§2.6 单纯形表格

*单纯形法是一个反复迭代的过程，有一定的规律可以遵循，便于化为表上作业，它实际上是一种启发式的算法。

把线性规划问题用以下符号描述：

问题为：$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{n+m}x_{n+m}$

约束条件：

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1,n+m}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2,n+m}^{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \cdots & a_{m,n+m}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(0)} \\ b_2^{(0)} \\ \vdots \\ b_m^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$x_i \geq 0，i = 1, 2, \cdots, n + m$$

其中：$c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = c_{n+m} = 0$

$$P_j = (a_{1j}^{(0)}, a_{2j}^{(0)}, \cdots, a_{mj}^{(0)})^T, j = 1, 2, \cdots, n + m$$

$$P_0 = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \cdots, b_m^{(0)})^T$$

列出下表(见图 2.11)

(1)计算z^0及$c_j - z_j$

如果$c_j - z_j \leq 0, j = 1, 2, \cdots, n + m$，不可能使目标函数有所改进，故问题的最优解是：

$$x_{b_1} = b_1^{(0)}, x_{b_2} = b_2^{(0)}, \cdots, x_{b_m} = b_m^{(0)},$$

$$x_j = 0, j \neq b_1, b_2, \cdots, b_m, 1 \leq j \leq n + m$$

这时目标函数值即为z^0。

(2) 假若不然，进入基P_j的选取，应满足

$$c_j - z_j = \max_k\{c_k - z_k \mid c_k - z_k > 0\},$$

当 n 很大时，取最大值增加了许多计算，所以也可以选第 1 个
$c_j - z_j > 0$。确定了进入基P_j后，计算

$$\beta = \frac{b_k^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}} = \min_l \left\{ \frac{b_l^{(0)}}{a_{lj}^{(0)}} \,\middle|\, a_{lj}^{(0)} > 0 \right\}$$

确定退出的基P_k。

(3) 表中第 k 行第 j 列元素$a_{kj}^{(0)}$取作主元素，作行变换，对第 j 列进行消元：

$$b_k^{(1)} = {b_k^{(0)}}\Big/{a_{kj}^{(0)}}, \quad a_{ki}^{(1)} = {a_{ki}^{(0)}}\Big/{a_{kj}^{(0)}}, \ i = 1, 2, \cdots, n + m$$

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - \frac{b_k^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}} a_{ij}^{(0)}, i = 1,2, \cdots, m, i \neq k$$

$$a_{il}^{(1)}=a_{il}^{(0)}-\frac{a_{kl}^{(0)}}{a_{kj}^{(0)}}a_{ij}^{(0)}, i=1,2,\cdots,m, i\neq k; l=1,2,\cdots,n+m, l\neq j$$

把所得的结果填入下表(见图 2.12)，返回(2)。这样周而复始，直到达到最优。

例 2.9： $\max z=3x_1+6x_2+2x_3$

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3\leq 2\\ x_1+3x_2+2x_3\leq 1\end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3\geq 0$$

引进松驰变量x_4,x_5

$$\max z=3x_1+6x_2+2x_3+0x_4+0x_5$$

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+x_4 \qquad =2\\ x_1+3x_2+2x_3 \qquad +x_5=1\end{cases}$$

$$x_i\geq 0, i=1,2,\cdots,5$$

表见图 2.13

故最优解为 $x_1=\frac{2}{5}$，$x_2=\frac{1}{5}$，目标函数为$z=\frac{12}{5}$。

§2.7 单纯形法的矩阵表示

设$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m,0,\cdots,0)^T$是 S 的顶点，$P_1,P_2,\cdots,P_m$线性无关。

令$B=(P_1P_2\cdots P_m)$，$A=(B \vdots N)$，$X=\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}$，其中$X_B$为基变量，N 为非基变量部分。

$AX=b$，$(B\vdots N)\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=b$

$$\therefore \quad BX_B+NX_N=b \qquad (2.1)$$

由于$P_1,P_2,\cdots,P_m$线性无关，故B^{-1}存在。以B^{-1}左乘于(2.1)式两端得

$$X_B=B^{-1}b-B^{-1}NX_N=B^{-1}b-\sum_{j\in N}B^{-1}P_jx_j \qquad (2.2)$$

(2.2)式说明 S 上的点$X=(X_B\vdots X_N)^T$，X_B和X_N两部分间的约束关系，特别当$X_N=0$时，$X_B=B^{-1}b$。于是

$$X=(B^{-1}b\vdots 0)^T$$

是 S 的顶点。(2.2)式中的 N 为属于X_N的x_j下标序号集合。对应于顶点$X_0=(B^{-1}b\vdots 0)^T$的目标函数为

$$z(X_0)=(C_B\vdots C_N)\begin{pmatrix}B^{-1}b\\0\end{pmatrix}=C_BB^{-1}b \qquad (2.3)$$

但

$$z(X)=(C_B\vdots C_N)\begin{pmatrix}X_B\\X_N\end{pmatrix}=C_B\left(B^{-1}b-\sum_{j\in N}B^{-1}P_jx_j\right)+\sum_{j\in N}c_jx_j$$

$$=C_BB^{-1}b+\sum_{j\in N}(c_j-C_BB^{-1}P_j)x_j \qquad (2.4)$$

其中 $\quad z_j=C_BB^{-1}P_j \qquad (2.5)$

§2.7 对偶原理

一．对偶概念

问题(P)：

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$$

问题(D)：

$$\min w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \end{cases}$$
$$y_1, y_2, \cdots, y_m \ge 0$$

用矩阵形式表达如下：

问题(P)：	问题(D)：
$\max z = CX$	$\min w = Yb$
$AX \le b$	$YA \ge C$
$X \ge 0$	$Y \ge 0$

其中：$A = (a_{ij})_{m\times n}$， $b = (b_i)_{m\times 1}$， $C = (c_j)_{1\times n}$

$X = (x_i)_{n\times 1}$， $Y = (y_i)_{1\times m}$

二．对偶问题的经济意义

有 n 种不同的食物，第 k 种食物含营养素 j 的百分比为a_{jk}，其中，$j = 1, 2, \cdots, m$。假如配一食谱要求第 j 种营养的量不低于b_j，而第 k 种食物的单位价格为c_k，消费者希望费用最低。

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases} \qquad \text{(D)}$$
$$x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0$$

其中x_k为第 k 种食物的需要量。

从营养素制造商的角度来分析，第 i 种营养素的单位价格设为y_i，它必须服从下列条件：

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \le c_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases} \qquad \text{(P)}$$
$$y_1, y_2, \cdots, y_m \ge 0$$

在以上价格约束下，使制造的营养素能卖出的价格尽可能高。

$$\max w = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m$$

定义：问题(D)称为是问题(P)的对偶问题。

问题(P)和问题(D)用下面的图表示：(见图 2.14)

三．对偶问题的性质

求 $w = Yb$ 的最小值可以转为求$w = -Yb$的最大值，故问题(D)改为

$$\max w = Y(-b)$$
$$Y(-A) \le (-C)$$
$$Y \ge 0$$

其对偶问题为

$$\min z = (-C)X$$
$$(-A)X \ge (-b)$$
$$X \ge 0$$

即

$$\max z = CX$$
$$AX \le b$$
$$X \ge 0$$

即问题(D)是问题(P)的对偶问题。问题(D)的对偶问题是问题(P)，问题(P)与问题(D)互为对偶问题。

四．对偶定理

定理 2.6：设 X, Y 分别是问题(P), (D)的允许解，则$CX \le Yb$。特别当$CX = Yb$时，X 和 Y 分别是问题(P), (D)的最优解。

证：由于 $AX \le b$，$YA \ge C$

即假定 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$

$\sum_{j=1}^{m} a_{ji}y_j \ge c_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$ ， 则

$$CX = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} a_{ji}y_j) x_i$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i) y_j \le \sum_{j=1}^{m} b_j y_j = Yb$$

若当$CX = Yb$成立，而 X 不是(P)的最优解，则必存在X_1，使$CX_1 > CX = Yb$，这跟$CX_1 \le Yb$的结果相矛盾。

同样可证 Y 是(D)的最优解。

定理 2.7：若 X,Y 分别是问题(P), (D)的最优解，则 $CX = Yb$。

证：X 是(P)的最优解，故

$$\max z = CX$$

$$AX \le b$$
$$X \ge 0$$
同理，Y 满足　$\min w = Yb$
$$YA \ge C$$
$$Y \ge 0$$
引进松弛变量X_S，问题(P)为
$$\max z = (C \vdots 0)\begin{pmatrix} X \\ X_S \end{pmatrix},\ (A \vdots E)\begin{pmatrix} X \\ X_S \end{pmatrix} = b,\ \begin{pmatrix} X \\ X_S \end{pmatrix} \ge 0$$
$(A \vdots E) = (P_1 P_2 \cdots P_{n+m})$

设 B 为由问题(P)的最优解的基所对应的列构成的矩阵。
$$X_{opt} = B^{-1}P_0,\ z_j = C_B B^{-1} P_j,\ j = 1,2,\cdots,n+m$$
令$Y_B = C_B B^{-1}$，可以证明Y_B即为问题(D)的最优解。
$$Y_B(A \vdots E) = C_B B^{-1}(A \vdots E) = (C_B B^{-1} A \vdots C_B B^{-1})$$
由于X_{opt}是(P)的最优解，故$c_j - z_j \le 0, j = 1, 2, \cdots, n+m$，即
由于$(C \vdots 0) - C_B B^{-1}(A \vdots E) \le 0$
$C_B B^{-1} A \ge C,\ \ C_B B^{-1} \ge 0$
$\therefore\ \ (C_B B^{-1})A = Y_B A \ge C,\ \ Y_B \ge 0$
故Y_B满足问题(D)的约束条件，即是问题(D)的允许解。
此时　$Y_B b = C_B B^{-1} b = C_B(B^{-1}b) = C_B X_{opt}$
依据本节前一定理，可知Y_B是问题(D)的最优解。证毕。
*对偶原理不仅证明了问题(P)，(D)的解满足等式：
$$Yb = CX$$
实际上还给出，若(P)的解$X_{opt} = B^{-1}P_0$，则(D)的解为
$$Y_{opt} = C_B B^{-1}。$$
例 2.10：给出线性规划问题：
$$\min z = y_1 + 2y_2$$
$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \ge 6 \\ y_1 + 3y_2 \ge 3 \\ 2y_1 + y_2 \ge 2 \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$
用对偶问题求解：
对偶问题：
$$\max z = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \le 2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$
引进松弛变量
$$\max z = 6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad + x_5 = 2 \end{cases}$$
单纯形表格见图 2.15
最优基向量　P_1，P_2，故
$C_B = (6, 3)$

$$\mathrm{B}=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 3\end{pmatrix},\qquad \mathrm{B}^{-1}=\begin{pmatrix}3/5 & -1/5\\-4/5 & 3/5\end{pmatrix}$$

原问题的最优解为

$$\mathrm{Y_B}=\mathrm{C_B}\mathrm{B}^{-1}=(6,3)\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\-\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}=(\frac{6}{5},\frac{3}{5})$$

对偶问题的单纯形表格最后一行实际上是

$$(\mathrm{C} \vdots 0)-\mathrm{C_B}\mathrm{B}^{-1}(\mathrm{A} \vdots \mathrm{E})=(\mathrm{C}-\mathrm{C_B}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A} \vdots -\mathrm{C_B}\mathrm{B}^{-1})$$

$\mathrm{C_B}\mathrm{B}^{-1}$项给出了原问题的解。