# 第六章 网络

## §6.1 流

\*作为商品从产地运送到市场必经之途的运输网络，把它看作是具有某些附加结构的有向图时，可以进行极为有效的分析。

**网络**：一个网络N是指一个具有两个特定顶点子集X和Y的有向图D(称为N的基础有向图)，以及一个在D的弧集A上定义的非负整数数值函数c；假定顶点集X和Y是不相交的和非空的。

称X中的顶点是N的发点，Y中的顶点是N的收点，既不是发点又不是收点的顶点称为中间点；所有中间点的集合记为I。

称函数c是N的容量函数，它在弧a上的值称为a的容量。一条弧的容量可以看作沿着这条弧输送商品所能允许的最大流量，而发点对应于产地，收点对应于市场。

一个网络的例子：（见图6.1）

若表示。

若f是定义在N的弧集A上的实值函数，并且，则用f(K)表示

。

若K是形为的弧集，则把写成，而把写成。

**流**：网络N中的流是指定义在A上的一个整数值函数f，使得

以及

f在弧a上的值可以看作是流f中物资沿着a输送的流量。条件(6.1)式中的上界称为容量约束，它给出一个自然的限制，即沿一条弧的流量不能超过这条弧的容量。(6.2)式称为守恒条件，它要求对于任何中间点v，物资输入v的流量等于输出v的流量。

**零流**：每个网络至少有一个流，即对任何，由所定义的函数显然满足(6.1)式和(6.2)式，它称为零流。

非平凡流的例子：(见图6.2)

**合成流量**：若S是网络N的顶点子集，而f是N中的流，则称为f流出S的合成流量，而是f流进S的合成流量。

**流的值**：对于任何流f，流出X的合成流量等于流进Y的合成流量。这个共同的量称为f的值。用表示。于是 。

最大流：N中的流f称为最大流，是说：N中不存在流，使得

。

最大流在网络中有重要地位。

将任一网络简化为只有一个发点和一个收点的网络：

对于给定的网络N，构作一个新的网络如下：

(i)在N中添加两个新的顶点x和y；

(ii)用一条容量为的弧把x连接到X中的每一个顶点；

(iii)用一条容量为的弧把Y中的每一个顶点都连接到y；

(iv)指定x为的发点，而y为的收点。

例子：图6.1中的网络转化为图6.3的网络。

N和中的流以一个简单的方式相互对应。若f是N中的流，则由

所定义的函数是中使得的流。

反之，中的流在N的弧集上的限制就是N中具有相同值的流。

## §6.2 割

**割**：设N是具有单一发点x和单一收点y的网络。N中的割是指形如的弧集，这里。例：(见图6.4)

其中红线表示一个割。

**割K的容量**：指它的各条弧的容量之和。我们用cap K表示K的容量。于是

例如：图6.4中的割的容量为16.

引理6.1：对于N中的任一流f和任一割均有

证明：设f是N的流，是N中的割。从流和流值的定义，有

把S上所有顶点的这些方程加起来，并化简(见作业)，得到

为方便起见，若，则称弧a为f零的；若，则称弧a是f正的；若，则称弧a是f非饱和的；若，则称弧a是f饱和的。

##### 定理6.2：对于N中的任一流f和任一割，均有

而且，(6.5)式中的等式成立当且仅当中的每条弧都是f饱和的，且中的每条弧都是f零的。

证明：根据(6.1)式，有

以及

把不等式(6.6)和(6.7)代入(6.4)式，即得(6.5)式。再注意到(6.6)式中等式成立，当且仅当中每条弧都是f饱和的，而(6.7)式中等式成立当且仅当中的每条弧都是f零的，即得定理的第2个结论。

**最小割**：N中的割K称为最小割，是说：N中不存在割使得

。若是最大流，而是最小割，则作为定理6.2的特殊情形，有

推论6.2：设f是流而K是割，适合。则f是最大流而K是最小割。

证明：设是最大流而是最小割，根据(6.8)式，有

因为根据假设，，由此推得，以及，于是f是最大流而K是最小割。

## §6.3 最大流最小割定理

设f是网络N中的一个流。对于N中的每条路P，我们用一个非负整数与之相伴，其定义为

容易看出，是在不违反条件(6.1)的前提下沿着P所能增加的流量(相对于f)的最大数值。若，则称路P是f饱和的。若

0，则称路P是f非饱和的(或者等价地说，若P的每条顺向弧是f非饱和的而P的每条反向弧是f正的，则称路P是f非饱和的)。简单地说，f非饱和路是没有用足整个容量的路。

f可增路：是指从发点x到收点y的f非饱和路。

例子：(见图6.5)

路是一条f可增路。。

网络中存在f可增路P说明流f不是最大流。事实上，沿着P增减一个值为的附加流得到

定义的新流，满足：。

称为基于P的修改流。(见图6.5 (b))

##### 定理6.3：N中的流f是最大流当且仅当N不包含f可增路

证明：若N包含f可增路P，则f不能是最大流，因为基于P的修改流具有更大的值。

反之，假设N不包含f可增路。我们的目的是证明f是最大流。设S表示N中用f非饱和路与x连接起来的所有顶点的集。显然。

又由于N没有f可增路，所以。因此，是N中的一个割。我们将证明中每条弧是f饱和的，而中的每条弧是f零的。

考察尾，而头的弧a。由于，所以存在一条f非饱和。若a是f非饱和的，则Q可以由弧a扩充成为一条f非饱和路。但是，因此不能存在这样的路。所以a必然是f饱和的。同理可证：若，则a必然是f零的。

应用定理6.2，得到

。

于是从推论6.2可以推得f是最大流(以及K是最小割)。

\*在上述证明过程中，我们证实了适合的最大流f和最小割K的存在，从而有以下定理。

##### 定理6.4：在任何网络中，最大流的值等于最小割的容量。

\*定理6.4称为最大流最小割定理。

求一个网络N中的最大流的算法(标号法)：

基本思想：从一个已知的流(例如零流)开始，递推地构作出一个其值不断增加的流序列，并且终止于最大流。在每一个新的流f作出后，如果存在f可增路，则用被称为标号程序的一个子程序来求出它。若找到这样一条路P，则作出基于P的修改流，并且取为这个序列的下一个流。如果不存在f的可增路，则算法终止。根据定理6.3，f就是最大流。

标号法举例：(见图6.6)

f非饱和树

生长树的方法

修改标号的过程

突破

修改流

\*标号算法的问题：(见图6.7)