§2.4 单纯形法的基础

1.松弛变元

以下问题作例子，介绍单纯形法：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$
$$x_i \ge 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

上式化为线性规划问题

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots c_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \cdots + 0x_{n+m}$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}$$
$$x_i \ge 0\,, i = 1, 2, \cdots, n+m$$

$x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$称为松弛变元

2.例子

例 2.7：

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

变换成

$$\max z = x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

3.引入松弛变元的几何意义

*图示见图 2.9(a)
凸多边形的边界正好是$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$的 4 条直线。
允许解域见图 2.9(b)

4.凸多面体

$$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n, 0, 0, \cdots, 0)$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

问题可化为

$\max z = CX$

$AX = b,\ X \geq 0$

令超凸多面体 $\{X\,|AX = b, X \geq 0\}$ 为 S。

设$X \in S$，如果不存在$X_1, X_2 \in S$，及实数 t，使得$X = tX_1 + (1-t)X_2$，$0 < t < 1$，则称 X 为 S 的顶点。

定理 2.2：设 z(X)是定义在凸多面体 S 上的线性函数，则

1. **z(X)在 S 的顶点取得最大(最小)值；**
2. **z(X)在 S 的最大(最小)点集是一个凸集。**

证：设$C_1, C_2, \cdots, C_r$是 S 的所有顶点，对 S 内部的点 X，存在非负实数$s_1, s_2, \cdots, s_r$满足$\sum_{i=1}^{r} s_i = 1$，而且

$$X = \sum_{i=1}^{r} s_i C_i$$

令 $M = \max z(C_i)$，则

$$z(X) = z\left(\sum_{i=1}^{r} s_i C_i\right) = \sum_{i=1}^{r} s_i z(C_i) \leq M \sum_{i=1}^{r} s_i = M$$

即 z(X)在 S 中的最大值在 S 的顶点取得。

设C_1和C_2是 S 中任意两个取得最大值的点，即

$z(C_1) = z(C_2) = M$，对任意 t，$0 \leq t \leq 1$，令$X = tC_1 + (1-t)C_2$，

$z(X) = z(tC_1 + (1-t)C_2) = tz(C_1) + (1-t)z(C_2) = tM + (1-t)M = M$。

这表明$S' = \{X\,|z(X) = M\}$是一个凸集。同理可证最小值的情形。

记 A 的第 j 列向量为P_j。令$P_0 = b$。如果P_0可写成少于 m 个$P_j(0 \leq j \leq n+m)$的线性组合，称之为退化情形。如果无特别申明，我们总假设不是退化情形。

5.凸多面体顶点的充要条件

定理 2.3：$\mathbf{X = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+m})^T \in S}$, 是 S 的顶点的充分必要条件是 $\mathbf{x_1, x_2, \cdots, x_{n+m}}$中非零元素的数目不超过 m 个。

证明：先证必要性，即若 X 是顶点，则非零元素不超过 m 个。用反证法证明，当 X 的非零元素超过 m 个，则必非顶点。若 X 是 S 的顶点，但非零元素为 m+1 个，设$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, 0, \cdots, 0)^T, x_i > 0$,

$i=1,2,\cdots,m+1$。

取 $A_0=(P_1,P_2,\cdots,P_{m+1})$，则方程组 $A_0Z=0$

为 m+1 个未知数，m 个齐次方程，必有非零解。

设$Z=(z_1,z_2,\cdots,z_{m+1})^T$为一非零解，令

$$\tilde{Z}=(z_1,z_2,\cdots,z_{m+1},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1})^T$$

则$A\tilde{Z}=0$。令$X_1=X+\varepsilon\tilde{Z}$，$X_2=X-\varepsilon\tilde{Z}$，

其中ε为充分小的正数，则X_1,X_2的所有分量不为负数，且

$$AX_1=b,\quad AX_2=b$$

即$X_1,X_2\in S$，而且$X=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$

这与 X 是 S 的顶点的假设矛盾。

下面证充分性。设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,\overbrace{0,0,\cdots,0}^{n})^T$，其中$x_i>0$，

$i=1,2,\cdots n$。我们证其必然是 S 的顶点。如若不然，可找到$X_1,X_2\in S$，不失一般性，令

$$X_1=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_m^{(1)},0,\cdots,0)^T,X_2=(x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_m^{(2)},0,\cdots,0)^T$$

使之 $X=\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$

由于$X_1,X_2\in S$，故 $AX_1=b,AX_2=b,\therefore A(X_1-X_2)=0$

令 $Y=X+\alpha(X_1-X_2)$

$AY=AX+\alpha A(X_1-X_2)=b$

$Y=X+\alpha(X_1-X_2)=(y_1,y_2,\cdots,y_m,0,\cdots,0)^T$

$=(x_1+\alpha\left(x_1^{(1)}-x_1^{(2)}\right),\cdots,x_m+\alpha\left(x_m^{(1)}-x_m^{(2)}\right),\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n})^T$

因α是任意实数，故可适当选择，使 Y 的前面 m 个元素中至少有一个元素(设为y_k)为零，其余元素保持非负。

约束条件 $AY=b$ 可写成

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}y_1+\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}y_2+\cdots+\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{mm}\end{pmatrix}y_m+\cdots+\begin{pmatrix}a_{1,n+m}\\a_{2,n+m}\\\vdots\\a_{m,n+m}\end{pmatrix}y_{n+m}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

$$令\ P_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\quad P_{n+m}=\begin{pmatrix}a_{1,n+m}\\a_{2,n+m}\\\vdots\\a_{m,n+m}\end{pmatrix}$$

所以 $AY=b$ 又可写成

$$AY=(P_1,P_2,\cdots,P_{n+m})Y=b,其中\ Y=(y_1,y_2,\cdots,y_{n+m})^T$$

由于$y_{m+1}=y_{m+2}=\cdots=y_{m+n}=0$，故

$$P_1y_1+P_2y_2+\cdots+P_my_m=b$$

而$y_1,y_2,\cdots,y_m$中至少有一个为零，即列向量 b 可由少于 m 个列向量$P_1,P_2,\cdots,P_m$的线性组合来表示，这与非退化的假设矛盾。证毕。

§ 2.5 单纯形法

1.单纯形法的思想

凡是线性规划问题，其允许解域是一个超凸多面体，即由超平面包围起来的一个域。目标函数是一线性函数，它的梯度方向是一固定的向量，故极值点必在凸多面体的顶点上取得。很容易想到把有限个顶点求出来，从中挑出最优的，问题就解决了。但 n 维空间必须由 n 个超平面确定一个顶点，超凸多面体的边界超平面共 n+m 个，其中 n 个坐标面，m 个约束条件。估计最坏的情况凸多面体的顶点数可多达

$$\binom{n+m}{n}=\frac{(n+m)!}{n!\,m!}$$

?

故单纯形法本质上是一个指数时间的算法。

后来由俄罗斯数学家设计出椭球算法，证明线性规划问题是 P 问题，但椭球算法实际运行得很慢，而单纯形法实际运行得很快，比椭球算法快。

近年来，数学家们设计出内点法，它可以证明是多项式时间算法，同时实际运行速度也很快。但内点法求出的是近似解，当我们要求线性规划问题的整数最优解时，内点法可能无能为力。故单纯形法目前仍是有生命力的实用的求线性规划问题的方法。

2.基变量

线性规划问题：

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1} & =b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \quad +x_{n+2} & =b_2\\ \quad\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \quad\quad +x_{n+m} & =b_m\end{cases}$$

显然 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0,x_{n+1}=b_1,x_{n+2}=b_2,\cdots,x_{n+m}=b_m$ 满足约束条件，$X_0=(0,0,\cdots,0,b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$是 S 的一个顶点，对应目标函数 $z=0$。

单纯形法企图从顶点X_0出发，换到另一个 S 的顶点，使目标函数 z 改善，经过有限步使之达到最优。

定理 2.4：$\mathbf{X}\in\mathbf{S}$为顶点的必要条件是 X 的非零元素$\mathbf{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}}$对应的列向量$\mathbf{P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_m}}$线性无关。

证明：已知 S 的顶点$X=(x_1,x_2,\cdots,x_{n+m})^T$中$x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_m}$不为零。证$P_{i_1},P_{i_2},\cdots,P_{i_m}$线性无关。如若不然，存在非全 0 的$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m}$使

$$a_{i_1}P_{i_1}+a_{i_2}P_{i_2}+\cdots+a_{i_m}P_{i_m}=0$$

适当地选取$a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_m}$使得

$u_{i_l}=x_{i_l}+a_{i_l}\geq 0$,

$v_{i_l}=x_{i_l}-a_{i_l}\geq 0,\ l=1,2,\cdots,m$

而且 $u_j = v_j = 0,\ j \neq i_1, i_2, \cdots, i_m$。

令$u = (u_1, u_2, \cdots, u_{n+m})^T, v = (v_1, v_2, \cdots, v_{n+m})^T$，由于$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_m}$不全为 0，故$u \neq v$，同时

$$Au = \sum_{i=1}^{n+m} u_i P_i = \sum_{l=1}^{m} (x_{i_l} + a_{i_l}) P_{i_l} = \sum_{l=1}^{m} x_{i_l} P_{i_l} = P_0$$

同理可证$Av = P_0$。即$u, v \in S$，且$X = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$。

这与 X 是 S 的顶点的假设相矛盾。证毕。

例如：$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$，$x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \cdots, x_{n+m} = b_m$对应基

$$P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, P_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, P_{n+m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

*这是一组线性无关的基，但不是唯一一组基。

设$P_1, P_2, \cdots, P_m$是一组基，

$$P_0 = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots + a_m P_m$$
$$P_{m+j} = a_{1,m+j} P_1 + a_{2,m+j} P_2 + \cdots + a_{m,m+j} P_m$$

*解释a_i与$a_{i,m+j}$的含义

3. 基的选进与退出

$$\begin{array}{rr} & a_1 P_1 + a_2 P_2 + \cdots + a_m P_m = P_0 \\ - & \beta a_{1,m+j} P_1 + \beta a_{2,m+j} P_2 + \cdots + \beta a_{m,m+j} P_m = \beta P_{m+j} \\ \hline \multicolumn{2}{r}{(a_1 - \beta a_{1,m+j}) P_1 + (a_2 - \beta a_{2,m+j}) P_2 + \cdots + (a_m - \beta a_{m,m+j}) P_m = P_0 - \beta P_{m+j}} \end{array}$$

$$\text{或}\quad P_0 = \sum_{i=1}^{m} (a_i - \beta a_{i,m+j}) P_i + \beta P_{m+j}$$

$$\text{取}\quad \beta = \min_l \left\{ \frac{a_l}{a_{l,m+j}} \mid a_{l,m+j} > 0 \right\} = \frac{a_k}{a_{k,m+j}}$$

则取P_k作为退出基的向量，而选P_{m+j}进入基。

*这里要求β和所有$a_l - \beta a_{l,m+j}$均为非负数。

上述过程实际上是从 S 的一个顶点$X_0 = (a_1, a_2, \cdots, a_m, 0, \cdots, 0)^T$获得 S 的另一个顶点

$$X_1 = (a_1 - \beta a_{1,m+j}, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{0}, \cdots, a_m - \beta a_{m,m+j}, 0, \cdots, \underset{\substack{\uparrow \\ m+j}}{\beta}, 0, \cdots, 0)^T$$

该顶点的目标函数$z(X_1)$为

$c_1(a_1 - \beta a_{1,m+j}) + c_2(a_2 - \beta a_{2,m+j}) + \cdots + c_m(a_m - \beta a_{m,m+j})\ + c_{m+j}\beta$

$z(X_1) = c_1 a_1 + \cdots + c_m a_m + \beta(c_{m+j} - c_1 a_{1,m+j} - \cdots\ - c_m a_{m,m+j})$

$$= z(X_0) + \beta(c_{m+j} - \sum_{l=1}^{m} c_l a_{l,m+j})$$

本线性规划问题要求从顶点X_0到X_1，目标函数有所增加，取P_{m+j}使$c_{m+j} - z_{m+j} > 0$。其中

$$z_{m+j} = \sum_{l=1}^{m} c_l a_{l,m+j}$$

当目标函数取得最大值时，有$c_{m+j} - z_{m+j} < 0, j = 1,2,\cdots,n$。

4.例子

例 2.8：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\quad = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 6P_3 + 6P_4$$

第一步：进入基的选择

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2P_3 + 3P_4, c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = c_4 = 0$$

$$c_1 - z_1 = c_1 - (0\times2 + 0\times3) = 1 - 0 > 0$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3P_3 + 2P_4$$

$$c_2 - z_2 = c_2 - (0\times3 + 0\times2) = 1 - 0 > 0$$

故P_1或P_2都可选作进入基，不妨选P_1进入基。

退出基的确定：

$$P_0 = 6P_3 + 6P_4, \qquad P_1 = 2P_3 + 3P_4$$

$$(P_0 - \beta P_1) = (6 - 2\beta)P_3 + (6 - 3\beta)P_4$$

$$\text{其中} \quad \beta = \min\left\{\frac{6}{2}, \frac{6}{3}\right\} = 2, \ P_0 = 2P_1 + 2P_3$$

然后对原来的方程组作行变换，得

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \quad\quad \frac{1}{3}x_4 = 2 \\ \quad\quad \frac{5}{3}x_2 + x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 2 \end{cases}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

第二步：进入基的选择

$$P_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2P_1 + 2P_3, \quad c_1 = 1, c_3 = 0$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}P_1 + \frac{5}{3}P_3$$

$$c_2 - z_2 = 1 - \left(1\times\frac{2}{3} + 0\times\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3} > 0$$

选P_2作为进入基。
退出基的确定：

$$P_0 = 2P_1 + 2P_3, \qquad \beta P_2 = \frac{2}{3}\beta P_1 + \frac{5}{3}\beta P_3$$

$$P_0 - \beta P_2 = \left(2 - \frac{2}{3}\beta\right)P_1 + (2 - \frac{5}{3}\beta)P_3$$

$$\beta = \min\left\{\frac{2}{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\frac{5}{3}}\right\} = \min\left\{3, \frac{6}{5}\right\} = \frac{6}{5}$$

即 $\quad P_0 = \frac{6}{5}P_1 + \frac{6}{5}P_2$

再对方程组作行变换，得

$$\begin{cases} x_1 \qquad - \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 = \frac{6}{5} \\ \qquad x_2 + \frac{3}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4 = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c_1 = c_2 = 1, \qquad \text{这时}$$

$$c_3 - z_3 = 0 - \left(1\times\left(-\frac{2}{5}\right) + 1\times\frac{3}{5}\right) < 0$$

$$c_4 - z_4 = 0 - \left(1\times\frac{3}{5} + 1\times\left(-\frac{2}{5}\right)\right) < 0$$

目标函数无法改善，即得最优解：$x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{6}{5}, x_3 = x_4 = 0,$

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 = 1\times\frac{6}{5} + 1\times\frac{6}{5} = \frac{12}{5}$$

*图示见图 2.10

定理 2.5：对于上述线性规划问题，若$\mathbf{P_{b_1}, P_{b_2}, \cdots, P_{b_m}}$作为一组基，对应的允许解

$$x_i = \begin{cases} \bar{b}_i, & i = b_j, j = 1,2,\cdots,m \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

而且$z_k \geq c_k, k = 1,2,\cdots,n+m,$则所得的允许解是最优解。

证：设 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_{n+m})^T$ 是一允许解。不失一般性，设所求的解为 $X_0=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,0,\cdots,0)^T$，则

$$z(Y)=\sum_{j=1}^{n+m}c_jy_j\le\sum_{j=1}^{n+m}z_jy_j=\sum_{j=1}^{n+m}y_j(\sum_{k=1}^{m}c_ka_{kj})=\sum_{k=1}^{m}c_k(\sum_{j=1}^{n+m}y_ja_{kj})$$

因 Y 是一允许解，故$\sum_{j=1}^{n+m}a_{kj}y_j=\bar{b}_k$，

$$\therefore\ z(Y)\le\sum_{k=1}^{m}c_k\bar{b}_k=z(X_0)$$

因而X_0是使目标函数 z 达到最大值的顶点，即为最优解。证毕。