## §6.4 求最大流的有效算法

给定一个具有流F的网络，我们构造一个伴随有向图，满足N中的F可增广路和中的x到y的有向路径一一对应。N和的顶点集相同，并且对任意两个顶点u和v，(u, v)是中的一条边，当且仅当，或者并且，或者。

在N中找从x到y的可增广路归结为在中找x到y的有向路径。

：对每个顶点设一个标号等于中从x到v的最短距离。如果不存在从x到v的路径，则。

中的x到y的有向路记为，它在N中的可增广路记为P。

如果中存在从x到y的有向路，那么是从x到y的最短有向路。可以从y向前回溯，当处理到一个顶点v时，取它的前一个顶点u，满足。

**算法1：BFSPK(宽度优先找的过程)**

BEGIN

在中宽度优先找x到每个顶点v的最短距离(如果,L(v)>0表示这个路径的长度；如果L(v)=0, 那么这样的路径不存在。);

IF L(y)=0 THEN PATHfalse

ELSE BEGIN

FOR 所有 DO 构造 /\*B’(v)是v的反向邻接表\*/

;

;

WHILE DO

BEGIN

在B’(u)中找一个顶点v，使得

把v加到的前端；

;

END

END

END;

**算法：求最大流的算法**

输入网络的邻接表A(v)，边上的容量及各边上的初始流;

true;

WHILE PATH=true DO

BEGIN

构造的邻接表B(v)，对每一条边(u, v)记录和(u, v)是正向边还是反向边；

BFSPK;

IF PATH=true THEN

BEGIN

求

FOR all DO

IF (u, v)是的向前边 THEN

ELSE

END

END;

例子：见图6.7

\*用上述算法求最大流

## §6.5 连通度与Menger定理

在本节，我们利用最大流最小割定理证明若干由Menger(1927)提出的定理，下述引理提供了证明的关键。

引理6.5：设N是以x为发点以y为收点的网络，并且它的每条弧都具有单位容量，则

(a)N中最大流的值等于N中弧不重的有向(x,y)路的最大数目m；并且

(b)N中最小割的容量等于N中删去后就会破坏N中所有有向(x,y)路的那些弧的最小数目n。

证明：设是N中的最大流，并且表示从D中删去所有零的弧而得到的有向图。由于N的每条弧有单位容量，因此，对于所有，都有。由此推得：

(i)

(ii)对所有成立。

所以(由习题10.3.3)，在中，因而也在D中存在条弧不重的有向路。于是

现在设是N中任一组m条弧不重的有向路，并由

定义A上的一个函数f，显然f是N中值为m的一个流。由是最大流，我们有

于是从(6.10)式和(6.11)式推得

设是N中的最小割。则在中，的顶点从S中的任何顶点出发都不可到达；特别是，y从x出发不可到达。于是是一个删去它就会破坏所有有向(x,y)路的弧集，并且有

现在设Z是删去它就会破坏所有有向(x,y)路的n条弧的集，并且用表示在中从x出发可到达的所有顶点的集。由于而，所以是N中的一个割。此外，根据的定义，不能包含的弧，因此。由于是最小割，我们断定：

于是(6.12)式和(6.13)式一起产生

##### 定理6.6：设x和y是有向图D的两个顶点。则D中弧不重的有向(x,y)路的最大数目等于删去后就会破坏D中所有有向(x,y)路的那些弧的最小数目。

证明：对D的每条弧都指定单位容量，得到一个以x为发点以y为收点的网络N。于是定理从引理6.5和最大流最小割定理6.4推得。

采用简单的技巧可以立即得到定理6.6对于无向图的变形。

##### 定理6.7：设x和y是图G的两个顶点。则G中边不重的(x,y)路的最大数目等于删去后就会破坏G中所有(x,y)路的那些边的最小数目。

证明：应用定理6.6于G的伴随有向图D(G)即可。

\*图G=(V,E)的伴随有向图D(G)：

。

推论6.7：图G是k边连通的当且仅当G中任意两个相异顶点被至少k条边不重的路所连。

证明：直接从定理6.7和k边连通的定义推得。

\*一个图

在G中删除k条边，才能使G不连通。

\*图的边连通度等于G中最小边割集的边数。

定理6.8：设x和y是有向图D的两个顶点，并且D没有从x到y的弧。则D中内部不相交的有向(x,y)路的最大数目等于删去后就会破坏D中所有有向(x,y)路的那些顶点的最小数目。

证明：从D出发构作新的有向图如下：

(i)把每个顶点分裂成两个新的顶点，并用弧连接它们；

(ii)把D中以为头的每条弧用以为头的新弧来代替，而把D中以为尾的每条用以为尾的新弧来代替。图6.8对这种构作方法作了直观说明。见图6.8。

于是，中的每条有向(x,y)路都对应着收缩所有型的弧之后得到的D中的一条有向路；并且反之，D中的每条有向路也都对应着分裂这条路的每个内部顶点之后得到的中的一条有向

路。此外，中两条有向(x,y)路是弧不重的，当且仅当D中对应的路是内部不相交的。由此推得，中弧不重的有向路的最大数目等于D中内部不相交的有向路的最大数目。类似地，中删去后就会破坏所有有向路的那些弧的最小数目等于D中删去后就会破坏所有有向路的那些顶点的最小数目。于是此定理从定理6.6推得。

##### 定理6.9：设x和y是图G的两个不相邻的顶点。则G中内部不相交的路的最大数目等于删去后就会破坏所有路的那些顶点的最小数目。

证明：对G的伴随有向图D(G)应用定理6.8即可。立即可以得到下述推论：

推论6.9：一个的图G是k连通的当且仅当G的任何两个相异顶点被至少k条内部不相交的路所连。

\*一个图是k连通的，是说：G是连通的，并且至少要在G中删除k个顶点，才能使G不连通。

\*图的连通度等于G中最小顶点割的顶点数。完全图的连通度.

算法1：（求无向图G的边连通度的算法）

输入无向图G并构造；/\*\*/

选定顶点u；

；

FOR 所有 DO

BEGIN

找最大流F（在）；

IF THEN ；

END

输出。

算法2：（求无向图）

输入G并构造；

/\*是G的伴随有向图对应的图如定理6.8\*/

WHILE DO

BEGIN

FOR TO n DO

BEGIN

IF THEN 找最大流F(在)；

IF THEN ；

END

END

输出；

## §6.6 最小代价流算法

给定网络N，其中每条边上有一个容量和一个非负的代价参数等于在边上运输一个单位的流的代价。

本节的问题是在网络N中找一个最大流F（F的值为V），并在N中找流值为V的流中代价最小的那个流F。

表示为线性规划问题：

约束条件：

\*解释以上的公式

变换目标函数：

其中p是网络路径上允许的代价，p从小到大取，当第一次取到某个p值时，网络能求出最大流，则这时的最大流就是最小代价的最大流。

算法：最小代价流算法

FOR 所有 DO ;

FOR 所有 DO ;

;

执行标号过程；/\*求最大流的网络标号过程\*/

IF 收点被标记 THEN /\*则流可增广\*/

BEGIN

修改边上的流，如果则停止；

GOTO 4;

END;

IF 收点没有被标记到 THEN

BEGIN

IF TEST THEN 如果V流已饱和网络，则停止；

修改顶点数；

;

GOTO 4;

END;

例子：见图6.9 。