第二章 线性规划

§2.1 问题的提出

例 2.1:某工厂有M_1,M_2,M_3三种机器，其中机器M_1有m_1台，机器M_2有m_2台，机器M_3有m_3台，该厂生产P_1,P_2,P_3,P_4四种产品，每单位产品所需要的机器时数如下表所示：

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	t_{11}	t_{12}	t_{13}	t_{14}
M_2	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}
M_3	t_{31}	t_{32}	t_{33}	t_{34}

其中$t_{ij}=$ 产品P_j生产一个单位需要机器M_i的时数，$i=1,2,3; j=1,2,3,4$。

设四种产品单位利润分别为c_1,c_2,c_3,c_4。假定生产这四种产品所用的机器没有先后次序之分。试问一周内应如何安排生产，使所获的利润达到最大？已知每周机器开动时间为 60 小时。

设P_1,P_2,P_3,P_4四种产品每周产量分别为x_1,x_2,x_3,x_4，则问题化为：

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4$$

机器M_i一周内开动的总时数为$60m_i, i=1,2,3$。

满足约束条件：

$$\begin{cases} t_{11}x_1+t_{12}x_2+t_{13}x_3+t_{14}x_4\le 60m_1 \\ t_{21}x_1+t_{22}x_2+t_{23}x_3+t_{24}x_4\le 60m_2 \\ t_{31}x_1+t_{32}x_2+t_{33}x_3+t_{34}x_4\le 60m_3 \end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$$

- 目标函数
- 约束条件

例 2.2：某饲养场为牲口安排饲料，要求每个牲口每天所需要的 m 种营养素的量为$(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，其中b_i为营养素 i 的需要量。现有 n 种食品，设每单位食品 j 中营养素 i 的含量为a_{ij}，而食品 j 的单位价格为c_j元，$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$。在满足营养要求的条件下，使饲料成本最低，试问饲料应如何组成？

设每个牲口需要食品 i 的量为x_i单位，问题导致在约束条件下：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\ge b_i$$

$$i=1,2,\cdots,m$$

使成本 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 达到最小值。即

$$\min z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\ge b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\ge b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\ge b_m \end{cases}$$

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\ge 0$$

例 2.3：某种产品有 m 个产地，其产量分别为$a_1,a_2,\cdots,a_m$，有 n 个销地，需求量分别是$b_1,b_2,\cdots,b_n$。设从产地 i 运往销地 j 的单位运费为c_{ij}。

而且产销平衡，即

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

试问应如何合理地安排产品的调配？
合理的调配应使运费最省。设从产地 i 运往销地 j 的量为x_{ij}，问题是求

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

满足约束条件：

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n。$$

§2.2 问题的提法及其几何意义

一．线性规划

1.线性规划：目标函数是线性函数，约束条件是一组线性不等式。在满足约束条件的前提下，求目标函数的极大或极小值。
2.数学表示：
令$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$
　$A = (a_{ij})_{m\times n}$，　$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

　可表示为矩阵形式：

$$\max z = CX$$
$$AX \le b$$
$$X \ge 0$$

二．线性规划的几何意义

例 2.4：

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

*图形见图 2.1

• 允许解域

• 极大值点

• 等位线

例 2.5：　　求$z = 3x_1 + 2x_2$的最大值和最小值

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

*图形见图 2.2

$\max z = 17$, 在$(5,1)$点取得， $\min z = 6\frac{4}{5}$，在$\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$点取得。

例 2.6：　　求$z = x_1 + x_2$的最大、最小值。

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2x_1 - x_2 \geq -4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

*图见图 2.3

$z = x_1 + x_2$在允许解域 S 上没有最大值，但在$\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$点取得最小值 $z = 2\frac{4}{5}$.

§2.3 凸集

一．凸集的定义

1.定义：设 C 是 n 维的欧氏空间的非空集合，z_1, z_2是集合 C 的任意两点，t 是 0 与 1 之间的任意实数，则点$z = tz_1 + (1-t)z_2, 0 \leq t \leq 1$，属于 C，则称 C 是凸集。

*z 是z_1到z_2直线段上任一点，z_1, z_2是两点的坐标。

2. 图示：(见图 2.4)

3. 允许解域：

约束条件：

$$C: \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

是以 n 维空间的 m 个超平面$AX = b$，及 n 个坐标面 X = 0 为边界的域，称为允许解域，用 C 表示。

4．允许解域是凸集

证明：C 是凸集。

设$X_1 \in C, X_2 \in C$, 则

$AX_1 \leq b,\ AX_2 \leq b,\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$。

对任意实数 t，$(0 \leq t \leq 1)$，构造

$X = tX_1 + (1-t)X_2$，则$X \geq 0$，而且

$AX = t(AX_1) + (1-t)AX_2 \leq tb + (1-t)b = b$,

故 $AX \leq b$ 且 $X \geq 0$。

所以 $X \in C$，即 C 是凸集。或称超凸多面体。

5. 线性规划的几何意义

因允许解域 C 是超凸多面体，目标函数$z = CX$是超平面，故目标函数必然在超凸多面体 C 的顶点上取得极大值和极小值。这样在凸集 C 上求极大(极小)值的问题缩小到在凸集的有限个角点找极大(极小)值。

二．凸集中点表示成端点的线性组合

1. 一维的情况：(见图 2.5)

若$x \neq x_1$，则

$$\frac{x_2 - x}{x - x_1} = \lambda > 0，\text{则 } x = \frac{\lambda}{1+\lambda}x_1 + \frac{1}{1+\lambda}x_2$$

$$\text{令}\quad t_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda}，\quad t_2 = \frac{1}{1+\lambda} = 1 - t_1$$

则 $x = t_1x_1 + t_2x_2$，$t_1 + t_2 = 1$

2. 二维的情形

二维空间的直线 (见图 2.6)

$$\frac{x_2^{(p)} - x_2^{(1)}}{x_1^{(p)} - x_1^{(1)}} = \frac{x_2^{(2)} - x_2^{(p)}}{x_1^{(2)} - x_1^{(p)}} = \text{tg}\theta$$

$$\therefore \frac{x_2^{(2)} - x_2^{(p)}}{x_2^{(p)} - x_2^{(1)}} = \frac{x_1^{(2)} - x_1^{(p)}}{x_1^{(p)} - x_1^{(1)}} = t$$

$$\therefore \begin{cases} x_1^{(p)} = \dfrac{t}{1+t}x_1^{(1)} + \dfrac{1}{1+t}x_1^{(2)} \\ x_2^{(p)} = \dfrac{t}{1+t}x_2^{(1)} + \dfrac{1}{1+t}x_2^{(2)} \end{cases}$$

在二维空间中，最简单的凸集是三角形，三角形三个顶点为v_1, v_2, v_3，三角形内部一点 p。见图 2.7

设 p 点坐标为(x_1, x_2)，q 点坐标为$\left(x_1^{(q)}, x_2^{(q)}\right)$，则存在$t_1^{(q)} \geq 0, t_2^{(q)} \geq 0$，满足$t_1^{(q)} + t_2^{(q)} = 1$，使得

$$\begin{cases} x_1^{(q)} = t_1^{(q)}x_1^{(2)} + t_2^{(q)}x_1^{(3)} \\ x_2^{(q)} = t_1^{(q)}x_2^{(2)} + t_2^{(q)}x_2^{(3)} \end{cases}$$

$$\text{令 } C_1 = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$C^{(q)} = \begin{pmatrix} x_1^{(q)} \\ x_2^{(q)} \end{pmatrix} = t_1^{(q)}C_2 + t_2^{(q)}C_3$$

类似的理由，存在$\tau_1 \geq 0, \tau_2 \geq 0, \tau_1 + \tau_2 = 1$，使得

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tau_1 C_1 + \tau_2 C^{(q)}$$

$$= \tau_1 C_1 + \tau_2 (t_1^{(q)}C_2 + t_2^{(q)}C_3)$$
$$= \tau_1 C_1 + \tau_2 t_1^{(q)}C_2 + \tau_2 t_2^{(q)}C_3$$

$$令\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}，\ t_1 = \tau_1, t_2 = \tau_2 t_1^{(q)}, t_3 = \tau_2 t_2^{(q)}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = \tau_1 + \tau_2\left(t_1^{(q)} + t_2^{(q)}\right) = \tau_1 + \tau_2 = 1$$

$$X = t_1 C_1 + t_2 C_2 + t_3 C_3$$

3. n 维的情形

定理 2.1：设$C_1, C_2, \cdots, C_k$是有界超凸多面体

$$C: \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

的全体顶点的座标构成的列向量。对于满足条件$\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$的 k 个正数$t_1, t_2, \cdots, t_k$，

$$Z = \sum_{j=1}^{k} t_j C_j$$

则$Z \in C$。

反之，对于 C 内的任一点 Z，必存在满足条件$\sum_{j=1}^{k} t_j = 1$的 k 个正数$t_1, t_2, \cdots, t_k$，使得

$$Z = \sum_{j=1}^{k} t_j C_j\ 。$$

证明：先证定理的前半部分。显然$Z \geq 0$, 又

$$AZ = A\left(\sum_{j=1}^{k} t_j C_j\right) = \sum_{j=1}^{k} t_j (AC_j) \leq \sum_{j=1}^{k} t_j b = b$$

$\therefore$ $AZ \leq b$，即 $Z \in C$。

现在用数学归纳法证定理的后半部分。

一维情形已知为真。设定理对于凸集 C 的维数不超过 k 时为真。进而证维数等于 k+1 时，定理是对的。已知$Z \in C$，若 Z 在 C 的边界面上，由于边界面上的维数少于 k+1，不失一般性，设存在$C_1, C_2, \cdots, C_l$
$(l \leq k)$及$\bar{t}_i \geq 0$，$i = 1,2, \cdots, l$，满足

$$\sum_{i=1}^{l} \bar{t}_i = 1，使得\ Z = \sum_{j=1}^{l} \bar{t}_j C_j$$

如果 Z 不在 C 的边界上，过C_{k+1}和 Z引直线交于边界面一点 Y，存在$\lambda\ (0 \leq \lambda \leq 1)$，有$Z = \lambda Y + (1-\lambda)C_{k+1} = \lambda \sum_{j=1}^{l} \bar{t}_j C_j + (1-\lambda)C_{k+1}$

$$设\ \ t_j = \begin{cases} \lambda \bar{t}_j, & 1 \leq j \leq l \\ 0, & j > l, j \neq k+1 \\ 1-\lambda, & j = k+1 \end{cases}$$

显然　$t_j \geq 0$，而且

$$\sum_{j=1}^{k+1} t_j = \lambda \sum_{i=1}^{l} \bar{t}_i + (1-\lambda) = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

故 $Z = \sum_{i=1}^{k+1} t_i C_i$ 。证毕。

5. 无界凸集的情形

当 C 是无界凸集，$C_i\ (i = 1, 2, \cdots, k)$是 C 的有界顶点，存在极方向$D_j$，$j = 1, 2, \cdots, l$, D_j是 n 维空间的 l 个不同方向的方向数。则对于 C 上任意一点 Z，恒有$t_1, t_2, \cdots, t_k \geq 0$, 满足$\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$，以及非负数$\tau_1, \tau_2, \cdots,$
τ_l，使得

$$Z = \sum_{j=1}^{k} t_j C_j + \sum_{j=1}^{l} \tau_j D_j$$

*举例说明：见图 2.8

*上式前半部分确定向量的起点，后半部分确定向量的终点。