# 第七章 对集（匹配）

§7.1 对集

对集：设它的元素是G中的连杆，并且这些连杆中任意两个在G中均不相邻，则M称为G的对集(或匹配)；M中一条边的两个端点称为在M下是配对的。若对集M的某条边与顶点v关联，则称M饱和v，并称v是M饱和的，否则称v是M非饱和的。

完美对集：若M是对集，且G的每个顶点都是M饱和的，则称M为G的完美对集。

最大对集：若M是对集，且G没有另外的对集，使得

则称M是G的最大对集。

\*显然，每个完美对集都是最大对集，反之则不一定。

例子：（见图7.1）

M-交错路：设M是G的对集，G的M-交错路是指其边在中交错出现的路。

例子：图7.1(a)中是一条M-交错路。

M-可扩路：是指其起点和终点都是M非饱和顶点的M-交错路。

定理7.1(Berge)：G的对集M是最大对集当且仅当G不包含M-可扩路。

证：设M是G的对集，并假设G包含M-可扩路，定义

:

则是G的对集，且。因而M就不是最大对集。

反之，假设M不是最大对集，且令是G的最大对集。则

置，这里表示的对称差(见图7.2)。

H的每个顶点在H中具有的度不是1就是2。因为它最多只能和M的一条边以及的一条边关联，因此H的每一个分支或者是其边在M和中交错的偶圈，或者是其边在M和中交错的路。由(7.1)式，H包含的的边多于M的边，因而必定有H的一条路组成的分支P开始于的边且终止于的边，因此P的起点和终点在H中被所饱和，在图G中就是M非饱和的。于是P是G的一条M-可扩路。

§7.2 偶图的对集

定义：对于。

定理7.2：设G为具有二分类偶图，则G包含饱和X的每个顶点的对集当且仅当

证：假设G包含对集M，它饱和X的每个顶点，并设S是X的子集。由于S的顶点在M下和N(S)中的相异顶点配对，显然有

反之，假设G是满足(7.2)式的偶图，但G不包含饱和X的所有顶点的对集，则将有如下矛盾。设是G的最大对集，根据假设，不饱和X的所有顶点。设u是X的一个非饱和顶点，并设Z表示通过交错路与u连接的所有顶点的集。由于是最大对集，从定理7.1可知：u为Z中唯一的非饱和顶点。置。

显然，中的顶点，在下与T中的顶点配对。因此

而且事实上有

因为中每个顶点均由一个交错路连接于u，但是由(7.3)和

(7.4)式推出

这与假定(7.2)式矛盾。

\*以上证明提供了寻找偶图的最大对集的一个好算法的基础。

§7.3 人员分派问题

问题：某公司准备分派n个工人做n件工作

已知这些工人中每个人都胜任一件或几件工作。试问能不能给所有工人都分派做一件他所胜任的工作？这就是人员分派问题。

转化为图论问题：构作一个具有二分类(X, Y)的偶图G，这里

并且相连当且仅当工人胜任工作。于是问题转化为确定G是否有完美对集的问题。

算法的基本思想：从任一对集M开始，若M饱和X中每个顶点，则M就是所需要的对集。如果不是这样，则在X中选择一个M非饱和顶点u，并且系统地寻找一条以u为起点的M-可扩路，寻找方法下面再详述。找出这样一条路P，如果它存在的话；这时，

就是比M更大的对集，因而饱和X中更多的顶点。然后以代替M，并重复这个程序。如果这样的路不存在，则通过M交错路与u相连接的那些顶点的集合Z就可找到。于是(如同定理7.2的证明那样)，满足。

扎根于顶点u的M-交错树：(见图7.4)

匈牙利算法：

从任意一个对集M开始。

1. 若M饱和X的每个顶点，则停止。否则，设u是X中的M非饱和顶点。置。
2. 若因而停止，因为根据Hall定理，不存在饱和X的每个顶点的对集。否则，设

。

1. 若y是M饱和的。设，并转到第2步(注意这样替换后，)。否则，设P是M-可扩(u, y)路，用代替M，并转到第1步。

例子：(见图7.4)

§7.4 最优分派问题

问题：在人员分派问题中，考虑每个工人做每一项工作的效率，找一个工作安排使得总效率最大。寻找这种分派的问题称为最优分派问题。

图论问题：考察一个具有二分类的赋权完全偶图，这里

，表示工人做工作时的效率。最优分派问题显然等价于在这个赋权图中寻找一个有最大权的完美对集。这种对集称为最优对集。

可行顶点标号：在上定义实值函数，适合下述条件：对任意x

，均有

则把函数称为该偶图的一个可行顶点标号。的标号。

可行顶点标号总是存在的，例如：

相等子图：若是可行顶点标号，则用表示使(7.5)式中等式成立的那些边的集合，即

具有边子集的G的生成子图不妨称为对应于可行顶点标号l的相等子图，并用表示。

定理7.3：设l是G的可行顶点标号。若包含完美对集则是G的最优对集。

证：假设包含完美对集。由于是G的生成子图，所以也就是G的完美对集。于是

这是因为每个并且的边的端点覆盖V的每个顶点恰好一次。另一方面，若M是G的任一完美对集，则有

从(7.7)式和(7.8)式推出。于是是最优对集。

算法思想：

首先给出一个可行顶点标号l（(7.6)式给出的函数l就是一例），然后决定，在中选取一个对集M，并且应用匈牙利算法。若在中已经找到一个完美对集，则由定理7.3，该对集就是最优的。否则匈牙利方法将终止于一个非完美的对集和一棵既不包含可扩路，又不能在中进一步生长的交错树H。随后，把l修改为具有下述性质的另一个可行顶点标号：都包含在中，并且H能够在中伸展。每当必要时，连续不断地进行这种可行顶点标号的修改，直到一个完美对集在某个相等子图中找到为止。

Kuhn-Munkres算法：

从任一可行顶点标号l开始，然后决定，并且在中选取任一对集M。

1. 若X是M饱和的，则M是完美对集(因为)，并且因而由定理7.3可知，M是最优对集；在这种情形下，算法终止。否则，令u是一个M非饱和顶点，置。
2. 若，则转到第3步。否则。计算

且由

给出可行标号。(注意)。以，以代替

。

1. 在中选择一个顶点y。和7.3节中树的生长程序一样，考察y是否M饱和。若y是M饱和的，并且，则用代替S，用代替T，再转到第2步。否则，设P是中的M可扩(u, y)路，用代替M，并转到第1步。

例子：(见图7.5)