 \Rightarrow f \equiv C^{te}$ é considerar, para cada $c \in]a, b[$ fixo, a função:

$$\|f(c + \widehat{t}) - f(c)\| :]a - c, b - c[\to \mathbb{R}$$

e verificar que a respectiva derivada é nula.]

i) Mesmo exercício da alínea h), para a equação:

$$y' = a.y + g(t)$$

($g :]t_0, t_1[\to \mathcal{A}$ contínua).

j) Interprete as fórmulas exponencial e de Lie (*cf.* d), e)) quando aplicadas a soluções de equações do tipo das consideradas em h), i).

---

[70] Representa-se, em geral, $(1/\lambda)x$ por $x/\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, x \in \mathcal{A}$.

31) Se $\mathcal{A}$ for álgebra de Banach com unidade e $x, y \in \mathcal{A}$ forem tais que existe $M > 0$ satisfazendo a:

- $$\left\| e^{\lambda x} y \, e^{-\lambda x} \right\| \leq M \, , \, \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

mostre que $xy = yx$ [Sugestão: aplicar o Teorema de Liouville à função $F(\lambda) = e^{\lambda x} y \, e^{-\lambda x}$].

32) Se $\mathcal{A}$ for álgebra de Banach com unidade tal que existe $c > 0$ satisfazendo a:

$$c\|x\|^2 \leq \left\| x^2 \right\| , \, \forall x \in \mathcal{A},$$

mostre que $\mathcal{A}$ é *comutativa* [Sugestão: aplicar o exercício anterior, atendendo ao exercício 29].

33) Seja X espaço topológico compacto. Mostre que na álgebra $C(X)$ só existem elementos *invertíveis* e *divisores topológicos de zero*; identifique $\sigma(f)$ para $f \in C(X)$.

34) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade tal que $\|x\|^2 = \|x^2\|, \forall x \in \mathcal{A}$; mostre que $\|x\|^n = \|x^n\|, \forall x \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$.

35) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade tal que $\exists C > 0 : \|xy\| \leq C\|yx\|$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$. Mostre que $\mathcal{A}$ é comutativa; se além disso $\|x\| \|y\| \leq C\|xy\|$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$, mostre que $\mathcal{A}$ é isometricamentre isomorfa a $\mathbb{C}$ [Sugestão: exercício 31, para resolver a primeira questão; Proposição 2.5 para a segunda].

36) Mostre que se $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| < +\infty$, a função $f : [0, 2\pi[\, \to \mathbb{C}$ tal que:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \, e^{int}$$

é contínua e $\lim\limits_{t \to 2\pi^-} f(t) = f(0)$. Além disso:

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k \, e^{ikt} \underset{n}{\longrightarrow} f, \text{ em } W.$$

37) Mostre que l_1 e W são álgebras de Banach isometricamente isomorfas.

38) Na classe dos homomorfismos $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre álgebras de Banach com unidade ($e \in \mathcal{A}, e' \in \mathcal{B}$), demonstre as seguintes asserções:

a) *Nem sempre* $R(T)$ é ideal de $\mathcal{B}$, embora seja sempre *subálgebra*.

b) Se T for *sobrejectivo*, $T(e) = e'$ e $T(x^{-1}) = T(x)^{-1}, \forall x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$.

c) *Nem sempre* T é sobrejectivo, ainda que $T(e) = e'$ e $T(x^{-1}) = T(x)^{-1}$, $\forall x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$.

39) Mostre, com um contra-exemplo, que *nem sempre*:

$$xy + \mathcal{J} = \{(x + j)(y + j') : j, j' \in \mathcal{J}\},$$

onde $\mathcal{J}$ é *ideal* fechado de uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$[71] [Sugestão: Pode tomar para $\mathcal{A}$ a álgebra das matrizes triangulares superiores 3×3 e para $\mathcal{J}$ o ideal constituído pelas matrizes cujos elementos a_{ij} com $(i, j) \neq (1, 3)$ são todos nulos…].

40) Mostre que, sendo $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade e e $\mathcal{J}$ ideal fechado *próprio* de $\mathcal{A}$, então:

a) $\|(x + \mathcal{J}).(y + \mathcal{J})\| \leq \|x + \mathcal{J}\|\|y + \mathcal{J}\|, \forall x, y \in \mathcal{A}$;

b) $\|e + \mathcal{J}\| = 1$;

c) A sobrejecção canónica $j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J}$ é *homomorfismo algébrico* de núcleo $\mathcal{J}$.

41) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach sem unidade e $\mathcal{A}'$ a álgebra de Banach com unidade construída como na secção 2.1 a partir de $\mathcal{A}$.

a) Seja $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ homomorfismo algébrico. Mostre que existe exactamente um *funcional multiplicativo não nulo*:

$$\Phi' : \mathcal{A}' \to \mathbb{C}$$

que estende Φ. Conclua que Φ é *contínuo*, tendo-se $\|\Phi\| \leq 1$.

b) Um ideal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ diz-se *modular* se existir $u \in \mathcal{A}$ (*unidade de $\mathcal{A}$ módulo $\mathcal{J}$*) tal que:

- $\{x - xu : x \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{J}$, $\{x - ux : x \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{J}$;

se $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ for homomorfismo, mostre que $\ker \Phi$ é *ideal maximal modular*, se $\Phi \not\equiv 0$.

c) Se $\mathcal{J}$ for ideal *modular próprio* de $\mathcal{A}$ e u for unidade de $\mathcal{A}$ *módulo* $\mathcal{J}$, mostre que $u^n \notin \mathcal{J}, \forall n \in \mathbb{N}_1$.

d) Nas condições da alínea anterior, mostre que $B(u, 1) \cap \mathcal{J} = \emptyset$. Conclua que o *fecho* de um ideal modular *próprio* é ideal modular *próprio* e que, portanto, um ideal modular maximal é *fechado*.

e) Mostre que todo o ideal modular próprio está contido num ideal modular próprio *maximal*.

f) Mostre que um ideal modular fechado $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ é maximal sse $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ não admitir ideais senão os triviais.

g) Se $\mathcal{J}$ for ideal de $\mathcal{A}$ mostre que $u \in \mathcal{A}$ é unidade de $\mathcal{A}$ módulo $\mathcal{J}$ sse $u + \mathcal{J}$ for unidade de $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ (considerando apenas as estruturas algébricas). Se $\mathcal{J}$ for fechado e $\|u\| = 1$, mostre que $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ é *álgebra de Banach com unidade*.

---

[71] *cf.* [TL], VII-3, p. 400 onde se afirma, por lapso, a igualdade cuja validade fica infirmada por este exercício…

h) Mostre que se $\mathcal{J}$ for ideal modular e hiperplano de $\mathcal{A}$, então existe um homomorfismo $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, não nulo, tal que $\mathcal{J} = \ker \Phi$.

i) Mostre que se $\mathcal{A}$ for comutativa e $\mathfrak{M}$ ideal modular maximal de $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}/\mathfrak{M}$ é isometricamente isomorfa a $\mathbb{C}$ (a recíproca desta asserção, mesmo para $\mathcal{A}$ não comutativa, resulta de h)). Conclua que existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto $\sigma_{\mathcal{A}}$ dos homomorfismos não nulos $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ e o conjunto $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ dos ideais modulares maximais de $\mathcal{A}$, que a Φ faz corresponder $\ker \Phi$.

j) Mostre que $\mathfrak{M} \subset \mathcal{A}$ é ideal modular maximal de $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ comutativa) sse existir um ideal maximal $\mathfrak{M}' \subset \mathcal{A}'$, distinto de $\mathcal{A}$, tal que $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \cap \mathcal{A}$; mostre ainda que $\mathfrak{M}$ determina $\mathfrak{M}'$ univocamente e que, portanto, existe uma bijecção entre o conjunto dos ideais maximais de $\mathcal{A}'$ distintos de $\mathcal{A}$ e o conjunto dos ideais modulares maximais de $\mathcal{A}$ que a $\mathfrak{M}' \in \mathcal{M}(\mathcal{A}') \setminus \{\mathcal{A}\}$ faz corresponder $\mathfrak{M}' \cap \mathcal{A}$.

k) No caso em que $\mathcal{A}$ é comutativa podemos definir a *Transformação de Gelfand* $\widehat{x}$ de $x \in \mathcal{A}$ como sendo a aplicação de $\sigma_{\mathcal{A}}$ (ou $\mathcal{M}$) em $\mathbb{C}$ que a $\Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}$ (ou a $\ker \Phi \in \mathcal{M}$) faz corresponder $\widehat{x}(\Phi) = \Phi(x)$. Mostre que:

$$R(\widehat{x}) = \{\Phi(x) : \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}\}$$

coincide com $\sigma_{\mathcal{A}'}(x)$ ou com $\sigma_{\mathcal{A}'}(x) \setminus \{0\}$ (note-se que $0 \in \sigma_{\mathcal{A}'}(x), \forall x \in \mathcal{A}$!).

42) Seja X espaço topológico compacto (separado), $\mathcal{J}$ ideal fechado de $C(X)$ e $K = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in \mathcal{J}\}$.

a) Se Ω for aberto de X tal que $K \subset \Omega$, mostre que existe $g \in \mathcal{J}$ tal que $g(x) \neq 0, \forall x \in X \setminus \Omega$.

b) Mostre que $\mathcal{J} = \{f \in C(X) : f_{/K} \equiv 0\}$. Conclua que os ideais fechados de $C(X)$ são exactamente as partes de $C(X)$ constituídas pelas funções que se anulam identicamente em certo fechado $K \subset X$.

43) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade; mostre que $L(\sigma_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ é álgebra comutativa com unidade e que a Transformação de Gelfand é homomorfismo contínuo de $\mathcal{A}$ em $L(\sigma_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})$ tal que $\widehat{e} = 1$, $\|\widehat{a}\|_\infty \leq \|a\|, \forall a \in \mathcal{A}$, e $\widehat{a^{-1}} = 1/\widehat{a}, \forall a \in \mathcal{G}$.

44) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade, $\mathcal{A}_a$ a álgebra gerada por $a \in \mathcal{A}$. Mostre que a aplicação de $\sigma_{\mathcal{A}_a}$ em $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$ que a Φ faz corresponder $\Phi(a)$ é uma bijecção que permite identificar $\widehat{a}$ com a aplicação identidade em $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$. Mostre ainda que se $b \in \mathcal{A}_a$ for limite de uma sucessão $P_n(a)$ de polinómios em a, então $P_n(\lambda) \underset{n}{\longrightarrow} \widehat{b}(\lambda)$ *uniformemente em* $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$ (identificando $\widehat{b}$ com a função de $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$ em $\mathbb{C}$ que a bijecção atrás construída determina), e portanto $\widehat{b}$ é contínua em $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$.

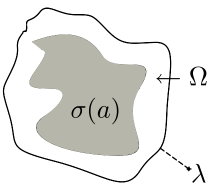
45) a) Sendo $a \in \mathcal{A}$ (álgebra de Banach com unidade), $c \in \mathbb{C}$ e $g(\lambda) = 1/(\lambda - c)$, mostre que $g \in \mathcal{H}_a$ sse $c \in \rho(a)$ e, nesse caso:

$$g(a) = (a - ce)^{-1} = R_c.$$

b) Seja $a \in \mathcal{A}$, (álgebra de Banach com unidade), Ω aberto de $\mathbb{C}$ contendo $\sigma(a)$. Mostre que existe uma constante $C = C(\Omega) > 0$, tal que:

$$\left\|(a - \lambda e)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{\text{distância}\,(\lambda, \overline{\Omega})}\,, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$$

(graficamente:



)

46) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade, $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto não vazio e:

$$\mathcal{A}_\Omega = \{a \in \mathcal{A} : \sigma(a) \subset \Omega\};$$

mostre que $\mathcal{A}_\Omega$ é *aberto* em $\mathcal{A}$.

47) Com as notações do exercício anterior, seja $\mathcal{H}(\Omega)$ o conjunto das funções holomorfas em Ω (que é álgebra para as operações habituais, comutativa com unidade) e $\mathcal{S}$ a aplicação dada pelo cálculo simbólico (Teorema 2.15):

$$\bullet\ \mathcal{S} : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{A}^{\mathcal{A}_\Omega}$$
$$g \mapsto \mathcal{S}_g$$

onde:

$$\bullet\ \mathcal{S}_g : \mathcal{A}_\Omega \to \mathcal{A}$$

é tal que:

$$\mathcal{S}_g(a) = g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(\lambda)\,(\lambda e - a)^{-1}\,d\lambda$$

(Γ fronteira orientada de domínio de Cauchy contendo $\sigma(a)$ na parte interna). Mostre que:

a) $\mathcal{S}_g$ é *contínua* de $\mathcal{A}_\Omega$ em $\mathcal{A}$, $\forall g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

b) $\mathcal{S}$ é *homomorfismo injectivo* da álgebra $\mathcal{H}(\Omega)$ na álgebra $C(\mathcal{A}_\Omega, \mathcal{A})$ tal que $\mathcal{S}_1 \equiv e, \mathcal{S}_\lambda(a) = a, \forall a \in \mathcal{A}_\Omega$.

c) $\mathcal{S}$ goza da seguinte propriedade de continuidade: *"se $g_n \xrightarrow[n]{} g$ uniformemente em cada compacto de Ω ($g_n, g \in \mathcal{H}(\Omega)$), então:*

$$\bullet\ \mathcal{S}_{g_n}(a) \xrightarrow[n]{} \mathcal{S}_g(a) \text{ em } \mathcal{A}, \forall a \in \mathcal{A}_\Omega\text{"}$$

d) Mostre que as propriedades expressas em b) e c) *caracterizam completamente* $\mathcal{S}$ e que a convergência em c) é *uniforme* para a a variar num compacto de $\mathcal{A}_\Omega$.

e) Mostre, com um contra-exemplo, que, mesmo com a hipótese de c) a convergência aí expressa *pode não ser uniforme* em $\mathcal{A}_K = \{a \in \mathcal{A} : \sigma(a) \subset K\}$, K compacto de Ω[72].

48) Seja $g(\lambda) = \sum_{n\geq 0} c_n\, \lambda^n$ função *inteira*; mostre que sendo $a \in \mathcal{A}$ (álgebra de Banach com unidade) e $g(a)$ *dada pelo cálculo simbólico*, se tem:

$$g(a) = \sum_{n\geq 0} c_n\, a^n.$$

49) Mostre como pode obter o *Teorema de existência e unicidade* para os sistemas de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, e segundo membro contínuo, a partir do exercício 30) h), i). Utilize o cálculo simbólico de matrizes para resolver o sistema:

$$\begin{cases} y' = y + z - 1 \\ z' = z - y \end{cases}.$$

50) Mostre como a fórmula exponencial (*cf.* exercício 30) d)) permite obter métodos de aproximação de soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes por soluções de sistemas de equações lineares.

51) Interprete a fórmula de Lie (*cf.* exercício 30) e)) para o caso dos sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes.

52) Se a série de potências $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$ for tal que $\sum_{n\geq 0} |a_n| < +\infty$ e $\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n \neq 0$, $\forall z \in \overline{B}(0,1) \subset \mathbb{C}$, mostre que a função $g(z) = 1/\left(\sum_{n\geq 0} a_n\, z^n\right)$ também admite desenvolvimento em série de Taylor *absolutamente convergente* no círculo $\overline{B}(0,1)$ de $\mathbb{C}$.

[72] *Cf.* [Ru2], exercício 7 do Capítulo 10, p. 260 onde, por lapso, se pede para demonstrar a asserção que nesta alínea se pede para *infirmar*.

53) Mostre que se $g \in \mathcal{H}_a$ ($a \in \mathcal{A}$, álgebra de Banach com unidade) e h é holomorfa numa vizinhança de $g(\sigma(a))$, então $h \in \mathcal{H}_{g(a)}$, $h \circ g \in \mathcal{H}_a$ e:

$$h \circ g(a) = h(g(a)).$$

54) Mostre que o inverso de uma matriz *invertível* está na álgebra (fechada ou não) por ela gerada [Sugestão: cálculo simbólico].

55) a) Sendo $a \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade) tal que 0 está na componente ilimitada de $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, mostre que a é invertível e a^{-1} pertence à álgebra fechada $\mathcal{A}_a$ gerada por a [Sugestão: cálculo simbólico e *Teorema de Runge*].

b) Mostre, com um contra-exemplo, que nem sempre, no caso geral, $a^{-1} \in \mathcal{A}_a$. Calcule, para o contra-exemplo apresentado, os espectros de a em relação a $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_a$.

56) Demonstre as propriedades (30) a (33) da noção de comutante, verificando também que M' é sub-álgebra fechada de $\mathcal{A}$ contendo e.

57) Seja $a \in \mathcal{A}$ (álgebra de Banach com unidade) tal que $\sigma(a)$ não é conexo; mostre que pode construir a partir de a (utilizando o cálculo simbólico) um elemento $b \in \mathcal{A}, b \neq 0, b \neq e$, tal que $b^2 = b$ (b diz-se *idempotente*). Mostre que se b for idempotente, então $\sigma(b) \subset \{0, 1\}$ [Sugestão: para a segunda parte do exercício, pode utilizar o Teorema de transformação do espectro e o polinómio $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$].

58) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade, $a, b \in \mathcal{A}$ tais que $ab = ba$; mostre que:

- $\sigma(a+b) \subset \sigma(a) + \sigma(b)$;
- $\sigma(ab) \subset \sigma(a)\sigma(b)$.

[Sugestão: pode utilizar a Transformação de Gelfand em $\{a, b\}''$].

59) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade e $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$. Mostre que se as transformadas de Gelfand $\widehat{a_1}, \ldots, \widehat{a_n}$ não tiverem nenhum zero comum, então existem $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{A}$ tais que:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j\, a_j = e;$$

traduza este resultado para os casos particulares da álgebra de Wiener e da álgebra associada ao exercício 52).

60) Seja X compacto e $\mathcal{B}$ sub-álgebra fechada de $C(X)$ contendo 1.

a) Se $x \in X$, mostre que $\mathfrak{M}_x = \{g \in \mathcal{B} : g(x) = 0\}$ é ideal maximal de $\mathcal{B}$.

b) Suponha que $\mathcal{B}$ é fechada para a conjugação complexa e contém os inversos dos elementos de $\mathcal{B}$ invertíveis em $C(X)$; mostre que todo o ideal maximal de $\mathcal{B}$ é da forma $\mathfrak{M}_x$ para certo $x \in X$.

c) Supondo satisfeita a conclusão de b), mostre que X é *homeomorfo* a $\sigma_{\mathcal{B}}$ sse $\mathcal{B}$ separar pontos (ou seja, dados $x, y \in X, \exists\, g \in \mathcal{B} : g(x) \neq g(y)$) e portanto, nas hipóteses de b), sse $\mathcal{B} = C(X)$.

d) Das duas condições de b) mostre que só a segunda é *necessária* para se obter a conclusão [Sugestão: considere a álgebra $\mathcal{B}$ constituída pelas funções *contínuas* em $S(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ que são prolongáveis a $\overline{B}(0,1)$ como funções contínuas, *holomorfas no interior*, com a norma de $C(S(0,1))$].

61) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade e, X espaço topológico compacto e:

$$T : \mathcal{A} \to C(X)$$

homomorfismo algébrico tal que $T(e) \equiv 1$.

a) Mostre que existe um homomorfismo T_1 que torna comutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\widehat{\cdot}"] \arrow[dr, "T"'] & C(\sigma_{\mathcal{A}}) \arrow[d, "T_1"] \\
& C(X)
\end{tikzcd}$$

b) Mostre que T_1 (e portanto T) é *contínuo* (*cf.*, *sem o usar*, o segundo Corolário da Proposição 2.19).

c) Mostre que se supusermos T contínuo podemos dispensar a hipótese $T(e) \equiv 1$ [Sugestão: considere $X_1 = \{x \in X : Te(x) = 1\}$].

62) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade, gerada por $a_1, \ldots, a_n$ (ou seja, igual ao *fecho* do conjunto dos *polinómios* em $a_1, \ldots, a_n$ — *menor subálgebra de Banach com unidade contendo* $\{a_1, \ldots, a_n\}$).

a) Mostre que a aplicação:

$$h : \sigma_{\mathcal{A}} \to \mathbb{C}^n$$
$$\Phi \mapsto h(\Phi) = (\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_n))$$

é *homeomorfismo* de $\sigma_{\mathcal{A}}$ sobre um *compacto* K de $\mathbb{C}^n$.

b) Mostre que existe um homomorfismo único:

$$\Gamma : \mathcal{A} \to C(K)$$

tal que:

- $\Gamma(a_i)(z) = z_i\,, \forall z \in K, i = 1, \ldots, n;$

verifique que:

$$\bullet\ \Gamma(a)(h(\Phi)) = \widehat{a}(\Phi)\,,\ \forall a \in \mathcal{A}, \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}},$$

ou seja,

$$\Gamma(a) = \widehat{a} \circ h^{-1}\,,\ \forall a \in \mathcal{A}.$$

c) Mostre que $\Gamma(\mathcal{A})$ é constituída por limites *uniformes* de polinómios.

d) Se $K \subset \mathbb{C}^n$ for compacto chamamos *invólcuro polinomialmente convexo de* K ao conjunto:

$$\widehat{K} = \{z \in \mathbb{C}^n : |P(z)| \leq \sup_{s \in K} |P(s)|, \forall P \text{ polinómio}\};$$

com as notações das alíneas anteriores ($K = h(\sigma_{\mathcal{A}})$), mostre que:

$$\bullet\ \widehat{K} = K$$

(ou seja K é *polinomialmente convexo*) [Sugestão: Mostre que se $z \in \widehat{K}$ a aplicação $a_i \mapsto z_i$, $i = 1, \ldots, n$, se estende de maneira única a um funcional multiplicativo $\Phi \in \sigma_{\mathcal{A}} \ldots$].

e) Mostre que se $n = 1$, K é polinomialmente convexo sse $\mathbb{C} \setminus K$ for conexo. Que pode concluir acerca de $\sigma(a)$ em $\mathcal{A}_a$ ($\mathcal{A}$ álgebra de Banach com unidade)? [Sugestão: *Teorema do módulo máximo*, para a condição necessária; *Teorema de Runge* para a condição suficiente — se $z \in (\mathbb{C} \setminus K) \cap \widehat{K}$ considerar a função $s \mapsto 1/(z - s)$, holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, vizinhança de K].

f) Conclua da alínea anterior que se $X \subset \mathbb{C}$ for compacto, para que os *polinómios em* z sejam densos em $C(X)$ é condição *necessária* que $\mathbb{C} \setminus X$ seja *conexo* (e que X tenha interior vazio). [Nota: que estas condições são suficientes é um teorema de Lavrentiev — ver [Br], teorema 3.4.15].

63) Seja T espaço topológico, $C(T)$ conjunto das funções complexas *contínuas e limitadas* em T; mostre que $C(T)$ é *álgebra de Banach comutativa com unidade* para as operações habituais e a norma:

$$\|f\| = \sup_{t \in T} |f(t)|,$$

que é *regular* e *simétrica*. Conclua que $C(T)$ é isometricamente isomorfa a $C(\sigma_{C(T)})$, através da Transformação de Gelfand.

64) Como consequência imediata do exercício anterior mostre que a conclusão desse exercício ainda é verdadeira, substituindo $C(T)$ por $L(X)$ (conjunto de *todas* as funções complexas *limitadas* em X).

65) Seja $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ espaço de medida (μ medida positiva). Designando por *Imagem* ou *Range essencial de* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, mensurável-$\mu$, o conjunto:

$$R_{\text{ess}}(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(f^{-1}(B(\lambda, \varepsilon))) > 0, \forall \varepsilon > 0\},$$

diz-se que f é *essencialmente limitada* se $R_{\text{ess}}(f)$ for limitado; nesse caso designa-se por *supremo essencial de* f o número real não negativo:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|\lambda| : \lambda \in R_{\text{ess}}(f)\}$$

e por $L^\infty(\Omega, \mathbb{C}, \mu)$ o conjunto das (classes de) funções (para a relação de igualdade p.p.-μ) essencialmente limitadas de Ω em $\mathbb{C}$.

a) Mostre que $L^\infty(\Omega, \mathbb{C}, \mu)$ é *álgebra de Banach comutativa com unidade* para as operações habituais e a norma $\| \, . \, \|_\infty$.

b) Mostre que $\sigma(f) \subset R_{\text{ess}}(f), \forall f \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C}, \mu)$.

c) Verifique que $L^\infty(\Omega, \mathbb{C}, \mu)$ é *regular* e *simétrica* (quanto à simetria verifique, mais precisamente, que:

$$\widehat{\overline{g}} = \overline{\widehat{g}}\,, \ \forall g \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C}, \mu).$$

d) Mostre que a Transformação de Gelfand de $L^\infty(\Omega, \mathbb{C}, \mu)$ *respeita a ordem* (*i.e.*: $g \geq 0$ *p.p.*-$\mu \Rightarrow \widehat{g} \geq 0\,, \forall g \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C}, \mu)$).

e) Mostre que a Transformação de Gelfand transforma funções características[73] em funções características.

f) Mostre que $X = \sigma_{L^\infty(\mu)}$ é *totalmente desconexo* como espaço topológico (ou seja, *as componentes conexas são as partes reduzidas a um ponto*) [Sugestão: Mostre que $C(X) = C(\sigma_{L^\infty(\mu)})$ contém como parte densa o espaço vectorial gerado pelas funções características dos conjuntos simultaneamente abertos e fechados; atendendo a esse facto, se em dada parte Y de X existirem dois elementos distintos x, y mostre que existe uma parte simultaneamente aberta e fechada de X que contém x mas não contém y].

g) Conclua das alíneas anteriores que todo o espaço L^∞ é *isometricamente isomorfo* (para as estruturas de álgebra de Banach e de ordem) a um espaço $C(X)$ onde X é *compacto* e *totalmente desconexo*.

66) Com as notações do exercício anterior, seja agora $\Omega = [0,1]$, $\mathfrak{M}$ a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis, μ a medida de Lebesgue.

a) Mostre que $\sigma(f) = R_{\text{ess}}(f), \forall f \in L^\infty([0,1])$.

b) Mostre que existe uma *medida de probabilidade* m sobre $X = \sigma_{L^\infty([0,1])}$ tal que:

$$\int_X \widehat{f}\, dm = \int_0^1 f(x)\, dx\,, \ \forall f \in L^\infty([0,1]).$$

c) Mostre que $m(A) > 0$ para todo o aberto não vazio A de X [Sugestão: Lema de Urysohn].

d) Mostre que toda a função boreliana limitada $\varphi : X \to \mathbb{C}$ coincide $p.p.$-m com uma função de $C(X)$ [Sugestão: Comece por supor que $|\varphi| \leq 1$ e considere uma aproximação de φ em $L^2(X, m)$ por funções contínuas $\widehat{f_n}$ de módulo não superior a 1 — *cf.*

---

[73] Dado um conjunto X e $Y \subset X$ recordemos que se designa por função característica de Y (em X) a função $\chi_Y : X \to \mathbb{R}$ tal que $\chi_Y(x) = 1$ se $x \in Y$, $\chi_Y(x) = 0$ se $x \in X \setminus Y$.

[Ru1], Teorema de Lusin — mostrando que os correspondentes f_n constituem uma sucessão de Cauchy em $L^2([0,1])$; conclua que φ coincide $p.p.$-m com a transformada de Gelfand do limite dos f_n].

e) Mostre que X é *extremalmente desconexo*, ou seja, que os *fechos dos abertos são conjuntos abertos* (condição *mais forte* que a definidora dos espaços *totalmente desconexos*) [Sugestão: Dado um aberto A de X considere o complementar B de $\overline{A}$ em X; para mostrar que B é *fechado* considere $\varphi = \chi_B$ e $\widehat{f} \in C(X)$ igual a φ $p.p.$-μ...].

67) Dado um espaço de medida $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ e $A, B \in \mathfrak{M}$, diz-se que B *quase contém* A ou que A *está quase contido em* B se $\mu(A \setminus B) = 0$. Como é óbvio, a união de uma família arbitrária de conjuntos mensuráveis nem sempre é mensurável (uma vez que podem existir partes de Ω não mensuráveis...); no entanto, prove que *dada uma família arbitrária* $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ *de partes mensuráveis do intervalo* $[0,1]$ *existe uma parte mensurável* A *de* $[0,1]$ *tal que* A *quase contém cada* A_α *e está quase contido em qualquer* B *mensurável do intervalo* $[0,1]$ *que quase contenha cada* A_α *(ou seja,* A *é o supremo da família* $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ *para a relação de ordem parcial de "quase-inclusão" no conjunto das partes mensuráveis de* $[0,1]$ [Sugestão: Pode utilizar o exercício anterior para construir A. Comece por considerar as funções características f_α dos A_α e as respectivas transformadas de Gelfand $\widehat{f_\alpha}$ que são funções características de certos Ω_α; sendo Ω a aderência da união dos Ω_α, a respectiva função característica também estará em $C(X)$, pelo que será da forma $\widehat{f}$ para certo $f \in L^\infty([0,1])$. Mostre que pode tomar $A = \{x \in [0,1] : f(x) = 1\}$].

68) Efectue uma construção semelhante à do compactificado de Stone-Čech mas partindo de $L(T)$ (espaço das funções *limitadas* complexas em T, espaço topológico completamente regular); qual a propriedade do compactificado de Stone-Čech que não se mantém na nova construção?

69) Sejam X, Y espaços topológicos compactos e $i : C(X) \to C(Y)$ isomorfismo algébrico; mostre que:

$$\begin{aligned} h : \sigma_{C(X)} &\to \sigma_{C(Y)} \\ \Phi &\mapsto h(\Phi) = \Phi \circ i^{-1} \end{aligned}$$

é *homeomorfismo*. Conclua que X e Y são homeomorfos.

70) Seja $\beta(\mathbb{R})$ o compactificado de Stone-Čech de $\mathbb{R}$. Mostre que não pode existir uma distância em $\beta(\mathbb{R})$ que defina a topologia de $\beta(\mathbb{R})$ e coincida em $\mathbb{R}$ com a distância habitual. [Sugestão: pensar, por exemplo, na função $\sin(x^2)$...].

71) Mostre que o *compactificado de Stone-Čech* $\beta(T)$ de um espaço completamente regular T satisfaz à seguinte propriedade de *maximalidade*: se Y for compacto e $g : T \to Y$ contínua com imagem densa, então existe uma aplicação contínua $\widetilde{g} : \beta(T) \to Y$ que torna comutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g"'] & \beta(T) \arrow[d, "\widetilde{g}"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

onde h é homeomorfismo de T numa parte densa de $\beta(T)$ (independente de g).

Capítulo 3

A Álgebra L^1 e a Transformação de Fourier

3.1 A álgebra de convolução L^1

Examinemos agora um exemplo importante de álgebra de Banach *sem unidade*. Consideremos o espaço de Banach $L^1(\mathbb{R}^N)$; em tudo o que se segue tomaremos $N = 1$, sem perda de generalidade, já que os resultados (e as ideias das demonstrações) são idênticos, *mutatis mutandis*, no caso geral de $N \in \mathbb{N}_1$ e até mesmo em situações mais gerais, no quadro da teoria da medida de Haar em grupos localmente compactos, assunto de que não nos ocuparemos neste curso.

Pretendemos introduzir em L^1 um produto[74], denotado $*$ e designado por ***convolução***, pela fórmula:

$$\text{(36)} \qquad \bullet\; x * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-s)y(s)\,ds\,,\ \forall x, y \in L^1,$$

pelo menos para quase todos os $t \in \mathbb{R}$ (no sentido da medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$). Não sabemos *a priori* se a função $s \mapsto x(t-s)y(s)$ é integrável para cada $t \in \mathbb{R}$, ou mesmo, caso o seja $p.p.$ em $\mathbb{R}$, se a função $x * y$ definida $p.p.$ por (36) define, de facto, um elemento de L^1. Vejamos que assim é e que se obtém de facto uma álgebra de Banach.

TEOREMA 3.1: ***Se $x, y \in L^1$, então, para quase todos os $t \in \mathbb{R}$ é somável em $\mathbb{R}$ a função $s \mapsto x(t-s)y(s)$, e a aplicação $x * y$ definida por (36), $p.p.$ em $\mathbb{R}$, é somável. A aplicação $(x, y) \mapsto x * y$ de $L^1 \times L^1$ em L^1 confere a L^1 uma estrutura de álgebra de Banach comutativa sem unidade, tendo-se:***

$$\bullet\; \|x * y\| \le \|x\|\|y\|.$$

Comecemos por demonstrar dois Lemas que utilizaremos também em diversas ocasiões ao longo deste capítulo:

[74]Recordemos que L^1 *não é fechado* para o produto usual de funções.

LEMA 1: ***Seja $p \in [1, +\infty[$, $x \in L^p$; então é contínua a aplicação de $\mathbb{R}$ em L^p que a $t \in \mathbb{R}$ faz corresponder $x_t \in L^p$ definida por:***

$$\bullet\ x_t(s) = x(s-t)\,,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Comecemos por demonstrar o Lema para $x \in C_c$ (espaço das funções contínuas de suporte compacto em $\mathbb{R}$). Como x é, neste caso, uniformemente contínua, é evidente que:

$$x_t \xrightarrow[t \to t_0]{} x_{t_0},$$

uniformemente, e portanto $x_t \xrightarrow[t \to t_0]{} x_{t_0}$ em L^p, já que podemos considerar o integral que intervém na convergência, apenas em certo domínio limitado de $\mathbb{R}$. Ora C_c é *denso* em L^p; então, dado $x \in L^p$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, seja $\widetilde{x} \in C_c$ tal que:

$$\|x - \widetilde{x}\|_p < \frac{\delta}{3}.$$

Ter-se-á:

$$\|x_t - x_{t_0}\|_p \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |x(s-t) - \widetilde{x}(s-t)|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ \left(\int_{\mathbb{R}} |\widetilde{x}(s-t) - \widetilde{x}(s-t_0)|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}} |\widetilde{x}(s-t_0) - x(s-t_0)|^p \, ds\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= 2\|x - \widetilde{x}\|_p + \|\widetilde{x}_t - \widetilde{x}_{t_0}\|_p < \frac{2\delta}{3} + \|\widetilde{x}_t - \widetilde{x}_{t_0}\|_p.$$

Pelo que atrás vimos e já que $\widetilde{x} \in C_c$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que:

$$|t - t_0| < \varepsilon \Rightarrow \|\widetilde{x}_t - \widetilde{x}_{t_0}\|_p < \frac{\delta}{3},$$

donde $\|x_t - x_{t_0}\|_p < \delta$.□

LEMA 2: ***Seja $x \in L^1$ e y função mensurável limitada; então a aplicação definida por:***

$$\bullet\ x * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-s)\, y(s)\, ds$$

$(t \in \mathbb{R})$ é contínua (e independente do representante de x escolhido).

Demonstração: Considerando um representante qualquer de $x \in L^1$ ter-se-á (para $t_0, t \in \mathbb{R}$):

$$|x * y(t) - x * y(t_0)| \leq \int_{\mathbb{R}} |x(t-s) - x(t_0 - s)|\, \underbrace{|y(s)|}_{\leq M}\, ds \leq$$
$$\leq M \int_{\mathbb{R}} |x(t-s) - x(t_0 - s)|\, ds \xrightarrow[t \to t_0]{} 0,$$

atendendo ao Lema 1, aplicado à função $x_-(s) = x(-s)$; $x * y$ é, portanto, contínua. Considerando outro representante $\widetilde{x}$ de x é óbvio que:

$$\widetilde{x} * y(t) = x * y(t) \ , \ \forall t \in \mathbb{R},$$

já que $x(t-s)\,y(s) = \widetilde{x}(t-s)\,y(s)$ para quase todos os $s \in \mathbb{R}$.☐

Demonstração do Teorema 3.1: Poderíamos demonstrar directamente o Teorema, estudando a mensurabilidade em $\mathbb{R}^2$ da função:

$$(t,s) \mapsto x(t-s)\,y(s)$$

e aplicando os Teoremas de Fubini e Tonelli-Hobson [exercício] (ver [Ru1] e [BW2]). Podemos, no entanto, basear-nos em resultados mais elementares, como sejam o Teorema de Fubini *para funções contínuas* e alguns teoremas básicos da teoria do integral de Lebesgue (Beppo Levi, Lebesgue, Lema de Fatou, etc.), juntamente com os Lemas anteriores, que, como foi referido, nos serão úteis noutras ocasiões. Comecemos então por estudar a operação $*$ *em* C_c, onde está obviamente bem definida, fornecendo ainda funções de C_c ($x * y(t) = 0$ se $t - s \notin$ $\notin \operatorname{supp} x, \forall s \in \operatorname{supp} y$, ou seja, se $t \notin \operatorname{supp} x + \operatorname{supp} y$, compacto de $\mathbb{R}$). É trivial a verificação da bilinearidade de $*$ e:

$$x * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-s)\,y(s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} x(u)\,y(t-u)\,du = y * x(t),$$

$\forall t \in \mathbb{R}$ (fazendo a mudança de variável $t - s = u$); analogamente (utilizando o Teorema de Fubini para funções contínuas em intervalos compactos de $\mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned} x * (y * z)(t) &= \int_{\mathbb{R}} x(t-s)\Big(\int_{\mathbb{R}} y(s-u)\,z(u)\,du\Big)ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} z(u)\Big(\int_{\mathbb{R}} x(t-s)\,y(s-u)\,ds\Big)du = \\ &= \int_{\mathbb{R}} z(u)\Big(\int_{\mathbb{R}} x(t-u-v)\,y(v)\,dv\Big)du = \\ &= \int_{\mathbb{R}} x * y(t-u)\,z(u)\,du = (x * y) * z(t), \end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, e portanto $*$ é *comutativa e associativa em* C_c. Finalmente:

$$\begin{aligned} \|x * y\| &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} x(t-s)y(s)\,ds \right| dt \le \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |x(t-s)|\,|y(s)|\,dt\,ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} |y(s)| \Big(\int_{\mathbb{R}} |x(t-s)|\ dt\Big) ds = \Big(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|\,dt\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} |y(s)|\,ds\Big) = \\ &= \|x\|\,\|y\|. \end{aligned}$$

Sendo $*$ aplicação bilinear de $C_c \times C_c$ em C_c, *contínua* para a topologia de L^1, podemos estendê-la *por densidade* a uma aplicação bilinear:

$$(x, y) \mapsto x \bullet y$$

única de $L^1 \times L^1$, que confere a L^1 uma estrutura de álgebra de Banach, já que todas as propriedades que acabámos de demonstrar para $*$ em C_c *"passam ao limite"* e valem portanto para "$x \bullet y$". Resta verificar que $x \bullet y$ pode ser dado por (36), $\forall x, y \in L^1$. Comecemos por ver que assim é, *se y for, além disso, limitada*. Nesse caso, pelo Lema 2, podemos definir $x * y$, que é função contínua, logo, em particular, localmente somável. Comparemos $x * y$ com $x \bullet y$; para definir $x \bullet y$ convém considerar sucessões x_n, y_n em C_c tais que:

$$\bullet\ x_n \underset{n}{\longrightarrow} x, y_n \underset{n}{\longrightarrow} y \text{ em } L^1.$$

Por definição:

$$\bullet\ x \bullet y = \lim_n x_n * y_n$$

(limite tomado em L^1); ora:

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^{n} |x * y(t) - x_n * y_n(t)|\, dt &= \int_{-n}^{n} |(x - x_n) * y(t) + x_n * (y - y_n)(t)|\, dt \leq \\
&\leq \int_{-n}^{n} \Big(\int_{\mathbb{R}} |x(t-s) - x_n(t-s)| \underbrace{|y(s)|}_{\leq M} ds \Big) dt + \\
&+ \int_{-n}^{n} \Big(\int_{\mathbb{R}} |x_n(t-s)||y(s) - y_n(s)|\, ds \Big) dt \leq \\
&\leq 2Mn\|x - x_n\| + 2n \max_{t\in\mathbb{R}} |x_n(t)|\, \|y - y_n\| < \frac{C}{n},
\end{aligned} \tag{37}$$

desde que se escolha a sucessão x_n de modo que $\|x - x_n\| < 1/n^2$, e depois (no caso de $\max\limits_{t\in\mathbb{R}} |x_n(t)| \neq 0$) y_n tal que:

$$\|y - y_n\| < \frac{1}{n^2 \max\limits_{t\in\mathbb{R}} |x_n(t)|}.$$

Então:

$$\int_{-n}^{n} |x * y(t)|\, dt \leq \frac{C}{n} + \int_{\mathbb{R}} |x_n * y_n(t)|\, dt = \frac{C}{n} + \underbrace{\|x_n * y_n\|}_{\textit{limitada}},$$

donde $x * y \in L^1$, pelo Teorema de Beppo Levi. Substituindo, se necessário, x_n, y_n por subsucessões tais que $x_n * y_n$ converge $p.p.$ e aplicando o Lema de Fatou a (37), vem:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x * y(t) - x \bullet y(t)|\, dt &= \int_{\mathbb{R}} \lim_n \left(|x * y(t) - x_n * y_n(t)|\, \chi_{[-n,n]}(t)\, dt \leq \right. \\
&\leq \varliminf_n \int_{-n}^{n} |x * y(t) - x_n * y_n(t)|\, dt \leq \varliminf_n \frac{C}{n} = 0;
\end{aligned}$$

logo:

$$x \bullet y = x * y\,,\ p.p. \text{ em } \mathbb{R}.$$

Suponhamos agora que x, y são reais não negativas; como qualquer função de L^1 é combinação linear de funções não negativas pertencentes a L^1 $(x = (\Re x)^+ - (\Re x)^- + i((\Im x)^+ - (\Im x)^-))$ e a operação $(x, y) \mapsto x \bullet y$ é *bilinear*, basta demonstrar a validade da representação integral de $x \bullet y$ naquele caso. Para tal consideremos a sucessão y_n definida por:

$$\bullet\ y_n(t) = \begin{cases} y(t) & \text{se } y(t) < n \\ n & \text{se } y(t) \geq n \end{cases};$$

como cada y_n é limitada, pelo que acabámos de ver, para quase todos os $t \in \mathbb{R}$:

$$\bullet\ x \bullet y_n(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-s)\, y_n(s)\, ds.$$

Ora, pelo Teorema de Lebesgue, é óbvio que $y_n \underset{n}{\longrightarrow} y$ em L^1, donde, pela continuidade do produto, $x \bullet y_n \underset{n}{\longrightarrow} x \bullet y$ em L^1. Então, se necessário passando a uma subsucessão:

$$\bullet\ x \bullet y_n \underset{n}{\longrightarrow} x \bullet y\,,\ p.p. \text{ em } \mathbb{R}.$$

Por outro lado, pelo teorema de Beppo Levi (da convergência monótona), atendendo a que:

$$x(t-s)\, y_n(s) \uparrow x(t-s)\, y(s),$$

obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}} x(t-s)\, y_n(s) \underset{n}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} x(t-s)\, y(s)\, ds\,,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

donde:

$$x \bullet y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-s)\, y(s)\, ds\ \ p.p. \text{ em } \mathbb{R};$$

em particular $x * y$ é finito $p.p.$ em $\mathbb{R}$ e pertence a L^1.

Resta provar que L^1 não tem unidade; suponhamos que existe $e \in L^1$, tal que:

$$\bullet\ e * y = y\,,\ \forall y \in L^1.$$

Se considerarmos, em particular, $y \in L^1 \cap L^\infty$, pelo Lema 2 virá y contínua. Ora existem em L^1 funções *limitadas* que não coincidem $p.p.$ com *nenhuma função contínua*; basta pôr, por exemplo:

$$\bullet\ y = \chi_{[a,b]}$$

(função característica do intervalo $[a, b]$), com $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Não pode portanto existir tal e.□

3.2 A álgebra $\mathcal{S}$ e a Transformação de Fourier

Como vimos na secção 2.1, podemos *injectar* L^1 numa álgebra com unidade (através de um homomorfismo isométrico), que designaremos por $\mathcal{S}$. Identificando os elementos de L^1 com as respectivas imagens pela injecção acima referida e designando por e a unidade de $\mathcal{S}$, teremos:

$$\bullet\; \mathcal{S} = \{x + \lambda e : x \in L^1, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

como sabemos. Procuremos os funcionais multiplicativos *não nulos* de $\mathcal{S}$, ou seja, o *espectro* $\sigma_{\mathcal{S}}$; se $\Phi \in \sigma_{\mathcal{S}}, x + \lambda e \in \mathcal{S}\,(x \in L^1, \lambda \in \mathbb{C})$, temos:

$$\bullet\; \Phi(x + \lambda e) = \Phi(x) + \lambda.$$

Uma possibilidade é, pois, que $\Phi(x) = 0\,,\ \forall x \in L^1$, o que corresponde ao funcional:

$$\Phi_\infty(x + \lambda e) = \lambda\,,\ \forall x \in L^1, \lambda \in \mathbb{C}.$$

(a notação Φ_∞ será mais adiante justificada). Outra hipótese é Φ ser funcional multiplicativo *não nulo* sobre L^1, ou seja, existir Φ' homomorfismo não nulo de L^1 em $\mathbb{C}$ tal que:

$$\bullet\; \Phi(x + \lambda e) = \Phi'(x) + \lambda\,,\ \forall x \in L^1, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Para identificar os elementos de $\sigma_{\mathcal{S}}$ distintos de Φ_∞ basta-nos então identificar os homomorfismos contínuos de L^1 em $\mathbb{C}$ *não nulos* (de facto, qualquer homomorfismo de L^1 em $\mathbb{C}$ é contínuo — ver exercício 41) *infra*). Se

$$\Phi : L^1 \to \mathbb{C}$$

for homomorfismo contínuo, em particular $\Phi \in (L^1)^* = L^\infty$, ou seja, existe $\beta \in L^\infty$ tal que:

$$\bullet\; \Phi(x) = \int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, x(t)\, dt\,,\ \forall x \in L^1;$$

além disso, se $\Phi \neq 0$, não se tem $\beta = 0\, p.p.$. Ora:

$$\begin{aligned}\bullet\; \Phi(x * y) &= \int_{\mathbb{R}} \beta(t) \Big(\int_{\mathbb{R}} x(t-s)\, y(s)\, ds \Big) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} y(s) \Big(\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, x(t-s)\, dt \Big) ds = \int_{\mathbb{R}} y(s) \Big(\int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, x_s(t)\, dt \Big) ds,\end{aligned}$$

$$\bullet\; \Phi(x)\Phi(y) = \Phi(x) \int_{\mathbb{R}} y(s)\, \beta(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} y(s)\, (\Phi(x)\, \beta(s))\, ds$$

(utilizando os teoremas de Tonelli-Hobson e de Fubini para justificar as "trocas" de integração no cálculo de $\Phi(x * y)$, uma vez que o primeiro integral repetido atrás escrito é finito quando se substituem as funções pelos respectivos módulos, sendo mensurável a função de duas variáveis envolvida nos cálculos). Como:

$$\Phi(x * y) = \Phi(x)\Phi(y)\,,\ \forall x, y \in L^1,$$

concluímos, pela unicidade da representação dos elementos do dual topológico de L^1 através de funções de L^∞, que:

(38) $$\bullet\ \Phi(x)\beta(s) = \int_{\mathbb{R}} \beta(t)\, x_s(t)\, dt = \Phi(x_s)\,,\ \forall x \in L^1, p.p.\ \text{em}\ \mathbb{R}.$$

Se Φ não for nula, existirá $x \in L^1$ tal $\Phi(x) \neq 0$, donde:

(39) $$\bullet\ \beta(s) = \frac{1}{\Phi(x)}\Phi(x_s)\,,\ p.p.\ \text{em}\ \mathbb{R},$$

o que mostra que β é contínua, já que, pelo Lema 1, a função $s \mapsto x_s$ é contínua de $\mathbb{R}$ em L^1 e $\Phi \in (L^1)^*$. Por outro lado (utilizando (38) e (39)):

(40) $$\bullet\ \beta(s+t) = \frac{1}{\Phi(x)}\Phi(x_{s+t}) = \frac{1}{\Phi(x)}\Phi((x_s)_t) = \\ = \frac{1}{\Phi(x)}\Phi(x_s)\beta(t) = \beta(s)\beta(t)\,,\ \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

Como β é contínua e não identicamente nula, conclui-se desta identidade que β é uma *exponencial*. Podemos verificá-lo directamente, começando por estabelecer este facto para $s, t \in \mathbb{N}$ e passando em seguida, sucessivamente, aos racionais e aos reais, tendo notado que:

$$\beta(0) = \beta(0+0) = \beta(0)^2 \Rightarrow \beta(0) = 1$$

(já que $\beta(0) \neq 0$, ou viria $\beta(t) = \beta(t+0) = \beta(t)\beta(0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$). Outro processo é notar que, uma vez que $\beta(0) = 1$, para ε suficientemente pequeno:

$$C = \int_0^\varepsilon \beta(t)\, dt \neq 0,$$

donde:

$$C\beta(s) = \int_0^\varepsilon \beta(s)\, \beta(t)\, dt = \int_0^\varepsilon \beta(s+t)\, dt = \int_s^{\varepsilon+s} \beta(u)\, du\,,\ \forall s \in \mathbb{R},$$

e concluímos assim que β é de classe C^1. Podemos então derivar (40) em ordem a t, o que dá:

$$\bullet\ \beta'(s+t) = \beta(s)\, \beta'(t)\,,\ \forall s, t \in \mathbb{R},$$

em particular:

$$\bullet\ \beta'(s) = \beta'(0)\, \beta(s)\,,\ \forall s \in \mathbb{R},$$

o que, juntamente com a condição $\beta(0) = 1$, garante que:

$$\bullet\ \beta(s) = e^{\beta'(0)s}\,,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Como, por outro lado, sabemos que $\beta \in L^\infty$, $\beta'(0)$ é necessariamente *imaginário puro*. Ou seja, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\bullet\ \beta(s) = e^{-its}\,,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Desta análise resulta que se $\Phi \in \sigma_{\mathcal{S}}$, $\Phi \neq \Phi_\infty$ então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\bullet\ \Phi(x + \lambda e) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, x(s)\, ds + \lambda\,,\ \forall x \in L^1, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Reciprocamente é fácil verificar que a fórmula anterior define, de facto, um funcional multiplicativo não nulo sobre $\mathcal{S}$ [exercício]. Concluímos assim que a aplicação:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbb{R}} \to \sigma_{\mathcal{S}} \\ t \in \mathbb{R} &\mapsto \Phi_t : \Phi_t(x + \lambda e) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, x(s)\, ds + \lambda\,,\ \forall x \in L^1, \lambda \in \mathbb{C}, \\ \infty &\mapsto \Phi_\infty : \Phi_\infty(x + \lambda e) = \lambda\,,\ \forall x \in L^1, \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

é *sobrejectiva*. Provemos que se trata de bijecção, ou seja,

$$t_0 \neq t_1 \Rightarrow \Phi_{t_0} \neq \Phi_{t_1};$$

para isso utilizemos uma função auxiliar pertencente a L^1:

$$H(t) = e^{-|t|}\,,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \Phi_t(H) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, e^{-|s|}\, ds = \int_{\mathbb{R}} e^{its}\, e^{-|s|}\, ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cos(ts)\, e^{-|s|}\, ds = 2\int_0^{+\infty} \cos(ts)\, e^{-s}\, ds = \frac{2}{1+t^2}\,,\ \forall t \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

se $|t_0| \neq |t_1|$ vem, obviamente, $\Phi_{t_0}(H) \neq \Phi_{t_1}(H)$ e portanto $\Phi_{t_0} \neq \Phi_{t_1}$. Se $t_0 = -t_1 \neq 0$, basta considerar a função:

$$\bullet\ H_a(t) = e^{-|t-a|},$$

pois:

$$\bullet\ \Phi_t(H_a) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, H(s-a)\, ds = \int_{\mathbb{R}} e^{-it(u+a)}\, H(u)\, du = \frac{2\, e^{-ita}}{1+t^2}\,,\ \forall t \in \mathbb{R};$$

portanto, se $a \neq K\pi/t_0\, (K \in \mathbb{Z})$ vem, evidentemente, $\Phi_{t_0}(H_a) \neq \Phi_{-t_0}(H_a)$. Estabelecemos assim uma bijecção $t \mapsto \Phi_t$ de $\dot{\mathbb{R}}$ sobre $\sigma_{\mathcal{S}}$ que nos permite identificar a *transformada de Gelfand* de um elemento de $\mathcal{S}$ com uma função de $\dot{\mathbb{R}}$ em $\mathbb{C}$; teremos:

- $\widehat{(x+\lambda e)}(t) = \Phi_t(x+\lambda e) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, x(s)\, ds + \lambda$, se $t \in \mathbb{R}$,
- $\widehat{(x+\lambda e)}(\infty) = \Phi_\infty(x+\lambda e) = \lambda$.

Do Teorema de Wiener-Gelfand (2.12) deduzimos então, para a álgebra $\mathcal{S}$:

PROPOSIÇÃO 3.2: ***Um elemento $x+\lambda e \in \mathcal{S}\,(x \in L^1, \lambda \in \mathbb{C})$ é invertível sse $\lambda \neq 0$ e:***

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, x(s)\, ds \neq -\lambda\,,\ \forall t \in \mathbb{R}.\square$$

A transformada de Gelfand *de um elemento* $x \in L^1$ designa-se habitualmente por *transformada de Fourier de* x. Das propriedades da Transformação de Gelfand resulta, em particular, que a Transformação de Fourier aplica L^1 em funções *limitadas*, tendo-se:

(41) $\quad\bullet\ \|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|_1.$

Neste caso podemos estudar o comportamento de $\widehat{x}$ *relativamente à topologia de* $\dot{\mathbb{R}}$; temos:

PROPOSIÇÃO 3.3 (Riemann-Lebesgue): ***Se $x \in L^1$, então $\widehat{x}$ é contínua em $\dot{\mathbb{R}}$; ou seja, $\widehat{x}_{/\mathbb{R}}$ é uma função contínua que tende para zero no infinito (já que $\widehat{x}(\infty) = \Phi_\infty(x) = 0$).***

Demonstração: Calculemos a transformação de Fourier da função característica de um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}\,(a<b)$; temos:

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\chi_{[a,b]}(s)\, ds = \begin{cases} \frac{e^{-itb}-e^{-ita}}{-it} & \text{se } t \neq 0 \\ b-a & \text{se } t = 0 \end{cases}.$$

É óbvio que $\widehat{\chi_{[a,b]}}$ é *contínua e tende para zero no infinito*; ora o espaço C_0 das funções complexas contínuas em $\mathbb{R}$ que tendem para zero no infinito é subespaço *fechado* de $L(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (com a norma do supremo). Como as combinações lineares de funções características de intervalos fechados (funções em escada) constituem um subespaço *denso* de L^1, concluímos, de (41), que $\widehat{\cdot}$ aplica L^1 em C_0.$\square$

Uma vez que $\dot{\mathbb{R}}$ é compacto (com a topologia do compactificado de Aleksandroff de $\mathbb{R}$) e a bijecção:

$$t \mapsto \Phi_t$$

contínua de $\dot{\mathbb{R}}$ sobre $\sigma_{\mathcal{S}}$ (o que resulta imediatamente da proposição anterior e da definição de convergência para a topologia de $\sigma_{\mathcal{S}}$ — a convergência fraca-$*$), concluímos que esta aplicação é *homeomorfismo*, de $\dot{\mathbb{R}}$ sobre $\sigma_{\mathcal{S}}$. Ou seja, mais uma vez conseguimos identificar o espectro da álgebra comutativa em estudo com determinado compacto de modo que as transformadas de Gelfand se identificam com funções "numéricas" (neste caso, com domínio contendo o ponto ∞).

Do Teorema de Lévy-Gelfand, podemos agora concluir, relativamente à Transformação de Fourier:

PROPOSIÇÃO 3.4: ***Se $x \in L^1$ e f for função holomorfa na vizinhança do conjunto $\{\widehat{x}(t) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$, tal que $f(0) = 0$, então existe $y \in L^1$ cuja transformada de Fourier coincide com $f \circ \widehat{x}$.***

Demonstração: Pelo Teorema de Lévy-Gelfand (2.14) sabemos que existe $y \in L^1, \lambda \in \mathbb{C}$ (ou seja, $y + \lambda e \in \mathcal{S}$) tal que:

$$\bullet\ \widehat{y + \lambda e} = f \circ \widehat{x},$$

ou seja,

$$\bullet\ \widehat{y} + \lambda = f \circ \widehat{x} \Rightarrow \underbrace{\widehat{y}(\infty)}_{=0} + \lambda = f(\widehat{x}(\infty)) = f(0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,$$

donde $\widehat{y} = f \circ \widehat{x}$.□

3.3 Equações de convolução em L^1

O estudo que acabámos de fazer da Transformação de Fourier em L^1 (em particular a Proposição 3.2) permite-nos, por exemplo, estudar o problema da existência e unicidade de solução para a seguinte equação integral (dita *de convolução*):

$$\bullet\ y(t) + \lambda \int_{\mathbb{R}} k(t-s)\, y(s)\, ds = z(t),\ p.p. \text{ em } \mathbb{R}$$

(onde $z, k \in L^1, \lambda \in \mathbb{R}$ são dados). Pretende-se encontrar $y \in L^1$ tal que:

$$\bullet\ y + \lambda\, k * y = z,$$

ou seja:

$$(e + \lambda k) * y = z.$$

Uma condição *suficiente* para que tal equação tenha solução é, evidentemente, que $e + \lambda k$ seja *invertível* em $\mathcal{S}$, ou seja (Proposição 3.2), que:

$$(42) \qquad \bullet\ \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, k(s)\, ds \neq -\frac{1}{\lambda},\ \forall t \in \mathbb{R}$$

(excluímos o caso trivial em que $\lambda = 0$). O inverso de $e + \lambda k$ será certo elemento $\mu e + g \in \mathcal{S}$ ($\mu \in \mathbb{C}, g \in L^1$) tal que:

$$\bullet\ e = (\mu e + g) * (e + \lambda k) = \mu e + \lambda \mu k + g + \lambda\, g * k \Rightarrow \mu = 1,$$

ou seja, existirá $g = g(\lambda) \in L^1$ tal que:

(43) $$\bullet\ y(t) = (e + g(\lambda)) * z(t) = z(t) + \int_{\mathbb{R}} g(\lambda, t-s)\, z(s)\, ds.$$

No caso em que k satisfaz a (42), obtivémos assim uma fórmula resolvente para a equação de convolução através ainda da convolução com uma função de L^1. É fácil verificar que a condição (42) é também *necessária* para que a equação de convolução tenha solução *para qualquer* $z \in L^1$. Com efeito, se (42) não se verificar teremos, para certo $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{(e + \lambda k)}(t_0) = 0 \Rightarrow 0 = \widehat{(e + \lambda k)}(t_0)\, \widehat{y}(t_0) = \widehat{(e + \lambda k) * y}(t_0) = \widehat{z}(t_0).$$

Ora existem funções em L^1 tais que $\widehat{z}(t_0) \neq 0, \forall t_0 \in \mathbb{R}$! (pense-se por exemplo em $z(t) = e^{-|t|}$, como atrás foi visto). Portanto a equação de convolução tem solução *para todo o* $z \in L^1$ sse a condição (42) for satisfeita, sendo tal solução *única* para cada z fixado. Outra questão que se pode colocar é a *unicidade* de $g(\lambda)$ no seguinte sentido: *será que existe, para cada* $\lambda \neq 0$ *um único* $g(\lambda) \in L^1$ *para o qual existe solução única* y *da equação, dada por (43), para qualquer* z*?* Como acabámos de verificar, a existência de $g(\lambda)$ é equivalente à invertibilidade de $e + \lambda k$; a unicidade poderá resultar da injectividade da Transformação de Fourier, pois escolhendo z tal que $\widehat{z}(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$:

$$(e + g(\lambda)) * z = (e + \lambda k)^{-1} * z \Rightarrow \widehat{(e + g(\lambda))}(t) = \widehat{(e + \lambda k)}^{-1}(t), \forall t \in \mathbb{R},$$

ficando assegurado que:

$$e + g(\lambda) = (e + \lambda k)^{-1},$$

desde que se presuma a referida injectividade. Além disso, o método utilizado permite determinar com facilidade a *Transformação de Fourier* da solução da equação considerada:

$$\widehat{y} = \frac{\widehat{z}}{1 + \lambda \widehat{k}},$$

o que, mais uma vez, determina y, *se a Transformação de Gelfand (Transformação de Fourier) for, neste caso, injectiva!* vamos ver que assim é. Mais precisamente vamos verificar que se $x, \widehat{x} \in L^1$, então podemos obter x a partir de $\widehat{x}$ por uma transformação semelhante à de Fourier. Antes convém-nos examinar uma propriedade de L^1 que é a *existência de aproximações da unidade*, ou seja, sucessões e_n em L^1 tais que:

$$\bullet\ e_n * x \xrightarrow[n]{} x \text{ em } L^1,$$

$\forall x \in L^1$.

3.4 Aproximações da unidade e inversão da Transformação de Fourier

Como vimos a propósito do exercício 17) (Capítulo 1), a convolução com uma "densidade de probabilidade" consiste em fazer a média da função "em torno" de cada ponto, o que torna plausível o resultado seguinte, no quadro mais geral dos espaços L^p:

PROPOSIÇÃO 3.5: ***Seja $p \in [1, +\infty]$, $f \in L^1, g \in L^p$, então para quase todos os $t \in \mathbb{R}$ existe $f * g(t)$ dado por (36) (com $x = f, y = g$), a função $f * g$ assim definida p.p. em $\mathbb{R}$ é (representante de) elemento de L^p e:***

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

Além disso, no caso $p \neq +\infty$, se e_n $(n \in \mathbb{N}_1)$ for sucessão de funções de L^1 não negativas tais que $\|e_n\|_{L^1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}_1$ e:

$$\bullet \, \forall a > 0 \, , \int_{\mathbb{R} \setminus [-a,a]} e_n(t) \, dt \xrightarrow[n]{} 0;$$

então, para todo o $x \in L^p$:

$$\bullet \, e_n * x \xrightarrow[n]{} x \text{ , em } L^p.$$

Comecemos por demonstrar o Lema seguinte que, de certo modo, "substitui" o resultado análogo ao expresso na parte final da proposição anterior para o caso $p = +\infty$.

LEMA: ***Sendo e_n sucessão nas condições da Proposição anterior e x função mensurável limitada, contínua em $t_0 \in \mathbb{R}$, então:***

$$e_n * x(t_0) \xrightarrow[n]{} x(t_0).$$

Demonstração: Tem-se (considerando $C > 0$ tal que $|x(t)| \leq C, \forall t \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} |e_n * x(t_0) - x(t_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} x(t_0 - s) \, e_n(s) \, ds - \int_{\mathbb{R}} x(t_0) \, e_n(s) \, ds \right| \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |x(t_0 - s) - x(t_0)| |e_n(s)| \, ds \leq 2C \int_{\mathbb{R} \setminus [-a,a]} e_n(s) \, ds + \\ &+ \sup_{s \in]-a,a[} |x(t_0 - s) - x(t_0)| \underbrace{\int_{-a}^{a} e_n(s) \, ds}_{\leq 1} , \end{aligned}$$

donde:

$$\overline{\lim_n} |e_n * x(t_0) - x(t_0)| \leq \sup_{s \in]-a,a[} |x(t_0 - s) - x(t_0)| \, , \forall a > 0.$$

Como o segundo membro se pode tomar tão pequeno quanto quizermos, escolhendo $a > 0$ suficientemente pequeno (por continuidade de x em t_0), podemos concluir.□

Demonstração da Proposição 3.5: Trataremos apenas do caso $p \neq +\infty$, já que para $p = +\infty$ o resultado é trivial. Notemos, para começar, que a função:

$$s \mapsto |f(t-s)||g(s)|^p$$

está em L^1 para quase todos os t, atendendo ao Teorema 3.1, já que $g \in L^p$; para quase todos os t, está portanto em L^p a função:

$$s \mapsto |f(t-s)|^{\frac{1}{p}}|g(s)|.$$

Atendendo então à desigualdade de Hölder, estará em L^1 (mais uma vez para quase todos os t) a função de s:

$$|f(t-s)||g(s)| = \underbrace{|f(t-s)|^{\frac{1}{q}}}_{\in L^q}\underbrace{|f(t-s)|^{\frac{1}{p}}|g(s)|}_{\in L^p},$$

e portanto também a função $s \mapsto f(t-s)g(s)$, tendo-se:

$$\begin{aligned}|f*g(t)| &\leq \int_{\mathbb{R}}|f(t-s)||g(s)|\,ds = \int_{\mathbb{R}}|f(t-s)|^{\frac{1}{q}}|f(t-s)|^{\frac{1}{p}}|g(s)|\,ds \leq \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}}|f(t-s)|\,ds\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(t-s)||g(s)|^p\,ds\Big)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|f*g(t)|^p\,dt &\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(t-s)||g(s)|^p\,ds\,dt = \\ &= \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}}\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f(t-s)|\,dt\Big)|g(s)|^p\,ds = \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}+1}\,\|g\|_{L^p}^p,\end{aligned}$$

donde $f*g \in L^p$ e:

$$\|f*g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}\,\|g\|_{L^p} = \|f\|_{L^1}\,\|g\|_{L^p}.$$

Temos além disso (utilizando mais uma vez a desigualdade de Hölder):

$$\begin{aligned}\|e_n*x-x\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}}\Big|\int_{\mathbb{R}}e_n(s)(x(t-s)-x(t))\,ds\Big|^p dt \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}e_n(s)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,|x(t-s)-x(t)|\,ds\Big)^p dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}}e_n(s)^{\frac{1}{q}}\,e_n(s)^{\frac{1}{p}}\,|x(t-s)-x(t)|\,ds\Big)^p dt \leq\end{aligned}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \Big(\Big(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} e_n(s)\,ds \Big)^{\frac{1}{q}}}_{=1} \Big(\int_{\mathbb{R}} e_n(s)\,|x(t-s)-x(t)|^p\,ds \Big)^{\frac{1}{p}} \Big)^p dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e_n(s)\,|x(t-s)-x(t)|^p\,ds \Big) dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e_n(s) \Big(\int_{\mathbb{R}} |x(t-s)-x(t)|^p\,dt \Big) ds = \int_{\mathbb{R}} e_n(s)\,\|x_s - x\|_p^p\,ds,$$

e portanto, por definição de convolução:

$$\|e_n * x - x\|_p^p \leq e_n * \|x_{-\widehat{s}} - x\|_p^p(0) \underset{n}{\longrightarrow} \|x_0 - x\|_p^p = 0,$$

pelo Lema anterior, já que a aplicação $s \mapsto \|x_{-\widehat{s}} - x\|_p$ é *contínua* e limitada, atendendo ao Lema 1 da secção 3.1.□

A existência de funções e_n satisfazendo às hipóteses da Proposição 3.5 resulta da existência em L^1 de funções *não negativas*, com integral igual a 1 (ver exercício 3) — Introdução — e exercício 17) — Capítulo 1). Sendo u uma tal função, basta pôr:

$$\bullet\ e_n(t) = nu(nt)\,,\ \forall n \in \mathbb{N}_1, t \in \mathbb{R}.$$

Para obter a fórmula de inversão vamos considerar uma aproximação da unidade *constituída por transformadas de Fourier de funções de* L^1. Para isso utilizaremos a função auxiliar

$$H(t) = e^{-|t|};$$

como atrás vimos:

$$\bullet\ \widehat{H}(t) = \frac{2}{1+t^2}.$$

Como:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\pi,$$

convém-nos pôr:

$$\bullet\ E(t) = \frac{e^{-|t|}}{2\pi},$$

donde:

$$\bullet\ \int_{\mathbb{R}} \widehat{E}(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} = 1,$$

e portanto podemos usar, como aproximações da unidade:

$$\bullet\ e_n(t) = n\widehat{E}(nt) = \widehat{E_n}(t),$$

onde:

$$\bullet\ E_n(t) = \frac{e^{-\frac{|t|}{n}}}{2\pi}$$

(como é fácil verificar, pela mudança de variável $s/n = u$ no integral "ds" definidor de $\widehat{E_n}$). Teremos assim:

PROPOSIÇÃO 3.6: ***Se $x \in L^1$, então, com as notações acima, para cada $n \in \mathbb{N}_1, t \in \mathbb{R}$:***

(44) $$e_n * x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itu}\,\widehat{x}(u)\,e^{-\frac{|u|}{n}}\,du.$$

Demonstração: Notemos que, com as notações atrás introduzidas,

$$e_n(t) = e_n(-t),$$

donde, se $x \in L^1$, $t \in \mathbb{R}$, invocando os Teoremas de Fubini e Tonelli-Hobson:

$$\begin{aligned}\bullet\ e_n * x(t) &= \int_{\mathbb{R}} e_n(s-t)\,x(s)\,ds = \int_{\mathbb{R}} \widehat{E_n}(s-t)\,x(s)\,ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)u}\,E_n(u)\,du\Big)\,x(s)\,ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-isu}\,x(s)\,ds\Big)e^{itu}\,E_n(u)\,du = \int_{\mathbb{R}} e^{itu}\,\widehat{x}(u)E_n(u)\,du,\end{aligned}$$

o que prova o que pretendíamos, já que:

$$E_n(u) = \frac{e^{-\frac{|u|}{n}}}{2\pi}.\square$$

PROPOSIÇÃO 3.7 (Inversão da Transformação de Fourier): ***Seja $x \in L^1$ tal que $\widehat{x} \in L^1$; então $x \in C_0$ (espaço das funções complexas contínuas, nulas no infinito) e:***

(45) $$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{its}\,\widehat{x}(s)\,ds\,,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Aplicando a Proposição anterior a x e atendendo a que supomos agora $\widehat{x} \in L^1$, virá, utilizando o Teorema de Lebesgue no segundo membro de (44):

$$e_n * x(t) \underset{n}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itu}\,\widehat{x}(u)\,du$$

para quase todos os $t \in \mathbb{R}$. Mas, pela Proposição 3.5, uma vez que há, neste caso, convergência L^1, podemos garantir que, pelo menos para certa subsucessão:

$$e_{n_k} * x \xrightarrow[k]{} x\,,\ p.p. \text{ em } \mathbb{R},$$

e portanto:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itu}\,\widehat{x}(u)\,du\,,\ \ p.p. \text{ em } \mathbb{R}.$$

Concluímos portanto que $x(t)$ é a transformada de Fourier no ponto $-t$ da função $\widehat{x}$ que por hipótese está em L^1; pela Proposição 3.3 x é contínua e tende para zero no infinito, ou, seja, mais precisamente, admite um representante com estas características, o qual é dado, em todos os pontos de $\mathbb{R}$, por (45).□

Muitas vezes representa-se por $\check{y}$ o segundo membro de (45) (substituindo $\widehat{x}$ por y). Portanto, se $x, \widehat{x} \in L^1$:

$$\bullet\ \check{\widehat{x}} = \widehat{\check{x}} = x.$$

COROLÁRIO: ***A Transformação de Gelfand em $\mathcal{S}$ é injectiva; em particular, se $x \in L^1$ e $\widehat{x}$ for identicamente nula, então $x = 0$.***

Demonstração: Se $x + \lambda e \in \mathcal{S}$ e $\widehat{x + \lambda e} \equiv 0$, vem:

$$\bullet\ \widehat{x} \equiv -\lambda;$$

como $\widehat{x} \in C_0$, concluímos que $\lambda = 0$. Então $\widehat{x} \in L^1$ e portanto, pelo Teorema anterior:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{its}\,\widehat{x}(s)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{its}\,0\,ds = 0\,,\ \forall t \in \mathbb{R}.\square$$

3.5 Propriedades operativas da Transformação de Fourier

Terminamos o estudo da Transformação de Fourier *em* L^1 enunciando as respectivas principais propriedades operativas, que a tornam de grande utilidade no estudo das equações diferenciais (ver exemplos nos exercícios); utilizaremos, de agora em diante, a seguinte notação:

- ***Uma função f poderá ser designada por "$f(\widehat{x})$" (por exemplo "a função $\widehat{x}^2 f$" designa a função $x \mapsto x^2 f(x)$).***

PROPOSIÇÃO 3.8: ***Seja $y \in L^1$; então:***

1. $\widehat{y_a} = \widehat{y(\widehat{t} - a)} = e^{-\widehat{it}a}\widehat{y}\,,\ \widehat{y}(\widehat{t} - a) = \widehat{e^{\widehat{it}a} y}\,,\ \forall a \in \mathbb{R};$

2. $\widehat{y(at)} = \dfrac{1}{|a|}\widehat{y}\left(\dfrac{\widehat{t}}{a}\right)$, $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

3. Se $\widehat{t}\,y \in L^1$, *então* $\widehat{y}$ *é de classe* C^1 *e:*

$$\bullet\, \widehat{y}' = \widehat{-i\widehat{t}\,y};$$

4. Se y for absolutamente contínua e $y' \in L^1$, *então:*

$$\bullet\, \widehat{y'} = i\widehat{t}\,\widehat{y};$$

5. $\widehat{\overline{y}} = \overline{\widehat{y}(-\widehat{t})}$.

Demonstração: 1., 2. e 5. são de verificação imediata (por simples mudanças de variável nos integrais, nos casos 1. e 2.). Quanto a 3., note-se que:

$$\left|(e^{-it\widehat{s}}\, y(\widehat{s}))'_t\right| = \left|-i\widehat{s}\, e^{-it\widehat{s}}\, y(\widehat{s})\right| \leq |\widehat{s}\, y(\widehat{s})| \in L^1\ ,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

donde, pelo Lema de Leibniz-Lebesgue (da derivação "debaixo do sinal de integral", *cf.* [BW2]) concluímos que $\widehat{y}$ é derivável e:

$$\bullet\, \widehat{y}' = \widehat{-i\widehat{t}\,y} \in C_0.$$

Para demonstrar 4., notemos que, por definição de função absolutamente contínua, existe z (derivada $p.p.$ de y, portanto, por hipótese, em L^1), tal que:

$$\bullet\, y(t) = \int_0^t z(s)\, ds + y(0).$$

Concluímos que y tem limite em $+\infty$ e em $-\infty$ (aplicando o Teorema de Lebesgue às funções $z(s)\,\chi_{[0,t]}(s)$, $z(s)\,\chi_{[-t,0]}(s)$ quando $t \longrightarrow +\infty$) e portanto tais limites têm que ser iguais a zero (ou y não seria, evidentemente, somável); este facto permite-nos justificar a seguinte integração por partes, que demonstra 4.:

$$\widehat{y'}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, y'(s)\, ds = -(-it)\int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, y(s)\, ds = it\,\widehat{y}(t).$$

Com efeito:

$$it\int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, y(s)\, ds = it\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_0^s e^{-its}\, z(\xi)\, d\xi + e^{-its}\, y(0)\Big) ds =$$

$$= it \lim_{a\to+\infty}\Big(\int_{-a}^0\Big(\int_{\xi}^{-a} e^{-its}\, ds\Big) z(\xi)\, d\xi + \int_0^a\Big(\int_{\xi}^{a} e^{-its}\, ds\Big) z(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{2}{t}\sin(ta)\, y(0)\Big) = \lim_{a\to+\infty}\Big(\int_{-a}^{a} e^{-it\xi}\, z(\xi)\, d\xi + e^{ita}\,(y(-a) - y(0)) -$$

$$- e^{-ita}\,(y(a) - y(0)) + 2i\sin(ta)\, y(0)\Big) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\xi}\, z(\xi)\, d\xi = \widehat{y'}(t).\square$$

3.6 A Transformação de Fourier-Plancherel em L^2

Para concluir este Capítulo estudaremos um resultado fundamental acerca da Transformação de Fourier em L^2 $(= L^2(\mathbb{R}))$, dita também *Transformação de Plancherel* ou de *Fourier-Plancherel*.

TEOREMA 3.9 (Plancherel): ***Existe um operador unitário único:***

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

tal que:

$$\mathcal{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{f}\,, \forall f \in L^1 \cap L^2,$$

tendo-se:

$$\mathcal{F}^{-1}g = \overline{\mathcal{F}}g = \sqrt{2\pi}\,\check{g}\,, \forall g \in L^1 \cap L^2.$$

Além disso, se:

$$\bullet\ \mathcal{F}_a f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-its} f(s)\,ds\,,\ \overline{\mathcal{F}}_a\,g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{its}\,g(s)\,ds,$$

então:

$$\bullet\ \mathcal{F}_a f \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}f\,,\ \overline{\mathcal{F}}_a(\mathcal{F}f) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} f$$

em $L^2, \forall f \in L^2$. Em particular:

1. $\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2\,, \forall f \in L^2$ ***(relação de Parseval);***
2. $(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)_2 = (f,g)_2\,, \forall f,g \in L^2$ ***(relação de Plancherel).***

Demonstração: Comecemos por considerar $f \in L^1 \cap L^2$; uma vez que pretendemos estudar a norma L^2 de $\widehat{f}$, ou seja, o integral da função:

$$s \mapsto |\widehat{f}(s)|^2,$$

comparando-o com a norma L^2 do próprio f, notemos que tal integral, a menos de constante, se pode considerar como a transformada de Fourier inversa *em* $t = 0$ da referida função, caso exista, ou seja, caso a referida função seja da forma $\widehat{g}$ para certo $g \in L^1$ e se o próprio $\widehat{g}$ estiver em L^1. Mesmo sem esta última propriedade, podemos utilisar (44) acima e escrever, para todo o $t \in \mathbb{R}$:

$$(46) \qquad e_n * g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{its}\,\widehat{g}(s)\,e^{-\frac{|s|}{n}}\,ds;$$

procuremos então, para já, tal g. Pretendemos que:

$$\widehat{g} = |\widehat{f}(s)|^2 = \widehat{f}.\overline{\widehat{f}} = \widehat{f}.\widehat{\overline{f(-t)}} = \widehat{f * \overline{f(-t)}},$$

pelo que, de facto, podemos tomar $g = f * \overline{f(-t)} \in L^1$, ou seja:

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-s)\,\overline{f(-s)}\,ds = \int_{\mathbb{R}} f(t+s)\,\overline{f(s)}\,ds = (f_{-t}, f)_2,$$

função contínua de t definida em $\mathbb{R}$, atendendo ao Lema 1 da secção 3.1 e à continuidade do produto interno em L^2. Além disso:

$$\bullet\ |g(t)| \leq \|f_{-t}\|_2\,\|f\|_2 = \|f\|_2^2\,,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

pelo que g é, além disso, limitada. Sendo g contínua e limitada, podemos utilizar o Lema da secção 3.4 para concluir que:

$$e_n * g(0) \underset{n}{\longrightarrow} g(0) = (f_{-0}, f)_2 = \|f\|_2^2,$$

sendo e_n a aproximação da unidade interveniente em (44). Por outro lado, de (46) obtém-se:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(s)\,\underbrace{e^{-\frac{|s|}{n}}}_{\underset{n}{\longrightarrow} 1}\,ds = e_n * g(0) \underset{n}{\longrightarrow} \|f\|_2^2.$$

Pelo Teorema de Beppo Levi (já que $\widehat{g} = |\widehat{f}|^2 \geq 0$), concluímos finalmente que:

- $|\widehat{f}|^2 = \widehat{g} \in L^1$;
- $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(s)|^2\,ds = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(s)\,ds = \|f\|_2^2,$

ou seja, $\widehat{f} \in L^2$ e:

$$\bullet\ \|\mathcal{F}f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Podemos portanto estender $\mathcal{F}$ a L^2 por linearidade e continuidade, já que $L^1 \cap L^2$ é denso em L^2 (contém, por exemplo, C_c). Obtemos um operador, que continuaremos a designar por $\mathcal{F}$, de L^2 em L^2, e tal que:

$$\bullet\ \|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2\,,\ \forall f \in L^2.$$

Como, pelo Teorema de Lebesgue, se $f \in L^2$, então $f.\chi_{[-a,a]} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} f$ em L^2, tendo-se evidentemente $f_a = f.\chi_{[-a,a]} \in L^1 \cap L^2$, obtemos:

$$\mathcal{F}f = \lim_{a\to+\infty} \mathcal{F}f_a = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-its} f(s)\,ds = \lim_{a\to+\infty} \mathcal{F}_a f,$$

em L^2. Resta verificar que $\mathcal{F}$ é *sobrejectiva*, para o que basta demonstrar que a imagem de $\mathcal{F}$ contém uma parte densa, atendendo a que $\mathcal{F}$ é *isometria*. Ora pondo:

$$\overline{\mathcal{F}}g = \sqrt{2\pi}\,\check{g} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{g}(-\widehat{t}) = \mathcal{F}(g(-\widehat{t}))\ (g \in L^1 \cap L^2),$$

concluímos do que acabámos de ver que $\overline{\mathcal{F}}$ se estende a L^2 como isometria; se $g, \mathcal{F}g \in L^1 \cap L^2$ concluímos do teorema de inversão (3.7) que:

$$\bullet\ \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}g) = g.$$

Mas, se $f \in L^1 \cap L^2$, $g = f * e_n$ está precisamente naquelas condições (atendendo à Proposição 3.5) e (pela mesma proposição):

$$\bullet\ f * e_n \underset{n}{\longrightarrow} f \text{ em } L^2,$$

donde:

$$\bullet\ f * e_n = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f * e_n)) \underset{n}{\longrightarrow} \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f,$$

portanto:

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}f) = f\,,\ \forall f \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow f = \mathcal{F}(\mathcal{F}f(-\widehat{t})) \in R(\mathcal{F})\,,\ \forall f \in L^1 \cap L^2,$$

e $\mathcal{F}$ é, de facto, sobrejectiva, já que $L^1 \cap L^2$ é denso em L^2; além disso, por densidade:

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f\,,\ \forall f \in L^2 \Rightarrow \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1},$$

e:

$$\overline{\mathcal{F}}_a(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}_a(\mathcal{F}f(-\widehat{t})) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F}(\mathcal{F}f(-\widehat{t})) = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = f,$$

em L^2.□

COROLÁRIO: ***Se $f \in L^2$ e $\mathcal{F}f \in L^1$, então:***

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{its}\mathcal{F}f(s)\,ds\,,\ p.p.\ em\ \mathbb{R}.}$$

Demonstração: Basta invocar o Teorema de Lebesgue e atender ao resultado do Teorema anterior:

$$\overline{\mathcal{F}}_a(\mathcal{F}f) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} f$$

em L^2.□

Podem encontrar-se diferentes definições da Transformação de Fourier, obtidas umas das outras por mudança de variável. De modo geral podemos pôr, para $f \in L^1$:

$$\bullet\ \mathcal{F}_{\omega,k} f(t) = \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega ts} f(s)\, ds,$$

com $\omega > 0, k > 0$, o que corresponde à transformada de Fourier *inversa*:

$$\bullet\ \overline{\mathcal{F}}_{\omega,h} f(t) = \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} e^{i\omega ts} f(s)\, ds,$$

desde que:

$$\bullet\ hk = \frac{2\pi}{\omega}.$$

É particularmente cómodo o caso $\omega = 2\pi, k = h = 1$. Nesse caso, pondo $\mathcal{F}_{2\pi} = \mathcal{F}_{2\pi,1}$, vem simultaneamente:

$$\bullet\ \mathcal{F}_{2\pi}(f * g) = \mathcal{F}_{2\pi} f \,.\, \mathcal{F}_{2\pi} g\,,\ \forall f, g \in L^1,$$
$$\bullet\ \|\mathcal{F}_{2\pi} f\|_2 = \|f\|_2\,,\ \forall f \in L^1 \cap L^2.$$

Podemos também estender esta transformação a L^2, atendendo ao Teorema de Plancherel (3.9). Em contrapartida é necessário modificar convenientemente as conclusões da Proposição 3.8 (por exemplo, $\mathcal{F}_{2\pi}(y') = 2\pi i\, \mathcal{F}_{2\pi}(y)$, se y estiver nas condições do ponto 4. dessa proposição).

Toda a teoria poderia ter sido desenvolvida em $\mathbb{R}^N$, substituindo "e^{-its}" por "$e^{-i\,x.y}$", onde $x = (x_1, \ldots, x_N), y = (y_1, \ldots, y_N)$ e $x.y = x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N$. Além disso o coeficiente $\sqrt{2\pi}$ que aparece no Teorema 3.9 deveria ser substituído por $(2\pi)^{N/2}$ (a menos que se considere $\mathcal{F}_{2\pi}$ em lugar de $\mathcal{F}$).

Exercícios

72) Seja $t \in \mathbb{R}$; verifique que a aplicação:

$$\Phi_t : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$$
$$x + \lambda e \mapsto \Phi_t(x + \lambda e) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, x(s)\, ds + \lambda$$

$(x \in L^1, \lambda \in \mathbb{C})$ é funcional multiplicativo não nulo sobre $\mathcal{S}$.

73) Considere a aplicação $i : L^1([0,1]) \to L^1$ tal que:

$$\bullet\ i(x) = \widetilde{x},$$

onde

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases};$$

a) Mostre que se trata de isomorfismo isométrico de espaços de Banach entre $L^1([0,1])$ e um subespaço fechado de L^1, tal que:

$$(i((i(x) * i(y))_{/[0,1]}) * i(z))_{/[0,1]} = ((i(x) * i(y)) * i(z))_{/[0,1]}.$$

b) Conclua que a operação $*$ definida por:

$$x * y = (i(x) * i(y))_{/[0,1]}$$

confere a $L^1([0,1])$ uma estrutura de álgebra de Banach comutativa e obtenha uma representação integral de $*$ que faça apenas intervir valores de x e y.

c) Mostre que $L^1([0,1])$ não tem unidade e é gerada pela função $x_0(t) \equiv 1$ em $[0,1]$.

d) Seja $\mathcal{S}([0,1])$ a álgebra de Banach com unidade associada a $L^1([0,1])$; determine a Transformação de Gelfand desta álgebra [Sugestão: comece por verificar que $r_\sigma(x_0) = 0$, onde $x_0(t) \equiv 1$ em $[0,1]$].

e) Mostre que para cada $\lambda \in \mathbb{C}, k, g \in L^1([0,1])$, existe um e um só $u \in L^1([0,1])$ tal que:

$$u(t) + \lambda \int_0^t k(t-s)\, u(s)\, ds = g(t) \ \textit{p.p.} \text{ em } [0,1],$$

e que u é da forma:

$$u(t) = g(t) + \int_0^t f(t-s)\, u(s)\, ds \ \textit{p.p.} \text{ em } [0,1],$$

onde $f \in L^1$ é *independente de g*.

74) a) Resolva a questão análoga ao exercício anterior (alíneas a) e b)), para $L^1([0,+\infty[)$, verificando que $L^1([0,+\infty[)$ não tem unidade.

b) Designando por $\mathcal{S}^+$ a álgebra com unidade associada a $L^1([0,+\infty[)$, mostre que sendo $\Phi_\infty : \mathcal{S}^+ \to \mathbb{C}$ dado por:

$$\bullet\ \Phi_\infty(x + \lambda e) = \lambda\,,\ \forall x \in L^1([0,+\infty[), \lambda \in \mathbb{C},$$

$\sigma_{\mathcal{S}^+} \setminus \{\Phi_\infty\}$ é constituído exactamente pelas aplicações:

$$\Phi_s : \mathcal{S}^+ \to \mathbb{C}\ \ (s \in \mathbb{C}, \Re\, s \geq 0)$$
$$x + \lambda e \mapsto \Phi_s(x + \lambda e) = \lambda + \int_0^{+\infty} e^{-st}\, x(t)\, dt$$

(a aplicação $s \mapsto \Phi_s(x) = L[x](s)$ designa-se por *transformada de Lapalace de* $x \in L^1([0,+\infty[)$; L diz-se *Transformação de Laplace em* $L^1([0,+\infty[)$).

c) Mostre que a aplicação $s \mapsto \Phi_s$ é bijecção de $\{s \in \mathbb{C} : \Re\, s \geq 0\} \cup \{\infty\}$ sobre $\sigma_{\mathcal{S}^+}$.

d) Mostre que, neste caso, a Transformação de Gelfand é *injectiva*; mais precisamente, verifique que se $x \in L^1([0,+\infty[)$, e $L[x]$ é integrável ao longo de certa recta vertical do semiplano $\Re s \geq 0$ (seja a respectiva equação $s = a + i\xi$, com $\xi \in \mathbb{R}$ e a fixo em $[0,+\infty[$), então:

$$\bullet\ x(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}\, L[x]\,(s)\, ds\ ,\ p.p.\text{ em } [0,+\infty[$$

(designando por γ_b o caminho de $\mathbb{C}$ $\xi \mapsto a + i\xi$, definido em $[-b, b]$, representamos por $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} .\, ds$ o valor de $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_{\gamma_b} .\, ds$).

e) Enuncie e demonstre análogos (para este caso) das Proposições 3.2, 3.3, 3.4.

75) Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função contínua tal que $\alpha(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ e:

$$\alpha(t+s) \leq \alpha(t)\,\alpha(s)\ ,\ \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

a) Mostre que o conjunto L^1_α constituído pelas (classes de) funções mensuráveis $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (para a relação de equivalência "igualdade $p.p.$") tais que:

$$\|x\|_\alpha = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|\,\alpha(t)\,dt < +\infty$$

é álgebra de Banach para as operações habituais de soma e produto por escalar complexo e o produto $*$ definido por:

$$x * y(t) = \int_{\mathbb{R}} x(t-s)y(s)\,ds\ \ (p.p.\text{ em } \mathbb{R}),$$

verificando que esta operação se encontra bem definida em L^1_α.

b) Verifique que:

$$\tau_1 = \sup_{t>0}\Big(-\frac{\log\alpha(t)}{t}\Big) = \lim_{t\to+\infty}\Big(-\frac{\log\alpha(t)}{t}\Big),$$
$$\tau_2 = \inf_{t>0}\Big(\frac{\log\alpha(-t)}{t}\Big) = \lim_{t\to+\infty}\Big(\frac{\log\alpha(-t)}{t}\Big),$$

onde:

$$-\infty < \tau_1 \leq \tau_2 < +\infty.$$

c) Designando por $\mathcal{S}_\alpha$ a álgebra de Banach com unidade associada a L^1_α, mostre que existe uma bijecção entre o conjunto dos caracteres de $\mathcal{S}_\alpha$ que não se anulam identicamente em L^1_α e a faixa do plano complexo:

$$\{z \in \mathbb{C} : \tau_1 \leq \Im z \leq \tau_2\},$$

que faz corresponder a cada z neste conjunto

$$\Phi_z : \mathcal{S}_\alpha \to \mathbb{C}$$

tal que:

$$\Phi_z(x + \lambda e) = \lambda + \int_{\mathbb{R}} e^{izt}\, x(t)\, dt.$$

76) Exercício análogo ao anterior para $L^1_\alpha([0, +\infty[)$, definida de maneira óbvia.

77) **a)** Mostre que a álgebra $\mathcal{S}$ da secção 3.2 é *semi-simples* e que $\sigma_{\mathcal{S}}$ é *homeomorfo* a $\dot{\mathbb{R}}$.

b) Mostre que $S([0,1])$ *não é semi-simples* e que $\sigma_{\mathcal{S}([0,1])}$ é um conjunto *unitário*.

c) Mostre que $\mathcal{S}^+$ é *semi-simples* e $\sigma_{\mathcal{S}^+}$ é homeomorfo ao *compactificado de Aleksandroff* do semi-plano $\Re\, s \geq 0$.

d) Questão análoga para as álgebras L^1_α e $L^1_\alpha([0, +\infty[)$ definidas nos exercícios anteriores.

78) Demonstre os pontos 1., 2., 5. da Proposição 3.8.

79) Seja $y \in L^1$ função de classe C^1 tal que y' é absolutamente contínua e $y'' \in L^1$; mostre que $y' \in L^1$, e portanto:

$$\bullet\ \widehat{y''} = -\widehat{t}^{\,2}\,\widehat{y}$$

[Sugestão: para $n \in \mathbb{Z}$ fixo, mostre que $\forall \xi \in [n, n+1/3], \eta \in [n+2/3, n+1]$, existe $\lambda \in$ $\in [n, n+1]$ tal que:

$$\bullet\ |f'(\lambda)| \leq 3|f(\xi)| + 3|f(\eta)|;$$

conclua daí que:

$$\forall n \in \mathbb{Z}\,, \int_n^{n+1} |f'(t)|\, dt \leq \int_n^{n+1} |f''(t)|\, dt + 9\int_n^{n+1} |f(t)|\, dt,$$

donde se deduz facilmente o resultado].

80) *(Problema de Dirichlet no semi-plano):* Pretende-se encontrar uma função de classe C^2:

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

solução do problema:

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ \text{“}u(x,0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}\text{”} \end{cases}$$

onde $g \in L^1$ é dada e "$u(x,0) = g(x)$ em $\mathbb{R}$" significa:

$$\bullet\ u(\,.\,,y) \underset{y \to 0^+}{\longrightarrow} g \text{ em } L^1.$$

a) Suponha que existe tal solução u de modo que a função:

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^+ &\to L^1 \\ y &\mapsto U(y) = u(\,.\,,y) \end{aligned}$$

esteja bem definida e seja de classe C^2 (como função com valores no espaço de Banach L^1); utilizando propriedades da Transformação de Fourier mostre que, para cada $\xi \in \mathbb{R}$, a função:

$$\bullet\ y \mapsto \widehat{U(y)}(\xi)$$

é solução de derterminada equação diferencial ordinária de 2ª ordem com coeficientes constantes.

b) Mostre que a condição "$u(x,0) = g(x)$ em $\mathbb{R}$" juntamente com a hipótese suplementar de U ser *limitada* em $\mathbb{R}^+$ (com função com valores em L^1) determina, para cada $\xi \in \mathbb{R}$, a função $y \mapsto \widehat{U(y)}(\xi)$.

c) Conclua que existe uma solução única u do problema (*) tal que a correspondente função $U : \mathbb{R}^+ \to L^1$ é de classe C^2 e limitada e determine-a.

d) Se $g \in L^p$ $(p \in [1, +\infty[)$, em que sentido a "fórmula resolvente" obtida em c) é "solução" de (*)?

81) a) Sejam $\gamma \geq \beta > 0, C_1 = \chi_{[-\gamma,\gamma]}, C_2 = \chi_{[-\beta,\beta]}$; calcule $C_1 * C_2$.

b) Seja $\alpha > 0$. Mostre que existe $h \in L^1$ tal que $0 \leq \widehat{h} \leq 1, \widehat{h}_{/[-\alpha,\alpha]} \equiv 1$, supp $\widehat{h}$ é compacto.

c) Conclua da alínea anterior que existe em $\mathcal{S}$ um elemento g tal que:

- $0 \leq \widehat{g} \leq 1$,
- $\widehat{g}_{/[-\alpha,\alpha]} \equiv 0$,
- $\widehat{g}(t) = 1$, para $t \in \dot{\mathbb{R}}$ fora de certo intervalo $[-C, C]$ de $\mathbb{R}$.

82) Seja $x \in L^1$ tal que $\widehat{x}(t) \neq 0\,, \forall t \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que existe $x^* \in L^1$ tal que:

$$\widehat{x^* * x}\,(t) > 0\,, \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) Conclua da alínea anterior e da alínea c) do exercício anterior que dado $\alpha > 0$ existe em L^1 um elemento $\widetilde{x}$ tal que:

$$\bullet\ \widehat{\widetilde{x}}(t) = \frac{1}{\widehat{x}(t)}\,,\ \forall t \in [-\alpha, \alpha].$$

c) Seja $y \in L^1$ tal que $\operatorname{supp} \widehat{y} \subset [-\alpha, \alpha]$; atendendo à alínea anterior, mostre que existe uma solução $z \in L^1$ da equação:

$$\bullet\ x * z = y.$$

83) Se $x \in L^1$, mostre que não pode existir solução $z \in L^1$ de $x * z = y$ para todo o $y \in L^1$ [Sugestão: tomar $y = x$ e notar que se existir solução z da referida equação, então $\widehat{z} = 1$ onde $\widehat{x} \neq 0$; conclua que, nesse caso, não pode existir solução para y com transformada de Fourier sempre diferente de zero].

84) a) Utilizando o exercício 81) a), mostre que pode construir uma *aproximação da unidade* em L^1 constituída por funções cuja transformada de Fourier tem suporte compacto.

b) Conclua que dado $y \in L^1$ existe uma sucessão y_n em L^1 tal que:

- $\widehat{y_n}$ tem suporte compacto $\forall n \in \mathbb{N}_1$;
- $y_n \xrightarrow[n]{} y$ em L^1.

85) Utilizando os exercícios anteriores demonstre o *Teorema Tauberiano de Wiener*:

Seja $x \in L^1$ tal que $\widehat{x}(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$; então, para cada $y \in L^1, \varepsilon > 0$, existem números reais $s_1, \ldots, s_k$ e números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que:

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| y(t) - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\, x(t - s_j) \Big|\, dt < \varepsilon.$$

[Sugestão: comece por mostrar que existe $z \in L^1$ tal que:

$$\|y - x * z\| < \varepsilon.$$

Para aplicações e consequências importantes deste Teorema, ver [Y]–XI–16 e [Ru2]–9].

86) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ função mensurável limitada, tal que, para certo $k \in L^1$ satisfazendo a $\widehat{k}(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$, se tenha:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} k(t - s)\, f(s)\, ds = C \int_{\mathbb{R}} k(s)\, ds;$$

mostre que, para todo o $h \in L^1$:

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(t - s)\, f(s)\, ds = C \int_{\mathbb{R}} h(s)\, ds.$$

[Sugestão: utilize o Teorema Tauberiano, começando por mostrar que a conclusão do exercício vale para $h(t)$ da forma:

$$h(t) = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \, k(t - s_j),$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{C}, s_1, \ldots, s_l \in \mathbb{R}$.].

87) Justifique as afirmações finais do capítulo acerca das outras possíveis definições da Transformação de Fourier.

Capítulo 4

Álgebras-B*

Neste capítulo vamos considerar uma classe particularmente importante de álgebras de Banach em que, além das operações habituais, existe uma operação *unária*, designada por *involução*, satisfazendo a algumas das propriedades comuns à *conjugação* em $C(X)$ e à *passagem ao adjunto* em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ espaço de Hilbert).

DEFINIÇÃO: *Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach; uma aplicação $x \mapsto x^*$ de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ diz-se* ***involução*** *se:*

1. $(x^*)^* = x\,,\ \forall x \in \mathcal{A}$,
2. $(x+y)^* = x^* + y^*\,,\ \forall x, y \in \mathcal{A}$,
3. $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*\,,\ \forall x \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$,
4. $(xy)^* = y^* x^*\,,\ \forall x, y \in \mathcal{A}$,

ou seja, se se tratar de aplicação involutiva (1.), anti-linear (2. e 3.) e anti-homomorfismo em relação ao produto (4.).

É óbvio que a conjugação em $C(X)$ e a passagem ao adjunto em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ são involuções (quanto a $C(X)$ basta mesmo considerar X espaço topológico *qualquer* e $C(X)$ a álgebra das funções contínuas *limitadas* em X). Estas involuções satisfazem, além disso, a:

- $\|x^* x\| = \|x\|^2$

(para o caso de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, *cf.* exercício 22)-f) — Capítulo 1). Estudemos as álgebras em que esta propriedade tem lugar.

DEFINIÇÃO: *Chamamos* ***álgebra-B**** *a um par $(\mathcal{A}, *)$ em que $\mathcal{A}$ é álgebra de Banach com unidade e $x \mapsto x^*$ involução em $\mathcal{A}$ tal que:*

- $\|x^* x\| = \|x\|^2\,,\ \forall x \in \mathcal{A}$.

Uma sub-álgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ ($(\mathcal{A}, *)$ álgebra-B*) diz-se ***subálgebra-B**** se $e \in \mathcal{B}$ e $\mathcal{B}$ for fechada para a involução $*$ (ou seja, se $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$).

Um homomorfismo de álgebras, entre álgebras-B*, $\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, diz-se ***homomorfismo-$*$*** se $\Psi(x^*) = \Psi(x)^*, \forall x \in \mathcal{A}$ (representando as involuções de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ pelo mesmo símbolo $*$).

4.1 Elementos auto-adjuntos, normais e unitários

DEFINIÇÕES: *Por analogia com a terminologia de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, sendo $\mathcal{A}$ álgebra--B*, um elemento $x \in \mathcal{A}$ diz-se* ***auto-adjunto*** *(ou* ***auto-conjugado****) se $x = x^*$; x diz-se* ***normal*** *se $x^*x = xx^*$ e* ***unitário*** *se for invertível e $x^{-1} = x^*$.*

PROPOSIÇÃO 4.1: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra-B*. Então:***

1. ***x^*x é auto-adjunto, $\forall x \in \mathcal{A}$.***

2. ***e é auto-adjunto; 0 é auto-adjunto.***

3. ***x^* é invertível sse x o for e nesse caso:***

$$(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*.$$

4. ***$\|x^*\| = \|x\|, \forall x \in \mathcal{A}$.***

5. ***Se $x \in \mathcal{A}$ for normal, então $\|x^2\| = \|x\|^2$ e $r_\sigma(x) = \|x\|$.***

6. ***Os funcionais multiplicativos Φ de $\mathcal{A}$ são homomorfismos-$*$; em particular, se $x \in \mathcal{A}$ for auto-adjunto $\sigma(x)$ é real.***

7. ***Se $x \in \mathcal{A}$ existem elementos auto-adjuntos $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ únicos tais que $x = x_1 + i\,x_2$; se x for normal x_1 e x_2 comutam.***

Demonstração: 1. $(x^*x)^* = x^*(x^*)^* = x^*x$.

2. $e = (e^*)^* = (e^*e)^* = e^*e = e^*; 0^* = (0+0)^* = 0^* + 0^* \Rightarrow 0^* = 0$.

3. Se x for invertível, existe $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e \Rightarrow (x^{-1})^*x^* = x^*(x^{-1})^* = e^* = e,$$

donde x^* é invertível e $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$. Se x^* for invertível, pelo que acabámos de ver, $x = (x^*)^*$ é invertível.

4. $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \|x^*\|$, donde $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$.

5. Se $x \in \mathcal{A}$ for normal, tem-se, por definição de álgebra-B*:

$$\begin{aligned} \left\|x^2\right\|^2 &= \left\|(x^2)^*x^2\right\| = \left\|(x^*)^2x^2\right\| = \|(x^*x)(x^*x)\| = \\ &= \|(x^*x)^*(x^*x)\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4 \Rightarrow \left\|x^2\right\| = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Concluímos então, por indução, que:

- $\left\|x^{2^n}\right\| = \|x\|^{2^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}_1,$

donde:

$$r_\sigma(x) = \lim_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \left\|x^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} = \|x\|.$$

6. Provemos que $\Phi(x^*) = \overline{\Phi(x)}$. Para isso comecemos por demonstrar parte de 7.; basta notar que:

$$x = \underbrace{\frac{x + x^*}{2}}_{x_1} + i\underbrace{\frac{x - x^*}{2i}}_{x_2}, \ \forall x \in \mathcal{A},$$

sendo, obviamente, x_1, x_2 auto-adjuntos. Tem-se então $x^* = x_1 - ix_2$, donde:

$$\bullet\ \Phi(x) = \Phi(x_1) + i\Phi(x_2), \Phi(x^*) = \Phi(x_1) - i\Phi(x_2).$$

Basta então demonstrar que $\Phi(x_i)$ é real $(i = 1, 2)$ para que fique claro que $\Phi(x^*)$ é o conjugado de $\Phi(x)$. Mostremos que $\Phi(x)$ é real para todo o $x \in \mathcal{A}$ auto-adjunto; pondo:

$$\bullet\ \Phi(x) = r + is \ (r, s \in \mathbb{R}),$$

consideremos, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$y = x + ite;$$

tem-se:

$$\bullet\ y^*y = (x - ite)(x + ite) = x^2 + t^2e$$

e portanto, atendendo a que $\|\Phi\| \leq 1$ (consequência do Corolário da Proposição 2.6):

$$\bullet \begin{cases} \Phi(y) = \Phi(x) + it = r + i(s + t) \\ |\Phi(y)|^2 \leq \|y\|^2 = \|y^*y\| = \left\|x^2 + t^2e\right\| \leq \left\|x^2\right\| + t^2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^2 + (s + t)^2 \leq \left\|x^2\right\| + t^2 \Rightarrow r^2 + s^2 + 2st \leq \left\|x^2\right\|,$$

$\forall t \in \mathbb{R}$. A última desigualdade só é possível para todo o $t \in \mathbb{R}$ se $s = 0$, o que prova que $\Phi(x)$ é real. Em particular o espectro $\sigma_{\mathcal{A}_x}(x)$ é *real*, já que a sub-álgebra $\mathcal{A}_x$ gerada por x é evidentemente álgebra-B* comutativa e portanto:

$$\sigma_{\mathcal{A}_x}(x) = \{\Phi(x) : \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}_x}\} \subset \mathbb{R};$$

então:

$$\sigma(x) \subset \sigma_{\mathcal{A}_x}(x) \subset \mathbb{R}.$$

7. Resta demonstrar a unicidade, já que, obviamente, se x for normal, x_1 e x_2 comutam. Se $x = x_1 + ix_2$ (x_1, x_2 auto-adjuntos), tem-se:

$$\bullet\ x^* = x_1 - ix_2,$$

donde:

$$\bullet \begin{cases} \dfrac{x+x^*}{2} = x_1 \\ \dfrac{x-x^*}{2i} = x_2 \end{cases} .\square$$

4.2 Teorema de Gelfand-Naimark

TEOREMA 4.2 (Gelfand-Naimark): ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach; então existe uma involução $*$ em $\mathcal{A}$ tal que $(\mathcal{A}, *)$ é álgebra-B* comutativa sse $\mathcal{A}$ for isometricamente isomorfa a uma álgebra $C(X)$ (X espaço topológico compacto). Nesse caso a transformação de Gelfand é isomorfismo-$*$ isométrico entre $\mathcal{A}$ e $C(\sigma_{\mathcal{A}})$.***

Demonstração: Se existir um isomorfismo isométrico:

$$i : \mathcal{A} \to C(X)$$

(X espaço compacto), pondo $x^* = i^{-1}(\overline{i(x)}), \forall x \in \mathcal{A}$, obtém-se obviamente uma involução em $\mathcal{A}$ para a qual $\mathcal{A}$ é álgebra-B* comutativa, como $C(X)$. Reciprocamente, se $\mathcal{A}$ for álgebra-B* comutativa, $\mathcal{A}$ é *regular* (atendendo à Proposição 4.1-5) e *simétrica*, pois, atendendo à Proposição 4.1-6:

$$\overline{\widehat{x}}(\Phi) = \overline{\Phi(x)} = \Phi(x^*) = \widehat{x^*}(\Phi)\,,\ \forall \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}}, x \in \mathcal{A}.$$

Sabemos então, pela Proposição 2.20, que a Transformação de Gelfand é isomorfismo isométrico de $\mathcal{A}$ sobre $C(\sigma_{\mathcal{A}})$; acabámos de ver que:

$$\bullet\ \widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}},$$

tratando-se assim de homomorfismo-$*$.$\square$

Antes de estudarmos aplicações importantes do Teorema de Gelfand-Naimark examinemos as relações entre a noção de espectro e conceitos respeitantes a álgebras-B*.

4.3 Propriedades dos espectros e elementos positivos; caso de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

PROPOSIÇÃO 4.3: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra-B*. Então:***

1. $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)}\ (= \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(x)\}), \forall x \in \mathcal{A}$.
2. ***Se $x \in \mathcal{A}$ for normal, x é auto-adjunto sse $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.***
3. ***Se $x \in \mathcal{A}$ for unitário, $\sigma(x) \subset S(0,1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.***

4. *Se $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ for homomorfismo e $\mathcal{B}$ álgebra-B* comutativa, então Φ é homomorfismo-$*$.*

Demonstração: 1. Resulta da Proposição 4.1 (3.) que $x - \lambda e$ não é invertível sse $(x - \lambda e)^* = x^* - \overline{\lambda} e$ não o for, ou seja, $\lambda \in \sigma(x)$ sse $\overline{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

2. Já vimos (Proposição 4.1-6.) que se x for *auto-adjunto*, então $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. Se x for normal, a álgebra-B* gerada por x, ou seja, a álgebra $\mathcal{B}$ gerada por x, x^* e e, é, evidentemente, *comutativa*; pelo Teorema de Gelfand-Naimark, a Transformação de Gelfand é isomorfismo-$*$ isométrico de $\mathcal{B}$ sobre $C(\sigma_{\mathcal{B}})$. Se $\sigma(x)$ for real tem-se $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma(x)$ (segundo Corolário da Proposição 2.5), e portanto $\widehat{x}$ é função *real*, ou seja, auto-adjunta em $C(\sigma_{\mathcal{B}})$, o que implica que x é auto-adjunto em $\mathcal{B}$ e portanto em $\mathcal{A}$.

3. Sendo $x \in \mathcal{A}$ unitário, é, em particular, normal; portanto a álgebra-B* $\mathcal{B}$ gerada por x é comutativa. Pelo Teorema de Gelfand-Naimark, $\mathcal{B}$ é isometricamente isomorfa-$*$ a $C(\sigma_{\mathcal{B}})$ através de $\widehat{\cdot}$. Ora:

$$\bullet\ x^* = x^{-1} \Rightarrow \overline{\widehat{x}} = \frac{1}{\widehat{x}} \Rightarrow |\widehat{x}|^2 = 1 \Rightarrow \sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset S(0,1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma(x) \subset \sigma_{\mathcal{B}}(x) \subset S(0,1).$$

4. Se $\Psi \in \sigma_{\mathcal{B}}, \Psi \circ \Phi \in \sigma_{\mathcal{A}} \cup \{0\}$ e é portanto homomorfismo-$*$ (Proposição 4.1–6.); então:

$$\forall x \in \mathcal{A} : \widehat{\Phi(x^*)}(\Psi) = \Psi \circ \Phi(x^*) = \overline{\Psi \circ \Phi(x)} = \overline{\widehat{\Phi(x)}(\Psi)}\,,\ \forall \Psi \in \sigma_{\mathcal{B}},$$

donde

$$\widehat{\Phi(x^*)} = \overline{\widehat{\Phi(x)}} = \widehat{\Phi(x)^*} \Rightarrow \Phi(x^*) = \Phi(x)^*,$$

atendendo a que $\widehat{\cdot}$ é, neste caso, isomorfismo-$*$.□

De entre os elementos *auto-adjuntos*, ou seja, os elementos normais de *espectro real* (como acabámos de ver) interessa-nos destacar os que têm *espectro contido em* $[0, +\infty[$ que designaremos por ***elementos positivos***. É fácil verificar que em $C(X)$ (X espaço topológico qualquer) f *é elemento positivo sse* $f(x) \geq$ $\geq 0, \forall x \in X$ [exercício]. Vejamos o que se passa em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ espaço de Hilbert). Para isso começamos por relacionar o espectro de $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ com o seguinte conceito:

DEFINIÇÃO: *Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; chamamos **imagem numérica** de A ao conjunto:*

$$N(A) = \{(Au, u) : u \in \mathcal{H}, \|u\| = 1\}.$$

PROPOSIÇÃO 4.4: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; então:***

$$\sigma(A) \subset \overline{N(A)}.$$

Demonstração: Se $\lambda \in \sigma(A)$, ou $\ker(A-\lambda I) \neq \{0\}$ ou $R(A-\lambda I) \neq \mathcal{H}$. Na primeira hipótese existe $u \in \mathcal{H}$ tal que $\|u\| = 1$ e:

$$\bullet\ Au = \lambda u,$$

donde:

$$\bullet\ (Au, u) = (\lambda u, u) = \lambda \|u\|^2 = \lambda \Rightarrow \lambda \in N(A).$$

Na segunda hipótese, como $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$, mais uma vez podemos distinguir dois casos: ou $\ker(A^* - \overline{\lambda} I) \neq \{0\}$ ou $R(A^* - \overline{\lambda} I) \neq \mathcal{H}$. Na primeira hipótese existe $u \in \mathcal{H}$ tal que $\|u\| = 1$ e:

$$\bullet\ A^* u = \overline{\lambda} u,$$

donde:

$$\bullet\ (A^* u, u) = \overline{\lambda}\|u\|^2 = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda = \overline{(A^* u, u)} = (u, A^* u) = (Au, u) \in N(A).$$

Resta examinar o caso em que $R(A-\lambda I) \neq \mathcal{H}$ e $R(A^* - \overline{\lambda} I) \neq \mathcal{H}$, sendo $\ker(A-\lambda I) = \ker(A^* - \overline{\lambda} I) = \{0\}$; tem-se então:

$$\bullet\ \overline{R(A-\lambda I)} = \ker(A^* - \overline{\lambda} I)^{\perp} = \mathcal{H}$$

(Proposição 1.2–6.). Logo $(A-\lambda I)^{-1}$ *não pode ser contínuo*, já que, tendo domínio denso ($R(A-\lambda I)$) e sendo fechado teria, nesse caso, domínio igual a $\mathcal{H}$, contra a hipótese de $R(A-\lambda I) \neq \mathcal{H}$. Então:

$$\forall n \in \mathbb{N}_1, \exists v_n \in R(A-\lambda I) : \big\|(A-\lambda I)^{-1} v_n\big\| > n\|v_n\|.$$

Pondo:

$$\bullet\ u_n = \frac{(A-\lambda I)^{-1} v_n}{\|(A-\lambda I)^{-1} v_n\|},$$

tem-se $u_n \in \mathcal{H}$, $\|u_n\| = 1$ e:

$$\bullet\ (A-\lambda I)u_n = \frac{v_n}{\|(A-\lambda I)^{-1} v_n\|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(Au_n, u_n) - \lambda| \leq \frac{\|v_n\|}{\|(A-\lambda I)^{-1} v_n\|} < \frac{1}{n} \xrightarrow[n]{} 0$$

e portanto, ainda neste caso, $\lambda \in \overline{N(A)}$.□

COROLÁRIO: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; então A é elemento positivo de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ sse $N(A) \subset [0, +\infty[$, ou seja sse:***

$$\bullet\ (Au, u) \geq 0\,,\ \forall u \in \mathcal{H}.$$

Demonstração: Se $N(A) \subset [0, +\infty[$, em particular $(Au, u) \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{H}$ e portanto A é *simétrico* (*cf.* Introdução, exercício 2)), logo auto-adjunto, já que

$A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Por outro lado, pelo que acabámos de ver, $\sigma(A) \subset \overline{N(A)} \subset [0, +\infty[$ e portanto A é *positivo* em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Reciprocamente, se A for *positivo* em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, A é auto-adjunto e $\sigma(A) \subset \subset [0, +\infty[$. Pelo Teorema de Gelfand-Naimark, a álgebra-B* $\mathcal{L}(\mathcal{H})_A$ (álgebra gerada por A em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$), que é obviamente comutativa, é isometricamente isomorfa a $C(\sigma_{\mathcal{L}(\mathcal{H})_A})$. Como, neste caso, $\sigma_{\mathcal{L}(\mathcal{H})_A}(A) = \sigma(A)$ (atendendo ao segundo Corolário da Proposição 2.5), $\widehat{A}$ toma valores em $[0, +\infty[$, e portanto $\sqrt{\widehat{A}} \in \in C(\sigma_{\mathcal{L}(\mathcal{H})_A})$; então existe $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_A$ tal que:

$$\bullet\ \widehat{B} = \sqrt{\widehat{A}},$$

donde:

$$\bullet\ \widehat{B^2} = \widehat{B}^2 = \widehat{A} \Rightarrow B^2 = A,$$

e B é *auto-adjunto*, já que:

- $\sigma(B) \subset \sigma_{\mathcal{L}(\mathcal{H})_A}(B) = R(\widehat{B}) = R\left(\sqrt{\widehat{A}}\right) \subset \mathbb{R}$
- B é *normal* visto que $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_A$, álgebra-B* *comutativa*.

Então:

$$\bullet\ (Au, u) = (B^2u, u) = (Bu, Bu) = \|Bu\|^2 \geq 0, \forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow \\ \Rightarrow N(A) \subset [0, +\infty[. \square$$

4.4 Álgebra-B* gerada por um elemento normal; cálculo operacional contínuo

No caso particular em que consideramos a *sub-álgebra* $\mathcal{A}_a$ gerada por um elemento a *auto-adjunto* de uma álgebra-B* $\mathcal{A}$, o Teorema de Gelfand-Naimark estabelece um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{A}_a$ e $C(\sigma(a))$, já que, como vimos na secção 2.6, $\widehat{a}$ é *homeomorfismo* entre $\sigma_{\mathcal{A}_a}$ e $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a)$ e, neste caso, $\sigma_{\mathcal{A}_a}(a) = = \sigma(a)$. Temos assim:

$$\mathcal{A}_a \xrightarrow{\ \widehat{\cdot}\ } C(\sigma_{\mathcal{A}_a}) \xrightarrow{\ \cdot\, \circ\, \widehat{a}^{-1}\ } C(\sigma(a))$$
$$x \mapsto \widehat{x} \mapsto \widehat{x} \circ \widehat{a}^{-1};$$

em particular, neste isomorfismo isométrico, a a corresponde a função *identidade* em $\sigma(a)$. Vamos ver que o mesmo se pode provar para um elemento *normal*. Necessitamos, para isso, de estabelecer os seguintes dois resultados:

PROPOSIÇÃO 4.5: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra-B* e $\mathcal{B}$ sub-álgebra-B* de $\mathcal{A}$; então $x \in \mathcal{B}$ é invertível sse x for invertível em $\mathcal{A}$. Em particular $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = = \sigma(x), \forall x \in \mathcal{B}$.***

Demonstração: É óbvio que se $x \in \mathcal{B}$ for invertível em $\mathcal{B}$, é-o também em $\mathcal{A}$. Reciprocamente, se $x \in \mathcal{B}$ for invertível em $\mathcal{A}$, x^* é também invertível em $\mathcal{A}$ e portanto x^*x é invertível em $\mathcal{A}$, donde:

$$\bullet\ 0 \notin \sigma(x^*x);$$

ora x^*x é auto-adjunto, donde $\sigma(x^*x) \subset \mathbb{R}$ (Proposição 4.1). Então, como sabemos:

$$\bullet\ \sigma_{\mathcal{B}}(x^*x) = \sigma(x^*x),$$

e portanto:

$$\bullet\ 0 \notin \sigma_{\mathcal{B}}(x^*x) \text{ e } x^*x \text{ é invertível em } \mathcal{B}.$$

Existe portanto $y \in \mathcal{B}$ tal que:

$$y(x^*x) = (x^*x)y = e;$$

ora, sendo x, y invertíveis em $\mathcal{A}$, também o é xy; de $x^*(xy) = (x^*x)y = e$ deduz-se então que:

$$x^* = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \Rightarrow x^{-1} = \underbrace{y}_{\in \mathcal{B}} \cdot \underbrace{x^*}_{\in \mathcal{B}} \in \mathcal{B},$$

pelo que, de facto, x é invertível em $\mathcal{B}$.□

PROPOSIÇÃO 4.6: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra-B* e $\mathcal{B}$ sub-álgebra-B* de $\mathcal{A}$ gerada por um elemento normal $a \in \mathcal{A}$; então $\widehat{a}$ é homeomorfismo de $\sigma_{\mathcal{B}}$ sobre $\sigma(a)$.***

Demonstração: Pela proposição anterior, temos $\sigma(a) = \sigma_{\mathcal{B}}(a)$. Portanto $\widehat{a}$ é sobrejecção contínua entre $\sigma_{\mathcal{B}}$ e $\sigma(a)$; resta demonstrar que $\widehat{a}$ é *injectiva*, atendendo a que $\sigma_{\mathcal{B}}$ e $\sigma(a)$ são compactos e portanto toda a bijecção contínua entre os dois espaços topológicos é homeomorfismo. Ora sabemos que os funcionais multiplicativos são homomorfismos-$*$ (Proposição 4.1–6.), donde:

$$\widehat{a}(\Phi) = \widehat{a}(\Psi) \Rightarrow \Phi(a) = \Psi(a) \Rightarrow \Phi(a^*) = \overline{\Phi(a)} = \overline{\Psi(a)} = \Psi(a^*) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Phi(x) = \Psi(x)\,,\ \forall x \in \mathcal{B} = \mathcal{A}_{\{a,a^*\}} \Rightarrow \Phi = \Psi,$$

e portanto $\widehat{a}$ é, de facto, injectiva.□

TEOREMA 4.7 (Cálculo operacional ou simbólico contínuo, para um elemento normal): ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra-B* e $a \in \mathcal{A}$ elemento normal; então existe um homomorfismo único:***

$$\bullet\ \Phi_a : C(\sigma(a)) \longrightarrow \mathcal{B}$$

($\mathcal{B} = \mathcal{A}_{\{a,a^*\}}$ sub-álgebra-B* gerada por a) tal que:

$$\bullet\ \Phi_a(1) = e$$
$$\bullet\ \Phi_a(\widehat{\lambda}) = a.$$

Além disso, Φ_a é isomorfismo-$*$ isométrico entre $C(\sigma(a))$ e $\mathcal{B}$; em particu-

lar:

- $\|\Phi_a(g)\| = \|g\|_\infty \, , \forall g \in C(\sigma(a))$,

tendo-se ainda:

1. ***$\Phi_a(g)$ é auto-adjunto sse $g \in C(\sigma(a))$ for função real.***
2. ***$\sigma(\Phi_a(g)) = g(\sigma(a)) \, , \forall g \in C(\sigma(a))$.***
3. ***Se $g \in C(\sigma(a))$, $\Phi_a(g)$ é positivo sse $g(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \sigma(a)$.***
4. ***Se $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $a = A$ for auto-adjunto e $Au = \lambda u$, então:***

$$\Phi_a(g)u = g(\lambda)u$$

($\lambda \in \mathbb{C}, u \in \mathcal{H}$).

5. ***Se g for função holomorfa numa vizinhança de $\sigma(a)$, designando ainda por g a respectiva restrição a $\sigma(a)$:***

$$\Phi_a(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(\lambda) \, (\lambda e - a)^{-1} \, d\lambda$$

(com as notações de (29), Teorema 2.14), ou seja, Φ_a estende o cálculo simbólico holomorfo (definido no Teorema 2.15).

6. ***Se b comutar com a e a^*, comuta com $\Phi_a(g), \forall g \in C(\sigma(a))$.***

Demonstração: Do Teorema de Gelfand-Naimark e da Proposição 4.6 concluímos que é isomorfismo-$*$ isométrico entre $\mathcal{B}$ e $C(\sigma(a))$ a aplicação:

$$\Psi : \mathcal{B} \to C(\sigma(a))$$

tal que:

$$x \mapsto \widehat{x} \in C(\sigma_{\mathcal{B}}) \mapsto \Psi(x) = \widehat{x} \circ \widehat{a}^{-1} \in C(\sigma(a));$$

pondo:

$$\Phi_a = \Psi^{-1},$$

é então óbvio que Φ_a é isomorfismo-$*$ isométrico entre $C(\sigma(a))$ e $\mathcal{B}$, tendo-se:

- $\Phi_a(1) = e$ (já que se trata de isomorfismo),
- $\Phi_a(\widehat{\lambda}) = \Psi^{-1}(\widehat{\lambda}) = \widehat{\cdot}^{-1}(\widehat{\lambda} \circ \widehat{a}) = \widehat{\cdot}^{-1}(\widehat{a}) = a.$

Então, obviamente, $\Phi_a(g)$ é auto-adjunto sse g o for em $C(\sigma(a))$, ou seja, sse g for *real*, o que prova 1.. Além disso $\lambda \in \sigma(\Phi_a(g))$ sse $\Phi_a(g) - \lambda e$ não for invertível em $\mathcal{A}$ e portanto, atendendo à Proposição 4.5, sse $\Phi_a(g) - \lambda e$ não for invertível em $\mathcal{B}$, ou ainda, atendendo ao que acabámos de ver e a que Φ_a é isomorfismo, sse $g - \lambda$ não for invertível em $C(\sigma(a))$ o que é equivalente, obviamente, a λ estar na imagem de g, ou seja, em $g(\sigma(a))$. Sendo assim, de facto:

$$\sigma(\Phi_a(g)) = g(\sigma(a)),$$

o que prova 2..

Sendo $\mathcal{B}$ evidentemente comutativa, $\Phi_a(g)$ é sempre normal; por definição de elemento positivo ter-se-á $\Phi_a(g)$ positivo sse $\sigma(\Phi_a(g)) \subset [0, +\infty[$, ou seja, atendendo a 2., sse $g(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \sigma(a)$, o que prova 3..

No caso em que $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ espaço de Hilbert) e $A = a$ é auto-adjunto, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ e portanto, pelo Teorema de Stone-Weierstrass, os polinómios são densos em $C(\sigma(a))$; ora de:

$$\bullet\ Au = \lambda u$$

(para certos $u \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{C}$), concluímos que para qualquer polinómio P:

$$P(A)u = P(\lambda)u.$$

Como qualquer $g \in C(\sigma(A))$ é limite uniforme de polinómios e Φ_A é isomorfismo *isométrico*, a igualdade anterior *passa ao limite*, obtendo-se:

$$\bullet\ \Phi_A(g)u = g(\lambda)u$$

(note-se que $P(A) = \Phi_A(P)$, já que Φ_A é homomorfismo e $\Phi_A(1) = e = I$, $\Phi_A(\widehat{\lambda}) = A$). Este raciocínio não pode ser levado a cabo no caso em que A é apenas *normal*, já que, nesse caso $\sigma(A)$ não é necessariamente real e portanto os polinómios em λ (variável complexa) *não são necessariamente densos em* $C(\sigma(A))$ (não constituem álgebra *fechada para a conjugação*). Teríamos que considerar os polinómios em $\Re\,\lambda$ e $\Im\,\lambda$; como:

$$\Phi_A(\Re\,\widehat{\lambda}) = \frac{A + A^*}{2}, \Phi_A(\Im\,\widehat{\lambda}) = \frac{A - A^*}{2i},$$

para seguir um raciocínio idêntico ao anterior, teríamos que verificar que:

$$A^*u = \overline{\lambda}u,$$

o que não é consequência necessária de $Au = \lambda u$!

Provemos agora que Φ_a estende o cálculo *holomorfo*. Se g for holomorfa numa vizinhança de $\sigma(a)$, temos (tal como para qualquer $g \in C(\sigma(a))$):

$$\bullet\ \widehat{\Phi_a(g)} = \widehat{\cdot}^{-1}(g \circ \widehat{a}) = g \circ \widehat{a};$$

mas, neste caso, recorrendo ao Teorema 2.14, podemos garantir que o elemento $g(a)$ definido por (29) em $\mathcal{B}$, satisfaz a:

$$\bullet\ \widehat{g(a)} = g \circ \widehat{a},$$

donde, por injectividade de $\widehat{\cdot}$:

$$\Phi_a(g) = g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(\lambda)(\lambda e - a)^{-1}\,d\lambda,$$

o que demonstra 5.. A demonstração de 6. é deixada como exercício.

Resta demonstrar a unicidade de Φ_a. Se $\widetilde{\Phi}$ for homomorfismo de $C(\sigma(a))$ para $\mathcal{B}$ tal que $\widetilde{\Phi}(1) = e, \widetilde{\Phi}(\widehat{\lambda}) = a$, como $\widetilde{\Phi}$ é homomorfismo-$*$ (atendendo à Proposição 4.3–4) vem, em particular, $\widetilde{\Phi}\Big(\overline{\widehat{\lambda}}\Big) = \widetilde{\Phi}(\widehat{\lambda})^*$, donde $\widetilde{\Phi}$ coincide com Φ_a nos polinómios em $\Re\,\lambda$ e $\Im\,\lambda$. Por outro lado $\widetilde{\Phi}$ é *contínuo*, atendendo ao segundo corolário da Proposição 2.19; como o conjunto daqueles polinómios é *denso* em $C(\sigma(a))$ (atendendo ao teorema de Stone-Weierstrass) concluímos que $\widetilde{\Phi}$ coincide com Φ_a em $C(\sigma(a))$, o que demonstra a unicidade.$\square$

Este Teorema, cuja grande importância ficará patente no capítulo seguinte, permite obter, por exemplo, uma estimativa precisa da norma da *resolvente* de um elemento normal (comparar com o exercício 45).

COROLÁRIO: ***Seja $\mathcal{A}$ álgebra-B*, $a \in \mathcal{A}$ elemento normal; então $\forall \lambda \in \in \rho(a)$:***

$$\left\|(a - \lambda e)^{-1}\right\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(a))}.$$

Demonstração: Sendo $\Phi_a : C(\sigma(a)) \to \mathcal{B}$ (álgebra-B* gerada por a) isomorfismo e, para $\mu \in \rho(a)$:

$$\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda - \mu}$$

função contínua em $\sigma(a)$, é fácil verificar que:

$$\Phi_a\Big(\frac{1}{\widehat{\lambda} - \mu}\Big) = \Phi_a((\widehat{\lambda} - \mu)^{-1}) = (a - \mu e)^{-1}.$$

Então:

$$\begin{aligned}\left\|(a - \mu e)^{-1}\right\| &= \left\|\Phi_a\Big(\frac{1}{\widehat{\lambda} - \mu}\Big)\right\| = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} \frac{1}{|\lambda - \mu|}\\ &= \frac{1}{\inf\limits_{\lambda\in\sigma(a)}|\lambda - \mu|} = \frac{1}{\operatorname{dist}(\mu, \sigma(a))}.\square\end{aligned}$$

Exercícios

88) Mostre que as propriedades 1, 2, 3 e 7 da Proposição 4.1 valem para qualquer involução.

89) Mostre que a álgebra $C(T)$ do exercício 63 é álgebra-B* para a involução:

$$\bullet\ g^*(t) = \overline{g(t)}$$

($\forall t \in T, g \in C(T)$). Confronte o resultado do referido exercício com os resultados deste capítulo.

90) Exercício análogo ao anterior para a álgebra $L^\infty(\Omega, \mathbb{C}, \mu)$ do exercício 65.

91) Mostre que a álgebra W de Wiener *não é álgebra-B** para nenhuma involução que se defina em W.

92) Exercício análogo ao anterior para a álgebra de convolução $\mathcal{S}$ (definida na secção 3.1).

93) Uma involução $*$ na álgebra de Banach comutativa $\mathcal{A}$ (com unidade e) diz-se simétrica se:

$$\widehat{a^*} = \overline{\widehat{a}}\,,\ \forall a \in \mathcal{A}.$$

Mostre que $*$ é simétrica sse $e + a^*a$ for invertível $\forall a \in \mathcal{A}$. [Sugestão: Para a condição suficiente, comece por mostrar que para todo o $a \in \mathcal{A}$, tal que $a^* = a$, e $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ se tem $a - \mu e$ invertível; para isso pode verificar que $(a - \mu e)(a - \overline{\mu} e)$ se pode escrever na forma de múltiplo não nulo de um elemento da forma $e + x^*x$].

94) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach comutativa com unidade, $*$ involução em $\mathcal{A}$. Uma forma linear contínua $l : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ diz-se *positiva-$*$* (ou simplesmente *positiva*) se $l(aa^*) \geq 0, \forall a \in \mathcal{A}$. Seja então l forma positiva-$*$ em $\mathcal{A}$; mostre que:

a) $l(a^*) = \overline{l(a)}\,,\ \forall a \in \mathcal{A}$ [Sugestão: Atenda a que $l((a + \mu e)(a + \mu e)^*) \geq 0, \forall a \in \mathcal{A}$, $\mu \in \mathbb{C}$].

b) $|l(ab^*)|^2 \leq l(aa^*)l(bb^*)\,,\ \forall a, b \in \mathcal{A}$ [Sugestão: Atenda a que $l((a + \mu b)(a + \mu b)^*) \geq 0, \forall a, b \in \mathcal{A}, \mu \in \mathbb{C}$].

c) $|l(a)| \leq l(e)(r_\sigma(aa^*)^{\frac{1}{2}})\,,\ \forall a \in \mathcal{A}$ [Sugestão: Aplique repetidamente a alínea anterior, começando por tomar $b = e$].

d) $|l(a)| \leq l(e)\, \|\widehat{aa^*}\|_\infty^{\frac{1}{2}}\,,\ \forall a \in \mathcal{A}$.

e) Se $*$ for *simétrica* (no sentido do exercício anterior) mostre que $\widehat{a} \geq 0 \Rightarrow \Rightarrow l(a) \geq 0, \forall a \in \mathcal{A}$ [Sugestão: Comece por mostrar que se $\widehat{a}$ *for real* $l(a) \in \mathbb{R}$ e em seguida aplique a alínea anterior a $\|\widehat{a}\|_\infty e - a$, para $\widehat{a} \geq 0$].

f) Com a hipótese da alínea anterior, mostre que existe uma medida boreliana regular μ em $\sigma_\mathcal{A}$ única tal que:

$$\bullet\ l(a) = \int_{\sigma_\mathcal{A}} \widehat{a}\, d\mu\,,\ \forall a \in \mathcal{A}.$$

(Para uma extensão dos resultados deste exercício , ver [Ru2], 11.30).

95) Seja $\mathcal{A}$ álgebra-B*, $a \in \mathcal{A}$ elemento *positivo* (ou seja, $a^* = a$ e $\sigma(a) \subset$ $\subset [0, +\infty[$); mostre que existe $b \in \mathcal{A}$ único tal que b é *positivo* e $b^2 = a$ (b diz-se a *raíz quadrada positiva* de a) e que além disso b comuta com os x que comutam com a [Sugestão: *cf.* demonstração do Corolário da Proposição 4.4].

96) Mostre que em $C(X)$ (X compacto) os elementos positivos são exactamente as funções $g : X \to \mathbb{R}$ tais que $g(x) \geq 0, \forall x \in X$. Que se pode dizer quanto aos elementos positivos de $C(T)$ (T espaço topológico qualquer)? e de $L^\infty(\Omega, \mu)$ ((Ω, μ) espaço de medida)?

97) Mostre que qualquer involução $a \mapsto a^*$ numa álgebra de Banach comutativa semi-simples é contínua [Sugestão: Mostre que $a \mapsto \|a^*\|$ é norma].

98) Seja $\mathcal{A}$ álgebra de Banach com involução $*$ *contínua* e unidade e; seja $a \mapsto T_a$ homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (onde $\mathcal{H}$ é espaço de Hilbert) tal que $T_e = I, T_{a^*} = (T_a)^*$. Mostre que:

a) $\sigma(T_a) \subset \sigma(a)$, donde $r_\sigma(T_a) \leq r_\sigma(a), \forall a \in \mathcal{A}$.

b) Se $a^* = a$, então $\|T_a\| \leq \|a\|$.

c) Atendendo à alínea anterior: $\|T_a\|^2 \leq \|a^*\|.\|a\|, \forall a \in \mathcal{A}$.

d) $a \mapsto T_a$ é contínuo.

99) Mostre que não é verdadeiro o recíproco da Proposição 4.3–3, mas que o é no quadro dos elementos normais.

100) Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ álgebras-B*, $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo-$*$; mostre que:

a) Φ é *contínuo* e $\|\Phi\| \leq 1$ [Sugestão: Mostre que se $\Phi \neq 0$, então Φ aplica elementos invertíveis em elementos invertíveis de $\Phi(\mathcal{A})$, álgebra-B* com unidade $\Phi(e)$, e conclua que $r_\sigma(\Phi(a^*a)) \leq r_\sigma(a^*a)$].

b) Se Φ for *bijecção* então Φ é *isometria* [Sugestão: Mostre que se $a = a^* \in \mathcal{A}$, então se $\sigma(\Phi(a)) \subsetneq \sigma(a)$ e g for contínua, igual a zero em $\sigma(\Phi(a))$ mas não identicamente nula em $\sigma(a)$, obtém-se uma contradição aproximando g por polinómios…].

c) Existe uma única norma em $\mathcal{A}$ para a qual $\mathcal{A}$ é álgebra-B*.

101) Seja $\mathcal{A}$ álgebra-B* e $a \in \mathcal{A}$ *normal*. Mostre que se $b \in \mathcal{A}$ e b comuta com a e a^*, então b comuta com $\Phi_a(g), \forall g \in C(\sigma(a))$.

102) **a)** Mostre que a *Transformação de Fourier-Plancherel* $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ é elemento *unitário de* $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ (*cf.* secção 3.8).

b) Verifique que $\mathcal{F}^{-1}u(\widehat{t}) = \mathcal{F}u(-\widehat{t}), \mathcal{F}^2u(\widehat{t}) = u(-\widehat{t}), \mathcal{F}^4 = I$.

c) Conclua de b) que $\sigma(\mathcal{F}) \subset \{1, -1, i, -i\}$ e que $\sigma(\mathcal{F})$ contém pelo menos um dos conjuntos $\{1, i\}, \{1, -i\}, \{-1, i\}, \{-1, -i\}$ [Sugestão: Comece por estudar o espectro do operador $u(\widehat{t}) \mapsto u(-\widehat{t})$ de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$… para a determinação exacta de $\sigma(\mathcal{F})$ ver [RN], §113].

103) Seja $\mathcal{A}$ álgebra-B* e $b, c \in \mathcal{A}$ *normais*; sejam $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ sub-álgebras-B* de $\mathcal{A}$ geradas respectivamente por b e c. Mostre que $\sigma(b) = \sigma(c)$ sse existir um isomorfismo-$*$ entre $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ que aplique b em c.

104) Se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ for normal, mostre que:

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |(Au, u)|.$$

3ª Parte
Teorema Espectral e Aplicações

Capítulo 5

Teorema espectral para operadores normais limitados

5.1 Caso da dimensão finita

Em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ espaço de Hilbert) os elementos normais são os *operadores* normais, a que podemos aplicar o Teorema 4.7. Examinemos o caso da dimensão finita, em que podemos fazer uma análise paralela à efectuada no final do Capítulo 1, então para matrizes hemi-simétricas. Se $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ for operador *normal* e $\mathcal{H}$ tiver dimensão finita N, se $M_A = [a_{jk}]_{j,k=1,\ldots,N}$ for a matriz de $\mathcal{A}$ relativamente a uma base *ortonormada* $(e_1, \ldots, e_N)$, então M_A é matriz *normal*, ou seja, comuta com a respectiva *transconjugada*. É fácil ver que a correspondência $A \mapsto M_A$ entre operadores e matrizes normais (fixada a base) é bijectiva. Neste caso o espectro $\sigma(A)$ de A é constituído pelos valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de M_A e portanto a topologia de $\sigma_{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}$ álgebra-B* gerada por A) é a topologia discreta; a $C(\sigma(A))$ pertencem então *todas* as funções de $\sigma(A)$ em $\mathbb{C}$. Em particular as funções características:

$$\bullet\ f_j = \chi_{\{\lambda_j\}}\ (j = 1, \ldots, k),$$

estão em $C(\sigma(A))$. Seja:

$$\bullet\ P_j = \Phi_A(f_j)$$

(Φ_A definido no Teorema 4.7 — cálculo operacional), para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Traduzindo propriedades das funções características através do *isomorfismo*-$*$ Φ_A obtemos:

• P_j é *projecção ortogonal*,

ou seja:

$$P_j^2 = P_j\,,\ P_j^* = P_j\ (j = 1, \ldots, k).$$

Além disso:

- $P_j P_l = 0$ se $j \neq l\,(j, l = 1, \ldots, k)$;
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} P_j = I$;
- $A = \Phi_A(\widehat{\lambda}) = \Phi_A\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, \chi_{\{\lambda_j\}}\Big) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, P_j$.

Pondo, então, $\mathcal{H}_j = P_j\,\mathcal{H}\,(j = 1, \ldots, k)$, obtemos uma decomposição ortogonal:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_k,$$

em que cada $\mathcal{H}_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ é o subespaço próprio associado ao valor próprio λ_j. Escolhendo em cada $\mathcal{H}_j$ uma base ortonormada obtemos uma base ortonormada $(u_1, \ldots, u_N)$ de $\mathcal{H}$ constituída por valores próprios de A. Designando por U o operador *unitário* (único) de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ tal que $U e_j = u_j$ e por M_U a respectiva matriz (unitária) relativamente à base $(e_1, \ldots, e_N)$ (as colunas são constituídas pelas componentes em $(e_1, \ldots, e_N)$ dos u_j) obtemos, a partir das considerações atrás feitas:

$$M_U^{-1} M_A M_U = \overline{M_U}^{T} M_A M_U = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k),$$

em que cada λ_j $(j = 1, \ldots, k)$ aparece um número de vezes igual à respectiva multiplicidade (dimensão de $\mathcal{H}_j$). Como vemos, a *diagonalização de uma matriz normal* é consequência do Teorema 4.7. Poderíamos agora mostrar que A é unitariamente equivalente ao produto por uma função num espaço L^2 construído sobre $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, tal como fizémos no final do Capítulo 1 para um operador auto-adjunto em dimensão finita. Procuraremos, no entanto, levar a cabo, desde já, processo semelhante para qualquer dimensão.

5.2 Medidas espectrais; caso em que existe vector cíclico

Ao procurarmos estender a qualquer dimensão o resultado atrás analisado para a dimensão finita, surge imediatamente o problema de não serem, em geral, *contínuas* em $\sigma(A)$ as funções características; apresentemos sob outra forma uma das conclusões a que chegámos naquele caso particular. Com as notações acima utilizadas, teremos, para cada $u \in \mathcal{H}$:

$$(Au, u) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, (P_j\, u, u) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, (\chi_{\{\lambda_j\}}(A)\, u, u) = \int_{\sigma(A)} \lambda\, d\mu_u,$$

onde:

$$\mu_u(\{\lambda_j\}) = (\chi_{\{\lambda_j\}}(A)\, u, u) = (\Phi_A(\chi_{\{\lambda_j\}})\, u, u)\ \ (j = 1, \ldots, k),$$

o que, obviamente, determina de maneira única uma *medida* μ_u sobre o conjunto

$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Mostremos como é agora possível passar à dimensão infinita; felizmente o *Teorema de Riesz* permite-nos associar *medidas* aos funcionais *contínuos* sobre $C(\sigma(A))$ (em particular aos funcionais *positivos*[75]). Ora, se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ for *normal* e $u \in \mathcal{H}$, obtemos um funcional linear *positivo* l_u sobre $C(\sigma(A))$, pondo:

$$\bullet\ l_u(g) = (\Phi_A(g)\, u, u)\,,\ \forall g \in C(\sigma(A)),$$

atendendo a que Φ_A é *linear* e $\Phi_A(g)$ é positivo se $g \geq 0$, o que, pelo Corolário da Proposição 4.4, garante que $l_u(g) \geq 0$ se $g \geq 0$ (neste caso é fácil concluir directamente que l_u é, de facto, contínuo, com norma $\|u\|^2$). O Teorema de Riesz--Markov (ver [Sa], [Ru1]) justifica então a possibilidade da definição seguinte:

DEFINIÇÃO: *Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ espaço de Hilbert) operador normal e $u \in \mathcal{H}$. Chamamos **medida espectral associada a u** à única medida boreliana regular positiva $\boldsymbol{\mu_u}$ sobre $\sigma(A)$ tal que:*

$$\int_{\sigma(A)} g\, d\mu_u = (\Phi_A(g)\, u, u)\,,\ \forall g \in C(\sigma(A)).$$

Trata-se obviamente de medida finita, já que:

$$\bullet\ \mu_u(\sigma(A)) = l_u(1) = (\Phi_A(1)\, u, u) = (u, u) = \|u\|^2.$$

Vamos servir-nos de espaços $L^2(\sigma(A), d\mu_u)$ para representar A como operador de multiplicação.

DEFINIÇÃO: *Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador normal; $u \in \mathcal{H}$ diz-se **vector cíclico** (para A — diz-se também que **A tem vector cíclico u**) se as combinações lineares de elementos da forma $A^k {A^*}^l u\, (k, l \in \mathbb{N})$ constituirem parte densa de $\mathcal{H}$ (ou seja se aqueles elementos gerarem um subespaço denso de $\mathcal{H}$).*

PROPOSIÇÃO 5.1: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador normal e $u \in \mathcal{H}$ vector cíclico para A; então existe um operador unitário único:***

$$\bullet\ \boldsymbol{U : \mathcal{H} \to L^2(\sigma(A), d\mu_u)},$$

tal que:

$$\bullet\ \boldsymbol{Uu \equiv 1}$$
$$\bullet\ \boldsymbol{(UAU^{-1}g)(\lambda) = \lambda g(\lambda)\ p.p.\text{–}\mu_u\,,\ \forall g \in L^2(\sigma(A), d\mu_u)}.$$

Ou seja, em particular, todo o operador normal com vector cíclico é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação pela função identidade no espaço L^2 do respectivo espectro, com a medida espectral associada ao vector cíclico.

[75]Os funcionais *positivos* sobre $C(X)$, X espaço topológico compacto, ou seja, os que associam valores não negativos a funções não negativas, são sempre *contínuos*, como é fácil concluir [exercício]..

Demonstração: Se U for operador unitário nas condições da Proposição ter--se-á (representando por T_g o operador de multiplicação por g em L^2):

$$\bullet \begin{cases} (UAU^{-1})^* = (U^{-1})^* A^* U^* = UA^*U^{-1} \\ (UAU^{-1})^* = (T_{\widehat{\lambda}})^* = T_{\overline{\widehat{\lambda}}} \end{cases}$$

(como é fácil concluir; *cf.* exercício 5[76]), donde $UA^*U^{-1} = T_{\overline{\widehat{\lambda}}}$ e portanto:

$$\forall v \in \mathcal{H} : \begin{cases} UAv = \widehat{\lambda}\, Uv \\ UA^*v = \overline{\widehat{\lambda}}\, Uv \end{cases} \Rightarrow UA^k {A^*}^l u \equiv \lambda^k \overline{\lambda}^l, \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

Atendendo a que u é vector cíclico, U fica determinado pelos valores que toma em combinações lineares de elementos da forma $A^k {A^*}^l u\, (k, l \in \mathbb{N})$, o que demonstra a *unicidade*. Note-se ainda que se $g \in C(\sigma(A))$, g é limite uniforme de polinómios P_n em λ e $\overline{\lambda}$ (atendendo ao Teorema de Stone-weierstrass) e portanto, pelo Teorema 4.7, $\Phi_A(g)\, u$ é limite em $\mathcal{H}$ de combinações lineares de elementos da forma $A^k {A^*}^l u\, (k, l \in \mathbb{N})$; então, a existir U nas condições do Teorema, deverá ter-se:

$$U\Phi_A(g)\, u = U(\lim_n \Phi_A(P_n)\, u) = \lim_n U\Phi_A(P_n)\, u = \lim_n P_n = g$$

(já que g é limite uniforme, e portanto limite L^2, dos P_n).

Para demonstrar a *existência* comecemos por *definir* U nos elementos de $\mathcal{H}$ da forma $\Phi_A(g)\, u\, (g \in C(\sigma(A)))$ que constituem subespaço denso de $\mathcal{H}$, já que u é vector cíclico. As considerações anteriores levam-nos a pôr:

$$\bullet\; U\Phi_A(g)\, u = g\,, \forall g \in C(\sigma(A));$$

mostremos que U fica assim bem definido nestes elementos. Se:

$$\Phi_A(g)\, u = \Phi_A(h)\, u \;\; (g, h \in C(\sigma(A)))$$

ter-se-á:

$$\Phi_A(g - h)\, u = \Phi_A(g)\, u - \Phi_A(h)\, u = 0;$$

ora:

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{L^2(\sigma(A), d\mu_u)} &= \int_{\sigma(A)} |f|^2\, d\mu_u = (\Phi_A(|f|^2)\, u, u) = (\Phi_A(f\overline{f})\, u, u) = \\ &= (\Phi_A(\overline{f})\Phi_A(f)\, u, u) = (\Phi_A(f)\, u, \Phi_A(\overline{f})^* u) = \\ &= (\Phi_A(f)\, u, \Phi_A(\overline{\overline{f}})\, u) = \|\Phi_A(f)\, u\|^2\,, \forall f \in C(\sigma(A)), \end{aligned}$$

donde, em particular:

[76] Utiliza-se também o facto elementar de $(AB)^* = B^*A^*$ para operadores lineares contínuos entre espaços de Hilbert distintos.

$$\|g-h\|_{L^2(\sigma(A),d\mu_u)} = \|\Phi_A(g-h)\,u\| = 0 \Rightarrow g = h \ p.p.\text{–}\mu_u.$$

Simultaneamente acabámos de demonstrar que U é *isometria* no subespaço constituído pelos elementos da forma $\Phi_A(g)\,u$, com *imagem* $R(U)$ igual a $C(\sigma(A))$, parte *densa* de $L^2(\sigma(A), d\mu_u)$ (visto μ_u ser medida borelians *regular*). Então U estende-se a $\mathcal{H}$ como *operador unitário sobre* $L^2(\sigma(A), d\mu_u)$, que designaremos também por U; é óbvio que:

$$\bullet\; Uu = U\Phi_A(1)\,u \equiv 1,$$

e:

$$UA\Phi_A(g)\,u = U\Phi_A(\widehat{\lambda})\Phi_A(g)\,u = U\Phi_A(\widehat{\lambda}g)\,u = \widehat{\lambda}\,g\,,\ \forall g \in C(\sigma(A)),$$

ou seja:

$$\bullet\; UAU^{-1}g = \widehat{\lambda}g\,,\ \forall g \in C(\sigma(A)).$$

Sendo $C(\sigma(A))$ denso em $L^2(\sigma(A), d\mu_u)$, concluímos que a igualdade vale em todo o espaço, por continuidade de UAU^{-1} e $T_{\widehat{\lambda}}$.$\square$

Este resultado constitui uma das formas do *Teorema espectral para operadores normais limitados*, no caso de existir vector cíclico.

5.3 Caso geral

No caso geral, podemos "proceder por indução"; começa-se por considerar o subespaço fechado $\mathcal{H}_1$ gerado pelos elementos de $\mathcal{H}$ da forma $A^k {A^*}^l u\,(k, l \in \mathbb{N})$, ou seja, o fecho do conjunto $\{\Phi_A(g) : g \in C(\sigma(A))\}$, em que u é elemento não nulo de $\mathcal{H}$ arbitrariamente fixado. É fácil verificar que $\mathcal{H}_1$ é invariante por A e A^*, ou seja, $A\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$, $A^*\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_1$ [exercício], bem como $\mathcal{H}_1^\perp$, pois se $v \in \mathcal{H}_1^\perp$, tem-se:

$$(w, Av) = (A^*w, v) = 0\,,\ \forall w \in \mathcal{H}_1,$$

já que, nesse caso, $A^*w \in \mathcal{H}_1$; portanto, de facto, $Av \in \mathcal{H}_1^\perp$ e, de modo análogo, $A^*v \in \mathcal{H}_1^\perp$. Então, escolhendo $v \in \mathcal{H}_1^\perp \setminus \{0\}$ (no caso de $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}$), podemos construir $\mathcal{H}_2$ por processo análogo "e assim sucessivamente…"; em $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, etc., às restrições respectivas de A, podemos aplicar a Proposição anterior. Se conseguirmos assim decompor $\mathcal{H}$ numa soma ortogonal de espaços invariantes por A e A^*, cada um com vector cíclico relativamente à respectiva restrição de A, poderemos "colar" os resultados de equivalência unitária válidos em cada subespaço e obter uma equivalência unitária com operador de produto em certo L^2, para o operador A inicial. Para formalizarmos este processo, convém introduzir a seguinte noção:

DEFINIÇÕES: *Uma família* $(u_\alpha)_{\alpha\in J}$ *num espaço normado diz-se* ***somável*** *se, ordenando por inclusão o conjunto* $\mathcal{F}$ *das partes finitas de* J*, existir o limite (no* *espaço) da rede (sucessão generalizada):*

$$\bullet \Big(\sum_{\alpha\in F} u_\alpha\Big)_{F\in\mathcal{F}};$$

nesse caso, chamamos **soma** *da família* $(u_\alpha)_{\alpha\in J}$ *ao elemento do espaço:*

$$\bullet \sum_{\alpha\in J} u_\alpha = \lim_{F\in\mathcal{F}} \sum_{\alpha\in F} u_\alpha .$$

$(u_\alpha)_{\alpha\in J}$ *diz-se* ***absolutamente somável*** *se for somável em* $\mathbb{R}$ *a família* $(\|u_\alpha\|)_{\alpha\in J}$ *e diz-se* ***de quadrado somável*** *se for somável em* $\mathbb{R}$ *a família* $(\|u_\alpha\|^2)_{\alpha\in J}$

Muitas propriedades conhecidas das séries se estendem a famílias somáveis. Toda a família *absolutamente somável* num *espaço de Banach* é somável e num espaço de dimensão finita os conceitos são equivalentes [exercício]. Para uma família em $[0,+\infty[$, ser somável é equivalente a existir um majorante para as somas finitas e, representando por $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ uma tal família:

$$\sum_{\alpha\in J} x_\alpha = \sup_{F\in\mathcal{F}} \Big(\sum_{\alpha\in F} x_\alpha\Big)$$

[exercício]. Muitas outras propriedades elementares das famílias somáveis se deduzem facilmente das definições e das propriedades das redes em espaços normados (critérios de comparação, de Cauchy, etc.). É fácil verificar que para toda a família de termos positivos somável ou de quadrado somável (e portanto para toda a família absolutamente somável ou de quadrado somável) o conjunto dos índices correspondentes a termos não nulos tem cardinalidade no máximo *numerável*; a respectiva soma é portanto soma de uma *série*.

No quadro dos espaços de Hilbert tem particular importância a noção de família *de quadrado somável*; com efeito, se os termos da família $(u_\alpha)_{\alpha\in J}$ no espaço *de Hilbert* $\mathcal{H}$ forem *dois a dois ortogonais*, é fácil ver que *a família é somável sse for de quadrado somável*. Basta notar que, para qualquer soma finita de termos da família, o quadrado da norma é dado pela soma dos quadrados das normas das parcelas, pelo que família $(u_\alpha)_{\alpha\in J}$ satisfaz ao critério de Cauchy sse o mesmo se passar com a família $(\|u_\alpha\|^2)_{\alpha\in J}$ [exercício] (*cf.* exercício 106) *infra*).

DEFINIÇÃO: *Um espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$ *diz-se* ***soma ortogonal*** *de uma família de subespaços* $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J}$ *(dita* ***decomposição ortogonal*** *de* $\mathcal{H}$*) e escreve-se:*

$$\bullet\ \mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha\in J} \mathcal{H}_\alpha ,$$

se:

- $\mathcal{H}_\alpha \perp \mathcal{H}_{\alpha'}$, $\forall \alpha,\alpha' \in J, \alpha\neq\alpha'$,
- $\mathcal{H}_\alpha$ *é subespaço fechado e não nulo de* $\mathcal{H}$, $\forall\alpha\in J$,
- $\forall u\in\mathcal{H}, \exists (u_\alpha)_{\alpha\in J} : u_\alpha\in\mathcal{H}_\alpha$, $\forall\alpha\in J, u=\sum_{\alpha\in J} u_\alpha$.

Para que uma família de subespaços fechados ortogonais não nulos $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J}$ constitua decomposição ortogonal de $\mathcal{H}$, é condição necessária e suficiente que $\bigcup\limits_{\alpha\in J} \mathcal{H}_\alpha$ gere um espaço denso em $\mathcal{H}$ [exercício].

DEFINIÇÃO: *Chamamos **soma hilbertiana** de uma família $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J}$ de espaços de Hilbert ao espaço de Hilbert:*

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha\in J} \mathcal{H}_\alpha = \{(u_\alpha)_{\alpha\in J} : u_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha, \forall\alpha \in J, \sum_{\alpha\in J} \|u_\alpha\|^2 < +\infty\}$$

com o produto interno:

$$(u, v) = ((u_\alpha)_{\alpha\in J}, (v_\alpha)_{\alpha\in J}) = \sum_{\alpha\in J} (u_\alpha, v_\alpha),$$

$\forall u = (u_\alpha)_{\alpha\in J}, v = (v_\alpha)_{\alpha\in J} \in \bigoplus\limits_{\alpha\in J} \mathcal{H}_\alpha.$

É fácil ver que o produto interno está bem definido e que $\mathcal{H}$ é, de facto, espaço de Hilbert. A notação utilizada é coerente com a anterior, *a menos de isomorfismo*, pois é fácil verificar que *uma família de subespaços fechados de $\mathcal{H}$ não nulos $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J}$ é decomposição ortogonal de $\mathcal{H}$ sse a aplicação:*

$$(u_\alpha)_{\alpha\in J} \mapsto \sum_{\alpha\in J} u_\alpha$$

for isomorfismo de espaços de Hilbert entre a soma hilbertiana $\bigoplus\limits_{\alpha\in J} \mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{H}$.

Temos então:

LEMA: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert não nulo e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador normal; então existe uma decomposição ortogonal de $\mathcal{H}$, $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J}$, tal que cada $\mathcal{H}_\alpha$ é invariante para A e A^* e em cada $\mathcal{H}_\alpha$ $(\alpha \in J)$ existe vector cíclico u_α relativamente a $A_\alpha = A_{/\mathcal{H}_\alpha}$. Se $\mathcal{H}$ for separável podemos tomar $J \subset \mathbb{N}_1$.***

Demonstração: Formalizando o processo de indução atrás esboçado, utilizaremos o lema de Zorn. Seja $\mathcal{X}$ um conjunto de cardinalidade superior à de uma base hilbertiana de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{F}$ o conjunto, parcialmente ordenado por inclusão, das famílias ortogonais de subespaços fechados não nulos de $\mathcal{H}$, $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J}$, onde $J \subset \mathcal{X}$, cada $\mathcal{H}_\alpha$ é invariante para A e A^* e existe em cada $\mathcal{H}_\alpha$ vector cíclico u_α para $A_\alpha = A_{/\mathcal{H}_\alpha}$. $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pois podemos considerar um subespaço $\mathcal{H}_1$ construído como no início da secção, a partir de um vector $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ e considerar a família $\{(\alpha, \mathcal{H}_1)\}$ (onde α é um elemento qualquer de $\mathcal{X}$, o qual tem pelo menos dois elementos…). Se $\mathcal{T}$ for uma parte totalmente ordenada de $\mathcal{F}$ é fácil concluir que $\bigcup \mathcal{T} \in \mathcal{F}$ — tratar-se-á de uma família indiciada na união dos conjuntos de índices dos elementos de $\mathcal{T}$, parte ainda de $\mathcal{X}$, satisfazendo às condições definidoras de $\mathcal{F}$, já que estas dependem apenas do confronto de, no máximo, dois termos da família que vão ser termos de certa família pertencente a $\mathcal{F}$, visto tratar-se de cadeia!

$\mathcal{F}$ é portanto *indutivo*, o que permite concluir que tem elemento maximal (Lema de Zorn) — certa famíla $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J}$. Provemos que:

$$\bullet\, \mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha\in J} \mathcal{H}_\alpha;$$

como atrás foi referido, basta verificar que o espaço gerado por $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{J}} \mathcal{H}_\alpha$ é denso em $\mathcal{H}$, ou seja, que:

$$\Big(\bigcup_{\alpha\in \mathrm{J}} \mathcal{H}_\alpha\Big)^{\perp} = \{0\}.$$

Suponhamos que $u \in \mathcal{H}_\alpha^{\perp}, \forall \alpha \in J$; se $u \neq 0$ poderíamos construir:

$$\mathcal{H}_1 = \text{ader}\,\{\Phi_A(g)\,u : g \in C(\sigma(A))\}$$

e, pelo que atrás se viu, tomando $\beta \in \mathcal{X} \setminus J$, a família:

$$(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J} \cup \ \{(\beta, \mathcal{H}_1)\}$$

estaria em $\mathcal{F}$, contradizendo o facto de $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J}$ ser maximal. Logo $u = 0$ e, de facto,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha\in J} \mathcal{H}_\alpha.$$

Note-se que $\mathcal{X} \setminus J \neq \emptyset$, já que J não pode ter cardinalidade superior à de uma base hilbertiana de $\mathcal{H}$, visto os $\mathcal{H}_\alpha$ serem ortogonais dois a dois e não nulos.

Finalmente, se $\mathcal{H}$ for separável, qualquer base hilbertiana é numerável ou finita, donde J é, no máximo, numerável, pelo que podemos reindiciar a família numa parte de $\mathbb{N}_1$.☐

TEOREMA 5.2 (Teorema espectral para operadores normais limitados — — "versão operador de multiplicação"): ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert não nulo e $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operador normal; então existe um espaço métrico localmente compacto M, uma medida positiva regular μ sobre M e uma função contínua limitada $F : M \to \mathbb{C}$ tal que A é unitariamente equivalente ao operador de multiplicação por F em $L^2(M, d\mu)$, satisfazendo a:***

$$\bullet\, UAU^{-1}g = F.g\,,\ \forall g \in L^2(M, d\mu);$$

além disso, podemos tomar M igual a uma união disjunta de partes homeomorfas a compactos de $\mathbb{C}$, de tal maneira que F composta com cada homeomorfismo coincida com a função identidade no respectivo compacto de $\mathbb{C}$. Finalmente, se $\mathcal{H}$ for separável, podemos tomar μ finita.

Ou seja, em particular, todo o operador normal limitado num espaço de Hilbert é unitariamente equivalente a um operador de multiplicação por uma função complexa limitada num espaço L^2.

Demonstração: Consideremos a decomposição ortogonal $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in J}$ de $\mathcal{H}$ dada pelo Lema e seja μ_{u_α} a medida espectral associada a u_α (vector cíclico) e ao operador normal, em $\mathcal{H}_\alpha$, $A_\alpha = A_{/\mathcal{H}_\alpha}$. Seja:

$$\bullet\ M = \bigcup_{\alpha\in J} \sigma(A_\alpha) \times \{\alpha\}.$$

É fácil verificar que é *distância* em M a aplicação $d : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que:

$$d((\lambda,\alpha),(\nu,\beta)) = \begin{cases} |\lambda-\mu| & \text{se } \alpha=\beta \\ \|A\|+1 & \text{se } \alpha\neq\beta \end{cases},$$

$\forall \alpha,\beta \in J, \lambda \in \sigma(A_\alpha), \nu \in \sigma(A_\beta)$. Cada $\sigma(A_\alpha) \times \{\alpha\}$ é simultaneamente aberto e fechado e a aplicação:

$$h_\alpha : \lambda \mapsto (\lambda,\alpha)$$

é homeomorfismo de $\sigma(A_\alpha)$ sobre $\sigma(A_\alpha) \times \{\alpha\}$, o que mostra que M é espaço métrico *localmente compacto* e união disjunta de partes homeomorfas a compactos de $\mathbb{C}$. Pela Proposição 5.1 sabemos que para cada $\alpha \in J$ existe um operador unitário:

$$U'_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to L^2(\sigma(A_\alpha), d\mu_{u_\alpha}),$$

tal que:

$$U'_\alpha A_\alpha {U'_\alpha}^{-1} g = \widehat{\lambda}\, g\,,\ \forall g \in L^2(\sigma(A_\alpha), d\mu_{u_\alpha}).$$

Podemos *transportar* μ_{u_α} para $\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\}$ através do homeomorfismo h_α, pondo:

$$\mu_\alpha(\Omega \times \{\alpha\}) = \mu_{u_\alpha}(\Omega)\,,\ \forall \Omega \text{ boreliano de } \sigma(A_\alpha),$$

o que induz um isomorfismo (unitário) entre os espaços $L^2(\sigma(A_\alpha), d\mu_{u_\alpha})$ e $L^2(\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\}, d\mu_\alpha)$, que a g faz corresponder $g \circ h_\alpha^{-1}$. Designaremos por U_α a composição desse isomorfismo com U'_α. Defina-se agora uma medida μ sobre M, pondo:

$$\mu(\Omega) = \sum_{\alpha\in J} \mu_\alpha(\Omega \cap (\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\})),$$

para cada boreliano Ω de M (considerando os borelianos como os elementos do σ-anel gerado pelos compactos). É fácil verificar que se trata de medida boreliana *regular*, visto cada μ_α o ser [exercício]; também se conclui facilmente que uma função g está em $L^2(M, d\mu)$ sse:

$$g_\alpha = g_{/\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\}} \in L^2(\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\}, d\mu_\alpha)\,,\ \forall \alpha \in J$$

e:

$$\sum_{\alpha\in J}\|g_\alpha\|^2_{L^2(\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\},d\mu_\alpha)}<+\infty$$

[exercício].

Designando por $\widetilde{g}_\alpha$ a extensão por zero de g_α a M (para $g_\alpha\in L^2(\sigma(A_\alpha)\times$ $\times\{\alpha\},d\mu_\alpha)$, concluímos então que a aplicação:

$$g\mapsto(g_\alpha)_{\alpha\in J}\;(=(g_{/\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\}})_{\alpha\in J}),$$

de inversa:

$$(g_\alpha)_{\alpha\in J}\mapsto\sum_{\alpha\in J}\widetilde{g}_\alpha,$$

é isomorfismo de espaços de Hilbert entre $L^2(M,d\mu)$ e a soma hilbertiana:

$$\bigoplus_{\alpha\in J}L^2(\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\},d\mu_\alpha).$$

Obtemos assim um operador unitário, pondo:

$$\bullet\, U:\mathcal{H}=\bigoplus_{\alpha\in J}\mathcal{H}_\alpha\to L^2(M,d\mu)$$
$$\bullet\, u=\sum_{\alpha\in J}u_\alpha\mapsto Uu=\sum_{\alpha\in J}(U_\alpha u_\alpha)^\sim;$$

note-se que a família $(U_\alpha u_\alpha)_{\alpha\in J}$ é, de facto, de quadrado somável em $L^2(M,d\mu)$, já que:

$$\sum_{\alpha\in J}\|(U_\alpha u_\alpha)^\sim\|^2_{L^2(d\mu)}=\sum_{\alpha\in J}\|U_\alpha u_\alpha\|^2_{L^2(d\mu_\alpha)}=\sum_{\alpha\in J}\|u_\alpha\|^2=\|u\|^2<+\infty.$$

Conclui-se agora facilmente que U é, de facto, unitário, tendo-se:

$$\begin{aligned}UAU^{-1}g\,(\lambda,\beta)&=(UAU^{-1}\sum_{\alpha\in J}g.\chi_{\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\}})\,(\lambda,\beta)=\\&=(UA\sum_{\alpha\in J}U_\alpha^{-1}g_\alpha)\,(\lambda,\beta)=(U\sum_{\alpha\in J}A_\alpha U_\alpha^{-1}g_\alpha)\,(\lambda,\beta)=\\&=(\sum_{\alpha\in J}(U_\alpha A_\alpha U_\alpha^{-1}g_\alpha)^\sim)\,(\lambda,\beta)=U_\beta A_\beta U_\beta^{-1}g_\beta(\lambda,\beta)=\\&=\lambda g(\lambda,\beta)\end{aligned}$$

(onde $g_\alpha=g_{/\sigma(A_\alpha)\times\{\alpha\}},\forall\alpha\in J$), $\forall g\in L^2(M,d\mu)$, $p.p.\text{–}d\mu$ [exercício: justificar *cuidadosamente* todas as igualdades].

Então, definindo:

$$\bullet\, F:M\to\mathbb{C}$$
$$\bullet\,(\lambda,\alpha)\mapsto F(\lambda,\alpha)=\lambda$$

$(\alpha\in J,\lambda\in\sigma(A_\alpha))$, F é *contínua* e *limitada*, e, pelo que acabámos de ver:

$$UAU^{-1}g = Fg.$$

Finalmente, se $\mathcal{H}$ for separável e $J = \mathbb{N}_1$, podemos tomar os vectores cíclicos u_n tais que:

$$\|u_n\|^2 = \frac{1}{2^n} \ (n \in \mathbb{N}_1),$$

donde:

$$\mu(M) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \mu_n(\sigma(A_n) \times \{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} (\Phi_{A_n}(1)\, u_n, u_n) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \|u_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \frac{1}{2^n} = 1;$$

se J for finito, é óbvio que podemos também tomar μ finita; nesse caso M é compacto.□

Note-se que, trivialmente, o operador T_F de multiplicação por uma função $F : M \to \mathbb{C}$ *mensurável limitada* ((M, μ) espaço de medida) é *normal limitado* em $L^2(M, d\mu)$, tendo-se $(T_F)^* = T_{\overline{F}}$. O Teorema anterior garante que *a menos de equivalência unitária* os operadores T_F *esgotam* a classe dos operadores normais limitados. Servir-nos-emos deste resultado para obter caracterização semelhante para os operadores auto-adjuntos *não necessariamente limitados*. Antes, porém, convém generalizar a operadores não limitados as noções de espectro e resolvente, bem como certas propriedades destes conceitos, e caracterizar os espectros dos operadores de multiplicação.

Exercícios

105) Mostre que uma família $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ de reais não negativos é somável sse for *limitado* o conjunto das somas *finitas*:

$$S = \{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha : F \subset J, \#F \in \mathbb{N}\},$$

tendo-se, nesse caso:

$$\sum_{\alpha\in F} x_\alpha = \sup S.$$

Deduza deste resultado um *princípio de comparação* para famílias absolutamente somáveis em espaços normados.

106) Diz-se que uma família $(u_\alpha)_{\alpha\in J}$ no espaço normado E satisfaz ao critério de Cauchy se $\forall\delta > 0, \exists J_0$ finito, $J_0 \subset J$ tal que:

$$K \text{ finito}, K \subset J \setminus J_0 \Rightarrow \Big\|\sum_{\alpha \in K} u_\alpha\Big\| < \delta.$$

Mostre que:

a) $(u_\alpha)_{\alpha \in J}$ satisfaz ao critério de Cauchy sse $\forall \delta > 0, \exists J_0$ finito, $J_0 \subset J$, $u_0 \in E$, tais que:

$$\sup_{\substack{J_0 \subset J_1 \subset J \\ J_1 \text{ finito}}} \Big\|\sum_{\alpha \in J_1} u_\alpha - u_0\Big\| < \delta.$$

b) Toda a família somável satisfaz ao critério de Cauchy.

c) Se E for espaço de Banach, toda a família que satisfaça ao critério de Cauchy é somável.

d) Se E for espaço de Banach, toda a família *absolutamente somável* é *somável*.

e) Se $\mathcal{H}$ for espaço de Hilbert, uma família de elementos dois a dois ortogonais é somável sse for de quadrado somável.

107) a) Seja E espaço normado de *dimensão finita*; mostre que toda a família somável em E é *absolutamente somável*.

b) Mostre, com um contra-exemplo, que a hipótese da dimensão finita não pode ser retirada na alínea anterior [Sugestão: Pode tentar encontrar um contra-exemplo em $C([0,1])$].

108) Mostre que, para toda a família *absolutamente somável* $(u_\alpha)_{\alpha \in J}$ no espaço normado E, existe um conjunto finito ou numerável $J_0 \subset J$ tal que $u_\alpha = 0$, $\forall \alpha \in J \setminus J_0$. Que pode concluir quanto às famílias de quadrado somável em espaços de Hilbert?

109) Dada uma família de subespaços fechados de $\mathcal{H}$ mutuamente ortogonais e não nulos $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha \in J}$, mostre que se trata de decomposição ortogonal de $\mathcal{H}$ sse $\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{H}_\alpha$ gerar uma parte densa de $\mathcal{H}$.

110) a) Verifique que a *soma hilbertiana* de espaços de Hilbert é, de facto, espaço de Hilbert.

b) Mostre que uma família de subespaços fechados não nulos de $\mathcal{H}$, $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha \in J}$, é decomposição ortogonal de $\mathcal{H}$ sse a aplicação:

$$\bullet\ (u_\alpha)_{\alpha \in J} \mapsto \sum_{\alpha \in J} u_\alpha$$

for *isomorfismo de espaços de Hilbert* entre a soma hilbertiana $\bigoplus_{\alpha \in J} \mathcal{H}_\alpha$ e $\mathcal{H}$.

111) Seja $(K_\alpha)_{\alpha\in J}$ família de compactos mutuamente disjuntos, μ_α medida boreliana regular sobre $K_\alpha, \forall\alpha \in J$. Seja $M = \bigcup_{\alpha\in J} K_\alpha$ com a topologia final das aplicações:

$$\begin{gathered} i_a : K_\alpha \to M \\ k \mapsto i_\alpha(k) = k, \end{gathered}$$

e:

$$\mu_\alpha(\Omega) = \sum_{\alpha\in J} \mu_\alpha(\Omega \cap K_\alpha)\,,\ \forall\alpha \in \mathrm{Bor}\,(M).$$

Mostre que:

a) M é *localmente compacto* e μ está bem definida como *medida boreliana regular* sobre M (com a definição de boreliano enquanto elemento do σ-anel gerado pelos compactos, pois caso contrário apenas vale a regularidade interior) .

b) $g \in L^2(M, d\mu)$ sse $g_\alpha = g_{/K_\alpha} \in L^2(K_\alpha, d\mu)$ e:

$$\bullet \sum_{\alpha\in J} \|g_\alpha\|^2_{L^2(K_\alpha, d\mu_\alpha)} < +\infty;$$

além disso, a aplicação $g \mapsto (g_\alpha)_{\alpha\in J}$ é *unitária* de $\mathrm{L}^2(M, d\mu)$ sobre $\bigoplus_{\alpha\in J} L^2(M_\alpha, d\mu_\alpha)$. Determine a respectiva inversa.

c) Se, para cada $\alpha \in J$,

$$U_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to L^2(K_\alpha, d\mu_\alpha)$$

for *unitário* ($\mathcal{H}_\alpha$ espaço de Hilbert), então o operador:

$$\begin{gathered} U : \bigoplus_{\alpha\in J} \mathcal{H}_\alpha \to L^2(M, d\mu) \\ (u_\alpha)_{\alpha\in J} \mapsto U((u_\alpha)_{\alpha\in J}) = g, \end{gathered}$$

onde:

$$\bullet\ g(m) = (U_\alpha u_\alpha)(m)\,,\ \forall m \in K_\alpha, \alpha \in J,$$

é *unitário*.

d) Aplique a alínea anterior à justificação cuidadosa da construção efectuada na demonstração do Teorema 5.2.

Capítulo 6

Espectro e resolvente de operadores fechados em espaços de Banach

6.1 Operadores fechados em espaços de Banach; espectro e resolvente; propriedades

Seja E espaço de Banach; tal como no caso dos espaços de *Hilbert*, um operador *linear*:

$$\bullet\ A : D(A) \subset E \to E$$

($D(A)$ subespaço vectorial de E) diz-se ***fechado*** se o respectivo *gráfico*:

$$\mathcal{G}(A) = \{\langle u, Au\rangle : u \in D(A)\}$$

(ou seja, o próprio A, com a definição habitual de "função") for subespaço *fechado* de $E \times E$. Nesse caso, designa-se por ***resolvente* de $\boldsymbol{A}$** *o conjunto $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ dos números complexos λ tais que $A - \lambda I$ é bijecção de $D(A)$ sobre E* (generalização óbvia da noção de *resolvente* de operador linear contínuo em E). Atendendo ao *Teorema do gráfico fechado* é fácil concluir que $\lambda \in \rho(A)$ sse $A - \lambda I$ tiver *inverso contínuo com domínio denso em E* [77]. Designa-se por ***espectro de A*** o conjunto:

$$\bullet\ \sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Se $\lambda \in \rho(A)$, chamamos ***operador resolvente*** ao operador de $\mathcal{L}(E)$:

$$\bullet\ R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}.$$

Adaptando as demonstrações das Proposições 2.2, 2.3, conclui-se facilmente que se $\lambda \in \rho(A)$ e:

[77] É com esta formulação que a noção de resolvente se estende a operadores *não necessariamente fechados* em espaços *normados* quaisquer; note-se que, se A não for fechado, $A - \lambda I$ nunca pode ter inverso *contínuo* com domínio *igual* a E [porquê?].

$$\bullet\ |\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R_\lambda\|},$$

então:

$$\bullet\ \mu \in \rho(A),$$

e:

$$\|R_\mu\| \le \frac{\|R_\lambda\|}{1 - |\mu - \lambda|\|R_\lambda\|};$$

com efeito, $\forall u \in E$:

$$\begin{aligned}(A - \mu I)R_\lambda u &= ((A - \lambda I) + (\lambda - \mu)I)R_\lambda u = \\ &= u + (\lambda - \mu)R_\lambda u = (I - (\mu - \lambda)R_\lambda)u\,(= \\ &= R_\lambda(A - \mu I)u, \text{se } u \in D(A));\end{aligned}$$

como $\|(\mu - \lambda)R_\lambda\| = |\mu - \lambda|\|R_\lambda\| < 1$, concluímos que $(A - \mu I)R_\lambda$ $(= R_\lambda.$ $.(A - \mu I)$ em $D(A))$ é *invertível* em $\mathcal{L}(E)$, sendo o inverso dado pela série de Neumann:

$$\begin{aligned}&\bullet\ ((A - \mu I)R_\lambda)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu - \lambda)^n R_\lambda^n \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\|((A - \mu I)R_\lambda)^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - |\mu - \lambda|\|R_\lambda\|}.\end{aligned}$$

Como R_λ é bijecção de E sobre $D(A)$, concluímos então que $A - \mu I$ é *bijecção de $D(A)$ sobre E, de inverso* $R_\lambda((A - \mu I)R_\lambda)^{-1}$; portanto, de facto, $\mu \in \rho(A)$ e:

$$\|R_\mu\| = \left\|R_\lambda((A - \mu I)R_\lambda)^{-1}\right\| \le \frac{\|R_\lambda\|}{1 - |\mu - \lambda|\|R_\lambda\|}.$$

Do que acima ficou exposto, conclui-se agora facilmente que, ainda no caso de A ser fechado *não necessariamente limitado*, $\rho(A)$ *é aberto* (e portanto $\sigma(A)$ *fechado*) e os operadores resolventes R_λ satisfazem à *identidade da resolvente*:

(47) $$\bullet\ R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu\,,\ \forall \lambda, \mu \in \rho(A);$$

em particular, R_λ e R_μ *comutam* e a aplicação $\lambda \mapsto R_\lambda$ é *holomorfa* de $\rho(A)$ em $\mathcal{L}(E)$. Para demonstrar a continuidade, note-se que:

$$\|R_\lambda - R_\mu\| \le |\lambda - \mu|\|R_\lambda\|\|R_\mu\| \le \frac{|\lambda - \mu|\|R_\lambda\|^2}{1 - |\mu - \lambda|\|R_\lambda\|} \xrightarrow[\mu\to\lambda]{} 0$$

(para $\mu \in B(\lambda, 1/\|R_\lambda\|)$); a holomorfia resulta de raciocínios idênticos aos utilizados na demostração da Proposição 2.3. O que agora não podemos, em geral, garantir é que $\sigma(A) \ne \emptyset$ ou que $\sigma(A)$ seja *compacto* (pode não ser *limitado*!).

Se $\lambda \in \sigma(A)$, convém-nos distinguir o caso em que $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$; diz-se então que λ é ***valor próprio*** de A; designa-se por ***espectro pontual*** o conjunto $\sigma_P(A)$ dos valores próprios de A. Os vectores $u \in D(A)$, não nulos, tais que:

$$\bullet\ Au = \lambda u,$$

designam-se por ***vectores próprios*** (associados ao valor próprio λ), e o espaço vectorial $\ker(A - \lambda I)$ diz-se ***subespaço próprio*** associado a λ.

Se $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_P(A)$, necessariamente $R(A - \lambda I) \neq E$; se $\overline{R(A - \lambda I)} = E$, diz-se que λ está em $\sigma_C(A)$ — ***espectro contínuo*** de A. Se $\overline{R(A - \lambda I)} \neq E$ (ou seja $R(A - \lambda I)^\perp \neq \{0\}$, no caso em que E é espaço de Hilbert), diz-se que λ está em $\sigma_R(A)$ — ***espectro residual*** de A.

No caso particular em que E é um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, a teoria desenvolvida no Capítulo 1 permite deduzir as seguintes propriedades do espectro, cuja demonstração é deixada como exercício:

PROPOSIÇÃO 6.3: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador fechado, $D(A)$ denso em $\mathcal{H}$. Então:***

1. $\sigma(A^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}$;

2. $\sigma_P(A^*) \supset \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_R(A)\}$;

3. $\sigma_R(A^*) \subset \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_P(A)\} \subset \sigma_R(A^*) \cup \sigma_P(A^*)$;

4. $\sigma_C(A^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_C(A)\}$;

5. Se A for auto-adjunto, então $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ e $\sigma_R(A) = \emptyset$; em particular $\lambda \in \sigma(A)$ sse existir uma sucessão $u_n \in D(A)$ tal que $\|u_n\| = 1$ e

$$(A - \lambda I)\, u_n \xrightarrow[n]{} 0;$$

além disso:

$$\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{|\Im \lambda|}, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \square$$

Observação: Se $\lambda \in \mathbb{C}$ for tal que existe uma sucessão $u_n \in D(A)$ tal que $\|u_n\| = 1$ e

$$(A - \lambda I)\, u_n \xrightarrow[n]{} 0,$$

λ diz-se ***valor próprio generalizado*** do operador $A : D(A) \subset E \to E$; o ponto 5. da Proposição anterior pode assim exprimir-se dizendo que *os espectros dos operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert são inteiramente constituídos por valores próprios generalizados*.

6.2 Caso dos operadores de multiplicação

Consideremos agora o caso particular em que $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$, (M, μ) espaço de medida, e $A = T_F$, *operador de multiplicação* pela função:

$$F : M \to \mathbb{C},$$

mensurável, definido por:

- $D(T_F) = \{g \in L^2(M, \mu) : F.g \in L^2(M, d\mu)\}$,
- $T_F\, g = F.g.$

Já sabemos (*cf.* Capítulo 1) que se F for *real*, então T_F é auto-adjunto e no final do capítulo anterior notávamos que se F for *limitada* então T_F é *normal limitado* de adjunto $T_{\overline{F}}$. De modo geral, é fácil concluir que $D(T_F)$ é *denso* em $L^2(M, d\mu)$ (basta reproduzir a demonstração feita no Capítulo 1 para o caso real); calculemos o adjunto $(T_F)^*$ de T_F:

$$g \in D((T_F)^*) \Leftrightarrow g \in L^2(M, d\mu) \text{ e } \exists g^* \in L^2(M, d\mu) \text{ tal que:}$$

(48) $$\int_M F f \overline{g}\, d\mu = \int_M f \overline{g^*}\, d\mu\,,\ \forall f \in D(T_F).$$

Para concluirmos que, também neste caso, $(T_F)^* = T_{\overline{F}}$, há que demonstrar, em particular, que há coincidência dos respectivos domínios, sendo fácil concluir que:

$$D(T_{\overline{F}}) = D(T_F) \subset D((T_F)^*),$$

uma vez que, para $g \in D(T_{\overline{F}})$, a condição (48) é trivialmente satisfeita por $g^* = \overline{F} g$, tendo-se nesse caso, obviamente, $F^* g = \overline{F} g$. Para provar que tem lugar a inclusão inversa, basta demonstrar que para $g \in D((T_F)^*)$ se tem:

$$\overline{F} g \in L^2(M, d\mu),$$

ou seja, que:

$$|Fg|^2 \in L^1(M, d\mu).$$

Procuremos servir-nos de (48) para esse fim, uma vez que sabemos, por definição, que existe g^* em $L^2(M, d\mu)$ satisfazendo àquela condição; para "fazer aparecer" $|Fg|^2$ no primeiro membro de (48) bastaria tomar:

$$\text{“}f = \overline{F} g\text{”}$$

mas, infelizmente não podemos assegurar que esta função esteja em $D(T_F)$; podemos no entanto aproximá-la, facilmente, por funções naquele espaço. Com efeito, pondo, para cada $n \in \mathbb{N}_1$:

- $\chi_n = \chi_{\{m \in M : |F(m)| \leq n\}} = \chi_{[|F| \leq n]}$,
- $f_n = \overline{F} g\, \chi_n$,

é fácil concluir que $f_n \in D(T_F)$ (*cf.* Capítulo 1), pelo que, substituindo em (48), vem, $\forall n \in \mathbb{N}_1$:

$$\int_M F f_n \overline{g}\, d\mu = \int_M f_n \overline{g^*}\, d\mu \Rightarrow \int_M |Fg|^2\, \chi_n\, d\mu = \int_M \overline{F} g\, \chi_n \overline{g^*}\, d\mu =$$

$$= \overline{\int_M F \underbrace{\chi_n g^*}_{\in D(T_F)} \overline{g}\, d\mu} = \int_M \chi_n g^* \overline{g^*}\, d\mu = \int_M \chi_n |g^*|^2\, d\mu,$$

onde se utilizou novamente (48), agora para $f = \chi_n g^*$, elemento de $D(T_F)$, como facilmente se conclui. Temos assim, em particular, para cada $n \in \mathbb{N}_1$:

$$\int_M |Fg|^2\, \chi_n\, d\mu = \int_M \chi_n |g^*|^2\, d\mu,$$

o que nos permite aplicar o Teorema de Lebesgue no segundo membro, obtendo assim:

$$\int_M |Fg|^2\, \chi_n\, d\mu \underset{n}{\longrightarrow} \int_M |g^*|^2\, d\mu;$$

pelo Teorema de Beppo Levi concluímos agora que, de facto, $|Fg|^2 \in$ $\in L^1(M, d\mu)$, o que termina a determinação de $(T_F)^*$. Temos assim, de facto:

$$(T_F)^* = T_{\overline{F}};$$

em particular, $T_F\ (= (T_{\overline{F}})^*)$ é *fechado* e *normal*, no sentido em que:

$$T_F (T_F)^* = (T_F)^* T_F\ (= T_{|F|^2}).$$

Interessa-nos agora caracterizar o *espectro* de T_F, para o que convém introduzir a seguinte noção:

DEFINIÇÃO: *Seja* (M, μ) *espaço de medida e* $F : M \to \mathbb{C}$ *função mensurável; chamamos* ***imagem essencial*** *de* F[78] *ao conjunto:*

$$R_{ess}(F) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(F^{-1}(B(\lambda, \varepsilon))) \neq 0, \forall \varepsilon > 0\}.$$

PROPOSIÇÃO 6.4: ***Seja*** (M, μ) ***espaço de medida e*** $F : M \to \mathbb{C}$ ***função mensurável; então:***

1. $R_{ess}(F)$ ***é um fechado de*** $\mathbb{C}$ ***contido no fecho*** $\overline{R(F)}$ ***da imagem de*** F.

2. $\mu(F^{-1}(\mathbb{C} \setminus R_{ess}(F))) = 0$.

Demonstração: 1. Provemos que $\mathbb{C} \setminus R_{\mathrm{ess}}(F)$ é aberto; se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus R_{\mathrm{ess}}(F)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\mu(F^{-1}(B(\lambda, \varepsilon))) = 0,$$

---

[78] *cf.* exercício 65), Capítulo 2.

donde, se $\nu \in B(\lambda, \varepsilon)$, tomando $\varepsilon' > 0$ tal que $B(\nu, \varepsilon') \subset B(\lambda, \varepsilon)$, vem:

$$\mu(F^{-1}(B(\nu, \varepsilon'))) \leq \mu(F^{-1}(B(\lambda, \varepsilon))) = 0,$$

ou seja, $\nu \in \mathbb{C} \setminus R_{\text{ess}}(F)$. Portanto:

$$\bullet\ B(\lambda, \varepsilon) \subset \mathbb{C} \setminus R_{\text{ess}}(F),$$

que é assim, de facto, aberto.

Se $\lambda \in R_{\text{ess}}(F)$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, $F^{-1}(B(\lambda, 1/n)) \neq \emptyset$; tomando $x_n \in$ $\in F^{-1}(B(\lambda, 1/n))$, tem-se:

$$\bullet\ F(x_n) \in B(\lambda, \frac{1}{n}) \Rightarrow F(x_n) \underset{n}{\longrightarrow} \lambda,$$

o que demonstra 1.

2. É fácil verificar que $\mathbb{C} \setminus R_{\text{ess}}(F)$ é *união numerável* de discos $B(\lambda_n, \varepsilon_n)$ $(\varepsilon_n > 0, n \in \mathbb{N}_1)$, tais que:

$$\bullet\ \mu(F^{-1}(B(\lambda_n, \varepsilon_n))) = 0;$$

com efeito, basta tomar *todos* os discos de raio *racional* centrados em complexos de partes real e imaginária *racionais* para os quais vale esta propriedade . Então:

$$\mu(F^{-1}(\mathbb{C} \setminus R_{\text{ess}}(F))) = \mu\Big(F^{-1}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} B(\lambda_n, \varepsilon_n)\Big)\Big) =$$

$$= \mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} F^{-1}(B(\lambda_n, \varepsilon_n))\Big) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \mu(F^{-1}(B(\lambda_n, \varepsilon_n))) = 0. \square$$

PROPOSIÇÃO 6.5: ***Seja (M, μ) espaço de medida satisfazendo à propriedade:***

(P) Se $\Omega \subset M$, mensurável, tiver medida $\mu(\Omega) > 0$, então existe $\Omega' \subset \Omega$, mensurável, tal que $0 < \mu(\Omega') < +\infty$;

seja $F : M \longrightarrow \mathbb{C}$ mensurável. Então:

1. $\sigma(T_F) = R_{ess}(F)$;

2. $\sigma_P(T_F) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(F^{-1}(\lambda)) \neq 0\}$;

3. $\sigma_R(T_F) = \emptyset$.

Observação: 1) No caso em que M é espaço topológico localmente compacto e μ medida boreliana *regular* sobre M, (P) fica automaticamente satisfeita, já que:

$$\mu(\Omega) = \sup \{\mu(K) : K \subset \Omega, K \text{ compacto}\},$$

para todo o boreliano Ω de M, e as medidas dos compactos são finitas.

Demonstração da Proposição 6.5: 1. Se $\lambda \notin R_{\text{ess}}(F)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\bullet\ \mu(F^{-1}(B(\lambda, \varepsilon))) = 0,$$

ou seja:

$$\bullet\ |F(m) - \lambda| \geq \varepsilon\ ,\ p.p.\text{–}\mu,$$

e portanto, pondo:

$$\bullet\ G(m) = \begin{cases} \frac{1}{F(m)-\lambda} & \text{se } |F(m) - \lambda| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{se } |F(m) - \lambda| < \varepsilon \end{cases},$$

G é *mensurável limitada* e:

$$G.(F - \lambda) = 1\ ,\ p.p.\text{–}\mu.$$

Conclui-se daqui facilmente que:

$$\bullet\ T_G(T_F - \lambda I) = I_{D(T_F)}\ ,\ (T_F - \lambda I)T_G = I,$$

donde $\lambda \in \rho(T_F)$, ou seja, $\lambda \notin \sigma(T_F)$.

Reciprocamente, se $\lambda \in R_{\text{ess}}(F)$, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, $\mu(F^{-1}(B(\lambda, 1/n))) > 0$, donde, atendendo a (P), existe $\Omega_n \subset M$ mensurável, tal que:

$$\bullet\ 0 < \mu(\Omega_n) < +\infty,$$
$$\bullet\ |F(m) - \lambda| < \frac{1}{n}\ ,\ \forall m \in \Omega_n;$$

seja então:

$$g_n = \frac{\chi_{\Omega_n}}{\|\chi_{\Omega_n}\|_{L^2(M,d\mu)}} = \frac{\chi_{\Omega_n}}{\mu(\Omega_n)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(M, d\mu).$$

Tem-se:

$$\bullet\ \|g_n\|_{L^2(M,d\mu)} = 1$$

e:

$$\int_M |(F - \lambda)g_n|^2\, d\mu = \frac{1}{\mu(\Omega_n)} \int_{\Omega_n} |F(m) - \lambda|^2\, d\mu(m) \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n]{} 0,$$

ou seja:

$$g_n \in D(T_F), \|g_n\|_{L^2(M,d\mu)} = 1, \forall n \in \mathbb{N}_1, (T_F - \lambda)g_n \xrightarrow[n]{} 0 \text{ em } L^2(m, d\mu).$$

Daqui se conclui facilmente que $T_F - \lambda I$ não pode ter inverso contínuo, e portanto $\lambda \in \sigma(T_F)$.

2. Se $\lambda \in \sigma_P(T_F)$, existe $g \in D(T_F)$ tal que $g \neq 0$ e:

$$\bullet\ F.g = \lambda g,$$

donde:

$$F(m) = \lambda \text{ se } g(m) \neq 0;$$

como existe um conjunto de medida positiva em que g não se anula, concluímos que:

$$\mu(F^{-1}(\lambda)) \neq 0.$$

Reciprocamente, verificada esta condição, podemos considerar (atendendo a (P)) um conjunto mensurável $\Omega \subset M$ tal que:

$$\bullet\ 0 < \mu(\Omega) < +\infty$$
$$\bullet\ F(m) = \lambda, \forall m \in \Omega;$$

então:

$$F\chi_\Omega = \lambda\chi_\Omega \in L^2(M, d\mu)\,,\ \chi_\Omega \in D(T_F)\,,\ \chi_\Omega \neq 0,$$

donde:

$$\bullet\ \lambda \in \sigma_P(T_F).$$

3. Se $\lambda \in \sigma_R(T_F)$ sabemos, pela Proposição 6.3–2, que $\overline{\lambda} \in \sigma_P((T_F)^*) =$ $= \sigma_P(T_{\overline{F}})$, donde, por 2.:

$$\bullet\ \mu(\overline{F}^{-1}(\overline{\lambda})) \neq 0.$$

Mas

$$\overline{F}^{-1}(\overline{\lambda}) = F^{-1}(\lambda);$$

logo, por 2.:

$$\bullet\ \lambda \in \sigma_P(T_F),$$

o que é absurdo, e portanto, de facto, $\sigma_R(T_F) = \emptyset$.□

Observações: 2) Resulta, em particular, do ponto 2. da Proposição anterior que, nas condições da hipótese, T_F é *injectiva* sse $\mu(F^{-1}(0)) = 0$, ou seja sse $F \neq 0$ $p.p.$–$d\mu$, tendo-se, nesse caso [exercício], $(T_F)^{-1} = T_{F^{-1}}$ em que F^{-1} é qualquer prolongamento a M de $1/F$ (definida nos pontos em que F não se anula, e portanto $p.p.$–$d\mu$), função que se sabe ser mensurável.

3) Concluímos da Proposição anterior (ponto 3.) que, tal como os operadores auto-adjuntos, também os operadores *de multiplicação* não têm espectro residual; em particular, para tais operadores, os valores espectrais são exactamente os $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $A - \lambda I$ *não tem inverso contínuo* (independentemente do domínio), ou seja, são também todos *valores próprios generalizados* (*cf.* observação no final da secção anterior).

Pensemos agora no caso particular do operador T_F introduzido no Teorema 5.2; para esse operador, $R_{\text{ess}}(T_F)$ pode ser totalmente caracterizado a partir das medidas $(\mu_\alpha)_{\alpha\in J}$ — *família das medidas espectrais associada ao operador normal* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — ou seja, tal que A *é unitariamente equivalente ao "produto por* λ*" em cada* $L^2(\mathbb{C}, d\mu_\alpha)$ (estendendo cada μ_α por zero a $\mathbb{C}\setminus\sigma(A_\alpha)$). Para isso convém-nos introduzir o seguinte conceito:

DEFINIÇÃO: *Seja* M *espaço topológico localmente compacto e* $(\mu_\alpha)_{\alpha\in J}$ *família de medidas borelianas regulares sobre* M*, Chamamos* ***suporte da família*** *ao complementar* supp $((\mu_\alpha)_{\alpha\in J})$ *do maior aberto em que todas as medidas se anulam.*

Tem-se, obviamente:

$$\text{supp}\,((\mu_\alpha)_{\alpha\in J}) = \overline{\bigcup_{\alpha\in J} \text{supp}\,\mu_\alpha}.$$

É fácil agora concluir (sendo a demonstração deixada como exercício) que:

PROPOSIÇÃO 6.6: ***Seja*** $\mathcal{H}$ ***espaço de Hilbert,*** $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ***operador normal e*** $(\mu_\alpha)_{\alpha\in J}$ ***família de medidas espectrais associadas a*** A***; então:***

$$\sigma(A) = \textit{supp}\,((\mu_\alpha)_{\alpha\in J}).\square$$

Exercícios

112) Seja E espaço normado e T operador linear em E, ou seja, aplicação linear:

$$T : D(T) \subset E \to E,$$

$D(T)$ subespaço vectorial de E; diz-se que λ é *valor regular* de T sse $T-\lambda I$ tiver *inverso contínuo* com domínio *denso* em E. designamos por $\rho(T)$ (*resolvente de* T) o conjunto dos valores regulares de T, por $\sigma(T)$ (*espectro de* T) o conjunto $\mathbb{C}\setminus\rho(T)$ e por R_λ (*operador resolvente em* λ) o operador $(T-\lambda I)^{-1}$, contínuo, com domínio denso em E, para cada $\lambda \in$ $\in \rho(T)$.

a) Mostre que se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $T-\lambda I$ tem inverso contínuo, então, para qualquer $\mu \in B(\lambda, 1/\|R_\lambda\|)$, $T-\mu I$ tem inverso contínuo e $\overline{R(T-\mu I)}$ não é subespaço próprio de $\overline{R(T-\lambda I)}$; além disso:

$$\|R_\mu\| \leq \frac{\|R_\lambda\|}{1-|\mu-\lambda|\|R_\lambda\|}\,,\ \forall\mu\in B(\lambda,\frac{1}{\|R_\lambda\|})$$

[Sugestão: Para estabelecer a relação entre as imagens dos operadores $T-\mu I$ e $T-\lambda I$, comece por demonstrar o seguinte **Lema de Riesz:** ***"Se*** H ***for subespaço próprio e fechado de*** E***, então, para cada*** $\theta \in]0,1[$***, existe*** $u \in E$ ***tal que*** $\|u\| = 1$ ***e dist*** $(u, H) > \theta$***"***; supondo que

$\overline{R(T-\mu I)} \subsetneq \overline{R(T-\lambda I)}$, mostre que se chega a um absurdo considerando θ tal que:

$$|\lambda-\mu|\|R_\lambda\| < \theta < 1].$$

b) Conclua da alínea anterior que $\rho(T)$ é *aberto*.

c) Supondo que $R(T-\lambda I) = E$, $\forall \lambda \in \rho(T)$, mostre que a aplicação $\lambda \mapsto R_\lambda$ é analítica de $\rho(T)$ em E satisfazendo a:

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu\,,\ \forall \lambda, \mu \in \rho(T).$$

d) Se E for espaço de Banach e T fechável (ou seja, $\overline{\mathcal{G}(T)}$ é gráfico de certo operador $\overline{T}$), mostre que $\sigma(T) = \sigma(\overline{T})$.

113) Seja E espaço de Banach, T operador fechado em E com domínio $D(E)$ Mostre que se $\lambda \in \text{fr}\ (\sigma(T))$ e não é valor próprio de T, então, necessariamente, $(T-\lambda I)^{-1}$ não é contínuo [Sugestão: Suponha que $\lambda \in \overline{\rho(T)}$ e que $(T-\lambda I)^{-1}$ existe e é contínuo; mostre que $\lambda \in \rho(T)$, aproximando λ por uma sucessão λ_n em $\rho(T)$ para a qual R_{λ_n} seja de Cauchy em $\mathcal{L}(E)\ldots$].

114) Recorrendo às definições e propriedades demonstradas no Capítulo 1, demonstre a Proposição 6.3.

115) Seja A o operador definido no exercício 17) (Capítulo 1) (ou seja, $A = id/dx$ com domínio, em certo sentido, *maximal* em $L^2([0,1])$) e seja agora:

$$\bullet\ D(A_1) = \{u \in D(A) : u(0) = 0\}, A_1 u = i\frac{du}{dx}.$$

a) Mostre que A, A_1 são fechados com domínios densos em $L^2([0,1])$.

b) Determine os *espectros*, *espectros pontuais*, *contínuos* e *residuais* de A e A_1.

116) Sejam:

$$\bullet\ l_1 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_1} : \sum_{n\in\mathbb{N}_1} |x_n| < +\infty\},$$

$$\bullet\ l_\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_1} : \sup_{n\in\mathbb{N}_1} |x_n| < +\infty\},$$

com as normas, respectivamente:

$$\bullet\ \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} |x_n|,$$

$$\bullet\ \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}_1} |x_n|.$$

a) Verifique que se trata de espaços de Banach para as operações habituais e que a aplicação:

$$l_\infty \to (l_1)'$$
$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \mapsto L_x,$$

onde:

$$\bullet\ L_x((y_n)_{n\in\mathbb{N}_1}) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} x_n y_n,$$

está bem definida e é isomorfismo isométrico entre l_∞ e o dual topológico $(l_1)'$ de l_1.

b) Considere os operadores:

$$\bullet\ A : l_1 \to l_1$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \mapsto A((x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_1};$$
$$\bullet\ B : l_\infty \to l_\infty$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_1} \mapsto B((x_n)_{n\in\mathbb{N}_1}) = (0, x_1, \ldots, x_n, \ldots);$$

representando por $[x, y]$ a dualidade:

$$L_y(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_1} y_n x_n$$

entre l_1 e l_∞, verifique que:

$$[Ax, y] = [x, By]\,,\ \forall x \in l_1, y \in l_\infty.$$

c) Determine os *espectros*, *espectros pontuais*, *contínuos* e *residuais* de A e B.

d) Confrontando os resultados das alíneas b) e c) com os da Proposição 6.3, procure estabelecer um análogo daquela proposição para o caso de operadores limitados em espaços de Banach.

117) Seja (M, μ) espaço de medida satisfazendo à propriedade (P) da Proposição 6.5, $F, G : M \to \mathbb{C}$ mensuráveis:

a) Mostre que $T_F = T_G$ sse $F = G$ *p.p.–d*μ.

b) Mostre, com um contra-exemplo, que a conclusão da alínea a) pode não valer se a propriedade (P) não for satisfeita.

c) Mostre, com um contra-exemplo, que a conclusão da Proposição 6.5 pode não valer se a propriedade (P) não for satisfeita.

118) Seja (M, μ) espaço de medida tal que $L^2(M, \mu) \neq \{0\}$, $F : M \to \mathbb{C}$ mensurável. Mostre que existe $G : M \to \mathbb{C}$ mensurável, tal que:

i) $T_F = T_G$,
ii) $\sigma(T_F) = \sigma(T_G) = \overline{R(G)}$,

onde $R(G) = \{G(m) : m \in M\}$ é a *imagem* de G.

119) Seja (M, μ) espaço de medida satisfazendo à propriedade (P) da Proposição 6.5. Em $L^2(M, d\mu)$:

a) Mostre que todo o operador de multiplicação tem espectro não vazio.

b) Mostre que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é *valor isolado* do espectro de um operador de multiplicação, então λ é *valor próprio*.

c) Justifique as asserções contidas na Observação 2) da secção 6.2.

d) Que pode concluir das alíneas anteriores quanto ao espectro de um operador *normal limitado*?

e) Mostre que a Transformação de Fourier em L^2 tem espectro constituído apenas por valores próprios (*cf.* exercício 102).

120) Mostre que se A é *normal limitado* e $\sigma(A) = \{\lambda\} \subset \mathbb{C}$, então $A = \lambda I$.

121) Demonstre a Proposição 6.6.

122) Seja A operador linear num espaço normado $E = F \oplus G$ (soma directa topológica) tal que (F, G) reduz A (*cf.* exercício 27); pondo $A_1 = A_{/D(A)\cap F}$, $A_2 = A_{/D(A)\cap G}$, operadores respectivamente em F e G, mostre que:

- $\rho(A) = \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$,
- $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$,
- $\sigma_P(A) = \sigma_P(A_1) \cup \sigma_P(A_2)$

[Sugestão: Comece por verificar os seguintes factos: se P for a projecção sobre F correspondente à soma directa $F \oplus G$, então $P(R(A)) \subset R(A)$; se A for invertível, A^{-1} também é reduzido por (F, G); A é invertível sse A_1, A_2 o forem; A tem inverso contínuo sse A_1, A_2 o tiverem; $\overline{R(A)} = E$ sse $\overline{R(A_1)}^F = F, \overline{R(A_2)}^G = G$].

123) Seja A operador *fechado* num espaço de Hilbert; chama-se *imagem numérica* de A ao conjunto:

$$N(A) = \{(Au, u) : u \in D(A), \|u\| = 1\}.$$

a) Mostre que se $D(A)$ for denso no espaço, então:

$$\sigma(A) \subset \overline{N(A)} \cup \{\overline{\lambda} : \lambda \in N(A^*)\}$$

(*cf.* Proposição 4.4).

b) Mostre, com auxílio de contra-exemplo, que se pode ter:

$$\sigma(A) \not\subset \overline{N(A)}$$

[Sugestão: Pode procurar A *simétrico* não auto-adjunto].

Capítulo 7

Teorema espectral para operadores auto-adjuntos “não limitados”

7.1 Equivalência unitária com operador de multiplicação

TEOREMA 7.1 (Teorema espectral para operadores auto-adjuntos — “versão operador de multiplicação”): ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e:***

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

operador auto-adjunto; então existe um espaço métrico localmente compacto M, uma medida boreliana regular μ sobre M[79], uma função mensurável boreliana:

$$f : M \to \mathbb{R}$$

e um operador unitário:

$$\bullet\, U : \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu),$$

tais que:

$$\bullet\, UAU^{-1} = T_f,$$

ou seja:

$$\bullet\, u \in D(A) \text{ sse } f.Uu \in L^2(M, d\mu),$$
$$\bullet\, UAu = f.Uu\,,\ \forall u \in D(A).$$

Em particular, todo o operador auto-adjunto é unitariamente equivalente a um operador de multiplicação por uma função mensurável real num espaçoL^2.

Demonstração: Sendo A auto-adjunto, sabemos (*cf.* Capítulo 1, ou Proposição 6.3–5) que $(A+i)^{-1}, (A-i)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e:

[79] Finita, se $\mathcal{H}$ for separável.

$$((A+i)^{-1})^* = (A^* + \bar{i})^{-1} = (A-i)^{-1}$$

(de acordo com as Proposições 1.2–4, 1.3–1,2,4). Ora:

$$(A+i)^{-1} = R_{-i}\,,\ (A-i)^{-1} = R_i,$$

e portanto estes operadores *comutam*, atendendo à *identidade da resolvente* (*cf.* (47)); logo $(A+i)^{-1}$ é *normal limitado*. O Teorema espectral para estes operadores (Teorema 5.2) garante a existência de um espaço métrico localmente compacto M, de uma medida boreliana regular μ sobre M (finita se $\mathcal{H}$ for separável), de uma função contínua limitada:

$$F : M \to \mathbb{C}$$

e de um operador unitário:

$$\bullet\ U : \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu),$$

tais que:

$$\bullet\ U(A+i)^{-1}U^{-1} = T_F.$$

Então, obviamente, T_F é injectiva (composição de três bijecções respectivamente, por ordem inversa, de $L^2(M, d\mu)$ sobre $\mathcal{H}$, de $\mathcal{H}$ sobre $D(A)$ e de $D(A)$ sobre $U(D(A))$) e:

$$A = (U^{-1}T_FU)^{-1} - iI = U^{-1}(T_F)^{-1}U - iI = U^{-1}((T_F)^{-1} - iI)U;$$

ora, sendo T_F injectiva, resulta da Observação 2) da secção 6.2 que $F \neq 0$, $p.p.$-$d\mu$, pelo que podemos definir, $p.p.$–$d\mu$, a função:

$$g = \frac{1}{F} - i,$$

a qual se pode estender a M como função *mensurável boreliana* (definindo-a com o valor 0 no conjunto μ–desprezável em que F se anula, por exemplo). Atendendo mais uma vez à referida Observação 2), é fácil concluir que:

$$(T_F)^{-1} - iI = T_{\frac{1}{F}} - iI = T_g,$$

pelo que:

$$\bullet\ A = U^{-1}T_gU \Rightarrow UAU^{-1} = T_g.$$

Resta ver que podemos substituir g por uma função real; é fácil concluir da definição que os espectros de A e T_g coincidem, uma vez que se trata de operadores unitariamente equivalentes, pelo que, atendendo à Proposição 6.3–5,

$$\sigma(T_g) = \sigma(A) \subset \mathbb{R}.$$

Ora, atendendo ao exercício 118, existe $f : M \to \mathbb{C}$ mensurável, tal que:

• $T_f = T_g$,
• $\sigma(T_f) = \overline{R(f)}$;

em particular:

• $UAU^{-1} = T_f$,
• $\overline{R(f)} = \sigma(T_f) = \sigma(T_g) = \sigma(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow f$ *é real.*□

Observação: 1) Na demonstração anterior utilizámos a invariância do espectro por equivalência unitária; do mesmo modo se conclui facilmente que o *carácter auto-adjunto*, *essencialmente auto-adjunto*, a *passagem ao adjunto*, o *carácter fechado* ou *fechável* e o *fecho* são invariantes por equivalência unitária, uma vez que apenas envolvem a estrutura hilbertiana dos espaços [exercício].

7.2 Cálculo operacional limitado

Estamos agora aptos a realizar o programa anunciado no Capítulo 1, utilizando a representação de A por T_f para definir *funções* de A. Comecemos por *funções limitadas*:

TEOREMA 7.2 (Cálculo operacional ou simbólico limitado para operadores auto-adjuntos): ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e:***

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

operador auto-adjunto; então existe um homomorfismo único:

$$\bullet\ \widetilde{\Phi}_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

($\mathcal{B}(\mathbb{R})$ álgebra das funções borelianas limitadas sobre $\mathbb{R}$) tal que:

• $\widetilde{\Phi}_A(1) = I$;

• ***se*** $g_n(t) \xrightarrow[n]{} g(t), \forall t \in \mathbb{R}\ (g_n, g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}_1)$ ***e*** $\|g_n\|_\infty \leq$ $\leq C, \forall n \in \mathbb{N}_1\ (C > 0)$, ***então:***

$$\widetilde{\Phi}_A(g_n)\, u \xrightarrow[n]{} \widetilde{\Phi}_A(g)\, u\, , \forall u \in \mathcal{H}.$$

• ***se*** $g_n(t) \xrightarrow[n]{} t, \forall t \in \mathbb{R}\ (g_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}_1)$ ***e*** $|g_n(t)| \leq |t|$, $\forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_1$, ***então:***

$$\widetilde{\Phi}_A(g_n)\, u \xrightarrow[n]{} Au\, , \forall u \in D(A).$$

Além disso:

1. $\widetilde{\Phi}_A(\overline{g}) = \widetilde{\Phi}_A(g)^*\, , \forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. $\|\widetilde{\Phi}_A(g)\| \leq \|g\|_\infty$.

3. $\widetilde{\Phi}_A(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ***é subálgebra comutativa de*** $\mathcal{L}(\mathcal{H})$***; em particular os*** $\widetilde{\Phi}_A(g)$ ***são normais.***

4. Se g for real $(g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\widetilde{\Phi}_A(g)$ ***é auto-adjunto.***

5. Se $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ***for não negativa,*** $\widetilde{\Phi}_A(g)$ ***é auto-adjunto positivo.***

6. Se $Au = \lambda u \, (u \in D(A))$, $\widetilde{\Phi}_A(g)\, u = g(\lambda)\, u, \forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

7. Se $g, h \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ***e*** $g_{/\sigma(A)} = h_{/\sigma(A)}$, ***então*** $\widetilde{\Phi}_A(g) = \widetilde{\Phi}_A(h)$.

8. Se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ***e*** $g_{/\sigma(A)} \in C(\sigma(A))$, ***então:***

$$\widetilde{\Phi}_A(g) = \Phi_A(g_{/\sigma(A)})$$

(sendo Φ_A ***o homomorfismo definido no Teorema 4.7, para o caso de*** $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H}), a = A$***), ou seja, nesse caso*** $\widetilde{\Phi}_A$ ***estende o cálculo operacional contínuo.***

9. Se $BA \subset AB \, (B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}))$, ***então*** $B\widetilde{\Phi}_A(g) = \widetilde{\Phi}_A(g)B, \forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ***Finalmente, se*** (M, μ) ***for espaço de medida e*** $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ***função mensurável tais que*** A ***é unitariamente equivalente a*** T_f ***através de um operador unitário:***

$$U : \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu),$$

então:

$$\widetilde{\Phi}_A(g) = U^{-1} T_{g\circ f} U \ , \forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Demonstração: Comecemos por demonstrar a unicidade. Se $\widetilde{\Phi}_A$ for homomorfismo de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ nas condições do enunciado do Teorema, provemos, para começar, que:

$$\bullet\ \widetilde{\Phi}_A((\widehat{t} \pm i)^{-1}) = (A \pm i)^{-1}.$$

Pondo:

$$\bullet\ g_n(t) = \begin{cases} t & \text{se } |t| \leq n \\ 0 & \text{se } |t| > n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}_1,$$

tem-se:

$$\bullet\ g_n(t) \underset{n}{\longrightarrow} t\,,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\bullet\ |g_n(t)| \leq |t|\,,\ \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_1,$$

$$\bullet\ g_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\,,\ \forall n \in \mathbb{N}_1,$$

donde:

$$\widetilde{\Phi}_A(g_n)\,u \underset{n}{\longrightarrow} Au\,,\ \forall u \in D(A).$$

Portanto, se $u \in D(A)$, por um lado:

$$\bullet\ \widetilde{\Phi}_A((\widehat{t} \pm i)^{-1})\widetilde{\Phi}_A(g_n \pm i)\,u =$$
$$= \widetilde{\Phi}_A((\widehat{t} \pm i)^{-1})\widetilde{\Phi}_A(g_n)\,u \pm i\widetilde{\Phi}_A((\widehat{t} \pm i)^{-1})\,u \underset{n}{\longrightarrow} \widetilde{\Phi}_A((\widehat{t} \pm i)^{-1})(A \pm i)\,u,$$

e por outro:

$$\bullet\ \widetilde{\Phi}_A((\widehat{t} \pm i)^{-1})\widetilde{\Phi}_A(g_n \pm i)\,u = \widetilde{\Phi}_A\Big(\frac{g_n \pm i}{\widehat{t} \pm i}\Big)u \underset{n}{\longrightarrow} u$$

(já que:

$$\frac{g_n(t) \pm i}{t \pm i} \underset{n}{\longrightarrow} 1 \text{ e } \left|\frac{g_n(t) \pm i}{t \pm i}\right| = \sqrt{\frac{1 + g_n(t)^2}{1 + t^2}} \le 1\,,\ \forall t \in \mathbb{R}).$$

Logo:

$$u \in D(A) \Rightarrow \widetilde{\Phi}_A((\widehat{t} \pm i)^{-1})(A \pm i)\,u = u;$$

como $(A \pm i)^{-1}$ são bijecções de $\mathcal{H}$ sobre $D(A)$, concluímos que, de facto:

$$\bullet\ \widetilde{\Phi}_A((\widehat{t} \pm i)^{-1}) = (A \pm i)^{-1},$$

ou seja, $\widetilde{\Phi}_A$ fica univocamente definido nas funções $1/(\widehat{t} + i)$ e $1/(\widehat{t} - i)$; tratando-se de homomorfismo, fica também univocamente determinado nos *polinómios* de coeficientes complexos (a duas variáveis) em $1/(\widehat{t} + i)$ e $1/(\widehat{t} - i)$ (note-se que está determinado nas constantes, atendendo a que:

$$\bullet\ \widetilde{\Phi}_A(C) = C\widetilde{\Phi}_A(1) = CI).$$

Ora tais polinómios podem prolongar-se por continuidade ao *compactificado de Aleksandroff* $\dot{\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}$, já que têm limite no infinito, e constituem subálgebra de $C(\dot{\mathbb{R}})$, fechada para a conjugação, contendo 1 e separando pontos, como é fácil verificar. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, podemos aproximar *uniformemente* qualquer função de $C(\dot{\mathbb{R}})$ por polinómios daquele tipo. As hipóteses feitas sobre $\widetilde{\Phi}_A$ permitem-nos concluir que $\widetilde{\Phi}_A$ fica univocamente determinado nas *funções contínuas com limite no infinito* — em particular em $C_c(\mathbb{R})$. Ora $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *é o menor*[80] *conjunto de funções de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{C}$ *contendo* $C_c(\mathbb{R})$ *e fechado para os limites pontuais dominados* (ou seja, limites do tipo $g_n(t) \underset{n}{\longrightarrow} g(t), \forall t \in \mathbb{R}$, $\|g_n\| \le C, \forall n \in \mathbb{N}_1,$) — *cf.* [W], 15.5, Teorema 1 e o exercício 127) em que se adapta a demonstração do referido Teorema de [W] ao resultado que nos interessa. Daí concluímos que $\widetilde{\Phi}_A$ fica univocamente determinado em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, pois se considerarmos a parte de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ em que $\widetilde{\Phi}_A$ satisfaz àquela propriedade, tal sub-

[80] Para a relação de inclusão…

conjunto de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contém $C_c(\mathbb{R})$, como vimos, e é, por hipótese, fechado para os limites pontuais dominados; coincidirá portanto com $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Para demonstrar a unicidade em $C_c(\mathbb{R})$ poderíamos ter dispensado o Teorema de Stone-Weierstrass, utilizando directamente aproximações de cada função de $C_c(\mathbb{R})$ por *convoluções* com núcleos do tipo:

$$g_n(t) = \frac{n}{\pi}\frac{1}{1+n^2t^2};$$

é fácil ver que as somas de Riemann das convoluções convergem dominadamente, bem como as próprias convoluções (quando $n \to \infty$). Tudo se reduz então a verificar que $\widetilde{\Phi}_A$ fica univocamente determinado em funções do tipo:

$$\bullet\, h(t) = \frac{1}{1+\alpha(t-\beta)^2} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0),$$

o que ainda se pode reduzir a produtos de funções do tipo $1/(\widehat{t} + a + ib)$, para as quais se recorre a raciocínios semelhantes aos utilizados acima para $(\widehat{t} \pm i)^{-1}$.

Provemos agora a existência; sejam $L^2(M, d\mu)$, f e U como no teorema anterior. Pomos:

$$\widetilde{\Phi}_A(g) = U^{-1}T_{g\circ f}U\ , \ \forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

É fácil verificar que $\widetilde{\Phi}_A$ satisfaz às propriedades que o determinam univocamente, de acordo com a primeira parte da demonstração; seja, por exemplo, g_n sucessão em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tal que:

$$g_n(t) \underset{n}{\longrightarrow} t\ ,\ |g_n(t)| \leq |t|\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_1.$$

Então, se $u \in D(A)$, tem-se $f.Uu \in L^2(M, d\mu)$ e:

$$\bullet\, |g_n(f(m)).Uu(m)| \leq |f(m)||Uu(m)|\ ,\ \forall m \in M, n \in \mathbb{N}_1,$$
$$\bullet\, g_n(f(m)).Uu(m) \underset{n}{\longrightarrow} f(m)Uu(m)\ ,\ \forall m \in M;$$

portanto, pelo Teorema de Lebesgue, $g_n \circ f.Uu \underset{n}{\longrightarrow} f.Uu$ em $L^2(M, d\mu)$. Sendo U unitário:

$$\widetilde{\Phi}_A(g_n)\,u = U^{-1}T_{g_n\circ f}Uu = U^{-1}(g_n \circ f.Uu) \underset{n}{\longrightarrow} U^{-1}(fUu) = Au,$$

como pretendíamos. A demonstração das outras propriedades que caracterizam $\widetilde{\Phi}_A$ univocamente é deixada como exercício.

1. resulta da simples verificação directa da identidade:

$$(UBU^{-1})^* = UB^*U^{-1},$$

para U unitário de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}'$ (espaços de Hilbert), B operador em $\mathcal{H}$, com domínio denso, e do facto de $(T_{g\circ f})^* = T_{\overline{g\circ f}} = T_{\overline{g}\circ f}$.

As demonstrações de 2., 3., 4. e 5. são deixadas como exercícios; para provar 6., notemos que basta fazê-lo para $g(t) = 1/(t \pm i)$, por razões análogas às invocadas no início da demonstração. Ora se:

$$\bullet\ Au = \lambda u \ (u \in D(A))$$

vem:

$$(A \pm i)\, u = (\lambda \pm i)\, u \Rightarrow \frac{1}{\lambda \pm i} u = (A \pm i)^{-1} u = \widetilde{\Phi}_A\Big(\frac{1}{\widehat{t} \pm i}\Big) u.$$

Quanto a 7., notemos que $\sigma(A) = \sigma(T_f) = R_{\text{ess}}(f)$, atendendo à Proposição 6.5–1 e à observação 1) acima; por outro lado, atendendo à Proposição 6.4–2:

$$\mu(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus R_{\text{ess}}(f)) = 0,$$

donde:

$$\bullet\ \mu(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \sigma(A)) = 0,$$

e portanto, se $g_{/\sigma(A)} = h_{/\sigma(A)}$ $(g, h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tem-se, $\forall u \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\big\|\widetilde{\Phi}_A(g)\, u - \widetilde{\Phi}_A(h)\, u\big\|^2 = \big\|\widetilde{\Phi}_A(g - h)\, u\big\|^2 = \big\|U\widetilde{\Phi}_A(g - h)\, u\big\|^2_{L^2(M,d\mu)} = \\
= \|(g - h) \circ f.Uu\|_{L^2(M,d\mu)} = \int_M |g(f(m)) - h(f(m))|^2 |Uu(m)|^2\, d\mu(m) = \\
= \int_{f^{-1}(\sigma(A))} |g(f(m)) - h(f(m))|^2 |Uu(m)|^2\, d\mu(m) = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \widetilde{\Phi}_A(g)\, u = \widetilde{\Phi}_A(h)\, u,
\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{\Phi}_A(g) = \widetilde{\Phi}_A(h)$.

Finalmente, demonstremos 8.; pondo:

$$\begin{aligned}
\Psi_A : C(\sigma(A)) &\to \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\
g &\mapsto \Psi_A(g) = \widetilde{\Phi}_A(\widetilde{g}),
\end{aligned}$$

onde:

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} g(t) & \text{se } t \in \sigma(A) \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A) \end{cases},$$

é fácil verificar, atendendo às propriedades de $\widetilde{\Phi}_A$, que se trata de *homomorfismo*. Por outro lado, sendo **1** a unidade de $C(\sigma(A))$, coincide, em $\sigma(A)$, com a unidade de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, donde, por 7.:

$$\Psi_A(\mathbf{1}) = \widetilde{\Phi}_A(\widetilde{\mathbf{1}}) = \widetilde{\Phi}_A(1) = I;$$

finalmente, tomando:

$$g_n(t) = \begin{cases} t & \text{se } |t| \leq n \\ 0 & \text{se } |t| > n \end{cases},$$

sabemos que:

$$\bullet\ \widetilde{\Phi}_A(g_n)\, u \underset{n}{\longrightarrow} Au\,,\ \forall u \in D(A) = \mathcal{H},$$

e, por outro lado, para n suficientemente grande, $g_{n/\sigma(A)} = \widehat{t}_{/\sigma(A)}$ (já que, neste caso, $\sigma(A)$ é limitado), donde (a partir de certa ordem):

$$\bullet\ \Psi_A(\widehat{t}_{/\sigma(A)})\, u = \widetilde{\Phi}_A((\widehat{t}_{/\sigma(A)})^{\sim})\, u = \widetilde{\Phi}_A(g_n)\, u \underset{n}{\longrightarrow} Au, \forall u \in D(A) = \mathcal{H} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bullet\ \Psi_A(\widehat{t}_{/\sigma(A)}) = A.$$

Então, em particular:

$$\bullet\ \Psi_A\left(\overline{\widehat{t}}_{/\sigma(A)}\right) = A^*,$$

pelo que, por continuidade e densidade, Ψ_A toma valores na álgebra gerada por A, A^* em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Pela unicidade de Φ_A (*cf.* Teorema 4.7), concluímos que $\Psi_A = \Phi_A$, o que demonstra 8.□

Observação: 2) O ponto 8. do Teorema anterior leva-nos, sem perigo de confusão, a representar $\widetilde{\Phi}_A(g)$ por $\Phi_A(g)$, ou mesmo por $g(A)$.

Antes de procurarmos generalizar o cálculo operacional a funções *não limitadas*, estudemos duas classes imprtantes de funções limitadas de um operador auto-adjunto:

- $g_t(\lambda) = e^{it\lambda}$ $(t, \lambda \in \mathbb{R})$;
- *funções características* χ_Ω *de borelianos* Ω *de* $\mathbb{R}$,

que serão objecto dos capítulos seguintes.

Exercícios

124) Mostre que, em qualquer conjunto de operadores em espaços de Hilbert, a relação $\sim$ dada por *“$A \sim B$ sse existir um operador unitário U tal que* $UAU^{-1} = B$” é de equivalência; pode também escrever-se:

$$A \underset{U}{\sim} B.$$

125) Diz-se *invariante unitário* qualquer propriedade $P(x)$ tal que:

$$A \sim B \Rightarrow (P(A) \Leftrightarrow P(B))$$

($\sim$ relação de equivalência introduzida no exercício anterior).

a) Mostre que são invariantes unitários as seguintes propriedades $P(x)$:

i) $D(x)$ é *denso* no espaço; **ii)** x é *fechável*; **iii)** x é *fechado*; **iv)** x é *auto--adjunto*; **v)** x é *essencialmente auto-adjunto*; **vi)** $K = \sigma(x)$; **vii)** $K = = \sigma_P(x)$; **viii)** $K = \sigma_C(x)$; **ix)** $K = \sigma_R(x)$

b) Verifique que se $A \underset{U}{\sim} B$ então $U\overline{A}U^{-1} = \overline{B}$ e $UA^*U^{-1} = B^*$.

126) Seja A operador auto-adjunto no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$; mostre que se $B \in \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $BA \subset AB$, então $B\Phi_A(g) = \Phi_A(g)B, \forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ [Sugestão: Comece por verificar que B comuta com $(A \pm i)^{-1}$].

127) Deduz-se imediatamente do Teorema 1 de [W], 15.5, que o conjunto das funções borelianas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é o menor conjunto de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ contendo $C_c(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e fechado para os limites pontuais. Pretendemos adaptar a demonstração do referido Teorema de modo a obter o seguinte resultado: ***"$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é o menor conjunto de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ contendo $C_c(\mathbb{R})$ e fechado para os limites pontuais dominados"***. Para esse efeito, resolva sucessivamente as seguintes questões:

a) Mostre que existe o menor conjunto $\mathcal{M}$ de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ contendo $C_c(\mathbb{R})$ e fechado para os limites pontuais dominados (limites pontuais de sucessões f_n em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, convergentes pontualmente e tais que $\|f_n\|_\infty \leq C$, $\forall n \in \mathbb{N}_1$, para certo $C > 0$), tendo-se:

$$\mathcal{M} = \bigcap \{\mathcal{C} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) : C_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}, \mathcal{C} \text{ é fechado para os lim. pont. dominados}\}$$

[Sugestão: A existência da intersecção é equivalente à existência de pelo menos um $\mathcal{C}$ nas condições acima[81]; basta portanto verificar que o próprio $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é fechado para os limites pontuais dominados; resta, em seguida, verificar que $\mathcal{M}$ acima definido também satisfaz a esta condição].

b) Mostre que que $\mathcal{M}$ é sub-álgebra de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contendo a unidade [Sugestão: Para provar que $\mathcal{M}$ é fechado para a soma considere, para cada $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_\varphi = \{f \in \mathcal{M} : f + \varphi \in \mathcal{M}\}$; mostre que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\varphi$. Em seguida, fixado $g \in \mathcal{M}$ considere $\mathcal{M}_g = \{f \in \mathcal{M} : f + g \in \mathcal{M}\}$ e mostre que, mais uma vez, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_g$. Proceda de modo análogo para as outras operações].

c) Seja $\mathcal{P} = \{\Omega \subset \mathbb{R} : \chi_\Omega \in \mathcal{M}\}$; mostre que se trata de σ–álgebra contendo os intervalos compactos, e conclua que coincide com a σ–álgebra Bor $(\mathbb{R})$ dos borelianos de $\mathbb{R}$ [Sugestão: Pode usar a alínea anterior para provar que $\mathcal{P}$ é fechado para as uniões finitas e passagens ao complementar, e o facto de $\mathcal{M}$ ser fechado para os limites pontuais dominados para concluir que $\mathcal{P}$ é σ-álgebra].

d) Conclua da alínea anterior que $\mathcal{M}$ contém as funções simples borelianas (combinações lineares de funções características de borelianos) e deduza desse facto que $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ [Sugestão: *Cf.* a demonstração da Proposição 17.1 de [BW2]].

128) Demonstre a unicidade expressa no Teorema 7.2 sem utilizar o Teorema de Stone-Weierstrass para passar a $C_c(\mathbb{R})$ e complete a demonstração das propriedades de $\widetilde{\Phi}_A$ que o caracterizam univocamente.

[81] Como se sabe, *não existe* (como conjunto) a intersecção de uma família *vazia* de conjuntos.

129) Demonstre os pontos 2., 3., 4. e 5. do Teorema 7.2 [Sugestão: Para demonstrar 2. recorde a Proposição 6.4, além do Teorema 7.1, evidentemente].

130) a) Mostre que os operadores auto-adjuntos têm espectro não vazio.

b) Mostre que se $\lambda \in \mathbb{C}$ for valor isolado do espectro de $\mathcal{A}$, operador auto-adjunto, então $\lambda \in \sigma_P(A)$.

c) Verifique que se A for auto-adjunto em $\mathcal{H}$ então $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sse $\sigma(A)$ for limitado. Mostre, com um contra-exemplo, que a equivalência é falsa na classe mais vasta dos operadores fechados em espaços de Hilbert.

d) Mostre que se A for auto-adjunto e $\sigma(A) = \{\lambda\} \subset \mathbb{R}$, então $A = \lambda I$.

Capítulo 8

Grupos unitários e a Equação de Schrödinger

A importância particular das funções $g_t(\lambda) = e^{it\lambda}\ (t, \lambda \in \mathbb{R})$ resulta de se tratar das soluções em t, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = i\lambda u \\ u(0) = 1 \end{cases},$$

pelo que é natural esperar que os operadores:

$$g_t(A) = \widetilde{\Phi}_A(g_t)$$

(A *auto-adjunto* num espaço de Hilbert$\mathcal{H}$) estejam intimamente relacionados com as soluções da equação diferencial (em $\mathcal{H}$):

(49) $$\bullet\ \frac{du}{dt} = iAu.$$

Equações desta forma surgem naturalmente no quadro da Mecânica Quântica.

8.1 A Equação de Schrödinger da Mecânica Quântica

Voltando às notações e conceitos da Introdução, procuremos concluir a que equação deve obedecer o grupo de ondas (2) para que, no caso em que se encontre associado a uma "partícula clássica", reencontremos as equações clássicas da Mecânica Newtoniana. De (2) obtemos (supondo que podemos derivar "debaixo do sinal de integral", o que, nesta análise heurística é manifestamente legítimo…):

$$\bullet\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{\mathbb{R}} E(p)\, B(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}\, dp$$

e:

$$\bullet\ \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t) = \frac{i}{\hbar}\int_{\mathbb{R}} p\,B(p)\,e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}\,dp \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bullet\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{1}{\hbar^2}\int_{\mathbb{R}} p^2\,B(p)\,e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}\,dp.$$

Da equação clássica para a partícula livre (*cf.* Introdução):

$$\bullet\ E = \frac{p^2}{2m},$$

concluímos que ψ deverá obedecer à equação:

$$\bullet\ i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

ou seja:

(50)
$$\bullet\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = i\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

(***Equação de Schrödinger para a partícula livre com um grau de liberdade***). A N dimensões de espaço — $N = 3$ no caso de uma partícula livre no espaço ordinário — $\partial^2/\partial x^2$ seria naturalmente substituído pelo laplaciano N-dimensional $\triangle = \sum_{i=1}^{N} \partial^2/\partial x_i^2$.

Note-se que (50) pode ser obtida formalmente da equação clássica fazendo corresponder ao momento linear p o operador $(\hbar/i)(\partial/\partial x)$ e à energia E o operador $i\hbar(\partial/\partial t)$ (***princípio de correspondência***). Para uma partícula sujeita a um potencial $V = V(x)$, podemos fazer uma análise heurística semelhante; durante um intervalo de tempo suficientemente pequeno para que se possa considerar o momento linear aproximadamente constante (note-se que agora a velocidade pode variar, devido ao potencial), podemos associar à partícula um grupo de ondas do tipo ψ. Portanto, na vizinhança de certo instante t_0 e de um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ em torno do qual, nesse instante, a "onda-partícula" se concentre, teremos, aproximadamente:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) - V(x_0)\,\psi(x,t) \approx$$

$$\approx (E_0 - \frac{p_0^2}{2m} - V(x_0))\,\psi(x,t) = 0,$$

atendendo à equação clássica:

$$\bullet\ E = \frac{p^2}{2m} + V \ \textit{(energia cinética + energia potencial).}$$

É então natural postular, com Schrödinger, que a equação que rege a evolução da função de onda de um sistema unidimensional sujeito à acção do potencial V deva ser:

$$\bullet\ i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi,$$

ou seja:

(51) $$\bullet\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = i\Big(\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{V}{\hbar}\psi\Big)$$

(***Equação de Schrödinger com potencial***). Vale mais uma vez o *princípio de correspondência*, associando à energia *potencial* o operador T_V *de multiplicação por* V. Note-se que tanto (50) como (51) podem ser entendidas como equações do tipo (49), desde que os domínios dos operadores e o potencial V sejam escolhidos de modo a obtermos operadores auto-adjuntos. No exercício 18 (Capítulo 1) estudou-se, em particular, o operador id/dx em $L^2(\mathbb{R})$; mostra-se que, em certo domínio, é *auto-adjunto*. Considerando o respectivo *quadrado* e multiplicando por uma constante real conveniente, obtemos novo operador auto-adjunto:

$$\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2},$$

cujo domínio caracterizaremos mais adiante; se, por exemplo, V for função mensurável limitada, o operador que intervém em (51) também será *auto-adjunto*, pelo que, em qualquer dos casos ficamos reduzidos a uma equação do tipo (49). Note-se ainda que a derivada que intervém em (49) é, em princípio, no sentido de funções com valores em $\mathcal{H}$ (é limite em $\mathcal{H}$ de razões incrementais); em cada caso dever-se-á verificar se se obtêm soluções *pontualmente diferenciáveis*, o que, evidentemente, só faz sentido se $\mathcal{H}$ for um espaço de *funções*. Antes de passarmos ao estudo dos $\Phi_A(g_t)$ convém esclarecer que a equação de Schrödinger é um *primeira aproximação* dos fenómenos da micro-física que despreza os efeitos *relativistas*, o *spin* e o chamado *princípio de exclusão de Pauli*.

8.2 Existência, unicidade e regularidade da solução do problema de Cauchy para uma equação abstracta "de tipo Schrödinger"

PROPOSIÇÃO 8.3: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador auto-adjunto e, para cada $t \in \mathbb{R}$,***

$$g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

tal que:

$$g_t(\lambda) = e^{it\lambda},\ \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Então, se:

$$U(t) = \Phi_A(g_t) = g_t(A) = e^{itA}\,,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

tem-se:

1. ***$U(t)$ é operador unitário, $\forall t \in \mathbb{R}$.***
2. ***$U(t+s) = U(t)U(s), \forall s, t \in \mathbb{R}$;***
   em particular $U(0) = I$ e $U(t)^{-1} = U(-t) = U(t)^*$.
3. ***A aplicação $t \mapsto U(t)\,u$ é contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{H}$, $\forall u \in \mathcal{H}$.***
4. ***$u \in D(A)$ sse existir em $\mathcal{H}$:***

$$\lim_{t\to 0} \frac{U(t)\,u - u}{t}.$$

5. ***Se $u_0 \in D(A)$, então $U(t)\,u_0 \in D(A), \forall t \in \mathbb{R}$ e:***

$$\frac{d}{dt}(U(t)\,u_0) = iAU(t)\,u_0 = iU(t)Au_0\,,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

sendo $u(t) = U(t)\,u_0$ a única solução diferenciável do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = iAu\,,\ t \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0 \end{cases};$$

Além disso $u \in C^1(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}, D(A))$, tomando em $D(A)$ a norma "do gráfico":

$$\|u\|^2_{D(A)} = \|u\|^2 + \|Au\|^2\ (u \in D(A)).$$

Demonstração: Com as notações dos Teoremas 7.1 e 7.2, sabemos que, para cada t, $U(t)$ é *unitariamente equivalente* ao operador $T_{e^{itf}}$ em $L^2(M, d\mu)$. Como todas as propriedades 1.–5. são manifestamente invariantes por equivalência unitária, podemos supor que:

$$U(t) = T_{e^{itf}}$$

$(\in \mathcal{L}(L^2(M, d\mu))$, já que $|e^{itf}| = 1$ porque f é real)[82]. 1. resulta obviamente de:

$$\bullet\ \overline{e^{itf}} = e^{-itf};$$

2. de:

$$\bullet\ e^{i(t+s)f} = e^{itf}e^{isf}.$$

[82]No que se segue poderíamos também ter invocado as propriedades do cáculo operacional limitado, em lugar de nos reduzirmos ao caso de operador de multiplicação.

3. é simples consequência do Teorema de Lebesgue, já que, para $g \in$ $\in L^2(M, d\mu)$:

$$\|U(t)g - U(t_0)g\|_{L^2}^2 = \int_M \left|e^{itf(m)} - e^{it_0 f(m)}\right|^2 |g(m)|^2 \, d\mu(m) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0,$$

visto que a função integranda converge pontualmente para zero e:

$$\left|e^{itf(\widehat{m})} - e^{it_0 f(\widehat{m})}\right|^2 |g(\widehat{m})|^2 \leq 2|g(\widehat{m})|^2 \in L^1(M, d\mu).$$

Para demonstrar 4. basta, mais uma vez, invocar o Teorema de Lebesgue. Como nos reduzimos ao caso de $A = T_f, g \in D(A)$ sse $g \in L^2(M, d\mu)$ e $f.g \in$ $\in L^2(M, d\mu)$. Então se $g \in D(A)$, temos:

$$\left\|\frac{U(t)\, g - g}{t} - ifg\right\|_{L^2}^2 = \int_M \left|\frac{e^{itf(m)} - 1}{t} - if(m)\right|^2 |g(m)|^2 \, d\mu(m) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0,$$

visto que a função integranda converge evidentemente para zero e:

$$\left|\frac{e^{itf} - 1}{t} - if\right|^2 |g|^2 = \begin{cases} 0 & \text{onde } |f| = 0 \\ \left|\frac{e^{itf} - 1}{tf} - i\right|^2 |f.g|^2 & \text{onde } |f| \neq 0 \end{cases} \leq$$
$$\leq C|fg|^2 \in L^1(M, d\mu).$$

Portanto, nesse caso, existe, em $\mathcal{H}$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{U(t)\, g - g}{t} \tag{52}$$

e é igual a iAg. Então, se definirmos um operador $\widetilde{A}$ com domínio constituído pelos vectores u de $\mathcal{H}$ para os quais existe o limite (52) (com g substituído por u) e definido em $u \in D(\widetilde{A})$ como sendo $-i$ vezes esse limite, obtemos:

$$\bullet\ A \subset \widetilde{A}.$$

Ora, $\forall u, v \in D(\widetilde{A})$:

$$\begin{aligned}(\widetilde{A}u, v) &= \left(-i \lim_{t \to 0} \frac{U(t)\, u - u}{t}, v\right) = -i \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}((U(t)\, u, v) - (u, v)) = \\ &= -i \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}((u, U(-t)\, v) - (u, v)) = -i \lim_{t \to 0} \left(u, \frac{U(-t)\, v - v}{t}\right) = \\ &= \left(u, -i \lim_{t \to 0} \frac{U(-t)\, v - v}{-t}\right) = (u, \widetilde{A}v),\end{aligned}$$

ou seja, $\widetilde{A}$ é simétrico; como A é auto-adjunto e portanto maximal simétrico, concluímos que:

$$\widetilde{A} = A,$$

o que termina a demonstração de 4.

Quanto a 5., notemos que se $u_0 \in D(A)$, então, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\left\| \frac{U(s)U(t)\,u_0 - U(t)\,u_0}{s} - iU(t)Au_0 \right\| =$$

$$= \left\| \frac{U(s+t)\,u_0 - U(t)\,u_0}{s} - iU(t)Au_0 \right\| =$$

$$= \left\| U(t)\Big(\frac{U(s)\,u_0 - u_0}{s} - iAu_0\Big) \right\| = \left\| \frac{U(s)\,u_0 - u_0}{s} - iAu_0 \right\| \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0;$$

portanto, pelo que acabámos de demonstrar, $U(t)\,u_0 \in D(A)$ e:

- $iAU(t)\,u_0 = iU(t)Au_0 \Rightarrow AU(t)\,u_0 = U(t)Au_0.$

Acabámos também de verificar que:

$$\frac{d}{dt}(U(t)\,u_0) = iU(t)Au_0 = iAU(t)\,u_0,$$

$\forall t \in \mathbb{R}$. Resta demonstrar a unicidade e "regularidade" da solução do problema de Cauchy. A regularidade resulta da própria equação e da continuidade da função:

$$t \mapsto Au(t) = AU(t)\,u_0 = U(t)Au_0,$$

consequência de 3. (note-se que $u(t) = U(t)\,u_0$ é contínua e mesmo *diferenciável*, por 5.). Para demonstrar a unicidade note-se que se u é solução diferenciável da equação com condição inicial $u(0) = 0$, se tem [exercício]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\|u(t)\|^2) = (iAu(t), u(t)) + (u(t), iAu(t)) = 0 \\ \|u(0)\|^2 = 0 \end{cases},$$

donde:

- $\|u(t)\|^2 = 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow u(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}.\square$

Em particular acabámos de demonstrar um teorema de *existência, unicidade e regularidade* para a equação (49) (problema de Cauchy). Tal equação tem soluções obtidas pela acção de uma família $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores unitários satisfazendo a determinadas propriedades. Obtivemos portanto soluções das equações de *Scrödinger* (50) e (51), em certo sentido, dependente do conhecimento exacto dos domínios dos operadores *diferenciais* associados às equações. Note-se que as conclusões da Proposição 8.3 são compatíveis com a interpretação *probabilística* da função de onda ψ; com efeito, sendo $|\psi|^2$ densidade de probabilidade da *posição*, deverá ter-se:

$$\|\psi(.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 1\,,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ora, se partirmos de uma função de onda $\psi_0(x) = \psi(x,0)$ satisfazendo a esta condição, e sendo a evolução regida por uma equação de Schrödinger, portanto do tipo (49), virá:

- $\psi(x,t) = (U(t)\psi_0)(x) \Rightarrow \|\psi(.,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|U(t)\psi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1.$

8.3 Dinâmica quântica, grupos unitários e o Teorema de Stone

Pode agora pôr-se a questão, de certo modo inversa, de saber se um processo evolutivo, no espaço das funções de onda, será sempre regido por um equação de tipo (49). Os princípios da Mecânica Quântica estabelecem que, fixadas as condições da experiência, o conhecimento da evolução de um sistema físico (dada pela função de onda a ele associada em cada instante) deva apenas depender do conhecimento da função de onda em determinado instante, seja, por exemplo, o instante $t = 0$. Fica assim estabelecida um aplicação (para cada $t \in \mathbb{R}$):

$$\psi_0 = \psi(0) \mapsto \psi(t) = U(t)\psi_0,$$

de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$, que suporemos *linear* (postulado físico da *sobreposição dos estados*). Como considerámos que as condições da experiência não variariam com o tempo, deverá ser indiferente deixar evoluir um sistema até ao instante $t+s$ ou partir, no instante zero, do estado de função de onda $\psi(s)$ e deixá-lo evoluir até ao instante t; ou seja:

(53) $$\bullet\ U(t+s)\psi_0 = U(t)U(s)\psi_0\,,\ \forall s,t \in \mathbb{R}, \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}).$$

Por outro lado, a interpretação probabilística da função de onda impõe que se possam normalizar *simultaneamente* as funções de onda correspondentes aos diferentes instantes, ou seja:

$$\frac{\|\psi(t)\|}{\|\psi_0\|} = 1\,,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

o que se traduz pela seguinte propriedade das aplicações $U(t)$:

(54) $$\bullet\ \|U(t)\psi_0\| = \|\psi_0\|\,,\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}).$$

Também é óbvio que:

(55) $$\bullet\ U(0)\,\psi_0 = \psi_0\,,\ \forall \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}).$$

As condições (53), (54), (55) traduzem o facto de $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ ser ***grupo unitário*** em $L^2(\mathbb{R})$; com efeito, de (53) e (55) deduzimos facilmente que as aplicações $U(t)$ são bijecções de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$, o que, junto a (54), garante que cada $U(t)$ é operador unitário em $L^2(\mathbb{R})$ (*cf.* exercício 5, Introdução).

DEFINIÇÃO: *seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert; chamamos* ***grupo unitário*** *a uma família $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ de operadores unitários em $\mathcal{H}$ tais que:*

$$\bullet\, U(t+s) = U(t)U(s)\,,\ \forall s,t \in \mathbb{R}.$$

As considerações anteriores mostram que $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é *grupo unitário* em $\mathcal{H}$ sse se tratar de família de *aplicações de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$* tais que:

$$\bullet\, U(t+s) = U(t)U(s)\,,\ \forall\, s,t \in \mathbb{R};$$
$$\bullet\, U(0) = I;$$
$$\bullet\, \|U(t)\,u\| = \|u\|\,,\ \forall t \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{H}.$$

[Exercício: demonstrar a equivalência].

Um grupo unitário diz-se *fortemente contínuo* se for contínua, para cada $u \in \mathcal{H}$, a aplicação $t \mapsto U(t)\,u$ de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{H}$; diz-se *fracamente contínuo* se forem contínuas as aplicações $t \mapsto (U(t)\,u, v)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, $\forall u, v \in \mathcal{H}$. É fácil verificar que as duas noções são equivalentes; é óbvio que *fortemente* implica *fracamente* contínuo. Reciprocamente basta supor que, para cada $u \in \mathcal{H}$, é contínua a aplicação, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, $t \mapsto (U(t)\,u, u)$, pois nesse caso:

$$\begin{aligned}\|U(t)\,u - u\|^2 &= \|U(t)\,u\|^2 - (U(t)\,u, u) - (U(-t)\,u, u) + \|u\|^2 = \\ &= 2\|u\|^2 - (U(t)\,u, u) - (U(-t)\,u, u) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

$\forall u \in \mathcal{H}$, donde se conclui facilmente a continuidade forte, pois:

$$\|U(t+h)\,u - U(t)\,u\| = \|U(t)(U(h)\,u - u)\| = \|U(h)\,u - u\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

$\forall t \in \mathbb{R}, u \in \mathcal{H}$. No caso particular em que $\mathcal{H}$ é *separável* vale o resultado seguinte devido a *Von Neumann*:

PROPOSIÇÃO 8.4 (Von Neumann): ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert separável e $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ grupo unitário em $\mathcal{H}$ tal que para cada $u, v \in \mathcal{H}$ é mensurável a aplicação $t \mapsto (U(t)\,u, v)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$; então $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é fortemente contínuo.***

Demonstração: Pelas considerações anteriores, basta-nos verificar que, para cada $u, v \in \mathcal{H}$, $t \mapsto (U(t)\,u, v)$ é *contínua na origem*. Comecemos por notar que esta aplicação é limitada, pois:

$$\bullet\, |(U(t)\,u, v)| \le \|u\|\|v\|\,,\ \forall t \in \mathbb{R};$$

sendo *mensurável*, é, em particular, localmente somável. Então, para cada $u \in \mathcal{H}$, $a \in \mathbb{R}$, é *linear contínua* a aplicação:

$$v \mapsto \int_0^a (v, U(s)\,u)\,ds$$

de $\mathcal{H}$ em $\mathbb{C}$. Pelo Teorema de Riesz, existe $u_a \in \mathcal{H}$ único tal que:

$$\bullet\ (v, u_a) = \int_0^a (v, U(s)\, u)\, ds\ ,\ \forall v \in \mathcal{H},$$

donde:

$$(v, U(t)\, u_a) = (U(-t)\, v, u_a) = \int_0^a (U(-t)v, U(s)\, u)\, ds =$$
$$= \int_0^a (v, U(t+s)\, u)\, ds = \int_t^{t+a} (v, U(\xi)\, u)\, d\xi;$$

portanto:

$$|(U(t)\, u_a, v) - (u_a, v)| = \left| \int_t^{t+a} (v, U(\xi)\, u)\, d\xi - \int_0^a (v, U(\xi)\, u)\, d\xi \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_a^{t+a} (v, U(s)\, u)\, ds \right| + \left| \int_0^t (v, U(s)\, u)\, ds \right| \leq 2t\|v\|\|u\| \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

o que prova a continuidade na origem de $t \mapsto (U(t)\, u_a, v)$. Se demonstrarmos que o conjunto dos u_a ($u \in \mathcal{H}, a \in \mathbb{R}$) é denso em $\mathcal{H}$, um simples argumento *"do tipo $\delta/3$"* permitirá demonstrar a continuidade fraca do grupo na origem, e portanto a continuidade forte. Seja então $v \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\bullet\ (v, u_a) = 0\ ,\ \forall u \in \mathcal{H}, a \in \mathbb{R};$$

provemos que $v = 0$. Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ for base ortonormada de $\mathcal{H}$ (numerável, visto $\mathcal{H}$ ser separável — note-se que excluímos o caso em que $\mathcal{H}$ tem dimensão finita, que teria demonstração idêntica, ainda que *mais fácil*) tem-se $\forall n \in \mathbb{N}_1, a \in \mathbb{R}$:

$$0 = (v, u_{n_a}) = \int_0^a (v, U(s)\, u_n)\, ds;$$

da arbitrariedade de a concluímos que:

$$\bullet\ (U(s)\, u_n, v) = 0\ ,\ p.p. \text{ em } \mathbb{R},$$

ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}_1$ existe um conjunto *mensurável* $\Omega_n \subset \mathbb{R}$ com medida de Lebesgue nula, tal que, $\forall s \in \mathbb{R} \setminus \Omega_n$:

$$\bullet\ (U(s)\, u_n, v) = 0\, .$$

Como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \Omega_n$ tem medida nula, $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \Omega_n \neq \emptyset$, donde, tomando

$$t_0 \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \Omega_n,$$

ter-se-á:

$$\bullet\ (U(t_0)\, u_n, v) = 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}_1;$$

mas $(U(t_0)\,u_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ é base ortonormada de $\mathcal{H}$, visto U ser unitário, donde $v=0$.□

O resultado de Von Neumann mostra que a hipótese de continuidade forte é bastante aceitável como postulado a acrescentar a (53), (54) e (55) para caracterizar um processo dinâmico em Mecânica Quântica. Vamos então mostrar que tal processo resulta *sempre* da solução de uma equação do tipo (49), ou seja, que os *grupos unitários* do tipo estudado na Proposição 8.3 são os únicos *fortemente contínuos* existentes (e portanto os únicos *fracamente contínuos*, ou mesmo *fracamente mensuráveis*, no caso separável).

TEOREMA 8.5 (Stone): ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ grupo unitário fraca — e portanto fortemente — contínuo; então existe um operador auto-adjunto $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ único tal que:***

$$\bullet\ U(t) = e^{itA}\ ,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Sabemos, pela Proposição 8.3, que se A existir, iA será a derivada forte de $U(t)$ em $t=0$, no domínio em que esta está definida. Procuremos então construir A derivando $U(t)$ fortemente em certo conjunto de vectores D convenientemente escolhido; seja D o subespaço vectorial de $\mathcal{H}$ gerado pelos vectores da forma:

$$\bullet\ u_f = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,U(t)\,u\,dt$$

($u \in \mathcal{H}, f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — espaço das funções de classe C^∞ e suporte compacto em $\mathbb{R}$), onde o integral é limite de somas de Riemann em $\mathcal{H}$, já que $t \mapsto U(t)\,u$ é contínua. É fácil concluir que D é denso em $\mathcal{H}$, pois tomando ρ_n $(n \in \mathbb{N}_1)$ como na sugestão do exercício 17) — Capítulo 1 — "aproximação da unidade", temos $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e se $u \in \mathcal{H}$:

$$\|u_{\rho_n} - u\| \le \int_{\mathbb{R}} \rho_n(t)\,\|U(t)\,u - u\|\,dt \le \sup_{t\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]} \|U(t)\,u-u\| \xrightarrow[n]{} 0.$$

Calculemos a derivada de $U(t)\,u_f$ em $t=0$; pensando nas somas de Riemann, é fácil concluir que $U(t)$ comuta com o integral, donde:

$$\begin{aligned}\frac{U(t)\,u_f - u_f}{t} &= \int_{\mathbb{R}} f(s)\frac{U(t+s)\,u - U(s)\,u}{t}\,ds = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\tau-t)-f(\tau)}{t}\,U(\tau)\,u\,d\tau \xrightarrow[t\to 0]{} \int_{\mathbb{R}} -f'(\tau)\,U(\tau)\,u\,d\tau = \\ &= u_{-f'}.\end{aligned}$$

Seja então:

$$\bullet\ Au_f = -iu_{-f'},$$

$\forall u \in \mathcal{H}, f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Podemos estender A a D por linearidade, tendo-se:

$$A : D \to D,$$

e, também:

$$U(t)\,(D) \subset D\,,\,\forall t \in \mathbb{R},$$

já que:

$$\bullet\, U(t)\,u_f = U(t)\Big(\int_{\mathbb{R}} f(s)\,U(s)\,u\,ds\Big) = \int_{\mathbb{R}} f(s)\,U(t+s)\,u\,ds =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(\tau - t)\,U(\tau)\,u\,d\tau = u_{f_t},$$

donde:

$$\bullet\, U(t)Au_f = -iU(t)u_{-f'} = -iu_{(-f')_t} = -iu_{-(f_t)'} = Au_{f_t} = AU(t)\,u_f,$$

ou seja, $U(t)$ comuta com A em D. Provemos que A é *essencialmente auto-adjunto* em D; D é denso, como já vimos, e A é aí simétrico, pois:

$$(Au_f, v_g) = (-i\lim_{t\to 0}\frac{U(t)\,u_f - u_f}{t}, v_g) = -i\lim_{t\to 0}(u_f, \frac{U(-t)\,v_g - v_g}{t}) =$$
$$= \lim_{t\to 0}(u_f, -i\frac{U(-t)\,v_g - v_g}{-\,t}) = (u_f, Av_g),$$

$\forall u, v \in \mathcal{H}$, $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Basta então verificar que $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$ (*cf.* Corolário 2 do Teorema 1.5); se $v \in D(A^*)$ e $A^*v = \pm iv$, então $\forall u \in D(A) = D$:

$$\frac{d}{dt}(U(t)\,u, v) = (\lim_{h\to 0}\frac{U(t+h)\,u - U(t)\,u}{h}, v) = (U(t)\lim_{h\to 0}\frac{U(h)\,u - u}{h}, v) =$$
$$= (iU(t)Au, v) = (iAU(t)\,u, v) = i(U(t)\,u, A^*v) =$$
$$= i(U(t)\,u, \pm iv) = \pm(U(t)\,u, v).$$

Como $(U(0)\,u, v) = (u, v)$, concluímos que:

$$\bullet\, (U(t)\,u, v) = e^{\pm t}(u, v),$$

$\forall t \in \mathbb{R}$; ora:

$$e^{\pm t}|(u, v)| = \left|e^{\pm t}(u, v)\right| = |(U(t)\,u, v)| \leq \|u\|\|v\|\,,\,\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow (u, v) = 0.$$

Como u é arbitrário em D (denso em $\mathcal{H}$) concluímos que, de facto, $v = 0$ e portanto A é *essencialmente auto-adjunto*. Provemos que:

$$\bullet\, U(t) = e^{it\overline{A}}\,,\,\forall t \in \mathbb{R}.$$

Basta, obviamente, provar que os dois grupos coincidem em D (por densidade de D e continuidade dos operadores); ora se $u_0 \in D$, pelo que atrás vimos, $U(t)\,u_0 \in D$ e $u(t) = U(t)\,u_0$ $(t \in \mathbb{R})$ é solução diferenciável da equação:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = iAu \,(\, = i\overline{A}u)\,,\; t \in \mathbb{R} \\ u(0) = u_0 \end{cases},$$

e portanto, pela Proposição 8.3–5, $U(t)\,u_0 = e^{it\overline{A}}\,u_0, \forall t \in \mathbb{R}.\square$

No caso particular em que $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, o exercício 48 (Capítulo 2) e a unicidade do cálculo operacional garantem que:

$$\bullet\; \Phi_A(e^{it\widehat{\lambda}}) = e^{itA} = \sum_{n \in \mathbb{N}_1} \frac{(itA)^n}{n!},$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, o que mostra a coerência da notação adoptada. Neste caso a aplicação $t \mapsto \exp\,(itA)$ é mesmo contínua de $\mathbb{R}$ *em* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e diferenciável *também no sentido de* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (*cf.* exercício 30, Capítulo 2). A recíproca *também é verdadeira*; mais precisamente, todo o grupo unitário $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *uniformemente contínuo* (ou seja, *contínuo de* $\mathbb{R}$ *em* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) é igual a $(\exp\,(itA))_{t\in\mathbb{R}}$ para certo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Basta demonstrar a *diferenciabilidade* no sentido de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, pois, nesse caso, $U(t)\,u$ será *diferenciável* em $t = 0, \forall u \in \mathcal{H}$, o que implicará que $D(A) = \mathcal{H}$ e um operador auto-adjunto com domínio igual a $\mathcal{H}$ é contínuo (Teorema de Hellinger-Toeplitz — *cf.* Introdução); ora, de:

$$U(t) \xrightarrow[t\to 0]{} I$$

em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e da continuidade de $U(t)$ conclui-se facilmente que:

$$\bullet\; \frac{1}{h}\int_0^h U(t)\,dt \xrightarrow[t\to 0]{} I.$$

Portanto, para $h > 0$ suficientemente pequeno, $\int_0^h U(t)\,dt$ é operador *invertível* em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; logo:

$$\frac{U(t)-I}{t}\int_0^h U(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_t^{t+h} U(s)\,ds - \frac{1}{t}\int_0^h U(s)\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{U(t)-I}{t} = \frac{1}{t}\Big(\int_t^{t+h} U(s)\,ds - \int_0^h U(s)\,ds\Big)\Big(\int_0^h U(s)\,ds\Big)^{-1} \xrightarrow[t\to 0]{}$$

$$\xrightarrow[t\to 0]{} (U(h)-I)\Big(\int_0^h U(s)\,ds\Big)^{-1},$$

e portanto $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é, de facto, *uniformemente* diferenciável em $t = 0$, logo, de facto, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Se

$$U(t) = e^{itA}\,, \forall t \in \mathbb{R},$$

sendo $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador auto-adjunto no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, A diz-se ***gerador infinitesimal do grupo unitário*** $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ que se diz ***gerado*** por

A. Muitas vezes é o operador iA que é designado por *gerador infinitesimal*, pois a definição da exponencial pode ser feita, mantendo propriedades essenciais desta função, para uma classe de operadores mais vasta que a considerada — ou seja, que os iA com A *auto-adjunto*. Trata-se da chamada *Teoria dos semi-grupos de operadores* (fortemente contínuos); veremos mais adiante um exemplo, construído ainda a partir de um operador auto-adjunto.

8.4 A fórmula de Trotter-Lie e a formulação de Feynman da Mecânica Quântica

Do exercício 30 – b), e) (Capítulo 2) podemos facilmente concluir que se A, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $AB = BA$, então:

$$\bullet\ e^{it(A+B)} = e^{itA}e^{itB}\ ,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

e para quaisquer $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$\bullet\ e^{it(A+B)} = \lim_n \,(e^{i\frac{t}{n}A}e^{i\frac{t}{n}B})^n,\ \forall t \in \mathbb{R}\ \textit{(fórmula de Lie)};$$

põe-se a questão de saber em que medida, no caso de A, B serem operadores auto-adjuntos, não necessariamente em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, se pode exprimir exp $(it(A+B))$ a partir de exp (itA) e exp (itB). Note-se que *nem sempre $A+B$ é auto-adjunto* ainda que A e B o sejam, pelo que não podemos esperar obter um resultado para A, B arbitrários; existe uma vasta literatura que examina o problema de definições mais gerais de *soma de operadores* em consonância com fórmulas relacionando a *"exponencial da soma"* com *"produtos de exponenciais"*, restando ainda importantes questões em aberto neste domínio. Limitar-nos-emos a analisar um resultado no caso mais simples em que é feita a hipótese (necessária para definir exp $(it(A+B))$ no sentido habitual) de $A+B$ ser, conjuntamente com A e B, operador auto-adjunto:

TEOREMA 8.6 (Fórmula de Trotter para grupos unitários): ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}, B : D(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operadores auto-adjuntos tais que $A+B : D(A+B) = D(A) \cap D(B) \to \mathcal{H}$ é auto-adjunto; então para todo o $T > 0$:***

(56) $$e^{it(A+B)}\,u = \lim_n \,(e^{i\frac{t}{n}A}e^{i\frac{t}{n}B})^n\,u,$$

$\forall u \in \mathcal{H}$, uniformemente em $t \in [-T, T]$.

Demonstração: Comecemos por notar que em qualquer *anel* com unidade:

$$C^n - D^n = C^n - C^{n-1}D + C^{n-1}D - C^{n-2}D^2 + \cdots + CD^{n-1} - D^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} C^{n-k-1}(C-D)D^k,$$

$\forall n \in \mathbb{N}_1$. Então:

$$\sup_{t\in[-T,T]}\left\|(e^{i\frac{t}{n}A}e^{i\frac{t}{n}B})^n\, u - e^{it(A+B)}\, u\right\| =$$

$$= \sup_{t\in[-T,T]}\left\|((e^{i\frac{t}{n}A}e^{i\frac{t}{n}B})^n - (e^{i\frac{t}{n}(A+B)})^n)\, u\right\| \leq \sup_{t\in[-T,T]}\left\|\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\frac{t}{n}A}e^{i\frac{t}{n}B})^{n-k-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot(e^{i\frac{t}{n}A}e^{i\frac{t}{n}B} - e^{i\frac{t}{n}(A+B)})(e^{i\frac{t}{n}(A+B)})^k u\right\| \leq \sup_{t\in[-T,T]}\sum_{k=0}^{n-1}\left\|(e^{i\frac{t}{n}A}e^{i\frac{t}{n}B} - e^{i\frac{t}{n}(A+B)})\cdot\right.$$

$$\left.\cdot e^{i\frac{tk}{n}(A+B)}u\right\| \leq \sup_{t\in[-T,T]}\left(nt\sup_{s\in[-T,T]}\left\|\frac{e^{i\frac{t}{n}A}e^{i\frac{t}{n}B} - e^{i\frac{t}{n}(A+B)}}{t}e^{is(A+B)}u\right\|\right) \leq$$

$$\leq T\sup_{h\in[-\frac{T}{n},\frac{T}{n}]}\sup_{s\in[-T,T]}\left\|\underbrace{\frac{e^{ihA}e^{ihB} - e^{ih(A+B)}}{h}}_{L(h)}e^{is(A+B)}u\right\|.$$

Basta-nos, portanto, demonstrar que, para cada $u \in \mathcal{H}$,

$$L(h)\, v \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

uniformemente em

$$v \in \{e^{is(A+B)}u : s \in [-T,T]\}.$$

Basta mesmo fazer a demonstração para $u \in D(A+B)$, parte densa de $\mathcal{H}$, pois o caso geral resulta deste por simples argumento "do tipo $\delta/3$", atendendo a que os operadores envolvidos têm todos norma igual a 1 [exercício: demonstrar o caso geral de $u \in \mathcal{H}$ a partir do caso $u \in D(A+B)$]. Seja então $v \in D(A+B)$; temos:

$$\begin{aligned}\|L(h)\, v\| &= \left\|e^{ihA}\frac{e^{ihB}v - v}{h} + \frac{e^{ihA}v - v}{h} - \frac{e^{ih(A+B)}v - v}{h}\right\| = \\ &= \left\|e^{ihA}\Big(\frac{e^{ihB}v - v}{h} - iBv\Big) + (e^{ihA}iBv - iBv) + \right. \\ &\quad\left. + \Big(\frac{e^{ihA}v - v}{h} - iAv\Big) + \Big(i(A+B)v - \frac{e^{ih(A+B)}v - v}{h}\Big)\right\| \leq \\ &\leq \left\|\frac{e^{ihB}v - v}{h} - iBv\right\| + \|e^{ihA}Bv - Bv\| + \\ &\quad + \left\|\frac{e^{ihA}v - v}{h} - iAv\right\| + \left\|\frac{e^{ih(A+B)}v - v}{h} - i(A+B)v\right\| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Ora $D(A+B)$ é *espaço de Hilbert* para a *norma do gráfico*

$$\|v\|^2_{A+B} = \|v\|^2 + \|(A+B)v\|^2,$$

visto $A+B$ ser auto-adjunto e portanto *fechado*, e $L(h)$ é obviamente *contínuo* de $D(A+B)$ em $\mathcal{H}$ (com as respectivas topologias de espaço de Hilbert), $\forall h > 0$. Do facto de

$$L(h)\,v \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

e da *continuidade forte* dos grupos unitários envolvidos na definição de $L(h)$ concluímos que para cada $v \in D(A+B)$ é *limitado* o conjunto:

$$\bullet\ \{L(h)\,v : h \in [-T,T]\};$$

pelo *Teorema da limitação uniforme* (*cf.* [Ru1], [Sa], por exemplo) concluímos que existe $M > 0$ tal que:

$$\bullet\ \|L(h)\|_{\mathcal{L}(D(A+B),\mathcal{H})} \leq M\,,\ \forall h \in [-T,T],$$

donde é fácil concluir que a convergência $L(h)\,v \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ é *uniforme* nos *compactos* de $D(A+B)$. Com efeito, se K for compacto de $D(A+B)$,

$$\forall v \in K, \delta > 0, \exists \varepsilon_v > 0 : |h| < \varepsilon_v \Rightarrow \|L(h)\,v\| < \frac{\delta}{2},$$

donde:

$$\begin{aligned}\|w-v\| < \frac{\delta}{2M} \Rightarrow \|L(h)\,w\| &\leq \|L(h)(w-v)\| + \|L(h)\,v\| \leq \\ &\leq M\|w-v\| + \frac{\delta}{2} < \delta\,,\ \forall h : |h| < \varepsilon_v.\end{aligned}$$

Como K é coberto pelas bolas $B(v, \delta/2M)$ (de $D(A+B)$) com $v \in K$, será coberto por um número finito dessas bolas,

$$B(v_1, \frac{\delta}{2M}), \ldots, B(v_k, \frac{\delta}{2M});$$

tomando $\varepsilon > 0$ igual ao menor dos ε_{v_i} $(i = 1, \ldots, k)$, ter-se-á:

$$|h| < \varepsilon \Rightarrow \|L(h)\,w\| < \delta\,,\ \forall w \in K.$$

Resta então demonstrar que $\{e^{is(A+B)}u : s \in [-T,T]\}$ é um compacto de $D(A+B)$, para $u \in D(A+B)$, o que é consequência imediata da continuidade de

$$s \mapsto e^{is(A+B)}u$$

de $\mathbb{R}$ em $D(A+B)$, facto já conhecido (Proposição 8.3–5).□

O resultado anterior foi obtido, no caso da dimensão finita, por Lie e generalizado por Trotter (em 1959) ao caso de *semi-grupos de contracção* em espaços de Banach arbitrários, na situação, mais geral do que a atrás examinada, em que $A+B$ tem por *fecho* o gerador de um semi-grupo de contracção, o que corresponde, no nosso caso, a $A+B$ ser apenas *essencialmente auto-adjunto* e, evidentemente, substituindo este operador, na fórmula de Trotter, por $\overline{A+B}$. A demonstração nesse caso é bastante mais elaborada; a que acabámos de ver é simples adaptação do caso da dimensão finita (*cf.* exercício 30 – e)). Desconhece-se quais as condições mais gerais em que existe o limite do segundo membro de (56), embora sejam conhecidos casos em que tal limite *não existe* (*cf.*, por exemplo, [C]).

Procuremos aplicar os resultados anteriores às *equações de Schrödinger* (50) e (51). Comecemos por estudar o operador auto-adjunto que intervém em (50). A menos de produto por uma constante *real* é natural interpretá-lo como o *quadrado* do operador $A = \overline{A_1}$ estudado no exercício 18 (Capítulo 1); tem-se:

- $D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : u$ é absolutamente contínua e $u' \in L^2(\mathbb{R})\}$,
- $Au = -i\dfrac{du}{dx}$, $\forall u \in D(A)$,

sendo A *essencialmente auto-adjunto* em $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Sabemos então, pela Proposição 1.7, que A^2 é também auto-adjunto, tendo-se

- $D(A^2) = \{u \in L^2 : u \in C^1, u'$ é absolutamente contínua e $u', u'' \in L^2\}$,
- $A^2u = -i\dfrac{d}{dx}\Big(-i\dfrac{du}{dx}\Big) = -\dfrac{d^2u}{dx^2}$, $\forall u \in D(A^2)$,

(*cf.* exercício 132), *infra*, para o estudo mais pormenorizado do domínio de $D(A^2)$). As propriedades da *Transformação de Fourier* permitem-nos dar uma caracterização mais útil de A^2 e apresentar uma fórmula explícita do *grupo gerado* por este operador. Comecemos por notar que se $u \in L^1 \cap L^2$, u é absolutamente contínua e $u' \in L^1 \cap L^2$, então, pela Proposição 3.8–4:

- $\mathcal{F}(-i\dfrac{du}{dx}) = -i\mathcal{F}(\dfrac{du}{dx}) = -i.i\widehat{x}\mathcal{F}(u) = \widehat{x}\mathcal{F}(u).$

Ora $\mathcal{F}$ é *unitário* de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ (Teorema 3.9) e A é essencialmente auto-adjunto no conjunto dos u satisfazendo às condições que acabámos de enunciar (visto o ser no espaço *menor* $C_0^\infty(\mathbb{R})$). Daqui se conclui facilmente que:

- $-i\dfrac{d}{dx} = A = \mathcal{F}^{-1}T_{\widehat{x}}\mathcal{F}.$

Mas é fácil verificar que:

$$(T_{\widehat{x}})^2 = T_{\widehat{x}^2},$$

visto tratar-se de operadores auto-adjuntos e, obviamente, $(T_{\widehat{x}})^2 \subset T_{\widehat{x}^2}$; logo:

$$-\frac{d^2}{dx^2} = A^2 = (\mathcal{F}^{-1}T_{\widehat{x}}\mathcal{F})^2 = \mathcal{F}^{-1}(T_{\widehat{x}})^2\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}T_{\widehat{x}^2}\mathcal{F}.$$

Pela unicidade do cálculo simbólico limitado concluímos que:

- $e^{it\frac{d^2}{dx^2}} = \Phi_{A^2}(e^{-it\widehat{\lambda}}) = \mathcal{F}^{-1}T_{e^{-it\widehat{x}^2}}\mathcal{F}$, $\forall t \in \mathbb{R}.$

Como $\exp(-it\widehat{x}^2)$ não está em L^1 nem em L^2 não é fácil o cálculo explícito directo das Transformadas de Fourier; comecemos por substituir it por $\alpha \in \mathbb{C}$ com

$\Re\,\alpha > 0$. Nesse caso $\exp(-\alpha\widehat{\lambda}) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$, mas como:

$$\sigma(A^2) = \sigma(T_{\widehat{x}^2}) = R_{\text{ess}}(\widehat{x}^2) = [0, +\infty[$$

(como é fácil concluir), podemos, para este efeito, substituir $\exp(-\alpha\widehat{\lambda})$ por:

$$\bullet\; g_\alpha(\widehat{\lambda}) = e^{-\alpha\widehat{\lambda}}\chi_{[0,+\infty[}(\widehat{\lambda}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Então, supondo que

$$e^{-\alpha\widehat{x}^2} = \widehat{v},$$

para certo $v \in L^1$ (o que provaremos depois), obtemos, para todo o $u \in L^2 \cap L^1$:

$$\begin{aligned} g_\alpha(-\frac{d^2}{dx^2})\,u &= \Phi_{A^2}(g_\alpha)\,u = \mathcal{F}^{-1}(e^{-\alpha\widehat{x}^2}\mathcal{F}u) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{v}.\mathcal{F}u) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{v}.\widehat{u}) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}}_{=\,\check{\cdot}}(\widehat{v * u}) = v * u = e^{-\alpha\widehat{x}^2}\check{}\; * u \end{aligned}$$

(*cf.* Capítulo 3). Ora é óbvio que $\exp(-\alpha\widehat{x}^2) \in L^1$, donde:

$$\begin{aligned} v = e^{-\alpha\widehat{x}^2}\check{} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\widehat{x}y}e^{-\alpha y^2}\,dy = \frac{e^{-\frac{\widehat{x}^2}{4\alpha}}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{\alpha}y - i\frac{\widehat{x}}{2\sqrt{\alpha}})^2}\,dy = \\ &= \frac{e^{-\frac{\widehat{x}^2}{4\alpha}}}{2\pi}\lim_{C\to+\infty}\int_{-C}^{C} e^{-(\sqrt{\alpha}y - i\frac{\widehat{x}}{2\sqrt{\alpha}})^2}\,dy; \end{aligned}$$

o limite pode ser calculado utilizando caminhos convenientes no plano complexo; se $\alpha = r\exp(i\theta)$ $(r > 0, \theta \in\,]-\pi/2, \pi/2[$, visto que $\Re\,\alpha > 0)$ seja:

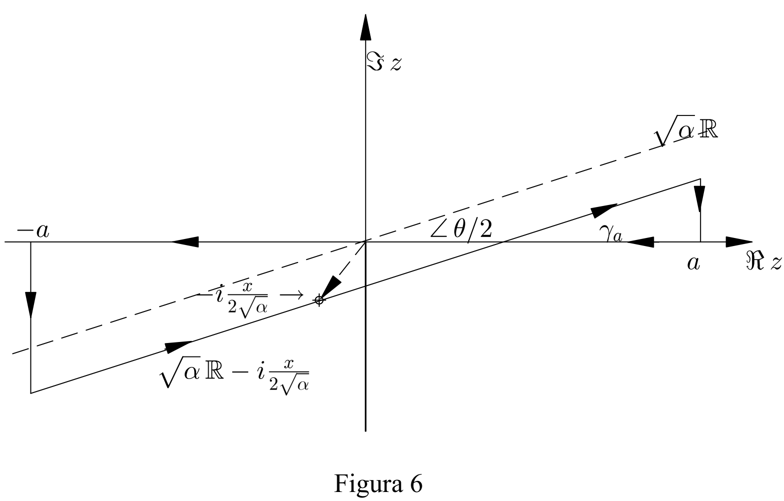


Figura 6

Fixado $x \in \mathbb{R}$, é fácil concluir que, sendo γ_a o caminho

$$t \mapsto \sqrt{\alpha}\, t - i\frac{x}{2\sqrt{\alpha}}$$

$(\Re\, \gamma_a(t) \in [-a, a])$, o limite em questão é dado por:

$$\bullet\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \lim_{a \to +\infty} \int_{\gamma_a} e^{-z^2}\, dz;$$

ora o integral, ao longo do circuito figurado, de $\exp\left(-z^2\right)$ é *nulo* pelo Teorema de Cauchy e os integrais ao longo dos segmentos verticais tendem para zero quando $a \to +\infty$, por um cálculo simples em que intervém o facto de $\theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ [exercício]. Portanto o limite procurado coincide com o integral *ao longo de* $\mathbb{R}$ de $\exp\left(-z^2\right)$, ou seja:

$$v = \check{e^{-\alpha \hat{x}^2}} = \frac{e^{-\frac{\hat{x}^2}{4\alpha}}}{2\pi\sqrt{\alpha}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\, dt}_{= \sqrt{\pi}} = \frac{e^{-\frac{\hat{x}^2}{4\alpha}}}{\sqrt{4\pi\alpha}},$$

donde, representando $g_\alpha(-d^2/dx^2)$ por $e^{\alpha \frac{d^2}{dx^2}}$:

(57) $$e^{\alpha \frac{d^2}{dx^2}} u = v * u = \frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\hat{x}-y)^2}{4\alpha}} u(y)\, dy,$$

$\forall u \in L^2 \cap L^1, \alpha \in \mathbb{C}$ t.q.: $\Re\, \alpha > 0$. Tomando $\alpha = it + 1/n\ (n \in \mathbb{N}_1)$, conclui-se facilmente, pelas propriedades do cálculo operacional, que:

$$\bullet\ e^{\left(it + \frac{1}{n}\right)\frac{d^2}{dx^2}} u \underset{n}{\longrightarrow} e^{it \frac{d^2}{dx^2}} u\,,\ \forall u \in L^2;$$

por outro lado, se $u \in L^2 \cap L^1$:

$$\bullet\ \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{4\left(it+\frac{1}{n}\right)}} u(y) \right| = \left| e^{-\frac{(x-y)^2}{4\left(t^2+\frac{1}{n^2}\right)}\left(\frac{1}{n} - it\right)} \right| |u(y)| = \underbrace{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\left(nt^2+\frac{1}{n}\right)}}}_{\leq 1} |u(y)| \leq |u(y)|,$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, donde, pelo Teorema de Lebesgue (uma vez que $u \in L^1$):

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\left(it + \frac{1}{n}\right)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\hat{x}-y)^2}{4\left(it+\frac{1}{n}\right)}} u(y)\, dy \underset{n}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\hat{x}-y)^2}{4it}} u(y)\, dy,$$

$\forall u \in L^2 \cap L^1, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$. Como, da convergência L^2, concluímos que, $\forall u \in$ $\in L^2 \cap L^1, t \in \mathbb{R}$, pelo menos para uma subsucessão:

$$e^{\left(it + \frac{1}{n}\right)\frac{d^2}{dx^2}} u \underset{n}{\longrightarrow} e^{it \frac{d^2}{dx^2}} u\,,\ p.p. \text{ em } \mathbb{R},$$

obtemos:

$$\bullet\ e^{it\frac{d^2}{dx^2}}u = \frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\widehat{x}-y)^2}{4it}}u(y)\,dy\,,\ p.p.\ \text{em}\ \mathbb{R},$$

$\forall u \in L^1 \cap L^2$. Se $u \in L^2$, podemos considerar

$$u_n = u\chi_{[-n,n]} \underset{n}{\longrightarrow} u$$

em L^2, $u_n \in L^1 \cap L^2$ $(n \in \mathbb{N}_1)$, e portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_{-n}^{n} e^{-\frac{(\widehat{x}-y)^2}{4it}}u(y)\,dy = e^{it\frac{d^2}{dx^2}}u_n \underset{n}{\longrightarrow} e^{it\frac{d^2}{dx^2}}u$$

em L^2; designando por

$$\text{l.m.q.}\int_{\mathbb{R}}$$

(*"limite em média quadrática dos integrais em domínios limitados convergindo para* $\mathbb{R}$*"*[83]), o limite, em L^2, de integrais paramétricos em $[-n,n]$ quando $n \to +\infty$, obtemos:

$$\bullet\ e^{it\frac{d^2}{dx^2}}u = \text{l.m.q.}\frac{1}{\sqrt{4\pi it}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\widehat{x}-y)^2}{4it}}u(y)\,dy,$$

$\forall u \in L^2$. A solução de (50) é então obtida substituindo t por $(\hbar/2m)t$, o que dá:

(58) $$\bullet\ e^{it\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}}u = \text{l.m.q.}\frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar t}}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\left(\frac{\widehat{x}-y}{t}\right)^2 t}u(y)\,dy,$$

$\forall u \in L^2, t \in \mathbb{R}$. Notemos que o expoente na função integranda contém a quantidade:

$$\bullet\ \frac{1}{2}m\left(\frac{x-y}{t}\right)^2 t,$$

que é o produto por t da *energia cinética* de uma partícula de massa m que se mova com velocidade constante igual a $(x-y)/t$; trata-se portanto do *integral* entre 0 e t da *energia cinética* de uma partícula de massa m que se mova, com movimento *rectilíneo* e *uniforme* entre os pontos y e x no tempo t. Como, neste caso, a energia potencial é *nula* (visto o movimento ser rectilíneo e uniforme), aquela quantidade não é mais que o clássico *integral de acção* entre 0 e t para a partícula:

$$\bullet\ S(\omega) = \int_0^t L(\dot{\omega}(s), \omega(s), s)\,ds,$$

onde L é o *Lagrangiano* do sistema constituído pela partícula *livre*. Em princípio $L = T - V =$ *energia cinética* $-$ *energia potencial*; neste caso reduz-se a T. ω é

---

[83]Também se utiliza a abreviatura inglesa, mais sugestiva, l.i.m. "limit in mean".

a *trajectória* da partícula, $\dot{\omega}$ a *velocidade*. Esta interpretação é consistente com o facto de a constante de Dirac $\hbar$ ter *dimensões físicas de acção* (energia $\times$ tempo), e sugere que procuremos uma representação do grupo unitário associado à equação de Schrödinger em que intervenham *trajectórias* ("caminhos") em lugar de "posições " individuais de partículas; procuremos então saber o que se passa em instantes sucessivos separados por intervalos de tempo arbitrariamente pequenos. Para isso convém-nos considerar a divisão do intervalo $[0,t]$ em n partes iguais $(n \in \mathbb{N}_1)$ e aplicar a propriedade do grupo, utilizando (58); omitindo, por comodidade de escrita os "l.m.q.", obtemos:

$$\begin{aligned}
e^{it\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}}u(x) &= (e^{i\frac{t}{n}\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}})^n u(x) = \\
&= \Big(\frac{mn}{2\pi i\hbar t}\Big)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{t/n}\right)^2 \frac{t}{n}} u(x_0)\,dx_0 \dots dx_{n-1}
\end{aligned} \tag{59}$$

(onde $x = x_n$). A "fase" da exponencial no último membro de (59) é (em *unidades de $\hbar$ — quantum de acção*), a *acção clássica* correspondente a uma *trajectória poligonal* passando pelos pontos $x_0, \dots, x_n$ em instantes sucessivos jt/n $(j = 0, \dots, n)$, ou seja, com *movimento rectilíneo e uniforme* entre cada dois pontos x_j, x_{j+1} $(j = 0, \dots, n-1)$. Intuitivamente, à medida que n aumenta, o conjunto das trajectórias poligonais *aproxima* o conjunto de *todas* as trajectórias partindo de x_0 no instante 0 e chegando a $x = x_n$ no instante t; designando por

$$\Omega^t_{x_0,x}$$

este *espaço de trajectórias* seria natural esperar que, *no limite em n* se obtivesse um integral em $\Omega_{x_0,x}$ relativamente a certa medida que incorporasse também os "limites" das constantes que intervêm na fórmula (59), o que corresponderia a uma fórmula do tipo:

$$\text{“}e^{it\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}}u(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Omega^t_{x_0,x}} e^{\frac{i}{\hbar}S(\omega)}\,d\omega \right) u(x_0)\,dx_0\text{”}, \tag{60}$$

onde:

- $$S(\omega) = \int_0^t L(\dot{\omega}(s), \omega(s), s)\,ds$$

é o *integral de acção* ou simplesmente *acção* (lagrangiana) associada à *trajectória* $\omega \in \Omega^t_{x_0,x}$ e $d\omega$ a "medida" referida. O "integral" em $\Omega^t_{x_0,x}$ que intervém na fórmula (60) traduz essencialmente a *formulação de Feynman da Mecânica Quântica* apresentada por aquele físico em 1948 em famoso artigo publicado nos "Reviews of Modern Physics". Na formulação clássica, a cada sistema físico é associada, em cada instante, uma função de onda ψ que funciona como *amplitude de probabilidade* das medidas de posição, ou seja, $\int_\Omega |\psi|^2$ é a probabilidade de obter um resultado positivo numa experiência destinada a averiguar se o sistema se encontra na região Ω do espaço nesse instante. A *linearidade* da equação de Schrödinger (princípio, já citado, da *sobreposição dos estados*), traduz o facto de a amplitude associada a uma experiência decomponível em alternativas mais simples ser a soma das amplitudes associadas a cada experiência elementar; é o que se passa, por exemplo, na experiência descrita nas figuras 2 e 3 da Introdução. Designando por ψ_1, ψ_2 as funções de onda respectivamente associadas às experiências figuradas em 3-(b) e 3-(c), a função de onda associada à experiência inicial (com os dois orifícios abertos) será, a menos de normalização, $\psi_1 + \psi_2$; na figura 3 apresenta-se sucessivamente os gráficos de $|\psi_1 + \psi_2|^2, |\psi_1|, |\psi_2|$ e $|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$. O facto de $|\psi_1 + \psi_2|^2 \neq |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$ traduz a diferença entre a teoria *quântica* e a teoria *clássica*. A ideia de Feynman consiste fundamentalmente em, fixado um sistema físico, associar um *amplitude de probabilidade*, não a cada instante e posição, mas a cada *trajectória* no espaço onde evolui o sistema dado; ou seja, em lugar de "$\psi(x,t)$" passaremos a ter "$\psi(\omega)$". Experimentalmente, podemos procurar "concretizar" a ideia de Feynman, complicando a experiência anterior pela interposição entre o emissor e C (*cf.* fig. 2 e 3) de mais écrans com mais orifícios. A cada sucessão de orifícios dos diferentes écrans corresponde determinada amplitude de probabilidade e a amplitude de probabilidade correspondente à experiência com todos os orifícios abertos será a soma de todas as amplitudes correspondentes a cada sucessão de orifícios. Esquematicamente:

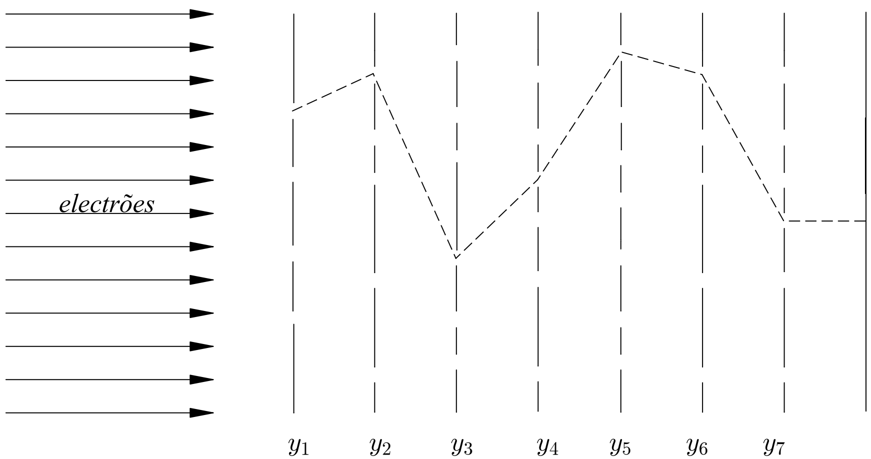


Figura 7

Na figura está representada, a tracejado, uma possível sucessão de orifícios a que corresponde determinada amplitude de probabilidade $\psi_{y_1^0 \ldots y_7^0}$, tendo-se:

$$\psi = \sum_{y_1} \cdots \sum_{y_7} \psi_{y_1 \ldots y_7}$$

(sendo ψ a amplitude de probabilidade correspondente à experiência com todos os orifícios abertos).

Mas outro conjunto de hipóteses alternativas é considerar as sucessões de orifícios conjuntamente com o tempo de passagem por cada orifício; se agora aumentarmos indefinidamente o número de écrans e a densidade de orifícios em cada écran, no limite concluiremos que a probabilidade de um electrão ter movimento em dada região do espaço-tempo deve ser o quadrado do módulo de um número complexo ψ obtido como "soma" (em sentido a precisar) das amplitudes de probabilidade associadas aos diversos movimentos $\omega(t)$ possíveis nessa região do espaço-tempo:

$$\psi = \sum_{\omega(t)} \psi[\omega(t)].$$

Esta equação traduz o *primeiro postulado de Feynman para a Mecânica Quântica*:

PF–1 — *Efectuando uma medição ideal destinada apenas a determinar se uma partícula tem movimento em dada região do espaço-tempo, a probabilidade de o resultado ser afirmativo é o quadrado do módulo de uma soma de contribuições complexas, uma por cada movimento nessa região.*

A ideia de Feynman é precisamente definir a amplitude de probabilidade de cada trajectória entre a e b a partir da acção S dessa trajectória. A amplitude de probabilidade de uma trajectória $\omega(t)$ é um número complexo:

$$\psi[\omega(t)] = C[\omega(t)]\, e^{i\theta[\omega(t)]}$$

(onde $C[\omega(t)] = |\psi[\omega(t)]|$); Feynman postula que cada trajectória contribui igualmente em módulo para a amplitude total mas que a fase θ é a acção lagrangiana da trajectória, em unidades de $\hbar$. Ou seja:

$$\psi[\omega(t)] = C\, e^{\frac{i}{\hbar}S[\omega(t)]}.$$

Temos assim o *segundo postulado de Feynman*:

PF–2 — *As trajectórias contribuem igualmente em módulo, mas a fase da respectiva contribuição é a acção clássica, em unidades de $\hbar$, ou seja, é proporcional ao integral temporal do Lagrangiano ao longo da trajectória.*

Daqui resulta que, por exemplo, a probabilidade $P(a,b)$ de uma partícula partir do ponto a no instante t_a e atingir o ponto b no instante t_b é dada por:

$$P(a,b) = |K(t_a, a; t_b, b)|^2$$

onde a quantidade complexa $K(t_a, a; t_b, b)$ é dada por uma "soma" ou "integral generalizado":

$$K(t_a, a; t_b, b) = \sum_{\substack{\omega(t) \\ \omega(t_a)=a \\ \omega(t_b)=b}} C\, e^{\frac{i}{\hbar}S(\omega)}.$$

A fórmula (60) estabelece a coerência entre a *formulação de Feynman* e a *formulação de Schrödinger* da Mecânica Quântica, desde que interpretemos o "integral" em $\Omega^t_{x_0,x}$ como sendo precisamente a "soma" definidora de $K(0, x_0; t, x)$, o que dará, para a solução $u(x,t)$ da equação de Schrödinger:

$$\bullet\ u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} K(0, x_0; t, x)\, u(x_0, 0)\, dx_0,$$

ou seja, para obter a amplitude de probabilidade associada à posição x no instante t "somam-se" as amplitudes de probabilidade associadas a *todas as possíveis trajectórias terminando em x no instante t*. Estas, com efeito, podem decompor-se em duas partes: até ao instante zero e entre zero e t, e é fácil concluir da definição dada por Feynman da amplitude associada a uma trajectória, que amplitudes associadas a trajectórias *sucessivas no tempo* se multiplicam; portanto $K(0, x_0; t, x)\, u(x_0, 0)$ será de facto a amplitude associada ao conjunto de todas as trajectórias que, passando por x_0 no instante 0, atingem x no instante t. Somando em x_0 obtém-se coerentemente, a amplitude associada a (x,t).

A fórmula (60) é uma interpretação heurística de (59) que corresponde ao caso de uma partícula livre, ou seja, à equação (50). No caso da equação (51), em que a partícula está sujeita a um potencial V podemos obter o resultado correspondente a (59) *utilizando a fórmula de Trotter* (56). Então (omitindo, mais uma vez, por abuso de linguagem, os l.m.q.):

$$\begin{aligned} & e^{it\left(\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{V}{\hbar}\right)} u(x) = \lim_n \left(e^{i\frac{t}{n}\frac{\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}} e^{-i\frac{t}{n}\frac{V}{\hbar}}\right)^n u(x) = \\ (61) \qquad & = \lim_n \left(\frac{mn}{2\pi i\hbar t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{t/n}\right)^2 - V(x_j)\right)\frac{t}{n}} u(x_0)\, dx_0 \dots dx_{n-1} \end{aligned}$$

(onde $x = x_n$).

Note-se que agora aparecem *somas de Riemann* para o integral de acção correspondente ao Lagrangiano:

$$\bullet\ L(\dot\omega, \omega, t) = \frac{m}{2}\dot\omega - V(\omega),$$

onde ω percorre, mais uma vez, oconjunto das *trajectórias poligonais* atrás descrito. Podemos, portanto, dar a (61) exactamente a mesma interpretação intuitiva dada a (59), obtendo o segundo membro da fórmula (60) e portanto, também para este caso, a coerência entre as formulações de Feynman e Schrödinger.

Os trabalhos de Feynman levantaram inúmeras questões de carácter matemático, muitas das quais estão ainda longe de terem sido resolvidas. Podemos tomar o limite em (61) como *definição* do integral de Feynman; nesse caso convém procurar as condições mais gerais sobre o potencial V para que se possa obter uma fórmula do tipo Trotter. Nesta direcção subsistem interessantes problemas em aberto. Outro caminho, seria investigar a possibilidade de definir uma medida em certo espaço de trajectórias de modo a obter uma versão rigorosa da fórmula (60); infelizmente encontram-se dificuldades inesperadas, como veremos no capítulo seguinte. Essas dificuldades desaparecem se substituirmos a equação de Schrödinger pela equação do calor, o que corresponde a substituir "it" por "$-t$" no grupo unitário ou a tomar uma "massa" m imaginária. Uma terceira via, de certo modo intermédia, consiste em procurar definir directamente o integral de Feynman como integral do tipo "simplesmente convergente" mas *não a respeito de medida* — os chamados *integrais de Fresnel* (*cf.* [A], [A–HK1], [A–HK2], [Re]). Antes de passarmos a um breve estudo de "medidas em espaços de trajectórias" terminemos esta secção com uma referência ao *limite semi-clássico* da Mecânica Quântica. Uma das características mais interessantes da formulação de Feynman é a facilidade com que transparece a relação entre a Mecânica Quântica e a Mecânica Clássica, sendo esta obtida como o "limite" daquela quando a constante de Dirac $\hbar$ *tende para zero*; com efeito, se na fórmula (60) fizermos $\hbar \to 0$, podemos proceder a uma análise heurística semelhante à efectuada na Introdução ao procurarmos definir o "centro de um grupo de ondas associado a uma partícula clássica", Neste caso, fixando uma trajectória ω_0 em $\Omega^t_{x_0,x}$, o integral "na vizinhança de ω_0" pode ser considerado "soma" de "integrais" em famílias de trajectórias obtidas de ω_0 por pequenas perturbações; podemos, por exemplo, tomar famílias com um parâmetro real α:

$$\bullet\ \omega_\alpha(s) = \omega(\alpha, s) = \omega_0(s) + h(\alpha, s)\ \ (h(0, s) \equiv 0),$$

todos começando em x_0 no instante 0 e terminando em x no instante t (ou seja, $h(\alpha, 0) = h(\alpha, t) = 0$). desenvolvendo "em torno de ω_0" obtemos:

$$e^{\frac{i}{\hbar}S(\omega_\alpha)} \approx e^{\frac{i}{\hbar}\left(S(\omega_0)+\alpha\frac{d}{d\alpha}(S(\omega_\alpha))_{|\alpha=0}\right)} = e^{\frac{i}{\hbar}S(\omega_0)}e^{i\alpha\frac{S(\omega_\alpha)'(0)}{\hbar}};$$

portanto, "integrando em α", o limite quando $\hbar \to 0$ será igual a zero, a menos que:

$$\frac{d}{d\alpha}(S(\omega_\alpha))_{|\alpha=0} = 0\ !$$

neste último caso o integral é "próximo de $\exp\left((i/\hbar)S(\omega_0)\right)$ vezes a "medida" do "domínio de integração". Concluímos assim que, quando $\hbar$ se aproxima de zero, o integral em $\Omega^t_{x_0,x}$ se comporta, a menos de normalização, como:

$$\bullet\ e^{\frac{i}{\hbar}S(\omega_0)}$$

onde ω_0 é a *trajectória que torna estacionária a acção Lagrangiana*, ou seja, segundo o *princípio de menor acção* da Mecânica Clássica, precisamente a trajectória que a partícula deveria seguir entre $(0, x_0)$ e (t, x) segundo a teoria clássica. Recordemos que uma trajectória ω_0 que torne estacionário um integral do tipo:

$$\bullet\ S(\omega) = \int_0^t L(\dot{\omega}(s), \omega(s), s)\, ds$$

satisfaz à chamada equação de Euler (ou Euler-Lagrange):

$$\bullet\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial \omega} = 0.$$

No caso atrás considerado, em que $L = T - V = (m/2)\dot{\omega}^2 - V(\omega)$, virá:

$$\bullet\ m\,\ddot{\omega} = -\frac{\partial V}{\partial \omega}\,(= F),$$

o que não é mais que a *segunda Lei de Newton*, ou equação de Newton para uma partícula sujeita a uma força F, derivada do potencial V (a uma dimensão de espaço).

As considerações anteriores constituem o chamado limite *semi-clássico* da Mecânica Quântica, já que resultam em obter-se a função de onda *no instante* t através da função de onda *no instante* 0 e de um *núcleo de integração* — exp $((i/\hbar)S(\omega_0))$ — *em que só intervêm as trajectórias clássicas* — uma para cada para (x_0, x) — no caso em que se considera $\hbar$ "próximo de zero". O tratamento rigoroso desta questão só foi até agora conseguido, de modo satisfatório, para o caso de potenciais V muito particulares e no quadro da teoria atrás referida dos "integrais de Fresnel" (*cf.* [Re]). Existem também resultados precisos no caso análogo da equação do calor em que "$d\omega$" pode ser definida como medida no sentido habitual, como vamos ver.

Exercícios

131) Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador auto-adjunto, $T > 0$ e $f \in C([-T, T], \mathcal{H})$ (funções contínuas de $[-T, T]$ em $\mathcal{H}$); suponha que existe $u \in C^1([-T, T], \mathcal{H})$ tal que $u(t) \in D(A), \forall t \in [-T, T]$ e:

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = iAu(t) + f(t), \forall t \in [-T, T] \\ u(0) = u_0 \in D(A) \end{cases}.$$

a) Mostre que:

$$\text{(S)} \qquad u(t) = U(t)\, u_0 + \int_0^t U(t-s) f(s)\, ds\,,\ \forall t \in [-T, T],$$

onde $U(t) = e^{itA}$ é o grupo unitário gerado por A [Sugestão: Fixando $a \in [0, T]$, seja, para $A \in [-a, a]$:

$$\bullet\ \Phi(t) = U(a-t)\,u(t);$$

mostre que $\Phi \in C^1([-a,a],\mathcal{H})$ e calcule Φ'].

b) Supondo que $f \in C^1([-T,T],\mathcal{H})$, mostre que (E) tem solução única em $C^1([-T,T],\mathcal{H}) \cap C([-T,T],D(A))$ dada pelo segundo membro de (S).

c) Mostre que a conclusão da alínea b) ainda vale supondo que, para além das hipóteses iniciais do exercício, se tem $f(t) \in D(A)$, *p.p.* em $[-T,T]$, e $Af(\widehat{t}) \in L^1([-T,T],\mathcal{H})$ [Sugestão: Comece por mostrar que se $u \in D(A)$ então:

$$\left\| \frac{U(t)\,u - u}{t} \right\| \leq \|Au\|\,,\ \forall t \in \mathbb{R};$$

no decorrer da demonstração utilize o *Teorema de Lebesgue* para funções com valores num Banach].

132) Sendo A o operador $-id/dx$ em $L^2(\mathbb{R})$ referido neste capítulo, mostre que:

$$\bullet\ D(A^2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}) : u' \text{ é abs. contínua e } u'' \in L^2(\mathbb{R})\},$$

ou seja, verifique que $u \in L^2 \cap C^1, u'$ absolutamente contínua, $u'' \in L^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow u' \in L^2$ [Sugestão: *cf.* exercício 79, Capítulo 3, adaptando a respectiva sugestão; em alternativa, integre por partes o produto $u''\overline{u}$, utilizando também o resultado da integração por partes de $u\overline{u}'$].

133) a) Atendendo a que o operador A^2 do exercício anterior é *unitariamente equivalente* a $T_{\widehat{x}^2}$ (em $L^2(\mathbb{R})$) através da Transformação de Fourier-Plancherel em $L^2(\mathbb{R})$, verifique que A^2 é *essencialmente auto-adjunto* no espaço vectorial C gerado pelas funções da forma:

$$\bullet\ e^{-a\widehat{x}^2} P(\widehat{x}),$$

P polinómio de coeficientes em $\mathbb{C}, a > 0$ [Sugestão: Verifique que as transformadas de Fourier de tais funções são funções da mesma forma e aplique a $T_{\widehat{x}^2}$ o critério de exercício 23, Capítulo 1].

b) Conclua da alínea anterior que A^2 é *essencialmente auto-adjunto* em $C_0^\infty(\mathbb{R})$ [Sugestão: Verifique que

$$\overline{A^2_{/C_0^\infty}} \supset A^2_{/C},$$

aproximando cada função $u \in C$ por uma sucessão do tipo:

$$\bullet\ u_n(x) = \varphi\Big(\frac{x}{n}\Big)u(x),$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), 0 \leq \varphi(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ e $\varphi_{/[0,1]} \equiv 1$].

134) Verifique que

$$\int_{S_a} e^{-z^2}\, dz \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

onde S_a é um dos segmentos verticais da figura 6.

135) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ aberto, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e:

$$\bullet\ L : [a,b] \times \Omega \to \mathbb{R},$$

de classe C^2. Diz-se que x_0 *torna estacionário* o integral:

(i) $$\bullet \int_a^b L(t,x,\dot{x})\, dt$$

se:

$$\bullet\ (x_0(t), \dot{x}_0(t)) \in \Omega\,,\ \forall t \in [a,b],$$

e, para todo o $\varepsilon > 0$ e:

$$\bullet\ h : [-\varepsilon,\varepsilon] \times [a,b] \to \mathbb{R}^N$$

de classe C^2 tal que:

$$\bullet\ h(\alpha,a) = h(\alpha,b) = h(0,t) = 0\,,\ \forall \alpha \in [-\varepsilon,\varepsilon], t \in [a,b],$$

$$\bullet\ (x(t) + h(\alpha,t), \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(\alpha,t)) \in \Omega\,,\ \forall \alpha \in [-\varepsilon,\varepsilon], t \in [a,b],$$

o ponto $\alpha = 0$ for *ponto de estacionaridade* da função:

$$\bullet\ \mathcal{J} : [-\varepsilon,\varepsilon] \to \mathbb{R}$$

$$\bullet\ \mathcal{J}(\alpha) = \int_a^b L(t, x(t) + h(\alpha,t), \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(\alpha,t))\, dt.$$

a) Mostre que se (i) atingir o valor mínimo em x_0 relativamente a uma classe de trajectórias contendo todas as de classe C^2 com a mesma origem e extremidade que x_0, então x_0 torna estacionário o integral (i).

b) Mostre que se x_0 tornar estacionário o integral (i), então x_0 satisfaz às equações *de Euler-Lagrange*:

$$\bullet\ \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(t,x,\dot{x})\Big) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(t,x,\dot{x}) = 0\,,\ i = 1,\ldots,N.$$

c) Mostre que as equações de Newton são as equações de Euler-Lagrange correspondentes ao Lagrangiano:

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m\dot{x}_i^2 - U(x) = T - U = \text{energia cinética} - \text{energia potencial}$$

(para um sistema com N graus de liberdade sujeito a um potencial U, sendo os x_i coordenadas espaciais cartesianas).

136) a) Mostre que para todo o $u \in L^2(\mathbb{R})$ se tem:

$$\left\| e^{it\frac{d^2}{dx^2}} u - \frac{1}{\sqrt{2it}} e^{i\frac{x^2}{4t}} \mathcal{F}u\Big(\frac{\widehat{x}}{2t}\Big) \right\|_2 \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0$$

[Sugestão: Comece por supor que $u \in L^1 \cap L^2$ e tem suporte compacto e procure fazer uma estimativa conveniente da diferença em questão; em seguida conclua com um raciocínio "de tipo $\delta/3$"].

b) Reintroduzindo na alínea a) as constantes $\hbar, m$ que aparecem na equação de Schrödinger e atendendo à interpretação probabilística das funções de onda e das respectivas transformadas de Fourier dadas na Introdução, interprete fisicamente o resultado da alínea a).

137) Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador auto-adjunto.

a) Mostre que se $\Im\,\lambda \geq 0$, então:

$$(A - \lambda)^{-1} = i \int_0^{+\infty} e^{it\lambda}\, e^{-itA} u\, dt,$$

$\forall u \in \mathcal{H}$.

b) Mostre que, para todo o $u \in \mathcal{H}, t \in \mathbb{R}$:

$$e^{-itA} u = \lim_n \Big(I + \frac{it}{n} A\Big)^{-n} u.$$

Capítulo 9

Semi-grupos auto-adjuntos, a Equação do Calor e a medida de Wiener

Como foi sugerido no Capítulo anterior, é de interesse estudar a equação que se obtém de (50) considerando uma "massa" m *imaginária pura* (com parte imaginária *positiva*). Obtém-se, a menos de constantes positivas:

$$\bullet\ \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \tag{62}$$

que é a chamada *equação do calor*, já que, numa das aplicações físicas habituais, (62) rege a evolução da temperatura ψ de uma "barra" modelada pelo domínio de variação de x ($\psi(x,t)$ será, neste caso, a *temperatura* da "barra" no ponto x e no instante t).

Do estudo feito na secção anterior do operador $-d^2/dx^2$ em $L^2(\mathbb{R})$ ressalta que este operador é *auto-adjunto positivo*. Pensemos então, mais geralmente, na equação diferencial (num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$):

$$\bullet\ \frac{du}{dt} = -Au, \tag{63}$$

em que A é operador *auto-adjunto positivo* em $\mathcal{H}$.

9.1 Existência, unicidade e regularidade da solução do problema de Cauchy para uma equação abstracta "de tipo calor"

Considerações idênticas às atrás feitas, permitem supor que as soluções de (63) (em sentido a definir) estarão relacionadas com certos operadores:

$$\bullet\ \text{“}e^{-tA}\text{”}\ (t \in \mathbb{R}).$$

Surge-nos agora dificuldade idêntica à encontrada no capítulo anterior, quando procurávamos definir "$\exp(\alpha\, d^2/dx^2)$" para $\Re\,\alpha > 0$: $\lambda \mapsto \exp(-t\lambda)$ não é limitada em $\mathbb{R}$ (para $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fixo)! podemos, no entanto, resolver a questão do mesmo modo. Consideramos agora:

$$g_t(\lambda) = \begin{cases} e^{-t\lambda} & \text{se } \lambda \geq 0 \\ 0 & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} \tag{64}$$

($t \in [0, +\infty[$), e pomos, por definição:

$$\bullet\; e^{-tA} = \Phi_A(g_t)$$

($t \in [0, +\infty[$). O facto de A ser *positivo* e portanto $\sigma(A) \subset [0, +\infty[$, permite--nos demonstrar a seguinte proposição, análoga à Proposição 8.3:

PROPOSIÇÃO 9.1: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operador auto-adjunto positivo e, para cada $t \geq 0$,***

$$g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

dada por (64). Então, se:

$$S(t) = \Phi_A(g_t) = g_t(A) = e^{-tA}\,,\ \forall t \in [0, +\infty[,$$

tem-se:

1. $\|S(t)\| \leq 1, \forall t \in [0, +\infty[$.
2. $S(t+s) = S(t)S(s), \forall s, t \in [0, +\infty[$.
3. $S(0) = I$.
4. ***A aplicação $t \mapsto S(t)\,u$ é contínua de $[0, +\infty[$ em $\mathcal{H}$, $\forall u \in \mathcal{H}$.***
5. ***$u \in D(A)$ sse existir em $\mathcal{H}$:***

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)\,u - u}{t}.$$

6. ***Se $u_0 \in D(A)$, então $S(t)\,u_0 \in D(A), \forall t \geq 0$ e:***

$$\frac{d}{dt}(S(t)\,u_0) = -AS(t)\,u_0 = -S(t)Au_0\,,\ \forall t \geq 0,$$

sendo $u(t) = S(t)\,u_0$ a única solução diferenciável do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -Au\,,\ em\ [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases};$$

Além disso $u \in C^1(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{H}) \cap C(\mathbb{R}_0^+, D(A))$, tomando em $D(A)$ a norma "do gráfico":

$$\|u\|^2_{D(A)} = \|u\|^2 + \|Au\|^2 \ (u \in D(A)).$$

Demonstração: A demonstração segue linhas idênticas às da Proposição 8.3, sendo os pormenores deixados para os exercícios no final da secção.$\square$

Obtivemos, em particular, um teorema de existência, unicidade e regularidade de solução para a equação (63). Como veremos nos exercícios, este tipo de equações tem propriedades de regularidade distintas das equações de tipo Schrödinger (em particular obtém-se solução C^∞, para $t > 0$, com qualquer condição inicial em $\mathcal{H}$ — *cf.* exercício 139) *infra*); por outro lado, o método utilizado para a construção de $S(t)$ não permite resolver (63) em todo o $\mathbb{R}$, mas apenas para $t \geq 0$, desempenhando, nesse caso, papel fundamental a *positividade* de A. De facto, a Proposição 9.1 não garante que $S(t)$ seja *grupo unitário* mas apenas o que se designa por *semi-grupo fortemente contínuo*, ou seja, uma família $(S(t))_{t\geq 0}$ de operadores *lineares contínuos* num espaço de Banach E satisfazendo às propriedades 2., 3. e 4. da proposição anterior. Neste caso trata-se de semi-grupo *de contracção*, ou seja, satisfazendo ao ponto 1. da mesma proposição. O análogo do Teorema de Stone para semi-grupos fortemente contínuos é o chamado *Teorema de Hille-Yosida-Phillips* (*cf.* [F], [HP], [P]) que garante a existência de *gerador*, em sentido mais geral que o das proposições 8.3 e 9.1, para todo o semi-grupo fortemente contínuo; não nos ocuparemos desta questão que é o núcleo da teoria geral dos semi-grupos em espaços de Banach. No caso em apreço trata-se de um semi-grupo *auto-adjunto*, ou seja $S(t)$ é auto-adjunto (positivo) para cada $t \geq 0$, pelo que se pode utilizar método idêntico ao seguido na demonstração do Teorema de Stone para obter resultado análogo (*cf.* exercício 142) *infra*).

9.2 Fórmula de Trotter e medida de Wiener

É fácil (e deixado como exercício) adaptar a demonstração do Teorema 8.6 de modo a obter resultado análogo para semi-grupos *gerados* por operadores auto-adjuntos *positivos*. Temos assim:

TEOREMA 9.2 (Fórmula de Trotter para semi-grupos auto-adjuntos): ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}, B : D(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ operadores auto-adjuntos positivos, tais que $A + B : D(A + B) = D(A) \cap \cap D(B) \to \mathcal{H}$ é auto-adjunto; então, para todo o $T > 0$:***

$$e^{-t(A+B)}\, u = \lim_n \,(e^{-\frac{t}{n}A} e^{-\frac{t}{n}B})^n\, u, \tag{65}$$

$\forall u \in \mathcal{H}$, uniformemente em $t \in [0, T]$.$\square$

Assinale-se que, ao contrário do que se passa com o caso dos grupos unitários, o limite no segundo membro de (65) existe para *quaisquer* A, B auto-adjuntos positivos, tendo esta questão sido completamente resolvida em notável e relativamente recente artigo de T. Kato ([K]; *cf.* também [RS1] e, para resultados relacionados e bibliografia [BWL], [L]).

O estudo, feito na secção 8.4, do operador $-d^2/dx^2$ em $L^2(\mathbb{R})$ permite aplicar os resultados anteriores a este operador, de modo a obtermos uma solução, no sentido da Proposição 9.1–6, para o problema de Cauchy correspondente à equação (62) em $\mathbb{R}$, para $t > 0$. De (57) deduz-se, em particular, uma fórmula explícita para exp $(-t(-d^2/dx^2))$, que também se designará por exp $(t\, d^2/dx^2)$ em coerência com a notação adoptada na secção 8.4, e, como veremos, com o cálculo operacional geral a desenvolver mais adiante; teremos:

$$\text{(66)} \qquad \bullet\; e^{t\frac{d^2}{dx^2}} u = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(\widehat{x}-y)^2}{4t}} u(y)\, dy,$$

$\forall u \in L^2(\mathbb{R}), t > 0$. Neste caso, como é evidente, a função integranda no segundo membro está em L^1 (está mesmo em todos os L^p com $1 \leq p \leq +\infty$) e o integral que intervém em (66) é portanto tomado no sentido habitual para todo o $u \in$ $\in L^2(\mathbb{R})$, ao contrário do que acontecia com a equação de Schrödinger. Para simplificar as notações, defina-se:

$$\bullet\; p(x, y; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}$$

$(x, y \in \mathbb{R}, t > 0)$, o que reduz (66) a:

$$\text{(67)} \qquad \bullet\; e^{t\frac{d^2}{dx^2}} u = \int_{\mathbb{R}} p(\widehat{x}, y; t)\, u(y)\, dy,$$

$\forall u \in L^2(\mathbb{R}), t > 0$; além disso, no caso $t = 0$, o segundo membro de (67) será interpretado como nova designação para $u(\widehat{x})$, o que torna (67) válida para todo o $t \geq 0$. Podemos agora seguir programa análogo ao desenvolvido no capítulo anterior, no sentido de fazer intervir "trajectórias" na "fórmula resolvente" da equação (62), ou, mais geralmente, da equação *com potencial*:

$$\text{(68)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - V u\,,\ (t, x) \in\ [0, +\infty[\, \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) \text{ em } \mathbb{R} \end{cases},$$

onde:

$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

é *mensurável* e supõe-se *limitada e não negativa* $(V \geq 0)$ para simplificar a aplicação dos resultados teóricos atrás descritos. Notando que, trivialmente, ao operador de multiplicação por V corresponde o semi-grupo:

$$e^{-tT_V} = T_{e^{-tV}}$$

($t \geq 0$ — [exercício!]), e que da Proposição 1.3 e de T_V ser limitado resulta que $-d^2/dx^2 + V$ é *auto-adjunto*, podemos aplicar a estes operadores o Teorema 9.2, o que dá, para solução de (68):

$$
(69) \quad \begin{aligned} u(t,\widehat{x}) = e^{-t\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V\right)}u_0 = \lim_n \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}} p(\widehat{x},x_1;\frac{t}{n})\, p(x_1,x_2;\frac{t}{n}) \ldots \\ \ldots p(x_{n-1},x_n;\frac{t}{n})\, e^{-\frac{t}{n}V(x_1)} \ldots e^{-\frac{t}{n}V(x_n)}\, u_0(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \end{aligned}
$$

(limite tomado em $L^2(\mathbb{R})$, uniforme em $t \in [0,T], \forall T > 0$). Tal como na secção 8.4, podemos interpretar a função integranda no segundo membro de (69) como função da *trajectória* ou *caminho poligonal* que passa pelos pontos $x, x_1, \ldots, x_n$ em sucessivos instantes $0, t/n, 2t/n, \ldots, (n-1)t/n, t$, tendo velocidade uniforme entre jt/n e $(j+1)t/n$ $(j = 0, \ldots, n-1)$; designando tal trajectória por ω, o produto dos "núcleos" $p(x_j, x_{j+1}; t/n)$ $(j = 0, \ldots, n-1$, sendo $x_0 = x)$ é igual a:

$$
(70) \qquad \bullet \left(\frac{n}{4\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4}\int_0^t (\dot{\omega}(s))^2\, ds},
$$

onde $\dot{\omega}$ é a *velocidade* de ω (definida fora dos instantes $0, t/n, \ldots, t$). Intuitivamente, no limite em n, o conjunto das trajectórias poligonais aproxima o conjunto de *todas* de todas as trajectórias definidas em $[0,t]$ e "partindo" de x no instante 0; quanto a (70), note-se que, se por um lado a constante em factor tende claramente para $+\infty$ em n, por outro lado o integral em expoente será igual a $+\infty$ para "quase todas" as trajectórias, já que estas não serão "em geral" sequer diferenciáveis. Pode então esperar-se que o "infinito" da constante seja, no limite, "cancelado" pelo "zero" da exponencial, obtendo-se uma *medida* razoável no espaço das trajectórias *desde que nela se incorpore o "limite" dos núcleos* p; note-se que, no caso da equação de Schrödinger, o "infinito" no expoente não permite anular a exponencial devido à presença do factor "i", o que explica de certa maneira a impossibilidade de, naquele caso, se obter, por este processo, uma verdadeira medida no espaço dos caminhos (como se verá mais adiante).

Procura-se portanto, para cada $x \in \mathbb{R}$, uma medida μ_x no conjunto das trajectórias no espaço unidimensional que começam no instante zero, de tal modo que o integral múltiplo no segundo membro de (69) seja o integral a respeito de μ_x da função:

$$
e^{-\frac{t}{n}V(x_1)} \ldots e^{-\frac{t}{n}V(x_n)}\, u_0(x_n),
$$

considerada como função da trajectória ω através de $x_1 = \omega(t/n), x_2 = = \omega(2t/n), \ldots, x_n = \omega(t)$; esperamos depois poder passar ao limite *debaixo do sinal de "integral $d\mu_x$".*

Este objectivo sugere como deve ser definido o integral a respeito de μ_x de uma função *que dependa apenas de um número finito de coordenadas de caminho* $\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)$. Ora num espaço topológico *compacto* X as medidas regulares ficam univocamente determinadas pelos integrais das funções complexas contínuas em X, *i.e.*, o espaço das medidas borelianas regulares finitas sobre X é isomorfo ao *dual topológico* de $C(X)$, sendo o isomorfismo dado por $\mu \mapsto \int_X .\, d\mu$ (*Teorema de Riesz-Markov*; *cf.*, por exemplo, [RS1], [Ru1], [W] ou

[Sa]); por outro lado, uma forma linear contínua sobre $C(X)$ fica bem definida pelos valores que toma em qualquer subespaço *denso* de $C(X)$, e o *Teorema de Stone-Weierstrass* (*cf. op. cit.* a propósito do T. de Riesz-Markov) fornece um critério de densidade em $C(X)$. Parece que ficaremos com o problema resolvido se pudermos aplicar este critério ao conjunto das funções *"de tipo finito"*, ou seja, as que apenas dependem de um número finito de coordenadas de caminho, uma vez que, como se salientava, temos ideia de como definir o integral de tais funções "$d\mu_x$". No entanto é necessário ultrapassar uma dificuldade prévia; o espaço:

$$\bullet\ \mathbb{R}^{[0,+\infty[}$$

de todas as trajectórias $\omega : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *não é compacto* (nem mesmo *localmente compacto*) para a topologia "natural" — a *topologia produto* (como "produto de cópias de $\mathbb{R}$ indexadas por $t \in [0, +\infty[$")! servimo-nos então do seguinte artifício: substituímos $\mathbb{R}$ pelo respectivo *compactificado de Aleksandroff*

$$\dot{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

e tomamos para *espaço dos caminhos*:

$$\bullet\ X = \dot{\mathbb{R}}^{[0,+\infty[} = \{\omega : [0, +\infty[\to \dot{\mathbb{R}}\},$$

com a *topologia produto*. Como sabemos, a convergência em X, para esta topologia, de uma rede ω_j para ω, significa que há convergência em $\dot{\mathbb{R}}$ de *cada "coordenada"*, ou seja, que:

$$\omega_j(t) \underset{j}{\longrightarrow} \omega(t) \text{ em } \dot{\mathbb{R}}\,,\ \forall t \in [0, +\infty[.$$

O *Teorema de Tychonoff* (*cf.*, por exemplo, [K], [M]) garante que X é compacto, visto ser *produto topológico de espaços compactos*. Uma função

$$\Phi : X \to \mathbb{C}$$

dir-se-á ***de tipo finito*** se existir $n \in \mathbb{N}_1$, uma função:

$$\bullet\ F : \dot{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{C}$$

contínua e:

$$\bullet\ t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

em $[0, +\infty[$, tais que:

$$\bullet\ \Phi(\omega) = F(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n))\,,\ \forall \omega \in X.$$

É fácil verificar que Φ é *contínua* em X [exercício]; designamos por $\boldsymbol{C_{\mathrm{fin}}(X)}$ o ***conjunto das funções de tipo finito***, que constitui, como é fácil verificar, subespaço de $C(X)$ (trata-se mesmo de *subálgebra* [exercício]). Prosseguindo na via conducente à definição de μ_x, passamos agora a definir o *integral* a respeito de μ_x de uma função de tipo finito (como Φ); ou seja, construímos um funcional *linear*:

$$\bullet\ L_x : C_{\text{fin}}(X) \to \mathbb{C}$$
$$\bullet\ \Phi \mapsto L_x(\Phi),$$

pondo:

(71) $$\bullet\ L_x(\Phi) = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} F(x_1, \dots, x_n)\, p(x, x_1; t_1)\, p(x_1, x_2; t_2 - t_1) \dots \\ \dots p(x_{n-1}, x_n; t_n - t_{n-1})\, dx_1 \dots dx_n$$

(no caso de $t_1 = 0$ atribui-se à integração em x_1 o significado referido a propósito de (67), ou seja, tal integração é substituída pelo *valor* de $F(x, x_2, \dots, x_n)$ — obtido por substituição em F da variável x_1 por x. Além disso é fácil verificar que a função integranda é *somável*, dada a natureza de p *e o facto de* F *ser limitada*, visto ser *contínua* no *compacto* X. É necessário verificar que L_x está *bem definido*, pois um mesmo Φ de $C_{\text{fin}}(X)$ pode ser definido por uma infinidade de funções "F" e de famílias "$(t_1, \dots, t_n)$". No entanto, se $(t'_1, \dots, t'_m)$ e G também definirem Φ (sendo, por exemplo, $n \leq m$), é fácil concluir, e deixado como exercício, que, ou F e G são constantes "iguais", nos respectivos domínios, ou existem índices $j_1 < \cdots < j_k, j'_1 < \cdots < j'_k$ em $\{1, \dots, n\}$ e:

$$H : \dot{\mathbb{R}}^k \to \mathbb{C}$$

contínua, tais que:

$$\bullet\ t_{j_l} = t'_{j'_l}\,,\ \forall l \in \{1, \dots, k\},$$
$$\bullet\ F(y_1, \dots, y_{j_1}, \dots, y_{j_k}, \dots, y_n) = H(x_1, \dots, x_k) = \\ = G(z_1, \dots, z_{j'_1}, \dots, z_{j'_k}, \dots, z_m),$$

$\forall x_1, \dots, x_k \in \dot{\mathbb{R}}$, sendo:

$$y_{j_l} = x_l = z_{j'_l}\,,\ \forall l = 1, \dots, k,$$

e os restantes y_r e z_s arbitrários em $\dot{\mathbb{R}}$ $(r = 1, \dots, n, r \neq j_1, \cdots, j_k, s = 1, \dots, m, s \neq j'_1, \cdots, j'_k)$. Em particular F "só depende" das variáveis de índices $j_1, \cdots, j_k$ e G "só depende" das variáveis de índices $j'_1, \cdots, j'_k$ (o caso F, G constantes é obviamente caso particular deste); ora na fórmula (71), as integrações respeitantes a variáveis de que F não dependa, seja por exemplo uma dessas variáveis x_l, reduzem-se a:

(72) $$\int_{\mathbb{R}} p(x_{l-1}, x_l; t_l - t_{l-1})\, p(x_l, x_{l+1}, t_{l+1} - t_l)\, dx_l = \\ = p(x_{l-1}, x_{l+1}; t_{l+1} - t_{l-1})$$

(se $l = n$, o integral respectivo é o de uma *gaussiana*, neste caso igual a 1 e se $l = 1$ deve interpretar-se x_0 como x e t_0 como 0). Note-se que (72) resulta de (67) por aplicação da propriedade de semi-grupo (Proposição 9.1–2.):

$$\bullet\ e^{(t_l - t_{l-1})\frac{d^2}{dx^2}}\, e^{(t_{l+1} - t_l)\frac{d^2}{dx^2}}\, u = e^{(t_{l+1} - t_{l-1})\frac{d^2}{dx^2}}\, u\,,\ \forall u \in L^2(\mathbb{R}),$$

e de simples raciocínio baseado na aritrariedade de u na fórmula anterior. Concluímos então que os segundos membros de (71) correspondentes respectivamente a $((t_1, \dots, t_n, F)$ e a $((t'_1, \dots, t'_m), G)$ acabam por se reduzir ambos a:

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} H(x_1, \dots, x_k)\, p(x, x_1; t_{j_1}) \dots\, p(x_{k-1}, x_k; t_{j_k} - t_{j_{k-1}})\, dx_1 \dots dx_k,$$

com a interpretação habitual, no caso particular de $t_{j_1} = 0$, o que mostra que L_x está bem definido e é (agora trivialmente) linear. De (71) e (72) conclui-se também facilmente que:

(73) $$\bullet\ |L_x(\Phi)| \leq \sup_{\omega \in X} |\Phi(\omega)| = \|\Phi\|_{C(X)}\,,\ \forall \Phi \in C_{\text{fin}}(X).$$

Mas $C_{\text{fin}}(X)$ é denso em $C(X)$! com efeito é trivialmente *subálgebra de $C(X)$ contendo a função* 1*, fechada para a conjugação complexa e separando pontos*, já que:

$$\omega_1, \omega_2 \in X, \omega_1 \neq \omega_2 \Rightarrow \exists t_1 \in [0, +\infty[\, : \omega_1(t_1) \neq \omega_2(t_1),$$

pelo que, tomando:

$$\bullet\ F \in C(\dot{\mathbb{R}})$$

tal que:

$$\bullet\ F(\omega_1(t_1)) \neq F(\omega_2(t_1))$$

e $\Phi \in C_{\text{fin}}(X)$ definida por t_1 e F, virá:

$$\Phi(\omega_1) = F(\omega_1(t_1)) \neq F(\omega_2(t_1)) = \Phi(\omega_2).$$

Uma aplicação directa do *Teorema de Stone-Weierstrass* garante o resultado pretendido; sabemos assim que L_x admite uma extensão única a $C(X)$ como *forma linear contínua*, a qual, além disso, mantém a norma, e que continuaremos a designar por L_x. Além disso, L_x é trivialmente funcional *positivo*, pelo que, pelo *Teorema de Riesz-Markov*, deduzimos a existência de uma medida *positiva* boreliana regular μ_x sobre X (única) tal que:

(74) $$\bullet\ \int_X \Phi\, d\mu_x = L_x(\Phi)\,,\ \forall \Phi \in C(X).$$

De:

$$\bullet\ \mu_x(X) = L_x(1) = 1,$$

concluímos ainda que μ_x é *medida de probabilidade*.

Acabámos de demonstrar o seguinte resultado:

TEOREMA 9.3 (existência e unicidade da medida de Wiener): ***Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe uma medida boreliana regular μ_x única sobre o espaço topológico produto:***

$$X = \dot{\mathbb{R}}^{[0,+\infty[}$$

(medida de Wiener no espaço dos caminhos) tal que dados $n \in \mathbb{N}_1,\ t_1 < \cdots \cdots < t_n$ em $[0,+\infty[$ e $F : \dot{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{C}$ contínua se tenha:

$$\bullet \int_X \Phi\, d\mu_x = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} F(x_1,\ldots,x_n)\, p(x,x_1;t_1)\, p(x_1,x_2;t_2-t_1)\ldots$$
$$\ldots p(x_{n-1},x_n;t_n-t_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_n,$$

onde $\Phi : X \to \mathbb{C}$ é dada por $\Phi(\omega) = F(\omega(t_1),\ldots,\omega(t_n)), \forall \omega \in X$, e a interpretação do núcleo de integração p é a dada a propósito de (67). Além disso μ_x é medida de probabilidade para todo o $x \in \mathbb{R}$. □

Muitas vezes, por abuso de linguagem, chama-se *medida de Wiener* à *família* $(\mu_x)_{x\in\mathbb{R}}$ de *todas* as medidas de Wiener; está definida, *a priori* no espaço "monstruoso" X mas, como veremos, está de facto concentrada no subespaço dos *caminhos contínuos reais* (não "passando" pelo ∞ de $\dot{\mathbb{R}}$); tem-se, mais precisamente, o seguinte resultado que não demonstraremos (*cf.* [Si], sec. II-5):

TEOREMA 9.4: ***Seja Ω_α o conjunto de todos os caminhos $\omega : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ hölderianos de expoente $\alpha > 0$ (ou seja, $\omega \in \Omega_\alpha$ sse $\forall M > 0\, \exists m > 0$ tal que:***

$$|\omega(t) - \omega(s)| < m\,|t-s|^\alpha,\ \forall t,s \in [0,M]);$$

então, se $\alpha < 1/2$, $\mu_x(\Omega_\alpha) = 1$ e se $\alpha > 1/2$, $\mu_x(\Omega_\alpha) = 0$, sendo, em qualquer caso, Ω_α boreliano de X. Em particular, os caminhos de X são "quase sempre" contínuos mas "quase nunca" diferenciáveis. □

Provemos o resultado mais fraco que assegura que "quase todos" os caminhos são *contínuos*; na demonstração (seguindo [N], apêndice A) veremos como efectuar integrações "$d\mu_x$" e cálculos de medidas de Wiener de partes de X.

TEOREMA 9.5 (Wiener): ***Seja $x \in \mathbb{R}$ e Ω a parte de X constituída pelos caminhos $\omega : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ contínuos. Então Ω é boreliano de X e:***

$$\mu_x(\Omega) = 1.$$

Na demonstração deste Teorema utilizaremos alguns lemas relativos a μ_x. Comecemos por generalizar a fórmula do Teorema 9.3; utilizaremos a notação:

$$X_t = \{\omega \in X : \omega(t) = \infty\},$$

parte *compacta* e *desprezável* de X, como é fácil concluir [exercício].

LEMA 1: ***Seja $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_1$, $0 < t_1 < \cdots < t_n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ função boreliana tal que é somável em $\mathbb{R}^n$ a função:***

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto F(x_1,\ldots,x_n)\, p(x,x_1;t)\, p(x_1,x_2;t_2-t_1)\ldots$$
$$\ldots p(x_{n-1},x_n;t_n-t_{n-1});$$

então, sendo:

$$\bullet\ \Phi : X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} X_{t_i} \to \mathbb{C}$$
$$\bullet\ \omega \mapsto \Phi(\omega) = F(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n)),$$

tem-se:

• ***Φ fica definida p.p. em X, está em $L^1(X, d\mu)$ e***

(75) $$\int_X \Phi\, d\mu_x = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} F(x_1, \ldots, x_n) p(x, x_1; t) p(x_1, x_2; t_2 - t_1) \ldots$$
$$\ldots p(x_{n-1}, x_n; t_n - t_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Além disso, a conclusão do Teorema ainda vale **mutatis mutandis,** ***se $t_1 = 0$.***

Demonstração: Comecemos por obter o resultado para $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ (funções borelianas limitadas); atendendo à caracterização de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ invocada (então para $N = 1$) na demonstração do Teorema 7.2, basta mostrar que a classe $\mathcal{C}$ das funções borelianas de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{C}$ *para as quais vale a conclusão do Teorema* contém $C_c(\mathbb{R}^N)$ (funções contínuas e de suporte compacto de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{C}$) e é fechada para os limites pontuais dominados. O primeiro ponto é consequência imediata do Teorema 9.3; quanto ao segundo, notemos que se:

$$\bullet\ F_k(x_1, \ldots, x_n) \underset{k}{\longrightarrow} F(x_1, \ldots, x_n)\,,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$$
$$\bullet\ |F_k(x_1, \ldots, x_n)| \le M \quad (M > 0), \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N, k \in \mathbb{N}_1,$$

estando as funções em $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ e sendo satisfeita a condição do Teorema para cada F_k (correspondendo-lhe Φ_k), então, trivialmente:

$$\bullet\ \Phi_k(\omega) \underset{k}{\longrightarrow} \Phi(\omega)\,,\ \forall \omega \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} X_{t_i},$$
$$\bullet\ |\Phi_k(\omega)| \le M\,,\ \forall \omega \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} X_{t_i}, k \in \mathbb{N}_1,$$

pelo que a simples aplicação do *Teorema de Lebesgue* a ambos os membros de (75) (sendo Φ substituída por Φ_k e F por F_k) permite concluir que $F \in \mathcal{C}$.

Considerando agora uma função $F : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[$ nas condições da hipótese e pondo:

$$\bullet\ F_l(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} F(x_1, \ldots, x_n) & \text{se } F(x_1, \ldots, x_n) \le l \\ 0 & \text{se } F(x_1, \ldots, x_n) > l \end{cases},$$

para cada $l \in \mathbb{N}_1$, tem-se $F_l \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N, [0, +\infty[), F_l \uparrow F$, donde, para os correspondentes Φ_l:

$$\bullet\ \Phi_l \in \mathcal{B}(X, [0, +\infty[) \cap L^1(X, d\mu_x),$$
$$\bullet\ \Phi_l \uparrow \Phi,$$

pelo que, do *Teorema de Beppo Levi* e da fórmula (75) correspondente a cada Φ_l (válida, pelo que acima foi visto), resulta a conclusão do Teorema para F.

Para concluir basta notar que qualquer $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ nas condições do Teorema se pode escrever como combinação linear de quatro funções de $\mathbb{R}^N$ para $[0, +\infty[$, ainda nas condições do Teorema (a adaptação ao caso $t_1 = 0$, bastante trivial, é deixada ao leitor — *cf.* os exercícios).□

Notemos agora que os caminhos contínuos *reais* são exactamente os *uniformemente contínuos* em cada intervalo $[0, K], K \in \mathbb{N}_1$ (com valores em $\mathbb{R}$). Logo $\omega \in \Omega$ sse ω não for identicamente igual a ∞ e:

$$\forall K, m \in \mathbb{N}_1, \exists n \in \mathbb{N}_1 : |t - s| < \frac{1}{n} \Rightarrow |\omega(t) - \omega(s)| \leq \frac{1}{m}\,, \forall s, t \in [0, K],$$

ou seja:

$$\forall K, m \in \mathbb{N}_1, \exists n \in \mathbb{N}_1 : \omega \notin C(K, m, n),$$

onde:

$$C(K, m, n) = \{\omega \in X : \exists s, t \in [0, K] : |t - s| < \frac{1}{n} \text{ e } |\omega(t) - \omega(s)| > \frac{1}{m}\}.$$

Portanto, sendo ω_∞ o caminho identicamente igual a ∞:

$$\bullet\ \Omega = \bigcap_{K \in \mathbb{N}_1} \bigcap_{m \in \mathbb{N}_1} \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} (X \setminus C(K, m, n)) \setminus \{\omega_\infty\},$$

o que provará que Ω é *boreliano* de X, caso cada $C(K, m, n)$ o seja. Além disso $X \setminus \Omega$ é união com $\{\omega_\infty\}$ de uma união numerável de conjuntos do tipo:

$$\bullet\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} C(K, m, n),$$

pelo que bastará mostrar que cada uma destas intersecções é desprezável (uma vez que $\{\omega_\infty\}$ o é, por estar contido em todos os desprezáveis X_t). Para estimar a medida destas intersecções notemos que se pode invocar a σ-continuidade de μ_x para a intersecção, uma vez que os "C" estão em cadeia (decrescente); reduzimo-nos assim a obter estimativas adequadas para a medida de conjuntos "do tipo C". O modo como se calculam integrais a respeito de μ_x (*cf.* o Lema 1) e portanto medidas, que não são mais que integrais de *funções características*, leva-nos a definir agora, para cada $\varepsilon, \delta > 0$:

$$\bullet\ \rho(\varepsilon, \delta) = \sup_{0 < t \leq \delta} \int_{|y - x| > \varepsilon} p(x, y; t)\, dy = 2 \sup_{0 < t \leq \delta} \int_{\varepsilon}^{+\infty} p(0, y; t)\, dy.$$

É fácil concluir que:

$$0 < \rho(\varepsilon, \delta) \leq e^{-\frac{\varepsilon^2}{8\delta}};$$

com efeito:

$$\rho(\varepsilon,\delta) = 2\sup_{0<t\leq\delta}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-\frac{y^2}{4t}}\Big)\,dy = 2\sup_{0<t\leq\delta}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\delta}}}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_{[\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\delta}},+\infty]^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\Big)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{4}\int_{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\delta}}}^{+\infty}\Big(\int_{S(0,1)} e^{-r^2}r\,ds\Big)dr\Big)^{\frac{1}{2}} = (e^{\frac{e^2}{4\delta}})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\varepsilon^2}{8\delta}}.$$

Então, *para cada* $\varepsilon > 0$:

(76) $$\frac{\rho(\varepsilon,\delta)}{\delta} \underset{\delta\to 0^+}{\longrightarrow} 0,\ i.e.,\ \rho(\varepsilon,\delta) = o(\delta)$$

(*cf.* Proposição 3.5 para uma analogia com as *aproximações da unidade*; note-se que (76) é *mais forte* que a hipótese feita acerca de e_n naquela proposição).

Esta simples observação a respeito de p vai-nos permitir provar a sequência de resultados que nos levará à demonstração do Teorema 9.5; estudaremos conjuntos sucessivamente mais "próximos" dos $C(K,m,n)$ atrás introduzidos. ***No que se segue convencionamos que*** $\boldsymbol{\infty + a = \infty, \forall a \in \mathbb{R}, \infty - \infty = 0, |\infty| = +\infty}$.

LEMA 2: ***Sejam*** $\boldsymbol{\varepsilon,\delta > 0}$ ***e*** $\boldsymbol{0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n\,(n\in\mathbb{N}_1)}$ ***tais que*** $\boldsymbol{t_n - t_1 \leq \delta}$***. Seja:***

$$\boldsymbol{A = \{\omega\in X : \exists j\in\{2,\ldots,n\} : |\omega(t_1)-\omega(t_j)| > \varepsilon\};}$$

então $\boldsymbol{A}$ ***é aberto de*** $\boldsymbol{X}$ ***e:***

$$\bullet\ \boldsymbol{\mu_x(A) \leq 2\rho\Big(\frac{\varepsilon}{2},\delta\Big)}.$$

Demonstração: É fácil verificar que $X\setminus A$ é *fechado*. Com efeito, considerando uma *rede* (sucessão generalizada) em $X\setminus A$:

$$\omega_\alpha \underset{\alpha}{\longrightarrow} \omega$$

em X, por definição do conjunto A e da topologia de X teremos simultaneamente:

- $\omega_\alpha(t) \underset{\alpha}{\longrightarrow} \omega(t)$, $\forall t\in[0,+\infty[$,
- $\forall\alpha, \forall j\in\{2,\ldots,n\}, |\omega_\alpha(t_1)-\omega_\alpha(t_j)| \leq \varepsilon.$

Provemos que $\omega\notin A$; dado $j\in\{2,\ldots,n\}$, ou $\omega(t_1)=\omega(t_j)=\infty$, e nesse caso, por definição $|\omega(t_1)-\omega(t_j)| = |\infty-\infty| = 0 \leq \varepsilon$, ou um dos valores $\omega(t_1)$, $\omega(t_j)$ é finito e nesse caso:

$$|\omega_\alpha(t_1)-\omega_\alpha(t_j)| \underset{\alpha}{\longrightarrow} |\omega(t_1)-\omega(t_j)| \Rightarrow |\omega(t_1)-\omega(t_j)| \leq \varepsilon$$

(em particular ambos os valores $\omega(t_1), \omega(t_j)$ são finitos), e portanto $\omega \notin A$. $X \setminus A$ é, portanto, fechado e A aberto.

Para estimar $\mu_x(A)$ começamos por cobrir A por uma união de borelianos cuja medida seja de fácil avaliação. Consideremos:

- $B = \{\omega \in X : |\omega(t_1) - \omega(t_n)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\}$,
- $C_j = \{\omega \in X : |\omega(t_j) - \omega(t_n)| > \dfrac{\varepsilon}{2}\}$,
- $D_j = \{\omega \in X : |\omega(t_1) - \omega(t_j)| > \varepsilon$ e $|\omega(t_1) - \omega(t_k)| \leq \varepsilon, k = 2, \ldots, j-1\}$

$(j = 2, \ldots, n)$. Do ponto de vista do cálculo de medidas temos agora a vantagem de os D_j serem *dois a dois disjuntos*. Ora, se $\omega \in A$, existirá um *primeiro* j tal que $|\omega(t_1) - \omega(t_j)| > \varepsilon$, donde $\omega \in D_j$. Para esse j, ω tem que estar forçosamente em C_j ou em B, pois, caso contrário, ter-se-ia:

- $|\omega(t_1) - \omega(t_n)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}, |\omega(t_j) - \omega(t_n)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |\omega(t_1) - \omega(t_j)| \leq \varepsilon,$

logo:

- $\omega \in D_j \cap (C_j \cup B).$

Portanto:

$$A \subset \bigcup_{j=2}^{n} (D_j \cap (C_j \cup B)) \subset B \cup \bigcup_{j=2}^{n} (D_j \cap C_j),$$

donde:

(77) • $$\mu_x(A) \leq \mu_x(B) + \sum_{j=2}^{n-1} \mu_x(C_j \cap D_j)$$

(já que $C_n = \emptyset$). Calculemos então $\mu_x(C_j \cap D_j)$, para $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, utilizando o Lema 1; tem-se:

$$\mu_x(C_j \cap D_j) = \int_X \chi_{C_j \cap D_j}\, d\mu_x = \int_X \chi_{C_j} . \chi_{D_j}\, d\mu_x =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{(x_1,\ldots,x_j,x_n): |x_j - x_n| > \frac{\varepsilon}{2}\}}(x_1, \ldots, x_j, x_n).$$
$$. \chi_{\{(x_1,\ldots,x_j,x_n): |x_1 - x_j| > \varepsilon, |x_1 - x_l| \leq \varepsilon,\, l=2,\ldots,j-1\}}(x_1, \ldots, x_j, x_n) . p(x, x_1; t_1).$$
$$. p(x_1, x_2; t_2 - t_1) \ldots p(x_{j-1}, x_j; t_j - t_{j-1})\, p(x_j, x_n; t_n - t_j)\, dx_1 \ldots dx_j\, dx_n.$$

Ora o integral em x_n é claramente majorado por $\rho(\varepsilon/2, \delta)$ (já que, por hipótese, $t_n - t_j \leq t_n - t_1 \leq \delta$), independentemente das outras variáveis $x_1, \ldots, x_j$; da aplicação do Teorema de Fubini e desta majoração obtém-se então:

- $\mu_x(C_j \cap D_j) \leq \rho\Big(\dfrac{\varepsilon}{2}, \delta\Big) \mu_x(D_j).$

Analogamente:

$$\mu_x(B) \leq \rho\Big(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big);$$

como os D_j são dois a dois disjuntos, obtém-se, de (77):

$$\mu_x(A) \leq \rho\Big(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big) + \rho\Big(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big)\sum_{j=2}^{n-1} \mu_x(D_j) =$$

$$= \rho\Big(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big)(1 + \underbrace{\mu_x\Big(\bigcup_{j=2}^{n-1} D_j\Big)}_{\leq \mu_x(X) = 1}\ ) \leq 2\rho\Big(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big).\square$$

LEMA 3: ***Sejam*** $\boldsymbol{\varepsilon, \delta > 0, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_1, 0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n}$ ***tais que*** $\boldsymbol{t_n - t_1 \leq \delta}$ ***e:***

$$\boldsymbol{E = \{\omega \in X : \exists j, k \in \{1, \ldots, n\} : |\omega(t_j) - \omega(t_k)| > 2\varepsilon\};}$$

então $\boldsymbol{E}$ ***é aberto de*** $\boldsymbol{X}$ ***e:***

$$\bullet\ \boldsymbol{\mu_x(E) = 2\rho\Big(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big)}.$$

Demonstração: É óbvio que $E \subset A$ (sendo este último conjunto definido no Lema 2), já que:

$$\omega \notin A \Rightarrow |\omega(t_1) - \omega(t_j)|, |\omega(t_1) - \omega(t_k)| \leq \varepsilon, \forall j, k = 1, \ldots, n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |\omega(t_j) - \omega(t_k)| \leq 2\varepsilon, \forall j, k = 1, \ldots, n \Rightarrow \omega \notin E;$$

por outro lado, tal como A, E é aberto (como é fácil verificar, por argumentos idênticos aos utilizados na demonstração do Lema 2), portanto boreliano de X, donde:

$$\mu_x(E) \leq \mu_x(A) \leq 2\rho\Big(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big).\square$$

LEMA 4: ***Sejam*** $\boldsymbol{a, b, \delta > 0}$ ***tais que*** $\boldsymbol{a < b}$ ***e*** $\boldsymbol{b - a < \delta}$***; seja:***

$$\bullet\ \boldsymbol{E(a, b; \varepsilon) = \{\omega \in X : \exists s, t \in [a, b] : |\omega(t) - \omega(s)| > 2\varepsilon\}}.$$

Então $\boldsymbol{E(a, b; \varepsilon)}$ ***é aberto de*** $\boldsymbol{X}$ ***e:***

$$\bullet\ \boldsymbol{\mu_x(E(a, b; \varepsilon)) = 2\rho\Big(\frac{\varepsilon}{2}, \delta\Big)}.$$

Demonstração: Para cada parte finita S de $[a, b]$, o conjunto:

$$E(a, b, \varepsilon; S) = \{\omega \in X : \exists s, t \in S : |\omega(t) - \omega(s)| > 2\varepsilon\}$$

está nas condições do conjunto E do Lema 3, tendo portanto medida μ_x majorada por $2\rho(\varepsilon/2,\delta)$. Tais conjuntos constituem, por outro lado, uma família, *fechada para as uniões finitas*, de partes abertas de $E(a,b;\varepsilon)$ cuja união é igual a $E(a,b;\varepsilon)$; em particular $E(a,b;\varepsilon)$ é aberto de X. Como da regularidade da medida μ_x concluímos que:

- $\mu_x(E(a,b;\varepsilon)) = \sup\{\mu_x(K) : K \subset E(a,b;\varepsilon), K \text{ compacto de } X\}$,

estando cada compacto $K \subset E(a,b;\varepsilon)$ também contido numa união finita de conjuntos $E(a,b,\varepsilon;S)$ e portanto *num desses conjuntos*, teremos:

$$\mu_x(E(a,b;\varepsilon)) = \sup_S \mu_x(E(a,b,\varepsilon;S)) \le 2\rho\Big(\frac{\varepsilon}{2},\delta\Big).\square$$

LEMA 5: ***Sejam $K, n \in \mathbb{N}_1$, $\varepsilon > 0$ e:***

- $$\boldsymbol{F(K,\varepsilon,n) = \{\omega \in X : \exists s,t \in [0,K] : |t-s| < \frac{1}{n}, |\omega(t)-\omega(s)| > 4\varepsilon\};}$$

então $F(K,\varepsilon,n)$ é aberto de X e:

- $$\boldsymbol{\mu_x(F(K,\varepsilon,n)) = 2K\rho\Big(\varepsilon,\frac{2}{n}\Big)n.}$$

Demonstração: Que $F(K,\varepsilon,n)$ é aberto resulta imediatamente de ser união de conjuntos do tipo considerado no Lema 3 (todos os que correspondem a $n = 2$, $\delta = 1/n, t_1, t_2 \in [0,K]$ e substituindo ε por 2ε); temos, além disso:

- $$[0,K] = \bigcup_{l=0}^{K-1}\Big(\bigcup_{j=0}^{n-1}[l+\frac{j}{n}, l+\frac{j+1}{n}]\Big).$$

Ora, se $\omega \in F(K,\varepsilon,n)$, para certos $s,t \in [0,K]$ tais que $|t-s| < 1/n$ ter-se-á:

$$|\omega(t)-\omega(s)| > 4\varepsilon;$$

s e t estarão no mesmo ou em dois sub-intervalos adjacentes da forma $[l+j/n, l+(j+1)/n]$, donde ω estará em certo $E(a,b;2\varepsilon)$ (com a notação do Lema 4), onde, para certos $l \in \{0,\dots,K-1\}, j \in \{0,\dots,n-1\}$ ($j \le n-2$ se $l = K-1$):

- $$a = l + \frac{j}{n},\ b = l + \frac{j+2}{n}.$$

Como existem exactamente $Kn-1$ uniões de pares de sub-intervalos adjacentes deste tipo, tais que $F(K,\varepsilon,n)$ está contido na união dos correspondentes $E(a,b;2\varepsilon)$, ter-se-á, utilizando o Lema anterior:

$$\mu_x(F(K,\varepsilon,n)) \le (Kn-1)2\rho\Big(\varepsilon,\frac{2}{n}\Big) \le 2K\rho\Big(\varepsilon,\frac{2}{n}\Big)n.\square$$

Demonstração do Teorema 9.5: Retomemos o raciocínio desenvolvido após a demonstração do Lema 1. Note-se que, com a notação do Lema 5,

$$C(K, m, n) = F(K, \frac{1}{4m}, n),$$

pelo que, da análise então feita, resulta que $X \setminus \Omega$ é boreliano, já que é união com $\{\omega_\infty\}$ de uma união numerável de conjuntos do tipo:

- $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} F(K, \frac{1}{4m}, n),$

e, pelo lema 5 e a σ-aditividade de μ_x[84]:

$$\mu_x\Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_1} F(K, \frac{1}{4m}, n)\Big) = \lim_n \mu_x(F(K, \frac{1}{4m}, n)) \leq \lim_n 4K \frac{\rho\left(\frac{1}{4m}, \frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}} = 0,$$

por (76), o que termina a demonstração.□

Atendendo ao resultado que acabámos de demonstrar, podemos passar a considerar as medidas de Wiener μ_x como estando restringidas ao espaço Ω dos caminhos *contínuos reais*. Pelo Lema 1 podemos *e.g.* calcular o integral a respeito de μ_x da função:

$$\omega \mapsto f(\omega(t)),$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função boreliana tal que:

$$y \mapsto f(y)\, p(x, y; t)$$

é *somável em* $\mathbb{R}$; obtemos:

$$\int_\Omega f(\omega(t))\, d\mu_x(\omega) = \int_\mathbb{R} p(x, y; t)\, f(y)\, dy.$$

Em particular, se $u \in L^2(\mathbb{R})$, concluímos de (67) que:

$$e^{t\frac{d^2}{dx^2}} u = \int_\Omega u(\omega(t))\, d\mu_{\widehat{x}}(\omega)\,,\ \forall t > 0, \tag{78}$$

ou seja, em termos *probabilísticos* e da interpretação física da equação do calor: *"a temperatura no instante t e no ponto x do espaço pode ser obtida considerando todos os caminhos contínuos que partem de x no instante 0 e fazendo a média, nesse conjunto, dos valores assumidos pela função temperatura inicial, nos pontos de chegada de tais caminhos no instante t"*. Utilizámos, nesta interpretação, o facto simples de:

- $\mu_x(\{\omega \in \Omega : \omega(0) \neq x\}) = 0$

[84]Mais propriamente pela σ-continuidade da intersecção.

[exercício]. Sendo $(\Omega, d\mu_x)$ *espaço de probabilidade* pode pôr-se a questão de procurar o significado intuitivo de certo conjunto de trajectórias ter determinada *probabilidade*: demonstra-se que μ_x é o limite, em certo sentido, das probabilidades correspondentes a *"passeios ao acaso"* quando o *"passo"* tende para zero. μ_x corresponde ao chamado *movimento Browniano* em $\mathbb{R}$, começando em x. A fórmula (78) estabelece a estreita relação entre os processos de *difusão* governados pela equação do calor e o movimento Browniano, e portanto entre a *Termodinâmica* e a chamada *Mecânica Estatística* (para o estudo dos processos estocásticos relacionados com a medida de Wiener, *cf.* [Si]).

Procuremos agora obter uma fórmula semelhante a (78) para a equação do calor *com potencial*. De (69) e (75) obtemos, para qualquer $V \in L^\infty(\mathbb{R}), V \geq 0$ e $u \in L^2(\mathbb{R})$:

(79) $$e^{-t\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V\right)} u = \lim_n \int_\Omega e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} V(\omega(\frac{jt}{n}))\frac{t}{n}} u(\omega(t))\, d\mu_{\widehat{x}}(\omega)$$

(limite em L^2, uniforme em $t \in [0, T], \forall T > 0$). Supondo que V é também *contínua*, como cada $\omega \in \Omega$ é função contínua, obtém-se, $\forall \omega \in \Omega$:

$$\bullet\ e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} V(\omega(\frac{jt}{n}))\frac{t}{n}} u(\omega(t)) \underset{n}{\longrightarrow} e^{-\int_0^t V(\omega(s))\,ds} u(\omega(t));$$

mas:

$$\left| e^{-\sum\limits_{j=1}^{n} V(\omega(\frac{jt}{n}))\frac{t}{n}} u(\omega(t)) \right| \leq |u(\omega(t))|\,,\ \forall \omega \in \Omega$$

e a função $\omega \mapsto |u(\omega(t))|$ é *somável em* $(\Omega, d\mu_x)$, atendendo ao Lema 1, $\forall x \in \mathbb{R}$. Então, atendendo ao Teorema de Lebesgue e a que em (79), para cada t, existe pelo menos uma sucessão $n_k \underset{k}{\longrightarrow} +\infty$ tal que o limite em k dos integrais é igual *p.p.* ao primeiro membro, concluímos que:

(80) $$e^{-t\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V\right)} u = \int_\Omega e^{-\int_0^t V(\omega(s))\,ds} u(\omega(t))\, d\mu_{\widehat{x}}(\omega),$$

$\forall t \geq 0, p.p.$ em $\mathbb{R}$ (***Fórmula de Feynman-Kač***).

Note-se que, atendendo a (70), a fórmula de Feynman-Kač resulta, de certo modo, de "levantar a indeterminação $\infty \times 0$" na fórmula-limite de (69) (onde denotamos Ω_x o espaço das trajectórias começando em x para $t = 0$):

$$\text{“}e^{-t\left(-\frac{d^2}{dx^2}+V\right)} u = \infty \int_{\Omega_x} e^{-\frac{1}{4}\int_0^t (\dot{\omega}(s))^2\,ds}\, e^{-\int_0^t V(\omega(s))\,ds}\, u(\omega(t))\, d\omega\text{”}.$$

Se reintroduzíssemos as constantes correspondentes à "equação de Schrödinger com massa imaginária", obteríamos uma fórmula do tipo (60) *(integral de Feynman)*, diferindo apenas desta por termos incorporado o "integral em dx_0" em $d\omega$ e termos "invertido" o sentido das trajectórias. Deste modo, obtivemos uma versão *rigorosa* do análogo do integral de Feynman *no caso da equação do calor* (ou de Schrödinger com massa imaginária); assinale-se que (80) vale para potenciais V bastante mais gerais que os acima estudados (*cf.* [RS2], [Si]).

Vejamos, para terminar esta secção, que não se pode levar a cabo a construção de uma medida análoga à de Wiener no caso da equação de Schrödinger *com massa real*. De facto, nesse caso p deveria ser substituído por:

$$\bullet\ \widetilde{p}(x,y;t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}}$$

(D imaginário puro). Construindo um funcional sobre $C_{\text{fin}}(X)$ a partir de $\widetilde{p}$ de modo análogo ao que se fez para a medida de Wiener, considerando, em particular, para $t>0$ fixo, $\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sucessão de funções contínuas com suporte compacto a tender pontualmente para 1 tal que $0 \le \psi_n \le 1, \forall n \in \mathbb{N}_1$ e:

$$\Phi_n : X \to \mathbb{C}$$
$$\omega \mapsto \Phi_n(\omega) = e^{\frac{(x-\omega(t))^2}{4Dt}} \psi_n(\omega(t)),$$

ter-se-ia:

$$\left| \int_X \Phi_n(\omega)\, d\mu_x(\omega) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \psi_n(y)\, \widetilde{p}(x,y;t)\, dy \right| =$$
$$= \frac{1}{\left|\sqrt{4\pi Dt}\right|} \int_{\mathbb{R}} \psi_n(y)\, dy \xrightarrow[n]{} +\infty.$$

Ora:

$$\bullet\ \|\Phi_n\|_{C(X)} = \sup_{\omega\in X} |\Phi_n(\omega)| \le 1,$$

donde o funcional assim construído sobre $C_{\text{fin}}(X)$ não pode ser estendido a uma medida *boreliana regular sobre* X; ou seja, não existe tal medida μ_x de modo que para $\Phi \in C_{\text{fin}}(X)$ o integral de Φ a respeito de μ_x seja dado por (75) (com p substituído por $\widetilde{p}$). Aliás mostra-se que tal medida não pode existir *desde que D não seja real!* [exercício].

Exercícios

138) Demonstre a Proposição 9.1 adaptando o método de demonstração da Proposição 8.3.

139) Seja A auto-adjunto *positivo* no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$; mostre que se $u \in \mathcal{H}$, então exp $(-tA)\, u \in D(A), \forall t > 0$ e:

$$\|Ae^{-tA}u\| \le \frac{e^{-1}}{t}\|u\| \le \frac{1}{t}\|u\|,$$

$\forall u \in \mathcal{H}, t > 0$; conclua, em particular, que se $u_0 \in \mathcal{H}$, existe um e um só

$u \in C^1(]0, +\infty[, \mathcal{H}) \cap C([0, +\infty[, \mathcal{H}) \cap C(]0, +\infty[, D(A))$ tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -Au\,, \text{ em }]0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}.$$

140) Seja A auto-adjunto em $\mathcal{H}$ (espaço de Hilbert); mostre que se $u \in \mathcal{H} \setminus D(A)$ *não se pode ter* exp $(itA)\, u \in D(A)$ para *nenhum* $t \in \mathbb{R}$.

141) Enuncie e demonstre resultados análogos aos do exercício 131) (Capítulo anterior) para o caso $U(t) = e^{-tA}$ $(t \geq 0)$, A auto-adjunto positivo.

142) Seja $(S(t))_{t \geq 0}$ família de operadores auto-adjuntos tal que:

(i) $\|S(t)\| \leq 1\,, \forall t \geq 0;$

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)\,, \forall s, t \geq 0;$

(iii) $S(0) = I;$

(iv) $t \mapsto S(t)\, u$ é contínua em $[0, +\infty[, \forall u \in \mathcal{H}.$

Mostre que existe um operador auto-adjunto positivo único A em $\mathcal{H}$ tal que:

$$\bullet\; S(t) = e^{-tA}\,, \forall t \geq 0$$

[Sugestão: Pode inspirar-se na demonstração do *Teorema de Stone* (Teorema 8.5)].

143) a) Demonstre o Teorema 9.2.

b) Mostre que o Teorema ainda vale supondo apenas que $A, B \geq -\gamma\, (\gamma \in \mathbb{R})$, com definições convenientes de exp $(-tA)$, exp $(-tB)$.

c) Conclua da alínea anterior que na fórmula (69) basta tomar V real e limitada (e, evidentemente, mensurável).

144) Se V for função mensurável real limitada definida em $\mathbb{R}$ mostre que:

$$\bullet\; e^{-tT_V} = T_{e^{-tV}}\,, \forall t \geq 0.$$

145) Seja $V \in L^\infty(\mathbb{R})$, V real; mostre que qualquer solução $u \in C^1(]0, +\infty[, L^2(\mathbb{R})) \cap C([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}))$ da equação:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - Vu\,,\ (t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases},$$

em que $u_0 \in L^2(\mathbb{R}), u_0 \geq 0\, p.p.$, satisfaz a:

$$\bullet\; u(t, x) \geq 0\, \forall t > 0, p.p. \text{ em } \mathbb{R}$$

[Sugestão: Teorema 9.2; note-se que "identificámos" $u(t)(x)$ com $u(t, x)$].

146) Seja $F : \dot{\mathbb{R}}^N \to \mathbb{C}$ *contínua*, $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ e:

$$\bullet\ \Phi : \dot{\mathbb{R}}^{[0,+\infty[} \to \mathbb{C}$$

tal que:

$$\bullet\ \Phi(\omega) = F(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n));$$

mostre que:

$$\bullet\ \Phi \in C(X),$$

onde $X = \dot{\mathbb{R}}^{[0,+\infty[}$, com a topologia produto.

147) a) Mostre que sendo $X_t = \{\omega \in X : \omega(t) = \infty\}$ ($t \geq 0$ fixado), então X_t é *fechado* e $\mu_x(X_t) = 0$.

b) Enuncie e demonstre o análogo do Lema 1 da secção 9.2, no caso $t_1 = 0$.

148) Seja $(\mu_x)_{x\in\mathbb{R}}$ a medida de Wiener; mostre que:

$$\mu_x(\{\omega \in \Omega : \omega(0) \neq x\}) = 0\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

149) Mostre que a construção de uma medida análoga à de Wiener não pode ser levada a cabo substituindo p por:

$$\widetilde{p}(x, y; t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}}$$

desde que D não seja *real positivo* [Sugestão: Mostre que se $\Re D > 0$, $\Im D \neq 0$ e existisse tal medida μ, então:

$$\sup\left\{\left|\int_X \Phi\, d\mu\right| : \|\Phi\|_\infty = 1, \Phi \in C_{(t_1,\ldots,t_n)}(\Omega)\right\} = \left(\frac{|D|}{\Re D}\right)^{\frac{n}{2}}$$

onde $C_{(t_1,\ldots,t_n)}(\Omega)$ é constituído pelas funções de $C_{\text{fin}}(\Omega)$ definidas por:

$$\bullet\ F(\omega(t_1), \ldots, \omega(t_n))\ (F \in C(\dot{\mathbb{R}}^N))$$

e $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$].

Capítulo 10

Medidas projectivas, decomposição espectral e cálculo operacional geral

10.1 Projecções espectrais; interpretação física e propriedades

Seguindo o programa traçado no final do Capítulo 7, estudemos os operadores $\chi_\Omega(A) = \Phi_A(\chi_\Omega)$, onde χ_Ω é a função característica de um boreliano Ω de $\mathbb{R}$ ($\Omega \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$). Comecemos por notar a importância fundamental destes operadores, no que diz respeito à *interpretação física* dos operadores auto-adjuntos; com efeito, se $\mathfrak{a}$ for o observável físico associado ao operador A em $\mathcal{H}$, $\chi_\Omega(\mathfrak{a})$ será um observável associado a um "aparelho de medida" que permita testar se o valor do observável $\mathfrak{a}$ está ou não em Ω (de facto $\chi_\Omega(\mathfrak{a}) = 1$ se $\mathfrak{a} \in \Omega$ e $\chi_\Omega(\mathfrak{a}) = 0$ se $\mathfrak{a} \notin \Omega$) Fixado um *estado físico* $u \in \mathcal{H}$ podemos, através de A, calcular *médias* de funções do observável $\mathfrak{a}$ para o sistema físico no estado u; por definição (*cf.* Introdução):

$$\bullet\ \langle g(\mathfrak{a})\rangle_u = (g(A)\,u, u) = (\Phi_A(g)\,u, u)$$

($g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Mas para o caso particular de $g = \chi_\Omega$ podemos relacionar a *média* $\langle \chi_\Omega(\mathfrak{a})\rangle_u$ com a *probabilidade* de encontrar, no estado u, $\mathfrak{a}$ em Ω; com efeito, por definição de média de uma *variável aleatória*:

$$\begin{aligned}
\langle \chi_\Omega(\mathfrak{a})\rangle_u &= 1 \times \text{probabilidade de } u \text{ ter o observável } \mathfrak{a} \text{ em } \Omega\, + \\
&\quad + 0 \times \text{probabilidade de } u \text{ ter o observável } \mathfrak{a} \text{ em } \mathbb{R} \setminus \Omega = \\
&= \textit{probabilidade de, no estado } u\textit{, o observável } \mathfrak{a} \textit{ estar em } \Omega = \\
&= p_u(\mathfrak{a} \in \Omega).
\end{aligned}$$

Então:

$$\bullet\ p_u(\mathfrak{a} \in \Omega) = (\Phi_A(\chi_\Omega)\,u, u);$$

atendendo ao Teorema 7.2–7 concluímos, em particular, que se $\Omega \cap \sigma(A) = \emptyset$, então:

$$\bullet\ p_u(\mathfrak{a} \in \Omega) = 0\,,\ \forall u \in \mathcal{H},$$

ou seja: *um observável só toma valores (com probabilidade não nula) no espectro do operador auto-adjunto A que lhe está associado!*[85]. Esta constatação permite relacionar o espectro de um operador com o "espectro" de um elemento, manifestado nas "riscas espectrais", observáveis quando se decompõe (por intermédio de um prisma, por exemplo) a luz emitida por uma amostra incandescente do elemento em questão; como vimos na Introdução, as riscas correspondem à emissão de fotões de determinadas frequências, quando ocorrem mudanças de níveis de energia nos electrões dos átomos do elemento, devido à agitação molecular que traduz o estado de aquecimento do corpo. Sendo assim, existe proporcionalidade entre as frequências das radiações observadas — as diferentes "cores" das *riscas* — e as diferenças possíveis de níveis de energia (*cf.* a Introdução); ora os valores observáveis da energia, pelo que acabámos de ver, situar-se-ão todos no *espectro* do operador auto-adjunto associado ao observável *energia* (energia cinética mais *energia potencial* determinada pela constituição do átomo do elemento em questão). A observação de riscas "discretas" traduz a redução do espectro do referido operador a um conjunto "discreto" de valores reais.

Das propriedades do cálculo operacional limitado e de $\chi_\Omega^2 = \chi_\Omega, \forall \Omega \in$ $\in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$, concluímos que os operadores $P_\Omega = \Phi_A(\chi_\Omega)$ são *projecções* no sentido em que $P_\Omega^2 = P_\Omega$.

DEFINIÇÃO: *Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e A operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$*; se $\Omega \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$ *chamamos* ***projecção espectral*** *associada a A e Ω ao operador:*

$$P_\Omega = \Phi_A(\chi_\Omega)$$

(onde Φ_A é o homomorfismo $\widetilde{\Phi}_A$ que define o cálculo operacional introduzido no Teorema 7.2).

Recordemos que dada uma projecção contínua P em $\mathcal{H}$, ou seja, $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $P^2 = P$, então:

$$\mathcal{H} = \ker P \oplus R(P),$$

sendo a soma directa *topológica* (o que é equivalente a $\ker P$ e $R(P)$ serem subespaços fechados de $\mathcal{H}$). Reciprocamente, se $\mathcal{H}$ for soma directa topológica de dois subespaços fechados, então as projecções sobre cada subespaço são operadores *limitados e idempotentes* (coincidem com os respectivos quadrados). Além disso a soma directa acima considerada será *ortogonal* sse P for *auto-adjunto* [exercício]; nesse caso P diz-se ***projecção ortogonal***. É fácil concluir que a correspondência:

$$\bullet\ P \mapsto R(P)$$

é *bijecção* entre o conjunto das projecções ortogonais em $\mathcal{H}$ e o conjunto dos subespaços *fechados* de $\mathcal{H}$, cuja inversa associa a cada subespaço fechado M de $\mathcal{H}$ a projecção sobre M correspondente à decomposição ortogonal:

[85]Para uma fundamentação da Mecânica Quântica a partir da estrutura probabilística dos observáveis, ver as notas da secção VIII.11 de [RS1].

$$\bullet\ \mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}.$$

Utilizando a notação $A \geq B$ para indicar que o operador $A - B$ é *autoadjunto positivo* é fácil verificar que $0 \leq P \leq I$ para toda a projecção ortogonal; além disso:

PROPOSIÇÃO 10.1: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e P_1, P_2 projecções ortogonais em $\mathcal{H}$; então são equivalentes as condições:***

1. $P_1 \leq P_2$.
2. $\|P_1 u\| \leq \|P_2 u\|,\ \forall u \in \mathcal{H}$.
3. $R(P_1) \subset R(P_2)$.
4. $P_2 P_1 = P_1$.
5. $P_1 P_2 = P_1$.

Demonstração: Demonstremos, por exemplo, que 1. $\Rightarrow$ 2.; se $P_1 \leq P_2$ e $u \in \mathcal{H}$, então $(P_1 u, u) \leq (P_2 u, u)$, donde:

$$\begin{aligned}\|P_1 u\|^2 &= (P_1 u, P_1 u) = (P_1^* P_1 u, u) = (P_1^2 u, u) = (P_1 u, u) \leq \\ &\leq (P_2 u, u) = \|P_2 u\|^2 \Rightarrow \|P_1 u\| \leq \|P_2 u\|.\end{aligned}$$

As restantes implicações são deixadas como exercício.□

Estudemos agora as propriedades das projecções espectrais P_Ω:

PROPOSIÇÃO 10.2: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert, A operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$ e $(P_\Omega)_{\Omega \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})}$ a família das projecções espectrais associadas a A; então:***

1. *P_Ω é projecção ortogonal de $\mathcal{H}$ (ou seja, $P_\Omega \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $P_\Omega^2 = P_\Omega$ e $P_\Omega^* = P_\Omega$), $\forall \Omega \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$.*
2. $P_\emptyset = 0, P_\mathbb{R} = I$.
3. $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2},\ \forall \Omega_1, \Omega_2 \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$.
4. $P_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = P_{\Omega_1} + P_{\Omega_2}$ *se* $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$ *e* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.
5. *Se* $\Omega_n \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}_1, \Omega_n \cap \Omega_m = \emptyset, \forall n \neq m$ *em* $\mathbb{N}_1, \Omega = = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_1} \Omega_n$, *então:*

$$P_\Omega u = \sum_{n \in \mathbb{N}_1} P_{\Omega_n} u$$

(série convergente em $\mathcal{H}$), $\forall u \in \mathcal{H}$.

6. *Se* $\Omega \in \mathit{Bor}\,(\mathbb{R}), \Omega \cap \sigma(A) = \emptyset$, *então* $P_\Omega = 0$*; em particular* $P_{\sigma(A)} = I$.

Demonstração: A demonstração é simples aplicação das propriedades do cálculo operacional limitado (Teorema 7.2) e de propriedades triviais das funções características, sendo deixada como exercício.□

10.2 Medidas projectivas e espectrais

É óbvio que, na proposição anterior, a propriedade 4. é consequência de 5., e 2. consequência de 6.. Pode pôr-se a questão de saber se, para uma família $(P_\Omega)_{\Omega\in\mathrm{Bor}(\mathbb{R})}$ de projecções ortogonais satisfazendo a 3. pode valer uma propriedade semelhante a 5. mas em que a série *convirja em* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$; é fácil ver que não, pois qualquer soma finita dos $P_{\Omega_n} \neq 0$ é ainda projecção ortogonal, tendo por isso norma igual a 1. Logo, tirando o caso em que os P_{Ω_n} se anulem a partir de certa ordem, a série *nunca pode satisfazer ao critério de Cauchy em* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$! por outro lado, a propriedade 5. é semelhante à σ-aditividade das medidas sobre os borelianos de $\mathbb{R}$, o que justifica a definição seguinte:

DEFINIÇÃO: *Chamamos* ***medida projectiva*** *a toda a família* $(P_\Omega)_{\Omega\in\mathrm{Bor}(\mathbb{R})}$ *satisfazendo a 1., 2., 3., 5. da Proposição anterior (e portanto também 4.); outra designação habitual é* ***família espectral de projecções***.

A todo o operador auto-adjunto num espaço de Hilbert se encontra associada uma *medida projectiva* ou *família espectral de projecções* que é precisamente a *família das projecções espectrais* a ele associadas. Veremos mais adiante que é possível "recuperar" o operador auto-adjunto através das respectivas projecções espectrais e que, além disso, toda a medida projectiva é a família de projecções espectrais de certo operador auto-adjunto (ou seja, em determinado espaço de Hilbert, a aplicação que associa a cada operador auto-adjunto a respectiva *família de projecções espectrais* é bijecção entre o conjunto dos operadores auto-adjuntos e os conjunto das medidas projectivas). Para obter esse resultado convém começar por notar que, dada uma medida projectiva $(P_\Omega)_{\Omega\in\mathrm{Bor}(\mathbb{R})}$, é possível definir uma família de *medidas complexas* (borelianas):

$$\bullet\ (\mu_{u,v})_{u,v\in\mathcal{H}},$$

pondo:

$$\bullet\ \mu_{u,v}(\Omega) = (P_\Omega u, v)\,,\ \forall\Omega\in\mathrm{Bor}\,(\mathbb{R}), u, v\in\mathcal{H};$$

no caso particular em que $(P_\Omega)_{\Omega\in\mathrm{Bor}(\mathbb{R})}$ é a família das projecções espectrais de um operador auto-adjunto $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, obtemos, em particular, como é fácil concluir, as *medidas espectrais* $\mu_u = \mu_{u,u}$ introduzidas na secção 5.2, [exercício!]. É então natural continuar a designar por ***medidas espectrais*** as medidas $\mu_{u,v}$ que acabámos de introduzir; que se trata de facto de medidas resulta facilmente da propriedade 5. e ficam determinadas pelas *funções de variação limitada normalizadas* (abreviadamente, funções " $\in$ NVL"):

$$\begin{aligned}&\mathbb{R} \to \mathbb{C}\\&\lambda \mapsto (P_\lambda u, v) = \mu_{u,v}(]-\infty, \lambda]) = (P_{]-\infty,\lambda]}u, v),\end{aligned}$$

ou seja, tais funções são de *variação limitada* em $\mathbb{R}$, *tendem para zero em* $-\infty$ *e são contínuas à direita*, tendo-se:

- $\mu_{u,v}(]a, b]) = (P_b u, v) - (P_a u, v)$,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_{u,v} = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d(P_\lambda u, v)\,,\ \forall f \in L^1(\mathbb{R}, d|\mu_{u,v}|)$,

onde, no segundo membro, se representa o integral de *Lebesgue-Stieltjes* a respeito da função $\lambda \mapsto (P_\lambda u, v)$ de NVL (*cf.* [Ru1], 6 e 8, para uma revisão destes conceitos). $|\mu_{u,v}|$ é a medida positiva *variação total* de $\mu_{u,v}$ e encontra-se associada à função de variação limitada normalizada *"variação total em* $]-\infty, \lambda]$ *de* $\mu_{u,v}$*"*; tem-se:

- $\displaystyle|\mu_{u,v}|(\Omega) = \sup_{\dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1}}\Omega_n=\Omega} \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \Big|\underbrace{\mu_{u,v}(\Omega_n)}_{\substack{=(P_{\Omega_n}u,v)=\\=(P_{\Omega_n}u,P_{\Omega_n}v)}}\Big| = \sup_{\dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1}}\Omega_n=\Omega} \sum_{n\in\mathbb{N}_1} \big|(P_{\Omega_n}u, P_{\Omega_n}v)\big| \leq$

$$\leq \sup_{\dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}_1}}\Omega_n=\Omega} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_1} \|P_{\Omega_n}u\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}_1} \|P_{\Omega_n}v\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|P_\Omega u\|\|P_\Omega v\| \leq \|u\|\|v\|,$$

já que as propriedades das medidas projectivas garantem que $P_\Omega u$ é soma *ortogonal* dos $P_{\Omega_n}u$ (note-se que utilizámos duas vezes Cauchy-Schwarz). As medidas $\mu_u = \mu_{u,u}$ $(u \in \mathcal{H})$ são obviamente positivas e das desigualdades que acabámos de estabelecer resulta, em particular, que:

- $|\mu_{u,v}|(\Omega) \leq \|P_\Omega u\|\|P_\Omega v\| = (P_\Omega u, P_\Omega u)^{\frac{1}{2}}(P_\Omega v, P_\Omega v)^{\frac{1}{2}} =$
  $= (P_\Omega u, u)^{\frac{1}{2}}(P_\Omega v, v)^{\frac{1}{2}} = \mu_u(\Omega)^{\frac{1}{2}}\mu_v(\Omega)^{\frac{1}{2}}$;

então, se $f = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j\, \chi_{\Omega_j}$ for função simples não negativa ($\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ se $j \neq k$), obtém-se:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\, d|\mu_{u,v}| &= \sum_{j=1}^{n} C_j\, |\mu_{u,v}|(\Omega_j) \leq \sum_{j=1}^{n} C_j\, \mu_u(\Omega_j)^{\frac{1}{2}}\mu_v(\Omega_j)^{\frac{1}{2}} \leq\\&\leq \Big(\sum_{j=1}^{n} C_j^2\, \mu_u(\Omega_j)\Big)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{n} \mu_v(\Omega_j)\Big)^{\frac{1}{2}}}_{\leq\mu_v(\mathbb{R})=\|v\|^2} = \Big(\int_{\mathbb{R}} f^2\, d\mu_u\Big)^{\frac{1}{2}}\|v\|.\end{aligned}$$

Por passagem ao limite pontual e aplicação do Teorema de Beppo Levi, concluímos que *se* $g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$*, então* $g \in L^1(\mathbb{R}, d|\mu_{u,v}|)$ e:

$$\text{(81)} \qquad \bullet \left| \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_{u,v} \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |g|\, d|\mu_{u,v}| \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |g|^2\, d\mu_u \Big)^{\frac{1}{2}} \|v\|.$$

10.3 "Versão medida projectiva" do Teorema espectral — decomposição espectral de um operador auto-adjunto; cálculo operacional geral

Estamos agora em condições de construir operadores auto-adjuntos a partir de medidas projectivas:

LEMA: ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $(P_\Omega)_{\Omega \in Bor(\mathbb{R})}$ medida projectiva em $\mathcal{H}$; então, se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ for mensurável (boreliana), pondo:***

$$\begin{aligned} D_g &= \{u \in \mathcal{H} : g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u) = \\ &= \{u \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2\, d(P_\lambda u, u) < +\infty\}, \end{aligned}$$

D_g é denso em $\mathcal{H}$ e existe um operador A em $\mathcal{H}$ e um só, tal que:

$$\bullet\, D(A) = D_g,$$
$$\bullet\, (Au, v) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d(P_\lambda u, v)\,,\ \forall u \in D_g, v \in \mathcal{H}.$$

Se g for real, então A é auto-adjunto; em qualquer caso põe-se, por definição:

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, dP_\lambda = A,$$

e tem-se:

$$\bullet\, \|Au\| = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)}\,,\ \forall u \in D_g.$$

Demonstração: Consideremos a aplicação:

$$\bullet\, \mathfrak{s} : D_g \times \mathcal{H} \to \mathbb{C},$$
$$\bullet\, (u, v) \mapsto \mathfrak{s}(u, v) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d(P_\lambda u, v);$$

é fácil verificar que $\mathfrak{s}$ é *sesquilinear*, atendendo a que $(u, v) \mapsto (P_\lambda u, v)$ é sesquilinear para cada λ e a propriedades elementares dos integrais a respeito de medidas de Lebesgue-Stieltjes (também poderíamos invocar a sesquilinearidade da aplicação $(u, v) \mapsto \mu_{u,v}$, com valores no espaço das medidas borelianas finitas sobre $\mathbb{R}$, notando que essa propriedade implica trivialmente a sesquilinearidade de $\mathfrak{s}$ para g função simples, donde resulta a sesquilinearidade no caso geral, pelos processos habituais de aproximação); note-se que $\mathfrak{s}$ está, de facto, bem definida, atendendo a (81) e às hipóteses feitas sobre g, donde resulta também que:

(82) $$\bullet\ |\mathfrak{s}(u,v)| \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R},d\mu_u)}\|v\|\,,\ \forall u \in D_g, v \in \mathcal{H}.$$

Então, para cada $u \in D_g$ é *forma linear contínua* a aplicação de $\mathcal{H}$ em $\mathbb{C}$:

$$\bullet\ v \mapsto \overline{\mathfrak{s}(u,v)},$$

e portanto, pelo Teorema de Riesz, existe um operador linear:

$$\bullet\ A : D_g \to \mathcal{H}$$

e um só, tal que:

$$(Au, v) = \mathfrak{s}(u,v)\,,\ \forall u \in D_g = D(A), v \in \mathcal{H}.$$

Provemos que D_g é denso em $\mathcal{H}$; se $u \in \mathcal{H}$, seja:

$$\bullet\ \Omega_n = [|g| \leq n] = \{\lambda \in \mathbb{R} : |g(\lambda)| \leq n\} \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R}),$$
$$\bullet\ u_n = P_{\Omega_n} u\,,\ \forall n \in \mathbb{N}_1.$$

Como

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \cdots,\ \text{e} \bigcup_{n\in\mathbb{N}_1} \Omega_n = \mathbb{R},$$

é fácil concluir, da definição de medida projectiva, que:

$$\bullet\ u_n \xrightarrow[n]{} u \text{ em } \mathcal{H};$$

por outro lado:

$$\begin{aligned}\bullet\ \mu_{u_n}(\{\lambda : |g(\lambda)| > n\}) &= (P_{\mathbb{R}\setminus\Omega_n} u_n, u_n) = (P_{\mathbb{R}\setminus\Omega_n} P_{\Omega_n} u, u_n) = \\ &= (P_{\underbrace{(\mathbb{R}\setminus\Omega_n)\cap\Omega_n}_{=\emptyset}} u, u_n) = (0, u_n) = 0,\end{aligned}$$

donde:

$$\bullet\ |g(\lambda)| \leq n\,,\ p.p.\text{–}d\mu_{u_n},$$

e portanto:

$$\bullet\ \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2\, d(P_\lambda u_n, u_n) \leq n^2 \|u_n\|^2 < +\infty \Rightarrow u_n \in D_g\,,\ \forall n \in \mathbb{N}_1,$$

o que prova a densidade de D_g em $\mathcal{H}$.

Provemos agora a última asserção do Lema. No caso em que g é função simples, ou seja:

$$\bullet\ g = \sum_{j=1}^{m} C_j\, \chi_{\Omega_j}$$

($\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ se $j \neq k$, $\Omega_j \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R}), \forall j,k = 1,\ldots,m$), vem, obviamente,

$D_g = \mathcal{H}$ e:

$$(Au, v) = \sum_{j=1}^{m} C_j \, \mu_{u,v}(\Omega_j) = \sum_{j=1}^{m} C_j \, (P_{\Omega_j} u, v) \, , \, \forall u, v \in \mathcal{H} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A = \sum_{j=1}^{m} C_j \, P_{\Omega_j},$$

donde:

$$\|Au\|^2 = (\sum_{j=1}^{m} C_j \, P_{\Omega_j} u, \sum_{j=1}^{m} C_j \, P_{\Omega_j} u) = \sum_{j=1}^{m} |C_j|^2 \, (P_{\Omega_j} u, u) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2 \, d(P_\lambda u, u) = \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)}.$$

Se g for apenas mensurável e $u \in D_g$, podemos considerar uma sucessão de funções simples $g_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ pontualmente tais que:

$$\bullet \; |g_n(t)| \leq |g(t)| \, , \, \forall n \in \mathbb{N}_1, t \in \mathbb{R}$$

(*cf.* [BW2]). Designando por A_n o operador $\int_{\mathbb{R}} g_n(\lambda) \, dP_\lambda$, ter-se-á, atendendo a (81):

$$\begin{aligned}\|Au - A_n u\| &= \sup_{\|v\| \leq 1} |(Au - A_n u, v)| = \sup_{\|v\| \leq 1} |(Au, v) - (A_n u, v)| \\ &= \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) \, d(P_\lambda u, v) - \int_{\mathbb{R}} g_n(\lambda) \, d(P_\lambda u, v) \right| \\ &= \sup_{\|v\| \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}} (g(\lambda) - g_n(\lambda)) \, d(P_\lambda u, v) \right| \leq \|g - g_n\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)} \underset{n}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

pelo Teorema de Lebesgue. Como, pelo que acabámos de ver,

$$\|A_n u\| = \|g_n\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)} \, , \, \forall n \in \mathbb{N}_1,$$

concluímos, por passagem ao limite, que:

$$\|Au\| = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)} \, , \, \forall u \in D_g.$$

Suponhamos agora que g é função *real*. Nesse caso:

$$\bullet \; (Au, u) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) \, d(P_\lambda u, u) \in \mathbb{R} \, , \, \forall u \in D(A) = D_g,$$

o que prova que A é *simétrico*. Para demonstrar que A é auto-adjunto basta então verificar que:

$$D(A^*) \subset D(A).$$

Seja $v \in D(A^*)$; temos:

$$v \in D(A^*) \Leftrightarrow v \in \mathcal{H} \text{ e } \exists v^* \in \mathcal{H} : (Au, v) = (u, v^*), \forall u \in D(A) = D_g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists v^* \in \mathcal{H} : \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu_{u,v} = (u, v^*), \forall u \in \mathcal{H} \text{ t.q. } g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u); \tag{83}$$

pretendemos demonstrar que $v \in D(A)$, ou seja, que $g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_v)$, para o que bastará estudar a "convergência" do integral:

$$\text{“}\int_{\mathbb{R}} |g|^2 \, d\mu_v\text{”},$$

procurando para tal, servir-nos de (83). Tentemos, pelo menos formalmente (por agora), obter o integral que nos interessa por escolha conveniente de u no integral do primeiro membro de (83). Notemos que, caso se tivesse, de facto, $v \in D(A)$, viria:

$$\text{“}\int_{\mathbb{R}} |g|^2 \, d\mu_v = \|Av\|^2 = (Av, Av)\text{”},$$

e se soubéssemos ainda que $v \in D(A^2)$, poderíamos prosseguir, obtendo (no pressuposto de A ser, de facto, auto-adjunto):

$$\text{“}\int_{\mathbb{R}} |g|^2 \, d\mu_v = (A(Av), v) = \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu_{Av,v}\text{”}.$$

Deste modo, formalmente, o integral cuja existência pretendemos demonstrar obtém-se "tomando $u = Av$ em (83)". Infelizmente não podemos, evidentemente, assegurar que este u esteja em $D(A)$, ou seja, que $v \in D(A^2)$, mas podemos contornar a dificuldade considerando "aproximações de Av". Recordemos que, da definição de A, resulta que o vector Av se caracterizaria por:

$$\text{“}(Av, w) = \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu_{v,w}\text{”},$$

o que sugere que se considerem as "aproximações" u_n $(n \in \mathbb{N}_1)$ caracterizadas por:

$$\bullet\ (u_n, w) = \int_{\mathbb{R}} g \, \chi_{[|g| \le n]} \, d\mu_{v,w}\,, \ \forall w \in \mathcal{H};$$

(trata-se, afinal, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, do vector $A_n v$ onde A_n é o operador *limitado* associado à função "truncada" $g\,\chi_{[|g| \le n]}$). Comecemos então por mostrar que, de facto, $u_n \in D(A) = D_g$, ou seja que $g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{u_n})$; trata-se de estudar um integral a respeito da medida μ_{u_n}, o que nos obriga a estudar esta medida com algum pormenor. Temos, para cada boreliano Ω de $\mathbb{R}$, por definição de μ_{u_n} e de u_n:

$$\mu_{u_n}(\Omega) = (P_\Omega u_n, u_n) = (u_n, P_\Omega u_n) = \int_{\mathbb{R}} g \, \chi_{[|g| \le n]} \, d\mu_{v, P_\Omega u_n}\,,$$

pelo que, para prosseguir, devemos agora estudar a medida $\mu_{v, P_\Omega u_n}$. Ora, para cada boreliano Ω' de $\mathbb{R}$, virá:

$$\mu_{v,P_\Omega u_n}(\Omega') = \underline{(P_{\Omega'}v, P_\Omega u_n) = \overline{(u_n, P_\Omega P_{\Omega'}v)}} = \overline{(u_n, P_{\Omega\cap\Omega'}v)} = \\ = \int_{\mathbb{R}} g\,\chi_{[|g|\leq n]}\,d\mu_{v,P_{\Omega\cap\Omega'}v},$$

o que sugere agora o estudo da medida $\mu_{v,P_{\Omega\cap\Omega'}v}$. Tomando $\Omega'' \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$, teremos:

$$\mu_{v,P_{\Omega\cap\Omega'}v}(\Omega'') = (P_{\Omega''}v, P_{\Omega\cap\Omega'}v) = (P_{\Omega\cap\Omega'\cap\Omega''}v, v) = \mu_v(\Omega\cap\Omega'\cap\Omega''),$$

ou seja, a medida $\mu_{v,P_{\Omega\cap\Omega'}v}$ não é mais que a *restrição* da medida μ_v a $\Omega\cap\Omega'$, pelo que uma função h é somável-$\mu_{v,P_{\Omega\cap\Omega'}v}$ sse a respectiva restrição a $\Omega\cap\Omega'$ for somável-μ_v e, nesse caso:

$$\int_{\mathbb{R}} h\,d\mu_{v,P_{\Omega\cap\Omega'}v} = \int_{\Omega\cap\Omega'} h\,d\mu_v.$$

(*cf.* [Ru1], Cap. 6). Substituindo acima, temos então:

$$\mu_{v,P_\Omega u_n}(\Omega') = \overline{\int_{\Omega\cap\Omega'} g\,\chi_{[|g|\leq n]}\,d\mu_v} = \int_{\Omega\cap\Omega'} g\,\chi_{[|g|\leq n]}\,d\mu_v$$

(visto a função integranda ser real e μ_v medida positiva); portanto a medida $\mu_{v,P_\Omega u_n}$ não é mais que a restrição a Ω da medida dada pelo integral a respeito de μ_v da função $g\,\chi_{[|g|\leq n]}$; por outras palavras, tal medida é absolutamente contínua relativamente a μ_v com derivada de Radon-Nikodym igual a $g\,\chi_{[|g|\leq n]}.\chi_\Omega$. Do que se sabe de tais medidas (*cf.* [Ru1], Cap. 6), concluímos que o integral a respeito de $\mu_{v,P_\Omega u_n}$ se calcula como o integral em Ω a respeito de μ_v do produto por g $\chi_{[|g|\leq n]}$; a somabilidade desse produto em Ω a respeito de μ_v caracteriza precisamente as funções somáveis-$\mu_{v,P_\Omega u_n}$. Podemos então substituir mais acima, obtendo:

$$\mu_{u_n}(\Omega) = \int_\Omega g\,\chi_{[|g|\leq n]}.g\,\chi_{[|g|\leq n]}\,d\mu_v = \int_\Omega g^2\,\chi_{[|g|\leq n]}\,d\mu_v;$$

μ_{u_n} é portanto absolutamente contínua relativamente a μ_v com derivada de Radon-Nikodym igual a $g^2\,\chi_{[|g|\leq n]}$; para testar a somabilidade de g^2 a respeito de μ_{u_n} basta então estudar a função:

$$g^2.g^2\,\chi_{[|g|\leq n]} = g^4\,\chi_{[|g|\leq n]}$$

a qual, sendo limitada (por n^4) é obviamente *somável* a respeito da medida *finita* μ_v. Daqui resulta que, de facto, $g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{u_n})$, ou seja, $u_n \in D_g = D(A)$ e podemos, portanto, tomar $u = u_n$ em (83), $\forall n \in \mathbb{N}_1$. Teremos então, $\forall n \in \mathbb{N}_1$:

$$\text{(84)} \qquad \int_{\mathbb{R}} g\,d\mu_{u_n,v} = (u_n, v^*) = \int_{\mathbb{R}} g\,\chi_{[|g|\leq n]}\,d\mu_{v,v^*};$$

estudemos a medida $\mu_{u_n,v}$. Para $\Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R})$, vem:

$$\mu_{u_n,v}(\Omega) = (P_\Omega u_n, v) = \overline{(P_\Omega v, u_n)} = \overline{\mu_{v,u_n}(\Omega)};$$

mas a medida μ_{v,u_n} já foi acima estudada, uma vez que se trata do caso particular de $\mu_{v,P_\Omega u_n}$ com $\Omega = \mathbb{R}$. Como se trata de medida real, coincide, de facto, com $\mu_{u_n,v}$; sabemos então que esta é absolutamente contínua relativamente a μ_v com derivada de Radon-Nikodym igual a $g\,\chi_{[|g|\le n]}\cdot\chi_{\mathbb{R}} = g\,\chi_{[|g|\le n]}$. Assim sendo, obtemos de (84), para cada $n \in \mathbb{N}_1$ (usando também, mais uma vez, a estimativa (81)):

$$\int_{\mathbb{R}} g^2\,\chi_{[|g|\le n]}\,d\mu_v = \int_{\mathbb{R}} g\,d\mu_{u_n,v} = \int_{\mathbb{R}} g\,\chi_{[|g|\le n]}\,d\mu_{v,v^*} = \left|\int_{\mathbb{R}} g\,\chi_{[|g|\le n]}\,d\mu_{v,v^*}\right| \le$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{R}} \left|g\,\chi_{[|g|\le n]}\right|^2 d\mu_v\right)^{\frac{1}{2}} \|v^*\| = \left(\int_{\mathbb{R}} g^2\,\chi_{[|g|\le n]}\,d\mu_v\right)^{\frac{1}{2}} \|v^*\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} g^2\,\chi_{[|g|\le n]}\,d\mu_v\right)^{\frac{1}{2}} \le \|v^*\|;$$

simples aplicação do Teorema de Beppo Levi permite-nos agora concluir que, de facto, $g^2 \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_v)$, e portanto, $g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_v)$, ou seja, $v \in D_g = D(A)$.□

TEOREMA 10.3 (Teorema espectral para operadores auto-adjuntos — "versão medida projectiva" — e cálculo operacional ou simbólico geral): ***Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert; então a aplicação que a cada operador auto-adjunto***

$$A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

faz corresponder a respectiva família espectral de projecções $(P_\Omega)_{\Omega\in\text{Bor}\,(\mathbb{R})}$ $(P_\Omega = \chi_\Omega(A), \forall \Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R}))$ é uma bijecção sobre o conjunto das medidas projectivas em $\mathcal{H}$ cuja inversa associa a cada medida projectiva $(P_\Omega)_{\Omega\in\text{Bor}\,(\mathbb{R})}$ o operador:

$$\bullet\; A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\,dP_\lambda$$

(definido no Lema anterior). Além disso, se $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\,dP_\lambda$ for unitariamente equivalente (através de certo operador unitário U) ao operador T_f em $L^2(M, d\mu)$ ($f : M \to \mathbb{R}$ mensurável, (M, μ) espaço de medida), tem-se, para cada função boreliana $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\bullet\; \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\,dP_\lambda = U^{-1} T_{g\circ f} U;$$

em particular, designando por $g(A)$ o operador $\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\,dP_\lambda$, valem as seguintes propriedades:

1. ***Se $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, então $g(A) = \Phi_A(g)$, ou seja, a aplicação $g \mapsto g(A)$ estende o cálculo operacional limitado.***

2. *Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ for também mensurável boreliana e $g_{/\sigma(A)} = h_{/\sigma(A)}$, então $g(A) = h(A)$.*

3. *$\overline{g}(A) = g(A)^*$; em particular, se g for real, $g(A)$ é auto-adjunto.*

4. *$(\lambda g)(A) = \lambda g(A)\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.*

5. *$(g+h)(A) \supset g(A) + h(A)$, tendo-se:*

$$D(g(A) + h(A)) = D_h \cap D_{g+h} = D_g \cap D_{g+h}.$$

6. *$(g.h)(A) \supset g(A)h(A)$, tendo-se $D(g(A)h(A)) = D_h \cap D_{g.h}$.*

7. *Se $u \in D_g, v \in D_h$, então $g\overline{h} \in L^1(\mathbb{R}, d\mu_{u,v})$ e:*

$$\bullet\ (g(A)u, h(A)v) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\overline{h(\lambda)}\, d(P_\lambda u, v);$$

em particular:

$$\mu_{g(A)u,h(A)v}(\Omega) = \int_{\Omega} g(\lambda)\overline{h(\lambda)}\, d(P_\lambda u, v),$$

ou seja,

$$d(P_\lambda g(A)u, h(A)v) = g\overline{h}\, d(P_\lambda u, v).$$

8. *Se $n \in \mathbb{N}_1, g^n(A) = g(A)^n$; em particular:*

$$A^n = \int_{\mathbb{R}} \lambda^n\, dP_\lambda,$$

sendo, portanto, operador auto-adjunto.

9. *Se $g(\lambda) \neq 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$ e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ for mensurável boreliana tal que $h(\lambda) = g(\lambda)^{-1}, \forall \lambda \in \sigma(A)$, então:*

$$h(A) = g(A)^{-1},$$

em particular:

$$(A - \mu I)^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - \mu}\, dP_\lambda\,,\ \forall \mu \in \rho(A),$$

onde "$\widehat{1/(\lambda - \mu)}$" representa qualquer função mensurável boreliana em $\mathbb{R}$ que coincida com esta função em $\sigma(A)$ (o valor em $\lambda = \mu$ é, portanto, arbitrário).

10. *Se $u \in D_g$ e g_n for sucessão de funções borelianas tais que $g_n \underset{n}{\longrightarrow} g$ p.p.–$d\mu_u$, $|g_n| \leq |g|$ p.p.–$d\mu_u$, então $u \in D_{g_n}, \forall n \in \mathbb{N}_1$ e:*

$$g_n(A) \underset{n}{\longrightarrow} g(A)$$

fortemente em D_g.

11. *$g(A)$ é normal, ou seja:*

$$\bullet\ g(A)g(A)^* = g(A)^*g(A) \ \ (= |g|^2(A)).$$

12. *Se g for real e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mensurável boreliana, então:*

$$\bullet\ h \circ g(A) = h(g(A)).$$

13. *Se $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $BA \subset AB$, então:*

$$Bg(A) \subset g(A)B.$$

14. *Se $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e* **supp** *g for compacto, então $g(A)u \in D(A), \forall u \in \mathcal{H}$; em particular $P_\Omega u \in D(A), \forall u \in \mathcal{H}, \Omega \in$* **Bor** $(\mathbb{R})$ *limitado.*

Demonstração: Comecemos por recordar que, sendo $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auto-adjunto, então, atendendo ao Teorema 7.1, podemos supor que:

$$\bullet\ A = U^{-1} T_f U,$$

onde:

$$U : \mathcal{H} \to L^2(M, d\mu)$$

é unitário e $f : M \to \mathbb{R}$ mensurável, sendo (M, μ) espaço de medida. Comecemos então por mostrar que, em tal situação, se:

$$P_\Omega = \chi_\Omega(A) = \Phi_A(\chi_\Omega), \forall \Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R}),$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mensurável boreliana, então:

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, dP_\lambda = U^{-1} T_{g \circ f} U \tag{85}$$

e portanto, em particular:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda\, dP_\lambda = U^{-1} T_f U = A,$$

de que resultará também a *injectividade* da aplicação:

$$A \mapsto \chi_\Omega(A)\,(= \Phi_A(\chi_\Omega)).$$

No caso particular em que g é função simples, ou seja, da forma:

$$g = \sum_{j=1}^{n} C_j\, \chi_{\Omega_j}$$

$(C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{C}, \Omega_1, \ldots, \Omega_n \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R}))$, temos, de facto (atendendo também ao Teorema 7.2 aplicado a g):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d(P_\lambda u, v) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} C_j\, \chi_{\Omega_j}(\lambda)\, d(P_\lambda u, v) = \sum_{j=1}^{n} C_j \int_{\mathbb{R}} \chi_{\Omega_j}\, d\mu_{u,v} = \\ &= \sum_{j=1}^{n} C_j\, \mu_{u,v}(\Omega_j) = \sum_{j=1}^{n} C_j\, (P_{\Omega_j} u, v) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} C_j\, (\chi_{\Omega_j}(A) u, v) = (\Phi_A(g) u, v) = (U^{-1} T_{g\circ f} U u, v),\end{aligned} \tag{86}$$

$\forall u, v \in \mathcal{H}$, pelo que (85) vale para este g. Supondo agora g mensurável boreliana qualquer, mostremos que $u \in D_g$ sse $h = Uu \in D(T_{g\circ f})$, tendo-se (85). Com efeito, se $u \in D_g$, atendendo ao Lema anterior vem:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2\, d(P_\lambda u, u) < +\infty;$$

considerando uma sucessão g_n de funções simples, tal que $g_n(\lambda) \underset{n}{\longrightarrow} g(\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $|g_n(\lambda)| \leq |g(\lambda)|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_1$, ter-se-á, pelo Teorema de Lebesgue:

$$\int_{\mathbb{R}} |g_n(\lambda)|^2\, d(P_\lambda u, u) \underset{n}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2\, d(P_\lambda u, u).$$

Mas, atendendo a (86):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g_n(\lambda)|^2\, d(P_\lambda u, u) &= (U^{-1} T_{g_n \circ f} U u, u) = (T_{g_n\circ f} h, h) = \\ &= \int_M |g_n \circ f(m)|^2\, |h(m)|^2 d\mu(m),\end{aligned}$$

donde, pelo *Lema de Fatou*, $(g \circ f)h \in L^2(M, d\mu)$, ou seja, $h = Uu \in D(T_{g\circ f})$; de modo análogo se verifica que, reciprocamente, $Uu \in D(T_{g\circ f}) \Rightarrow u \in D_g$, e portanto, de facto:

$$\bullet\; D_g = D(U^{-1} T_{g\circ f} U).$$

Agora, tomando $u \in D_g, v \in \mathcal{H}$ e atendendo a (81):

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\mu_{u,v} - \int_{\mathbb{R}} g\, d\mu_{u,v} \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |g_n - g|\, d|\mu_{u,v}| \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |g_n - g|^2\, d\mu_u \right)^{\frac{1}{2}} \|v\| \underset{n}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

pelo Teorema de Lebesgue; como, também pelo Teorema de Lebesgue e porque $h = Uu \in D(T_{g\circ f})$, concluímos que, para $k = Uv \in L^2(M, d\mu)$:

$$\int_M g_n \circ f(m)\, h(m)\, \overline{k(m)} d\mu(m) \underset{n}{\longrightarrow} \int_M g \circ f(m)\, h(m)\, \overline{k(m)} d\mu(m),$$

ou seja:

$$(T_{g_n \circ f} h, k) \underset{n}{\longrightarrow} (T_{g \circ f} h, k) \Rightarrow (U^{-1} T_{g_n \circ f} U u, U^{-1} k) \underset{n}{\longrightarrow} (U^{-1} T_{g \circ f} U u, U^{-1} k)$$

resulta de (86) aplicado a cada g_n, por passagem ao limite em n (sendo u arbitrário em D_g e $v = U^{-1}k$, arbitrário em $\mathcal{H}$):

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d(P_\lambda u, v) = (U^{-1} T_{g \circ f} U u, v),$$

de que resulta (85). Representaremos doravante por $g(A)$ o operador definido por qualquer dos membros de (85)

Mostremos agora que a aplicação $A \mapsto (\chi_\Omega(A))_{\Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R})}$ é *sobrejectiva* sobre o conjunto das medidas projectivas sobre $\mathcal{H}$. Seja então $(P_\Omega)_{\Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R})}$ medida projectiva sobre $\mathcal{H}$ e:

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dP_\lambda$$

(com a notação do Lema anterior); provemos que:

$$P_\Omega = \chi_\Omega(A)\, (\,= \Phi_A(\Omega))\,,\ \forall \Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R}).$$

Vamos demonstrar, mais geralmente, que:

$$(87) \qquad g(A) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, dP_\lambda\,,\ \forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

o que contém, de facto, o resultado pretendido, pois para $g = \chi_\Omega$ $(\Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R}))$, obtém-se, em particular:

$$\chi_\Omega(A) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\Omega(\lambda)\, dP_\lambda = P_\Omega.$$

Note-se que só obtivemos (85) para uma medida projectiva em que os P_Ω são da forma $\chi_\Omega(A)$, pelo que não podemos aplicar directamente (85) à medida projectiva $(P_\Omega)_{\Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R})}$ agora fixada. Para demonstrar (87) servir-nos-emos da unicidade do cálculo operacional limitado (*cf.* Teorema 7.2); seja então:

$$\bullet\ \Psi_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$$
$$\bullet\ g \mapsto \Psi_A(g) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, dP_\lambda.$$

Verifiquemos que Ψ_A satisfaz às condições do homomorfismo do Teorema 7.2 e que garantem a identidade $\Psi_A = \widetilde{\Phi}_A$ ((87) ficará então demonstrada, uma vez que um dos processos de obter $g(A)$ — através de um operador de multiplicação unitariamente equivalente a A — conduz precisamente a $\widetilde{\Phi}_A(g)$, de acordo ainda com o Teorema 7.2). Provemos, para começar, que Ψ_A é, de facto, homomorfismo (que toma valores em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ resulta trivialmente da estimativa, utilizando o Lema anterior:

$$\|\Psi_A(g)u\|^2 = \left\|\left(\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, dP_\lambda\right)u\right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |g|^2\, d\mu_u \leq \|g\|_\infty^2 \|u\|^2, \forall u \in \mathcal{H});$$

a única propriedade não trivial é a relativa ao produto, ou seja:

$$\Psi_A(g.h) = \Psi_A(g)\Psi_A(h),$$

$\forall g, h \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ora:

$$(\Psi_A(g)\Psi_A(h)\, u, v) = (\Psi_A(h)\, u, \Psi_A(g)^* v) = \int_{\mathbb{R}} h(\lambda)\, d\mu_{u,\Psi_A(g)^* v},$$

pelo que nos convém estudar a medida $\mu_{u,\Psi_A(g)^* v}$; mas, se $\Omega \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$:

$$\mu_{u,\Psi_A(g)^* v}(\Omega) = (P_\Omega u, \Psi_A(g)^* v) = (\Psi_A(g) P_\Omega u, v) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\mu_{P_\Omega u, v}.$$

Tomando então $\Omega' \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$:

$$\mu_{P_\Omega u, v}(\Omega') = (P_{\Omega'} P_\Omega u, v) = (P_{\Omega' \cap \Omega} u, v) = \mu_{u,v}(\Omega' \cap \Omega),$$

ou seja, $\mu_{P_\Omega u, v}$ é a restrição de $\mu_{u,v}$ a Ω, pelo que, voltando atrás:

$$\mu_{u,\Psi_A(g)^* v}(\Omega) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\mu_{P_\Omega u, v} = \int_\Omega g(\lambda)\, d\mu_{u,v},$$

o que mostrar ser $\mu_{u,\Psi_A(g)^* v}$ absolutamente contínua relativamente a $\mu_{u,v}$ com derivada de Radon-Nikodym igual a g. Assim sendo, podemos retomar o cálculo inicial:

$$\begin{aligned}(\Psi_A(g)\Psi_A(h)\, u, v) &= \int_{\mathbb{R}} h(\lambda)\, d\mu_{u,\Psi_A(g)^* v} = \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\lambda) g(\lambda)\, d\mu_{u,v} = (\Psi_A(g.h)\, u, v),\end{aligned}$$

$\forall u, v \in \mathcal{H}$, o que esclarece o comportamento de Ψ_A relativamente ao produto. Quanto às propriedades topológicas, provemos, por exemplo que se:

$$g_n(\lambda) \underset{n}{\longrightarrow} \lambda\,,\ |g_n(\lambda)| \leq |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_1$$

$(g_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}_1)$, então:

$$\Psi_A(g_n)\, u \underset{n}{\longrightarrow} Au\,,\ \forall u \in D(A) = D_{\widehat{\lambda}}$$

(a demonstração — análoga e mais fácil — da propriedade de "continuidade forte" é deixada como exercício). Para $u \in D(A)$ temos, com efeito, utilizando mais uma vez o Lema anterior:

$$\|\Psi_A(g_n)\,u - Au\| = \left\|\int_{\mathbb{R}} (g_n - \widehat{\lambda})\,dP_\lambda u\right\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |g_n(\lambda) - \lambda|^2\,d\mu_u\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[n]{} 0,$$

pelo Teorema de Lebesgue. Verificadas as propriedades que permitem identificar Ψ_A com $\widetilde{\Phi}_A$, fica demonstrada a sobrejectividade de $A \mapsto (\chi_\Omega(A))_{\Omega\in\mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})}$, cujo inverso, como também ficou patente, é:

$$(P_\Omega)_{\Omega\in\mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \lambda\,dP_\lambda.$$

As propriedades 1. a 11. do cálculo operacional $g \mapsto g(A)$ resultam agora, facilmente, de (85). Com efeito, 1. é consequência imediata do Teorema 7.2; 2. tem demonstração semelhante a 7. do Teorema 7.2, bastando, como então, atender a que $\sigma(A) = R_{\mathrm{ess}}(f)$ e $\mu(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus R_{\mathrm{ess}}(f))) = 0$. Para demonstrar 3. basta notar (*cf.* secção 6.2) que:

$$\bullet\ (T_{g\circ f})^* = T_{\overline{g\circ f}} = T_{\overline{g}\circ f}.$$

4., 5., 6. e 7. são deixadas como exercícios, onde se pode utilizar o facto (a demonstrar) de $d\mu_{g(A)u,v} = g\,d\mu_{u,v}$ (g mensurável boreliana, $u \in D_g$). 8. resulta de 6. e da observação trivial:

$$\bullet\ u \in D_{g^n} \Rightarrow g^n \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u) \Rightarrow g^{n-1} \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u) \Rightarrow u \in D_{g^{n-1}},$$

consequência de:

$$\int_{\mathbb{R}} |g|^{2n-2}\,d\mu_u \le \left(\int_{\mathbb{R}} |g|^{2n}\,d\mu_u\right)^{1-\frac{1}{n}} \|u\|^{\frac{2}{n}} < +\infty,$$

se $g^n \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$ (atendendo à desigualdade de Hölder com $p = n/(n-1)$, $q = n$).

Para demonstrar 9. basta atender a 2. e a 6., donde resulta:

$$h(A) \circ g(A) \subset h.g(A) = I,$$

já que:

$$h(\lambda)g(\lambda) = 1\,,\ \forall\lambda \in \sigma(A);$$

portanto:

$$h(A)g(A) = I_{/D_g}$$

(pois $D(h(A)g(A)) = D_g \cap D_1 = D_g$). De modo análogo,

$$g(A)h(A) = I_{D_h},$$

e portanto, de facto:

$$h(A) = g(A)^{-1}.$$

10. resulta de simples aplicação do Teorema de Lebesgue [exercício]; 11. é consequência imediata de (*cf.* secção 6.2):

$$(T_{g\circ f})^* T_{g\circ f} = T_{g\circ f}(T_{g\circ f})^* = T_{|g\circ f|^2} = T_{|g|^2\circ f}.$$

12. é consequência imediata de (85), aplicado a A e a $g(A)$:

$$\bullet\ h \circ g(A) = U^{-1}T_{(h\circ g)\circ f}U = U^{-1}T_{h\circ(g\circ f)}U = h(g(A)),$$

já que:

- $g(A)$ é auto-adjunto (por g ser real),
- $g(A) = U^{-1}T_{g\circ f}U.$

Para demonstrar 13., notemos que generaliza 9. do Teorema 7.2; tínhamos então, para $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$Bg(A) = g(A)B;$$

mostremos que se pode obter 13. pelos processos habituais de aproximação, utilizando 10. acima; com efeito, se g for mensurável boreliana e g_n sucessão de funções simples convergindo pontualmente para g e tal que $|g_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}_1$, tem-se, para $u \in D_g$:

$$g_n(A)Bu = Bg_n(A)u \underset{n}{\longrightarrow} Bg(A)u$$

(por 10. e porque $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$). Então (utilizando também o Lema anterior):

$$\bullet \int_{\mathbb{R}} |g_n(\lambda)|^2\, d(P_\lambda Bu, Bu) = \|g_n(A)Bu\|^2 \underset{n}{\longrightarrow} \|Bg(A)u\|^2,$$

donde, pelo Lema de Fatou, $g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{Bu})$ e portanto $Bu \in D_g$, pelo que, atendendo também a 10.:

$$\bullet\ g_n(A)Bu \underset{n}{\longrightarrow} g(A)Bu,$$

o que permite obter, pela unicidade do limite:

$$Bg(A)u = g(A)Bu.$$

Como $D_g = D(g(A)) = D(Bg(A))$, a igualdade vale para todo o u neste último espaço, pelo que, de facto:

$$Bg(A) \subset g(A)B.$$

14. resulta imediatamente de:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d(P_\lambda g(A)u, g(A)u) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 |g(\lambda)|^2 d(P_\lambda u, u) =$$
$$= \int_{-C}^{C} \lambda^2 |g(\lambda)|^2 d(P_\lambda u, u) \leq C^2 \|g\|_\infty^2 \|u\|^2$$

(*cf.* 7.), onde supp $g \subset [-C, C]$.□

Deste Teorema resulta, por exemplo, que faz sentido definir exp $(-tA)$ para qualquer A auto-adjunto; no caso em que A é *positivo* e $t > 0$ reencontramos o *semi-grupo de contracção* introduzido na secção 5., como é fácil verificar, o que mostra a coerência das notações utilizadas.

A *família espectral de projecções* associada a dado operador auto-adjunto A também se diz *decomposição espectral* de A [86] (embora certos autores reservem estas designações para a família $(P_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}} = (P_{]-\infty,\lambda]})_{\lambda\in\mathbb{R}}$); procuremos caracterizar as diversas partes do *espectro* de A através da decomposição espectral. Note-se que a Proposição 6.5 fornece uma caracterização do espectro *através de qualquer representação unitária de A por um operador de multiplicação T_f*; teremos agora:

PROPOSIÇÃO 10.4: ***Seja $(P_\Omega)_{\Omega\in \text{Bor}(\mathbb{R})}$ família espectral de projecções e:***

$$\bullet\ A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dP_\lambda;$$

então:

1. ***$\lambda \in \sigma(A)$ sse $P_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} \neq 0$, $\forall\varepsilon > 0$.***

2. ***$\lambda \in \sigma_C(A)$ sse $\lambda \in \sigma(A)$ e $P_{\{\lambda\}} = 0$.***

3. ***$\lambda \in \sigma_P(A)$ sse $P_{\{\lambda\}} \neq 0$; nesse caso $R(P_{\{\lambda\}})$ é o subespaço próprio associado a λ.***

Demonstração: Atendendo ao Teorema 7.1, basta demonstrar a proposição para $A = T_f$, $f : M \to \mathbb{R}$ mensurável, $(M, d\mu)$ espaço de medida nas condições da Proposição 5.2. Atendendo ao Teorema anterior, teremos então:

$$\bullet\ P_\Omega = T_{\chi_\Omega \circ f}\,,\ \forall \Omega \in \text{Bor}(\mathbb{R});$$

por outro lado, atendendo à referida Proposição, tem-se:

$$\lambda \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda \notin R_{\text{ess}}(f) \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 : \mu(f^{-1}(]\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon[) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 : \chi_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} \circ f = 0\, p.p.\text{–}\mu \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 : T_{\chi_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[}\circ f} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0 : P_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} = 0,$$

o que demonstra 1..

[86]ou ainda *resolução espectral (da identidade)* ou *representação espectral.*

2. é consequência imediata de 1. e 3., pelo que basta demonstrar 3.; temos, para $h \in D(T_f)$:

$$\bullet\ f.h = \lambda h \; p.p.\text{–}\mu \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(m) = \lambda \text{ ou } h(m) = 0, \textit{ para quase todos os } m \in M \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h(m) = \chi_{\{\lambda\}}(f(m))\, h(m) \; p.p. \text{ em } M \Leftrightarrow h = P_{\{\lambda\}} h \Leftrightarrow h \in R(P_{\{\lambda\}}).$$

Então, obviamente, $\lambda \in \sigma_P(A)$ sse $R(P_{\{\lambda\}}) \neq \{0\}$, ou seja, sse $P_{\{\lambda\}} \neq 0$ e o subespaço próprio associado a λ é, nesse caso, $R(P_{\{\lambda\}})$.□

10.4 Espectro essencial e discreto. Imagem $\boldsymbol{P}$-essencial; caracterização dos $\boldsymbol{g(A)}$ limitados e das partes de $\boldsymbol{\sigma(g(A))}$

O resultado anterior sugere nova divisão do espectro de um operador auto-adjunto:

DEFINIÇÃO: *Seja* $(P_\Omega)_{\Omega \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})}$ *medida projectiva e:*

$$\bullet\ A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dP_\lambda;$$

chamamos ***espectro essencial*** *de* A *ao conjunto:*

$$\bullet\ \sigma_{\text{ess}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : R(P_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[}) \textit{ tem dimensão infinita, } \forall \varepsilon > 0\},$$

e ***espectro discreto*** *a:*

$$\bullet\ \sigma_{\text{disc}}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{\text{ess}}(A).$$

Observação: 1) É fácil verificar que $\sigma_{\text{disc}}(A)$ é constituído exactamente pelos valores *isolados* de $\sigma(A)$ que são valores próprios *de multiplicidade finita* [exercício].

Pensemos agora na caracterização do espectro de uma *função* $g(A)$ do operador auto-adjunto $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dP_\lambda$; convém-nos, para isso, introduzir as seguintes definições:

DEFINIÇÕES: *Seja* $(P_\Omega)_{\Omega \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})}$ *família espectral de projecções ;* $\Omega \in \in$ *Bor* $(\mathbb{R})$ *diz-se* ***desprezável-P*** *se* $P_\Omega = 0$*, ou seja, se* Ω *tiver medida* $(P_\Omega u, u)$ *nula* $\forall u \in \mathcal{H}$.

Uma função boreliana $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *diz-se* ***essencialmente P-limitada*** *se existir* $M > 0$ *tal que* $\{\lambda \in \mathbb{R} : |g(\lambda)| > M\}$ *é desprezável-P. O ínfimo dos* M *nestas condições diz-se* ***supremo P-essencial*** *de* g *e designa-se por* $\|g\|_{\infty,P}$*; designamos por* $\boldsymbol{\mathcal{L}^\infty(P)}$ *o conjunto dos* g *naquelas condições.*

*Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ função boreliana qualquer, chamamos **imagem P-essencial** de g ao conjunto:*

$$R_{P\text{-}ess}(g) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0, P_{g^{-1}(B(\lambda,\varepsilon))} \neq 0\}.$$

É fácil verificar que $g \in \mathcal{L}^\infty(P)$ sse $R_{P\text{-}ess}(g)$ *for limitado* e, nesse caso:

$$\|g\|_{\infty,P} = \sup_{\lambda \in R_{P\text{-}ess}(g)} |\lambda| = \max_{\lambda \in R_{P\text{-}ess}(g)} |\lambda|$$

[exercício]. Temos agora:

PROPOSIÇÃO 10.5: ***Seja $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dP_\lambda$ ($(P_\Omega)_{\Omega \in \text{Bor}(\mathbb{R})}$ família espectral de projecções) e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ função mensurável boreliana; então $g(A)$ é limitado sse $g \in \mathcal{L}^\infty(P)$, tendo-se:***

$$\|g(A)\| = \|g\|_{\infty,P}.$$

Além disso, nesse caso, $g(A)$ aplica D_h em D_h para toda a função mensurável boreliana $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Demonstração: Se $g \in \mathcal{L}^\infty(P)$ tem-se:

$$\begin{aligned} |(g(A)u, v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) \, d(P_\lambda u, v) \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2 \, d(P_\lambda u, u) \right)^{\frac{1}{2}} \|v\| \leq \\ &\leq \|g\|_{\infty,P} \|u\| \|v\| \, , \forall u \in D_g, v \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

donde $g(A)$ é *limitado* e $\|g(A)\| \leq \|g\|_{\infty,P}$; reciprocamente, se $g(A)$ for limitado, tem-se, atendendo ao Teorema 10.3:

$$\bullet \; \|g^n(A)\| = \|g(A)^n\| \leq \|g(A)\|^n,$$

$\forall n \in \mathbb{N}_1$, pelo que, sendo

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{R} : |g(\lambda)| > \|g(A)\|\},$$

vem, para cada $u \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\frac{|g(\lambda)|}{\|g(A)\|} \right)^{2n} d(P_\lambda u, u) &= \frac{1}{\|g(A)\|^{2n}} \int_\Omega |g^n(\lambda)|^2 \, d(P_\lambda u, u) = \frac{\|g^n(A) \, u\|^2}{\|g(A)\|^{2n}} \leq \\ &\leq \frac{\|g^n(A)\|^2}{\|g(A)\|^{2n}} \|u\|^2 \leq \frac{\|g(A)\|^{2n}}{\|g(A)\|^{2n}} \|u\|^2 = \|u\|^2. \end{aligned}$$

Mas:

$$\left(\frac{|g(\lambda)|}{\|g(A)\|} \right)^{2n} \uparrow +\infty$$

em Ω, donde, pelo Teorema de Beppo Levi, $\mu_u(\Omega) = 0$; como u é arbitrário em $\mathcal{H}$, vem $P_\Omega = 0$ e portanto:

$$\bullet \ \|g\|_{\infty,P} \leq \|g(A)\|.$$

Em particular, $g \in \mathcal{L}^\infty(P)$ e, atendendo ao que atrás se viu:

$$\bullet \ \|g\|_{\infty,P} = \|g(A)\|.$$

A última parte da Proposição é agora consequência imediata do Teorema 10.3–7 e da definição de D_h.□

PROPOSIÇÃO 10.6: ***Seja*** $(P_\Omega)_{\Omega\in\text{Bor}(\mathbb{R})}$ ***família espectral de projecções,*** $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ***função mensurável boreliana e:***

$$\bullet \ B = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, dP_\lambda;$$

então:

1. $\sigma(B) = R_{P\text{-ess}}(g)$.
2. $\sigma_C(B) = \{z \in R_{P\text{-ess}}(g) : g^{-1}(z)$ ***é desprezável-***$P\}$.
3. $\sigma_P(B) = \{z \in R_{P\text{-ess}}(g) : g^{-1}(z)$ ***não é desprezável-***$P\}$.
4. $\sigma_R(B) = \emptyset$.

Demonstração: Se $z \notin R_{P\text{-ess}}(g)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\bullet \ P_{\{\lambda:|g(\lambda)-z|<\varepsilon\}} = 0 \Rightarrow P_{\{\lambda:\frac{1}{|g(\lambda)-z|}>\frac{1}{\varepsilon}\}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{g-z} \in \mathcal{L}^\infty(P) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{g(\lambda)-z}\, dP_\lambda \text{ é limitado.}$$

Logo, pondo $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dP_\lambda$, vem (pelo Teorema 10.3):

$$\frac{1}{g-z}(A)(g(A)-zI) = \underbrace{1(A)}_{=I} = (g(A)-zI)\frac{1}{g-z}(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z \notin \sigma(g(A)) = \sigma(B),$$

ficando assim provado que $\sigma(B) \subset R_{P\text{-ess}}(g)$. Reciprocamente, se $z \in R_{P\text{-ess}}(g)$ e $P_{g^{-1}(z)} \neq 0$, então, tomando $u \in R(P_{g^{-1}(z)}) \setminus \{0\}$, vem (atendendo ao Teorema 10.3):

$$\bullet \ u \in D(B) = D_g,$$

visto que:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2\, d\mu_u = \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda)|^2\, d\mu_{P_{g^{-1}(z)}u} = \int_{g^{-1}(z)} |g(\lambda)|^2\, d\mu_u = |z|^2\|u\|^2 < +\infty,$$

e, por outro lado:

$$\bullet\ (Bu,v)=\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)d(P_\lambda u,v)=\int_{g^{-1}(z)} g(\lambda)d(P_\lambda u,v)=z\int_{g^{-1}(z)} d(P_\lambda u,v)=$$
$$=z\int_{\mathbb{R}} d(P_\lambda u,v)=z(u,v)=(zu,v)\,,\ \forall v\in\mathcal{H},$$

donde:

$$\bullet\ Bu=zu,$$

e portanto $z\in\sigma_P(B)$. Se $z\in R_{P\text{-ess}}(g)$ e $P_{g^{-1}(z)}=0$, como $P_{g^{-1}(B(z,1/n))}\neq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}_1$, podemos considerar uma sucessão u_n ($n\in\mathbb{N}_1$) tal que:

- $u_n\in P_{g^{-1}(B(z,\frac{1}{n}))}$ ($\subset D_g$ como é fácil verificar),
- $\|u_n\|=1$,

$\forall n\in\mathbb{N}_1$. Ora:

$$\|Bu_n-zu_n\|^2=\int_{\mathbb{R}}|g(\lambda)-z|^2\,d(P_\lambda u_n,u_n)=$$
$$=\int_{g^{-1}(B(z,\frac{1}{n}))}|g(\lambda)-z|^2\,d(P_\lambda u_n,u_n)\le\frac{1}{n^2}\|u_n\|^2=\frac{1}{n^2}\xrightarrow[n]{}0,$$

pelo que $B-zI$ *não pode ter inverso contínuo*; em particular, $z\notin\sigma(B)$, o que termina a demonstração de 1.. Mas, além disso, como:

$$u\in D_g,\,Bu-zu=0\Rightarrow\int_{\mathbb{R}}|g(\lambda)-z|^2\,d\mu_u=0$$

e estamos a supor que $g(\lambda)\neq z\ p.p.\text{-}\mu_u$, concluímos que $u=0$, ou seja, que $B-zI$ é *injectivo*, donde $z\notin\sigma_P(B)$; se fosse $z\in\sigma_R(B)$, ter-se-ia $\overline{z}\in\sigma_P(B^*)$, atendendo à Proposição 6.3–2. Ora:

$$\bullet\ B^*=\int_{\mathbb{R}}\overline{g(\lambda)}\,dP_\lambda,$$

atendendo ao Teorema 10.3–3, donde, pelo mesmo raciocínio, poderíamos concluir que $B^*-\overline{z}I$ seria *injectivo* o que contradiria o facto de $\overline{z}\in\sigma_P(B^*)$. Então $z\notin\sigma_R(B)$, pelo que, necessariamente, $z\in\sigma_C(B)$. É fácil agora concluir a demonstração de 2., 3., 4., atendendo a que $\sigma_C(B)$, $\sigma_P(B)$ e $\sigma_R(B)$ constituem *partição* de $\sigma(B)$ e ao que vimos no decorrer da demonstração de 1..□

Exercícios

150) a) Mostre que $\mathcal{H}=F\oplus G$, F,G subespaços fechados do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ sse existir uma aplicação linear contínua P em $\mathcal{H}$ tal que $P^2=P$ (P diz-se *projecção*), $F=R(P),G=\ker P$.

b) Mostre que a soma directa em a) é *ortogonal* sse P for *auto-adjunto*.

151) Demonstre a Proposição 10.1.

152) Demonstre a Proposição 10.2.

153) Mostre que, na definição de medida projectiva, pode substituir a propriedade 5. pela conjunção de 4. e:

5'. Se, para cada $n \in \mathbb{N}_1$, $\Omega_n \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R})$ e $\Omega_1 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset \Omega_{n+1} \subset \cdots$, então, pondo $\Omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_1} \Omega_n$, tem-se:

$$P_\Omega u = \lim_n P_{\Omega_n} u \ , \ \forall u \in \mathcal{H}.$$

154) Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auto-adjunto ($\mathcal{H}$ espaço de Hilbert), $P_\Omega = \chi_\Omega(A), \forall \Omega \in$ $\in \operatorname{Bor}(\mathbb{R}), u \in \mathcal{H}$ e, para cada $\Omega \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R})$:

$$\mu_u(\Omega) = (P_\Omega u, u);$$

mostre que $\mu_{u,u} = \mu_u$ onde μ_u é a medida espectral introduzida na secção 5.2.

155) Certos autores chamam *família espectral* ou *resolução espectral da identidade* num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ a toda a família $(P_\lambda)_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}}$ de projecções ortogonais em $\mathcal{H}$ tal que:

(i) $P_\lambda \leq P_\mu$ se $\lambda \leq \mu$ (P_λ é *crescente*),

(ii) $P_{\lambda^+} u = \lim\limits_{\mu \to \lambda^+} P_\mu u = P_\lambda u \, , \forall u \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R}$ (P_λ é *fortemente contínua à direita*),

(iii) $P_{-\infty} u = 0 = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} P_\lambda u \, , \; P_{+\infty} u = u = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} P_\lambda u \, , \forall u \in \mathcal{H}.$

a) Mostre que (i) é equivalente a:

(i)' $P_\lambda P_\mu = P_{\min\{\lambda,\mu\}} \, , \forall \lambda, \mu \in [-\infty, +\infty]$.

b) Mostre que, dada uma medida projectiva $(P_\Omega)_{\Omega \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R})}$ em $\mathcal{H}$, a família $(P_\lambda)_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}}$ onde $P_\lambda = P_{]-\infty,\lambda]}, \forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ é *família espectral*, com a definição dada acima.

c) Mostre que a aplicação $(P_\Omega)_{\Omega \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R})} \mapsto (P_\lambda)_{\lambda \in \overline{\mathbb{R}}}$ definida na alínea anterior é bijecção do conjunto das *medidas projectivas* sobre o conjunto das *famílias espectrais* em $\mathcal{H}$, reformulando, em termos de famílias espectrais, o Teorema 10.3 [Sugestão: Pode utilizar propriedades das medidas de Lebesgue-Stieltjes — *cf.* [Ru1], 6 e 8].

156) Seja $(P_\Omega)_{\Omega \in \operatorname{Bor}(\mathbb{R})}$ medida projectiva em $\mathcal{H}$ (espaço de Hilbert), $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *contínua* e, por definição:

$$\int_a^b g(\lambda)\, dP_\lambda = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, \chi_{[a,b]}(\lambda)\, dP_\lambda$$

(onde $a, b \in \mathbb{R}, a < b$).

a) Sendo $a = \lambda_1^n < \lambda_2^n < \cdots < \lambda_{k_n}^n = b, \xi_j^n \in\,]\lambda_j^n, \lambda_{j+1}^n]$ ($j = 1, \ldots, k_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_1$), tais que:

$$\max_j \left|\lambda_{j+1}^n - \lambda_j^n\right| \xrightarrow[n]{} 0,$$

mostre que:

$$\sum_{j=1}^{k_n - 1} g(\xi_j^n)\, P_{]\lambda_j^n, \lambda_{j+1}^n]} u \xrightarrow[n]{} \left(\int_a^b g(\lambda)\, dP_\lambda\right) u,$$

$\forall u \in \mathcal{H}$.

b) Mostre que $u \in D_g$ sse $u \in \mathcal{H}$ e existir em $\mathcal{H}$:

$$\lim_{a \to -\infty} \left(\lim_{b \to +\infty} \int_a^b g(\lambda)\, dP_\lambda u\right),$$

sendo, nesse caso, este limite igual a $\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, dP_\lambda u$.

c) Mostre que $u \in D_g$ sse $u \in \mathcal{H}$ e, para cada $v \in \mathcal{H}$, existir:

$$\bullet\; Lv = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d(P_\lambda u, v),$$

sendo $L \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

157) Mostre que se g for mensurável boreliana em $\mathbb{R}$ e A auto-adjunto em $\mathcal{H}$, então:

$$d\mu_{g(A)u,v} = g\, d\mu_{u,v}\,,\ \forall u \in D_g, v \in \mathcal{H}$$

[Sugestão: Comece por verificar que $\mu_{P_\Omega u,v}(\Omega') = \mu_{u,v}(\Omega \cap \Omega'), \forall \Omega, \Omega' \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$].

158) Demonstre os pontos 4., 5., 6. e 7. do Teorema 10.3 [Sugestão: Para os pontos 6. e 7. pode utilizar o exercício anterior].

159) Demonstre o ponto 10. do Teorema 10.3.

160) Mostre que se $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $(P_\Omega)_{\Omega \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})}$ for medida projectiva e:

$$\bullet\; A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dP_\lambda,$$

então:

$$\bullet\; BA \subset AB \text{ sse } BP_\Omega = P_\Omega B\,,\ \forall \Omega \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R}).$$

161) Se F for subespaço fechado do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dP_\lambda$ operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$, mostre que F *reduz* A sse:

- $P_F P_\Omega = P_\Omega P_F \, , \forall \Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R}),$

onde P_F é a projecção ortogonal sobre F.

162) a) Demonstre o seguinte *Critério de Weyl*: *"Se A for auto-adjunto no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ sse $\lambda \in \mathbb{R}$ e existir uma sucessão u_n em $\mathcal{H}$ tal que:*

- $\|u_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}_1,$
- $(u_n, v) \xrightarrow[n]{} 0, \forall v \in \mathcal{H}$ *(ou seja, u_n converge* fracamente *para zero)*
- $Au_n - \lambda u_n \xrightarrow[n]{} 0.$*"*

b) Mostre que se B for operador *compacto* e auto-adjunto em $\mathcal{H}$, então:

$$\sigma_{\text{ess}}(A + B) = \sigma_{\text{ess}}(A),$$

ou seja, o espectro essencial é invariante por *perturbação compacta*.

163) Mostre que o espectro essencial de um operador auto-adjunto é fechado.

164) Seja A operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$ (espaço de Hilbert) e $(P_\Omega)_{\Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R})}$ a família espectral de projecções associada a A; mostre que:

a) Se $[a, b] \subset \mathbb{R}, 0 \notin [a, b]$:

$$\|Au\|^2 \geq \min\left\{|a|^2, |b|^2\right\} \|u\|^2 \, , \, \forall u \in R(P_{[a,b]})$$

[Sugestão: Pode utilizar a representação de A como operador de multiplicação].

b) se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e A for *compacto* conclua de a) que $R(P_{[a,b]})$ tem *dimensão finita*.

c) Mostre que se A for compacto, então $\sigma_C(A) \setminus \{0\} = \emptyset$ e $\sigma_P(A)$ é constituído por no máximo uma infinidade numerável de valores próprios sem ponto de acumulação diferente de 0 [Sugestão: Pode utilizar o facto de $\lambda \in \sigma_C(A) \Rightarrow$ $\Rightarrow P_{[\lambda - 1/n, \lambda + 1/n]} \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_1, P_{\{\lambda\}} = 0$ e a alínea b)].

d) Mostre que se A for compacto e $(\lambda_n)_{n \in I}$ família dos valores próprios de A diferentes de zero ($I = \mathbb{N}_1, \emptyset$ ou $\{1, \ldots, k\}$, com $k \in \mathbb{N}_1$), então:

$$u = P_{\{0\}} u + \sum_{n \in I} P_{\{\lambda_n\}} u \, , \, \forall u \in \mathcal{H},$$

onde os $P_{\{\lambda_n\}} u$ são *vectores próprios* de A *correspondentes aos valores próprios* λ_n e $AP_{\{0\}} u = 0$. Mostre que, além disso:

$$Au = \sum_{n \in I} \lambda_n P_{\{\lambda_n\}} u \, , \, \forall u \in \mathcal{H}.$$

e) Mostre que se $\mathcal{H}$ tiver dimensão *infinita* e A for *injectivo*, então o conjunto I da alínea anterior é igual a $\mathbb{N}_1$.

165) Seja A operador auto-adjunto em $\mathcal{H}$ (espaço de Hilbert); mostre que $\sigma_{\text{ess}}(A)$ é o complementar do maior aberto $\Omega \subset \mathbb{R}$ tal que para todo o $g \in C_c(\mathbb{R})$ com suporte $K \subset \Omega$, $g(A)$ é *compacto*.

166) Sendo P medida projectiva mostre que $g \in \mathcal{L}^\infty(P)$ sse $R_{P\text{-ess}}(g)$ for limitado, tendo-se:

$$\|g\|_{\infty,P} = \sup_{\lambda \in R_{P\text{-ess}}(g)} |\lambda| = \max_{\lambda \in R_{P\text{-ess}}(g)} |\lambda|\,,\ \forall g \in \mathcal{L}^\infty(P).$$

167) a) Seja A operador auto-adjunto *positivo*, ou seja, $(Au, u) \geq 0, \forall u \in D(A)$. Mostre que se g for função boreliana complexa em $\mathbb{R}$ tal que $g(\lambda) = \sqrt{\lambda}$, $\forall \lambda \in [0, +\infty[$, então $g(A)$ é *auto-adjunto positivo* e:

$$g(A)^2 = A$$

($g(A)$ diz-se *raíz quadrada positiva* de A e representa-se por $\sqrt{A}$ ou $A^{\frac{1}{2}}$; esta noção pode ser definida para uma classe bastante mais vasta de operadores — *cf.* [K],V–§3–11 e exercício 123, *supra* Cap. 6).

b) Seja B auto-adjunto *positivo* tal que $B^2 = A$; mostre que:

$$B = \sqrt{A}$$

[Sugestão: Comece por verificar que $BA = AB$, donde se pode deduzir $B\sqrt{A} = \sqrt{A}B$, começando por verificar que B comuta com $(A \pm i)^{-1}$, utilizando a Proposição 1.7. Em seguida mostre que:

$$(B - \sqrt{A})B(B - \sqrt{A}) + (B - \sqrt{A})\sqrt{A}(B - \sqrt{A}) = 0$$

em $D(A)$; conclua que $B = \sqrt{A}$ utilizando mais uma vez a Proposição 1.7].

c) Seja A fechado com domínio denso num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$; mostre que existe um operador auto-adjunto positivo $|A|$ tal que $D(|A|) = D(A)$ e uma *isometria parcial* $U : (\ker A)^\perp \to \overline{R(A)}$ (ou seja, U é bijecção e $\|Uu\| = = \|u\|, \forall u \in D(U)$), tais que:

$$\bullet\ A = U|A|$$

(*decomposição polar de* A) [Sugestão: Tomar $|A| = \sqrt{A^*A}$].

d) Mostre que $|A|$ e U ficam univocamente determinados pela condição suplementar $\ker|A| = \ker A$.

e) Examine o caso em que A é auto-adjunto.

168) Demonstre o seguinte *Teorema de Bochner*: *"Uma função contínua*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

é transformada de Fourier de uma medida boreliana positiva μ em $\mathbb{R}$, ou *seja:*

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-its}\, d\mu(s)\,,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

sse g for de tipo positivo, ou seja:

$$\bullet \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(t-s)\,\varphi(t)\,\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds\,,\ \forall \varphi \in C_c(\mathbb{R})\text{”}$$

[Sugestão: Comece por verificar que g é de tipo positivo sse para quaisquer $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$, z_1, $\ldots, z_k \in \mathbb{C}$ se tiver:

$$\sum_{i,j=1}^{k} g(t_i - t_j)\, z_i\, \overline{z_j} \geq 0;$$

em seguida construa um espaço vectorial a partir do conjunto das funções $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ iguais a zero fora de um conjunto finito com as operações habituais e defina, para u, v nesse espaço:

$$\bullet\ (u, v) = \sum_{s,t\in\mathbb{R}} g(t-s)\, u(t)\, \overline{v(s)}.$$

Mostre que pode obter um espaço de Hilbert por passagem ao quociente com o espaço dos u tais que $(u, u) = 0$ e posterior completação. Finalmente mostre que, nesse espaço de Hilbert, existe um grupo unitário $(U(t))_{t\in\mathbb{R}}$ definido nas (classes de) funções u acima descritas por:

$$(U(t)u)(s) = u(t-s),$$

e aplique o Teorema de Stone — 8.5 — e o Teorema 10.3].

169) Demonstre o seguinte *Princípio de Krylov-Weinstein*: *“Seja A auto-adjunto em $\mathcal{H}$ (espaço de Hilbert) e, para cada $u \in D(A)$ tal que $\|u\| = 1$, $\alpha_u =$ $= (Au, u)$, $\beta_u = \|Au\|$; então existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que:*

$$\alpha_u - (\beta_u^2 - \alpha_u^2)^{\frac{1}{2}} \leq \lambda \leq \alpha_u + (\beta_u^2 - \alpha_u^2)^{\frac{1}{2}}\text{”}$$

[Sugestão: Exprima α_u e β_u através da representação espectral de A e mostre que se obtém uma contradição supondo que:

$$P_{[\alpha_u - (\beta_u^2-\alpha_u^2)^{\frac{1}{2}},\, \alpha_u + (\beta_u^2-\alpha_u^2)^{\frac{1}{2}}]} = 0].$$

170) Sejam A, A_n $(n \in \mathbb{N}_1)$ operadores auto-adjuntos em $\mathcal{H}$ (espaço de Hilbert); mostre que:

a) Se, para todo o $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $(A_n - \lambda I)^{-1} \underset{n}{\longrightarrow} (A - \lambda I)^{-1}$ em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, então:

$$g(A_n) \underset{n}{\longrightarrow} g(A)$$

em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\forall g \in C(\dot{\mathbb{R}})$.

b) Se, para todo o $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{H}$, $(A_n - \lambda I)^{-1}u \underset{n}{\longrightarrow} (A - \lambda I)^{-1}u$ em $\mathcal{H}$, então:

$$g(A_n)\, u \underset{n}{\longrightarrow} g(A)\, u$$

em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\forall g \in C(\mathbb{R})$, g *limitada* [Sugestão: Comece por demonstrar b) para $g \in C(\dot{\mathbb{R}})$ e, em seguida, se $g \in C(\mathbb{R})$, g *limitada*, pense na sucessão de funções:

$$g_m = ge^{-\frac{x^2}{m}}].$$

Capítulo 11

Elementos de Teoria da multiplicidade e complementos de análise espectral

Na secção 5.3 estabelecia-se a validade de uma representação unitária *canónica* para qualquer operador *normal limitado*, como operador de multiplicação por uma função de tipo muito particular: o espaço L^2 era isométrico a uma soma directa *hilbertiana* de espaços L^2 relativos a medidas (espectrais) sobre $\mathbb{C}$, sendo a isometria construída de modo *canónico*, pois tomava-se para espaço de medida uma união disjunta de "cópias" de partes de $\mathbb{C}$; por outro lado, a função definidora do operador era simplesmente a *função identidade* em cada "cópia". O que pode variar, dados dois operadores normais, são assim as correspondentes medidas, ou *famílias de medidas espectrais* na representação hilbertiana de espaços "$L^2(\mathbb{C})$".

Processo idêntico permite-nos representar qualquer operador auto-adjunto, agora não necessariamente limitado.

DEFINIÇÃO: *Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert e $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dP_\lambda$ ($(P_\Omega)_{\Omega \in Bor\,(\mathbb{R})}$ medida projectiva em $\mathcal{H}$); diz-se que A tem* ***vector cíclico*** *$u \in \mathcal{H}$ se os vectores $P_\Omega u$ ($\Omega \in Bor\,(\mathbb{R})$) gerarem um subespaço denso em $\mathcal{H}$.*

É fácil verificar que *u é vector cíclico para A sse os $g(A)\, u$ com $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (respectivamente com $g \in C_c(\mathbb{R})$) constituirem subespaço denso* [exercício]. Seguindo a construção da secção 5.2, é fácil concluir que *se A tiver vector cíclico u existe um operador unitário único:*

$$U : \mathcal{H} \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$$

tal que:

- $Uu \equiv 1$,
- $v \in D(A)$ sse $Uv \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$ e $\widehat{\lambda} Uv \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$,
- $(UAU^{-1}g)(\lambda) = \lambda g(\lambda)\,,\ p.p.\text{–}\mu_u\,,\ \forall g \in D(T_{\widehat{\lambda}})$;

com efeito, a existir tal U, ter-se-á:

$$Ug(A)\,u = Ug(A)U^{-1}(Uu) = Ug(A)U^{-1}(1) = g\,,\ \forall g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

(pelo Teorema 10.3), o que determina U, visto que, por hipótese, os $g(A)\,u$ com $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, constituem subespaço denso de $\mathcal{H}$. Para provar a existência de U, notemos que se $g(A)\,u = h(A)\,u\,(g, h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tem-se (atendendo ao Lema que precede o Teorema 10.3 ou ao ponto 7. deste mesmo Teorema):

$$\bullet\ \|g-h\|_{L^2(\mu_u)} = \|g(A)\,u - h(A)\,u\| = 0 \Rightarrow g = h\ p.p.\text{–}\mu_u,$$

pelo que podemos definir U, no espaço dos $g(A)\,u\ (g \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, por:

$$\bullet\ Ug(A)\,u = g,$$

sem ambiguidade, como operador com valores em $L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$; sendo $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denso em $L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$ e:

$$\bullet\ \|Ug(A)\,u\|_{L^2(\mu_u)} = \|g\|_{L^2(\mu_u)} = \|g(A)\,u\|,$$

é fácil concluir que podemos estender U a $\mathcal{H}$ como operador *unitário sobre* $L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$, satisfazendo às condições acima consideradas. Com efeito, tem-se, para a inversa U^{-1} dessa extensão:

$$\bullet\ U^{-1}g = g(A)\,u\,,\ \forall g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u),$$

já que $g \mapsto g(A)\,u$ é isométrica, pelo Teorema 10.3–7, e coincide com U^{-1} em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, parte densa de $L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$; logo:

$$\begin{aligned} g \in D(T_{\widehat{\lambda}}) \Leftrightarrow g, \widehat{\lambda}g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u) \Leftrightarrow u \in D_g \cap D_{\widehat{\lambda}g} = D(Ag(A)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u \in D(g(A)), g(A)\,u \in D(A) \Leftrightarrow g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u), U^{-1}g \in D(A), \end{aligned}$$

donde concluímos que $g \in D(T_{\widehat{\lambda}})$ sse $U^{-1}g \in D(A), \forall g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$ e:

$$\bullet\ (UAU^{-1}g)(\lambda) = (UAg(A)\,u)(\lambda) = (U(\widehat{\lambda}g)(A)\,u)(\lambda) = \lambda g(\lambda)\ p.p.\text{–}\mu_u,$$

$\forall g \in D(T_{\widehat{\lambda}})$. Finalmente, é óbvio que $Uu = U1(A)\,u \equiv 1$.

No caso em que A não tem vector cíclico, se $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, sendo F o subespaço constituído pelos $g(A)\,u$ com $g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)$, é fácil concluir que F *reduz* A (*cf.* exercício 27, Cap. 1); com efeito, atendendo ao exercício 161 (Cap. 10) basta verificar que $P_F P_\Omega = P_\Omega P_F, \forall \Omega \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$, o que resulta facilmente da definição de F, já que, se $v \in \mathcal{H}$, existirá $g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u), w \in F^\perp$ tais que:

$$\bullet\ v = g(A)\,u + w,$$

donde:

$$\begin{aligned} \bullet\ P_\Omega v = P_\Omega g(A)\,u + P_\Omega w = \chi_\Omega(A)g(A)\,u + P_\Omega w = \\ = (\underbrace{\chi_\Omega \cdot g}_{\in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u)})(A)\,u + P_\Omega w \end{aligned}$$

e:

$$\bullet\ (h(A)u, P_\Omega w) = (P_\Omega h(A)u, w) = (\underbrace{(\chi_\Omega.h)(A)u}_{\in F}, w) = 0, \forall h \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_u),$$

pelo que $P_\Omega w \in F^\perp$, donde, facilmente:

$$P_F P_\Omega v = P_\Omega g(A)\, u = P_\Omega P_F\, v.$$

Portanto $A_1 = A_{/D(A)\cap F} = A_{/P_F D(A)}$ é auto-adjunto em F com vector cíclico u, como é fácil deduzir da definição de F. Além disso, $F^\perp$ também reduz A (*cf.* exercício 27, Cap. 1) e portanto $A_{/D(A)\cap F^\perp}$ é também auto-adjunto — agora em $F^\perp$; podemos assim "iterar o processo", o que se formaliza facilmente utilizando o Lema de Zorn, como na secção 5.3. Concluímos que *existe uma decomposição ortogonal de* $\mathcal{H}$, $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$, tal que cada $\mathcal{H}_\alpha$ reduz A, sendo cada $A_\alpha = A_{/D(A)\cap\mathcal{H}_\alpha} = A_{/P_\alpha D(A)}$ (P_α projecção ortogonal sobre $\mathcal{H}_\alpha$) auto-adjunto em $\mathcal{H}_\alpha$, com vector cíclico u_α; se $\mathcal{H}$ for separável podemos tomar $\mathcal{J} = \mathbb{N}_1$ ou finito. Existe assim, para cada $\alpha \in J$, um operador unitário:

$$U_\alpha : \mathcal{H}_\alpha \to L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$$

($\mu_\alpha = \mu_{u_\alpha}$), tal que:

$$\bullet\ U_\alpha A_\alpha U_\alpha^{-1} = T_{\widehat{\lambda}};$$

pondo:

$$\bullet\ U : \mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathcal{H}_\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{J}} L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha),$$

$$\bullet\ v = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} v_\alpha \mapsto (U_\alpha v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}},$$

é fácil concluir que U é *unitário* e:

$$(88)\quad \begin{aligned} &\bullet\ v = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} v_\alpha \in D(A) \text{ sse } (U_\alpha v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}, (\widehat{\lambda} U_\alpha v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}} \in \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{J}} L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha),\\ &\bullet\ U A\, v = (\widehat{\lambda} U_\alpha v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}\,,\ \forall v = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} v_\alpha \in D(A)\end{aligned}$$

(*cf.* os exercícios).

O operador A fica assim caracterizado pela família $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ que se diz *família de medidas espectrais associada a* A; é fácil agora concluir, tal como na Proposição 6.6, que:

$$(89)\qquad \sigma(A) = \operatorname{supp}((\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}) = \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} \operatorname{supp}\mu_\alpha}.$$

Esta nova representação para os operadores auto-adjuntos permite tecer uma série de considerações baseadas na análise da família $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$. No caso em que se pode escolher $\#\mathcal{J} = 1$, diz-se que A ***tem espectro simples*** ou que é ***livre de***

multiplicidade. No caso da dimensão finita e reportando-nos às considerações feitas no início do Capítulo 5, pode concluir-se que A *tem espectro simples sse todos os valores próprios tiverem multiplicidade igual a* 1 [exercício]. Em qualquer caso, a *simplicidade do espectro* é equivalente à *existência de vector cíclico para* A, como é fácil concluir. Estendendo a análise do caso da dimensão finita pode desenvolver-se uma teoria geral da *multiplicidade do espectro* em qualquer dimensão, que permite caracterizar completamente os operadores auto-adjuntos *a menos de equivalência unitária*, utilizando a noção de *medidas equivalentes* sobre os borelianos de $\mathbb{R}$ (duas tais medidas dizem-se equivalentes se determinarem os mesmos conjuntos desprezáveis); ver os exercícios e as referências de [Y]–XI–8. e [RS1]–VII–2.

A família $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ também pode ser utilizada para estabelecer uma nova divisão do espectro de A, através da *decomposição de Lebesgue* das medidas μ_α (*cf.* [Ru1]–6.9, [Ro]), relativamente à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Cada μ_α é da forma:

$$\bullet\ \mu_\alpha = \mu_{\text{ac}}^\alpha + \mu_{\text{s}}^\alpha$$

onde μ_{ac} é *absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue*, ou seja:

$$\bullet\ d\mu_{\text{ac}}^\alpha = g_\alpha\, dx,$$

com $g_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$, e μ_{s}^α é *singular*, ou seja, está *concentrada* num conjunto $A \in \text{Bor}(\mathbb{R})$ de medida de Lebesgue nula[87]. Além disso, μ_{s}^α pode ainda ser decomposta na soma de duas medidas *mutuamente singulares* μ_{sing}^α e μ_{p}^α[88], onde μ_{p}^α é uma medida *pontualmente concentrada*, definida por:

$$\bullet\ \mu_{\text{p}}^\alpha(\Omega) = \sum_{x\in\mathcal{P}_\alpha\cap\Omega} \mu_\alpha(x),$$

onde $\mathcal{P}_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \mu_\alpha(\{x\}) \neq 0\}$, parte finita ou numerável de $\mathbb{R}$, visto μ_α ser *finita* (bastava aliás ser *regular*). $\mathcal{P}_\alpha$ diz-se *conjunto dos pontos de concentração de* μ_α e, obviamente, $\overline{\mathcal{P}_\alpha} \subset \operatorname{supp} \mu_{\text{s}}^\alpha$. Por definição:

$$\mu_{\text{sing}}^\alpha = \mu_{\text{s}}^\alpha - \mu_{\text{p}}^\alpha,$$

donde, finalmente:

$$\mu_\alpha = \mu_{\text{ac}}^\alpha + \mu_{\text{sing}}^\alpha + \mu_{\text{p}}^\alpha,$$

sendo as três medidas *mutuamente singulares*, μ_{ac}^α *absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue (parte absolutamente contínua de* μ_α*)*, μ_{p}^α *pontualmente concentrada* (ou seja, concentrada no seu próprio conjunto de pontos de concentração — diz-se *parte pontual pura de* μ_α), μ_{sing}^α *contínua singular* (ou seja, singular em relação à medida de Lebesgue e com conjunto de pontos de

[87] Tem-se, portanto, $\mu_{\text{s}}^\alpha(\Omega \cap A) = \mu_{\text{s}}^\alpha(\Omega), \forall \Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R})$.

[88] Ou seja, existem conjuntos disjuntos $\Omega, \Omega' \in \text{Bor}\,(\mathbb{R})$ tais que μ_{sing}^α está concentrada em Ω e μ_{p}^α em Ω'.

concentração *vazio* — diz-se *parte contínua singular de* μ_α). Sendo $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 \in \mathrm{Bor}\,(\mathbb{R})$ conjuntos *mutuamente disjuntos*, Ω_2, Ω_3 *desprezáveis*, onde se concentrem respectivamente $\mu^\alpha_{\text{ac}}, \mu^\alpha_{\text{sing}}$ e μ^α_{p}, é fácil concluir (e deixado como exercício) que o operador:

- $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha) \to L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{ac}}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{sing}}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{p}})$
- $h \mapsto (h.\chi_{\Omega_1}, h.\chi_{\Omega_2}, h.\chi_{\Omega_3})$

é *unitário* e que, através dele, o operador $T_{\widehat{\lambda}}$ em $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$ fica *unitariamente equivalente* ao operador na soma directa que actua como $T_{\widehat{\lambda}}$ sobre cada parcela (de facto, é fácil concluir que, por exemplo, $\{h.\chi_{\Omega_1} : h \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)\}$ *reduz* $T_{\widehat{\lambda}}$). Podemos então decompor $\mathcal{H}$ na soma directa *ortogonal* de três subespaços que *reduzem* A:

$$\bullet\ \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ac}} \oplus \mathcal{H}_{\text{sing}} \oplus \mathcal{H}_{\text{p}},$$

onde:

$$(90) \qquad \begin{cases} \bullet\ \mathcal{H}_{\text{ac}} = \displaystyle\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{J}} U_\alpha^{-1}(L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{ac}})), \\ \bullet\ \mathcal{H}_{\text{sing}} = \displaystyle\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{J}} U_\alpha^{-1}(L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{sing}})), \\ \bullet\ \mathcal{H}_{\text{p}} = \displaystyle\bigoplus_{\alpha \in \mathcal{J}} U_\alpha^{-1}(L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{p}})), \end{cases}$$

(onde consideramos $L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{ac}})$, etc. como subespaços de $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$ de maneira óbvia[89]) e definir o ***espectro absolutamente contínuo*** $\sigma_{ac}(A)$ de A e o ***espectro contínuo singular*** $\sigma_{\text{sing}}(A)$ de A respectivamente por:

- $\sigma_{\text{ac}}(A) = \sigma(A_{/D(A)\cap\mathcal{H}_{\text{ac}}})$,
- $\sigma_{\text{sing}}(A) = \sigma(A_{/D(A)\cap\mathcal{H}_{\text{sing}}})$;

dado que definimos a noção de *espectro pontual* como sendo o conjunto dos *valores próprios*, não atribuiremos qualquer designação ao conjunto, em geral *distinto*, $\sigma(A_{/D(A)\cap\mathcal{H}_{\text{p}}})$. Alguns autores designam por *espectro contínuo* a união $\sigma_{\text{ac}}(A) \cup \sigma_{\text{sing}}(A)$; reservámos essa designação para o conjunto, em geral distinto (ver os exercícios) $\sigma(A) \setminus (\sigma_P(A) \cup \sigma_R(A))$, ou, no caso que nos ocupa, em que A é auto-adjunto, $\sigma(A) \setminus \sigma_P(A)$. Note-se também que os conjuntos $\sigma_{\text{ac}}, \sigma_{\text{sing}}$ e σ_P *não são necessariamente disjuntos dois a dois*.

Podemos dar uma caracterização intrínseca de $\mathcal{H}_{\text{ac}}, \mathcal{H}_{\text{sing}}$ e $\mathcal{H}_{\text{p}}$:

PROPOSIÇÃO 11.1: ***Com as notações introduzidas neste capítulo, tem-se:***

1. ***$\mathcal{H}_{\text{ac}} = \{u \in \mathcal{H} : \mu_u$ é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue$\}$.***

[89] identificamos (a classe de) $h \in L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{ac}})$ com (a classe de) $h.\chi_{\Omega_1} \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\alpha)$, etc.

2. $\mathcal{H}_{\text{sing}} = \{u \in \mathcal{H} : \mu_u$ ***é contínua e singular relativamente à medida de Lebesgue***$\}$.

3. $\mathcal{H}_{\text{p}} = \{u \in \mathcal{H} : \mu_u$ ***é pontualmente concentrada***$\}$ ***e tem uma base hilbertiana constituída por vectores próprios de*** A.

Demonstração: 1. Por (90), $u \in \mathcal{H}_{\text{ac}}$ sse:

$$U_\alpha u = (U_\alpha u)\chi_{\Omega_1}\,,\ \forall \alpha \in \mathcal{J}\,,$$

e:

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}} |U_\alpha u|^2 g_\alpha\, dx = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}} |U_\alpha u|^2\, d\mu^\alpha_{\text{ac}} < +\infty;$$

por outro lado, atendendo a (88), $\forall \Omega \in \text{Bor}\,(\mathbb{R})$:

$$\bullet\ \mu_u(\Omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \int_{\Omega} |U_\alpha u|^2\, d\mu_\alpha = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \int_{\Omega\cap\Omega_1} |U_\alpha u|^2 g_\alpha\, dx + \\ + \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \int_{\Omega\cap\Omega_2} |U_\alpha u|^2 d\mu^\alpha_{\text{sing}} + \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \int_{\Omega\cap\Omega_3} |U_\alpha u|^2 d\mu^\alpha_{\text{p}}.$$

Portanto, se $u \in \mathcal{H}_{\text{ac}}$, no cálculo de $\mu_u(\Omega)$ só intervém a primeira parcela, já que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Omega_1 \cap \Omega_3 = \emptyset$; reciprocamente, se μ_u for absolutamente contínua, vem $\mu_u(\Omega_1) = \mu_u(\Omega_2) = 0$, já que Ω_2, Ω_3 são desprezáveis para a medida de Lebesgue, donde $\mu_u(\mathbb{R}) = \mu_u(\Omega_1)$ e portanto:

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \|U_\alpha u - (U_\alpha u)\chi_{\Omega_1}\|^2_{L^2(\mu_\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \|U_\alpha u\|^2_{L^2(\mu_\alpha)} - 2\,\Re \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \int_{\mathbb{R}} |U_\alpha u|^2 \chi_{\Omega_1}\, d\mu_\alpha + \\ + \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} \|(U_\alpha u)\chi_{\Omega_1}\|^2_{L^2(\mu_\alpha)} = \mu_u(\mathbb{R}) - 2\mu_u(\Omega_1) + \mu_u(\Omega_1) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow U_\alpha u = (U_\alpha u)\chi_{\Omega_1}\,,\ \forall \alpha \in \mathcal{J} \Rightarrow u \in \mathcal{H}_{\text{ac}}.$$

2. e a primeira parte de 3. demonstram-se de modo análogo. Quanto à segunda parte de 3., notemos que:

$$\bullet\ \mathcal{H}_{\text{p}} = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{J}} U_\alpha^{-1}(L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{p}}));$$

ora cada $L^2(\mathbb{R}, d\mu^\alpha_{\text{p}})$ é isométrico a $l^2(\mathcal{P}_\alpha)$ que tem por base hilbertiana:

$$\bullet\ ((\delta_{x_0 x})_{x\in\mathcal{P}_\alpha})_{x_0\in\mathcal{P}_\alpha}$$

($\delta_{x_0 x} = \delta$ de Kronecker), constituída por vectores próprios do operador:

$$\bullet\ (y_x)_{x\in\mathcal{P}_\alpha} \mapsto (xy_x)_{x\in\mathcal{P}_\alpha},$$

unitariamente equivalente a $T_{\hat{\lambda}}$ na referida isometria. A conclusão segue imediatamente desta observação (deixa-se para os exercícios a justificação pormenorizada de cada passo).□

PROPOSIÇÃO 11.2: ***Com as notações anteriores tem-se:***

$$\bullet\ \boldsymbol{\sigma(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A) \cup \overline{\sigma_p(A)}}.$$

Demonstração: Basta atender a que, por (89):

$$\bullet\ \sigma_{\text{ac}}(A) = \text{supp}\left((\mu_{\text{ac}}^{\alpha})_{\alpha\in\mathcal{J}}\right) = \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} \text{supp}\, \mu_{\text{ac}}^{\alpha}},$$

$$\bullet\ \sigma_{\text{sing}}(A) = \text{supp}\left((\mu_{\text{sing}}^{\alpha})_{\alpha\in\mathcal{J}}\right) = \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} \text{supp}\, \mu_{\text{sing}}^{\alpha}},$$

$$\bullet\ \sigma(A_{/D(A)\cap\mathcal{H}_{\text{p}}}) = \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} \text{supp}\, \mu_{\text{p}}^{\alpha}} = \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathcal{P}_{\alpha}},$$

donde:

$$\sigma(A) = \sigma_{\text{ac}}(A) \cup \sigma_{\text{sing}}(A) \cup \sigma(A_{/D(A)\cap\mathcal{H}_{\text{p}}});$$

resta somente provar que:

$$\overline{\sigma_P(A)} = \sigma(A_{/D(A)\cap\mathcal{H}_{\text{p}}}) = \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathcal{P}_{\alpha}}.$$

É óbvio que $\overline{\sigma_P(A)} \subset \sigma(A_{/D(A)\cap\mathcal{H}_{\text{p}}})$ já que os valores próprios de A só podem estar em $\sigma(A_{/D(A)\cap\mathcal{H}_{\text{p}}})$ que é *fechado* (com efeito $\mathcal{H}_{\text{ac}}$ e $\mathcal{H}_{\text{sing}}$ *não podem conter vectores próprios de* A pois as medidas espectrais correspondentes a vectores próprios têm os valores próprios associados *por pontos de concentração* — *cf.* Proposição 10.4–3). Reciprocamente, se $\lambda \in \mathcal{P}_{\alpha}$ (para certo $\alpha \in \mathcal{J}$), vem:

$$\left\|P_{\{\lambda\}} u_{\alpha}\right\|^2 = \mu_{\alpha}(\{\lambda\}) \neq 0 \Rightarrow \lambda \in \sigma_P(A),$$

ou seja:

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathcal{P}_{\alpha} \subset \sigma_P(A) \Rightarrow \overline{\bigcup_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathcal{P}_{\alpha}} \subset \overline{\sigma_P(A)}.\square$$

Finalmente relacionemos esta nova divisão do espectro com a introduzida na última secção do capítulo anterior:

PROPOSIÇÃO 11.3: ***Com as notações anteriores, $\boldsymbol{\lambda \in \sigma_{ess}(A)}$ sse satisfizer a uma das seguintes condições:***

1. $\boldsymbol{\lambda \in \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A)}$;

2. $\boldsymbol{\lambda}$ é ponto de acumulação de $\boldsymbol{\sigma_P(A)}$;

3. $\boldsymbol{\lambda}$ é valor próprio de $\boldsymbol{A}$ com multiplicidade infinita.

Demonstração: Por definição, $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ sse $P_{]\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon[} \neq 0, \forall\varepsilon > 0$; atendendo ao que se viu na secção anterior, $\sigma_{\text{ess}}(A)$ é constituído pelos valores próprios de multiplicidade *infinita* e pelos *pontos de acumulação do espectro*. Ora um ponto de acumulação de $\sigma(A)$ que *o não seja* de $\sigma_P(A)$ tem que estar em $\sigma_{\text{ac}}(A) \cup \sigma_{\text{sing}}(A)$, atendendo à proposição anterior. Resta provar que:

$$\sigma_{\text{ac}}(A) \cup \sigma_{\text{sing}}(A) \subset \sigma_{\text{ess}}(A);$$

ora se $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(A)$, λ é, em particular, valor próprio de A, pelo que não pode estar em $\sigma_{\text{ac}}(A) \cup \sigma_{\text{sing}}(A)$, como vimos no decorrer da demonstração da proposição anterior.□

Para terminar, convém notar que o estudo de $\sigma_{\text{ess}}(A)$ e $\sigma_{\text{sing}}(A)$ tem importância fundamental na *teoria do scattering* que consiste no estudo do comportamento para $t \to \pm\infty$ dos operadores:

$$W(t) = e^{itB}e^{-itA},$$

em que A, B são operadores auto-adjuntos no mesmo espaço de Hilbert. Tipicamente B é *perturbação de* A; em Mecânica Quântica, em geral, A é o *operador-energia* de um sistema *livre* (não sujeito a potencial) e B o que corresponde ao sistema perturbado *por um potencial*. Procura-se, por exemplo, saber em que condições um sistema sujeito ao potencial se comporta no infinito (temporal) como sistema "livre".

Exercícios

171) Seja $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dP_\lambda$ auto-adjunto em $\mathcal{H}$; mostre que $u \in \mathcal{H}$ é *vector cíclico* para A sse os $g(A)\,u$ com $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (respectivamente $g \in C_c(\mathbb{R})$) constituirem um subespaço *denso* de $\mathcal{H}$.

172) Seja $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ família de espaços de Hilbert e, para cada $\alpha \in \mathcal{J}$, A_α auto-adjunto em $\mathcal{H}_\alpha$; pondo:

$$\bullet\ D(A) = \{(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}} \in \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathcal{H}_\alpha : u_\alpha \in D(A_\alpha), \forall \alpha \in \mathcal{J},$$
$$(A_\alpha u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}} \in \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathcal{H}_\alpha\},$$

$$\bullet\ A((u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}) = (A_\alpha u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}\ ,\ \forall (u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}} \in D(A),$$

mostre que A é *auto-adjunto* em $\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{J}} \mathcal{H}_\alpha$.

173) Seja $(\mathcal{H}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ decomposição ortogonal do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e A auto-adjunto em $\mathcal{H}$ tal que cada $\mathcal{H}_\alpha$ reduz A, P_α projecção ortogonal sobre $\mathcal{H}_\alpha, \forall \alpha \in \mathcal{J}$. Mostre que:

a)

- $D(A) = \{\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} u_\alpha : u_\alpha \in D(A) \cap \mathcal{H}_\alpha, \forall\alpha \in \mathcal{J}, (u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}},$
  $(A_\alpha u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ são famílias de quadrado somável$\}$
- $A\Big(\sum_{\alpha\in\mathcal{J}} u_\alpha\Big) = \sum_{\alpha\in\mathcal{J}} Au_\alpha\ , \forall u \in D(A)$, onde $u_\alpha = P_\alpha u, \forall\alpha \in \mathcal{J}.$

b) A é *essencialmente auto-adjunto* no subespaço de $D(A)$ constituído pelas somas finitas $\sum_{j=1}^{k} u_{\alpha_j}$, onde $u_{\alpha_j} \in D(A) \cap \mathcal{H}_{\alpha_j}, j = 1, \ldots, k \in \mathbb{N}_1$.

174) Demonstre a relação (89).

175) Mostre que, em dimensão finita, um operador auto-adjunto tem espectro simples sse os respectivos valores próprios tiverem todos multiplicidade igual a 1.

176) Sejam μ, ν medidas borelianas positivas finitas em $\mathbb{R}$ e considere os operadores A e B iguais a $T_{\widehat{\lambda}}$ respectivamente em $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ e $L^2(\mathbb{R}, d\nu)$; mostre que A e B são unitariamente equivalentes sse μ e ν forem *equivalentes* (no sentido de lhes corresponderem os mesmos conjuntos desprezáveis).

177) Seja μ medida boreliana positiva com *decomposição de Lebesgue*:

- $\mu = \mu_{\text{ac}} + \mu_{\text{sing}} + \mu_{\text{p}};$

sejam $A, B, C \in \text{Bor}\,(\mathbb{R})$ conjuntos mutuamente disjuntos, B, C Lebesgue--desprezáveis, onde se concentrem respectivamente $\mu_{\text{ac}}, \mu_{\text{sing}}$ e μ_{p}. Mostre que:

a) É unitário o operador:

$$\begin{aligned} U : L^2(\mathbb{R}, d\mu) &\to L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{ac}}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{sing}}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{p}}) \\ h &\mapsto (h.\chi_A, h.\chi_B, h.\chi_C) \end{aligned}$$

b) $UT_{\widehat{\lambda}}U^{-1}(g, h, k) = (\widehat{\lambda}g, \widehat{\lambda}h, \widehat{\lambda}k)\ , \forall g \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{ac}}), h \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{sing}}),$ $k \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{\text{p}})$, nos respectivos domínios de $T_{\widehat{\lambda}}$.

178) Mostre que o operador id/dx em $L^2(\mathbb{R})$ com domínio $\{u \in L^2(\mathbb{R}) : u$ é absolutamente contínua, $u' \in L^2(\mathbb{R})\}$ é *livre de multiplicidade*; determine os respectivos espectro, espectro pontual, contínuo, absolutamente contínuo, contínuo singular, essencial e discreto.

179) Identifique as diversas subdivisões do espectro para o operador A em $\mathbb{C} \oplus \oplus L^2([0,1])$ dado por $\langle\lambda, g\rangle \mapsto \langle\lambda/2, \widehat{x}g\rangle$.

180) Dê exemplo de operador auto-adjunto com espectro *pontual* igual a $\mathbb{R}$ (*cf.* a parte final da demonstração da Proposição 11.1).

BIBLIOGRAFIA

[A] ALBEVERIO, S. — *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals* — Acta Universitatis Wratislaviensis, nº 368 – XIIth Winter School of Th. Phy. in Karpacz.

[A-HK1] ALBEVERIO, S.; HØEGH-KROHN, R. — *Feynman Path Integrals and the corresponding method of stationary phase* — Proceedings of the Inter. Coll. "Mathematical Problems in Feynman Path Integral", Marseille 1978.

[A-HK2] ALBEVERIO, S.; HØEGH-KROHN, R. — Mathematical Theory of Feynman Path Integrals — Lecture Notes in Math., 523, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976.

[BW1] BIVAR WEINHOLTZ, A. — A Fórmula de Trotter nos semi-grupos de operadores; aplicação à interpretação dos integrais de Feynman (monografia de Licenciatura) — Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1977.

[BW2] BIVAR WEINHOLTZ, A. — Integral de Riemann e de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ (2ª edição)— Departamento de Matemática da FCUL, 1997.

[BWL] BIVAR WEINHOLTZ, A.; LAPIDUS, M. — *Product formula for resolvents of normal operators and the modified Feynman integral* — Proc. Am. Math. Soc., 110 (1990).

[Br] BROWDER, A. — Introduction to Function Algebras — W.A. Benjamin, inc., New York, 1969.

[C] CHERNOFF, P.R. — *Product Formulas, nonlinear semigroups, and addition of unbounded operators* — Mem. Am. Math. Soc., 140 (1974).

[F] FIGUEIRA, M. — Semi-grupos de Operadores e Aplicações (monografia de Licenciatura) — Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1972.

[G] GANTMACHER — The Theory of Matrices — Chelsea Pub. Comp., 1971.

[GRS] GELFAND, I.; RAIKOV, D.; SHILOV, G. — Commutative Normed Rings — Chelsea Pub. Comp., Bronx, New York, 1964.

[HP] HILLE, E; PHILLIPS, R. — Functional Analysis and semigroups — AMS, 1957.

[K1] KATO, T. — Perturbation Theory for Linear Operators — 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin and New-York, 1976.

[K2] KATO, T. — *Trotter's product formula for an arbitrary pair of selfadjoint contraction semigroups* — in “Topics in Functional Analysis” — Ad. Math. Suppl. Studies, I. Gohberg & M. Kac eds., Acad. Press, New York, 3(1978), pp. 185-195.

[Ke] KELLEY, J.L. — General Topology — Van Nostrand, New York, 1955.

[KF] KOLMOGOROV, A.N.; FOMIN, S.V. — Elementos da teoria das Funções e Análise Funcional — Mir – Moscou, 1982.

[L] LAPIDUS, M. — *Generalization of the Trotter-Lie Formula* — Int.Eq.Op. Th., vol. 4/3, 1981, pp. 366-415.

[M] MACHADO, A. — Introdução à Análise Funcional — Escolar Editôra, Lisboa, 1991.

[N] NELSON, E. — *Feynman Integrals and the Schrödinger equation* — J.Math. Phys., vol. 5, N. 3, March 1964, pp. 332-343.

[P] PAZY, A. — Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations — Springer-Verlag, New York, 1983.

[RS1] REED, M.; SIMON, B. — Methods of Modern Mathematical Physics – I – Functional Analysis (2nd edition) — Academic Press, New York, 1975.

[RS2] REED, M.; SIMON, B. — Methods of Modern Mathematical Physics – II – Fourier Analysis, Self-Adjointness — Academic Press, New York, 1975.

[RN] RIESZ, F.; NAGY, B.S. — Leçons d'Analyse Fonctionnelle (3e edition) — Gauthier-Villars, Paris, 1955.

[Re] REZENDE, J. — Asymptotische Entwicklung von Feynman Integralen und der klassische Grenzwert (Tese) — Bielefeld, Maio 1985.

[Ro] RODRIGUES, J.F. — Complementos de Medida e Integração — CMAF, Textos e Notas, nº 30 (1983).

[Ru1] RUDIN, W. — Real and Complex Analysis (2nd edition) — Tata McGraw-Hill – New Delhi – 1977.

[Ru2] RUDIN, W. — Functional Analysis — Tata McGraw-Hill – New Delhi – 1977.

[Sa] SANCHEZ, L. — Análise Funcional (notas de curso) — manuscrito.

[Sc1] SCHECHTER, M. — Operator methods in Quantum Mechanics — North Holland, New York, 1981.

[Sc2] SCHECHTER, M. — Principles of Functional Analysis — Academic Press, New York, 1971.

[Sw] SCHWARTZ, L. — Théorie des Distributions — Hermann, Paris, 1966.

[Si] SIMON, B. — Functional Integration and Quantum Physics — Academic Press, New York, 1979.

[TL] TAYLOR, A.E.; LAY, D.C. — Introduction to Functional Analysis (2nd edition) — Wiley, New York, 1980.

[W] WEIR, A.J. — General integration and measure — Cambridge Un. Press, 1974.

[Y] YOSIDA, K. — Functional Analysis (5th edition) — Springer-Verlag, New York, 1978.

Índice remissivo

Resumo

O estudo dos operadores auto-adjuntos não necessariamente limitados em espaços de Hilbert foi historicamente motivado pela eclosão da Mecânica Quântica. Nesta monografia apresenta-se a demonstração do teorema espectral para tais operadores e estudam-se algumas das respectivas consequências fundamentais, tendo como "pano de fundo" a referida motivação física. As três partes em que se divide o curso são outras tantas etapas nesse processo: o conceito de operador "associado a observável físico" sugere que se analise, numa primeira parte, a noção de adjunto no quadro das correspondências ("operadores multívocos") em espaços de Hilbert, com uma incursão pela teoria da representação das formas sesquilineares. Em seguida estuda-se a estrutura de Álgebra de Banach como quadro privilegiado para o estabelecimento de resultados em "teoria espectral", tema cuja importância para a resolução dos problemas propostos já antes se vislumbrara. Aproveita-se para abordar algumas questões, oriundas de diversas áreas da Matemática, cuja resposta é oferecida, inesperadamente, pelas propriedades da referida estrutura. Regredindo na escala da abstracção volta-se aos operadores "não-limitados", passando pelas álgebras-B* e operadores normais limitados, para, finalmente, se estudarem diversas formas do Teorema espectral e respectivas consequências, sem esquecer a motivação física que subtende toda a exposição.

Faculdade de Ciências - Departamento de Matemática
Rua Ernesto de Vasconcelos Bloco C1, 3° Piso
1700 LISBOA — PORTUGAL

ISBN: 972 - 8394 - 09 - 8