# 第八章 欧拉图与哈密顿图

欧拉回路：欧拉回路是一条闭迹，它经过图G的每一条边恰好一次。

哈密顿圈：哈密顿圈是G的一个圈，它经过G中每一个顶点恰好一次。

§8.1 欧拉路和回路

例8.1： 欧拉图的例子（见图8.1）

一．欧拉图

一个欧拉图是一个无向图或有向图，它包含欧拉回路。

定理8.1：一个无向多重图G有一个欧拉回路(或欧拉路)当且仅当G是连通的并且奇度数的顶点数是0（或2）。

证明：必要性显然。如果G中存在欧拉回路，那么G一定连通，并且只有欧拉路的两个端点可能是奇度顶点。

要证充分性，我们对边数|E|归纳证明。当|E|=1或|E|=2时，定理显然成立。现在设G的边数|E|>2, 并且G满足定理的条件。设G包含两个奇度顶点，或没有奇度顶点。我们现在从()出发，在G中走一个迹T，每进入一个顶点，必然从一条没走过的边出去，直到到达，这时，所有与关联的边都已走过。如果G不含奇度点，则；否则。假如T没有经过G中所有边。如果我们删去所有已走过的边，那么剩下子图G’(可能不连通)。G’中每个顶点的度数是偶数。由归纳假设，G’的每个连通分支含有欧拉回路。由于G是连通的，T必然经过G’的每一个连通分支一个顶点，将那个连通分支的欧拉回路插入到T中(对G’的每个连通分支都这样做)，最后必然得到G的一个欧拉回路(欧拉路)。

推论8.1：一个有向图是欧拉图当且仅当它是连通的并且是平衡的(每个顶点的出度等于入度)；一个有向图有欧拉路当且仅当它是连通的并且它的顶点的度满足：

，对所有;

。

二．求无向图欧拉回路的算法

算法8.1：

4. WHILE DO

BEGIN

1. IF THEN
2. 找一个顶点满足：(CV, v)不是的割边
3. ELSE 设A(CV)中仅剩的顶点为v;
4. 删去A(CV)中的v和A(v)中的CV;
6. ;
7. 将CV加到EC的尾部;

END;

1. 输出EC;

\*算法8.1的时间复杂度是。

三．求有向图的欧拉回路的算法

我们现在来介绍一个时间复杂度为的求有向图的欧拉回路的算法。

有向图G的一棵生成出树T是G的一个生成树，满足：T中只有一个顶点(树根)入度为0，其余每个顶点入度为1。

有向图G的一个欧拉回路对应G的一个生成出树：

从G的任一顶点u出发，沿着有向欧拉回路前行，除了u点外，对每个顶点v，取第一次进入v的那条边，就得到以u为根的一个生成出树T。

定理8.2：按照上述规则构造出的有向欧拉图G的子图就是以u为根的G的一个生成出树。

证明：我们设该子图为T。按构造规则，我们知道在T中，，并且对任意。因为T有条边，我们只需证明T无圈。

假设T包含一个圈。由于是按规则把边加入T的，设是第一次加入后构成圈的边，由构造规则，。因为加入后完成一个圈，故在之前追循欧拉回路时已访问过，因此，不是第一次进入，故不应该加入T中，矛盾。从而T是无圈图。

例8.2：（见图8.2）

我们现在从一个有向图的给定生成出树T来求一个有向欧拉回路。

定理8.3：如果G是一个连通平衡有向图，T是它的一个以u为根的生成出树，那么按以下规则可以逆序地追循出一条欧拉回路：

(a)初始边是一条指向u的边；

(b)后续的边是指向当前顶点的一条边，满足以下条件：

(i)任何边不能访问多于一次；

(ii)除非没有其它选择，否则不选T中的边；

(c)这个过程当到达一个顶点，而与该顶点关联的边都已访问过时停止。

证明：因为G是平衡的，根据以上规则，追循的路径只能最后到达u时终止。假设这个回路没有包含边。因为G是平衡的，必有一条指向的边还没有用，不妨设为，由规则b(ii)，。由相同的理由，可以找到一系列边，构成一个逆向的有向路到达u，因此，u还有一条指向它的边还没有用，算法不可能终止，与规则(c)矛盾。

算法8.2: 求有向图的欧拉回路的算法：

1. 在有向图中找一个生成出树T，T的根为u，对每一条边
2. FOR 每一个顶点 DO

BEGIN



END;

1. FOR 每一条边 DO

IF THEN 将加到的尾部

ELSE将加到的头部；

3. WHILE DO

BEGIN

1. 将CV加到EC的头部；

END;

1. 输出EC。

\*算法的时间复杂度：O(|E|)。

例8.3： (见图8.3)

§8.2 中国邮递员问题

一．问题：

问题：一个邮递员能否经过他负责的每条街道恰好一次并回到出发点？这个问题可以对有向图或无向图得到答案，见上一节的算法。

如果所讨论的图不是欧拉图，如何得到一个环游，经过每条街至少一次，回到出发点，并使走的总距离最短？

这个问题称为中国邮递员问题。

二．算法：

1.算法8.3：(对无向图求解中国邮递员问题)

1. 对每一对奇度数的顶点，求它们之间的最短路径和距离；

2. 构造完全图;

3. 求中最小权完美对集M;

4. 构造；

5. 求中的欧拉回路，从而得到G的最小权邮递员环游；

2.例子8.4： 见图8.4 。

最小完美对集 {}

中的一个Euler回路对应G中的最优环游：

。

三．有向图的中国邮递员问题

1. 反例：

并非所有有向图都可以找到中国邮递员问题的解。

例8.5： 见图8.5

定理8.4：一个有向图有中国邮递员环游当且仅当它是强连通的。

\*解释强连通性

2.模型

设G是一个强连通赋权有向图。通过将G的某些边加重边，每一条边(u, v)重复r(u, v)次，我们可以构造一个有向欧拉图。重复的边形成奇度数顶点对之间的有向路径。对任意一条这样的从u到v的有向路，我们有：

我们通过解最小代价最大流问题，构造。

目标函数：

网络的发点是的那些顶点u，收点是的那些顶点v。

我们可以构造一个单发点X和一个单收点Y的网络。X连一条有向边到每一个的顶点u，该弧容量为，代价为0；从

的每个顶点v连一条有向边到Y，该弧容量为，代价为0。对其它弧e，e的容量为无穷，代价为d(u,v)，其中。

因为对任一有向图：

从X到Y的最小代价最大流将饱和所有从X发出的弧及所有进入Y的弧，给定一个这样的最大流，我们可以构造一个平衡有向图。

3.算法：

算法4：求非欧拉有向图的中国邮递员问题的算法。

1. 构造网络
2. 求中最小代价最大流；
3. 构造有向欧拉图
4. 在中求欧拉环游，因而求出最小权的中国邮递员环游。

4.例子8.6： 见图8.6 。