## §8.3 任务安排近似算法

\*第一章列举了一些著名的组合数学问题，并证明了它们属于NP完全问题，至今找不到多项式时间的算法。因而求其有效的近似解法是必由之路。

一．任务安排问题：

设有l台完全相同的机床：

加工n个彼此无关的任务：

所需的时间分别为：。

要求最后全部结束的时间最短。

二．近似算法1：

对时间序列进行排序，不失一般性，假定

这个顺序也就是加工的先后顺序。即当某台机器空闲时，立即加工剩下需要加工的时间最长的任务。用A1表示这个近似算法。

例1：设。

加工顺序如下： 见图8.7 。

可见近似算法的结果也可能是最优的。

例2：设

。

这个问题的最佳方案应为：见图8.8 。

然而利用近似算法得：见图8.9 。

设最佳的任务安排使完成n项任务所需的时间为 近似算法所得的任务安排，完成的时间为则绝对偏差相对偏差

。

可以证明近似算法的相对偏差满足：

证明：公式(8.1)当时无疑是对的。

时，设有使(8.1)不成立的数目最少的一组任务()，完成任务所需的时间为，不失一般性，令。

首先可证当n是使(8.1)不成立的最小数目时，在近似算法安排下，最后完成的任务 一定就是。如若不然，设为, ，即任务在任务之前结束。则依算法A1，完成任务

的时间等于完成任务

的时间，设为，即从的个任务都在完成任务的过程中完成，完成的最优方案所需的时间设为，完成的最优方案所需的时间为。显然有

故

这跟n是使(8.1)式不成立的数目最小的一组任务的假定相矛盾。这就证明了。

其次将证明若存在数目最小的任务序列使(8.1)式不成立，则 。

因必然是最后完成的一个任务，开始的时间，这时所有的机床无一空闲。故

另一方面

根据假设

由于，所以。

然而对于的任务，近似算法A1给出的就是最优解，与假设矛盾，故(8.1)式无例外，都成立。证毕。

是近似算法A1的最坏情况下相对偏差的界。算法A1的主要工作量有二，一是对

进行排序，一是对排序结束的任务进行安排，所以其复杂性为。

三．近似算法2(A2)：

假定已经排序得。

确定整数k，先对前k个任务求最佳的安排，然后对后个任务应用算法A1.

例3：

这个例子的最佳安排应为(见图8.10).

按算法A2，第一步找前4个任务的最佳安排(见图8.11)，第二步按A1近似算法进行如下：(见图8.12)

这个例子说明用近似算法A2得到的正好也是最优方案。

定理8.5：算法A2的相对偏差满足：

证：令t为前k个最长的任务的最佳方案所需的时间，为依照算法A2完成任务所需的时间，显然对于有

令n个任务中最后在时刻完成的是。则在时间间隔

内所有的机床没有空闲。不妨假定。由于

，故机床在时间间隔内都不空闲。

但，根据鸽巢原理至少有一台机床完成这k+1个任务中的数目不少于。故

合并上面两个不等式，可得

§8.4 装箱问题近似算法

设有体积分别为的n种物品装到容积为L的箱子里。不同的装箱方案所需要的箱子数目可能不同，所谓装箱问题即要求使装尽这n种物品的箱子数达到最小。

1. 算法BP1: 设有n种物品依次装箱。设已装进箱，，即已不能装进箱，则箱虽未装满也封住并退出，装入一个箱子，。在以后的讨论中不妨设。

已装入箱子的物品的体积用表之。则显然有

对物品用法所需的箱子数目用表之，

设最佳方案所需的箱子数为，

(8.3)式说明用法所用的箱子数不超过最佳方案的两倍。

二．算法: 它是最直观，最容易想到的一种。它的基本思想是n种物品依次装箱，设箱的次序为，对某一种物品，它总是被装到第一个能装下的箱子里。也就是说，物品被装到已装进的物品的体积不超过的下标为最小的一个箱子里。对未装满的箱子一不封住，二不退出，对于物品，对所有未装满的箱子从开始顺序检查，只要，则把装进。

即满足：

和算法一样，对于n种物品，

公式(8.4)给出了算法最坏情况下的界。然而算法有可能达到这个最佳结果。

关于下列不等式成立：

三．算法：只要对近似算法作如下修改，物品装进箱，要求

(8.6)说明装进，要求留下的空隙最小。

关于算法有

四．算法：对n种物品，先按体积从大到小排序，不妨设

然后利用算法。

五．算法: 对n种物品，先按体积从大到小排序得

然后利用算法。

关于和有：

§8.5 TSP问题—NP难题

第一章讨论了一类NP完全问题，首先它必须属于NP类；其次，所有NP类问题都有多项式算法归约到该问题。因此，如果该NP完全问题有多项式算法，则所有NP问题都有多项式算法。NP完全问题为NP类中难度最大的问题。

如果问题不属于NP类，已知某一NP完全问题可以通过多项式时间变换为，即所有NP类问题都可以通过多项式时间转换为。粗略地说，问题至少和NP完全问题有同等难度，这样的问题称为NP难题。

定义：若所有NP类问题都可以多项式变换为问题，则称为NP难题。简称为NPH。

是NP难题，不要求属于NP类。

定理8.6：对称型的旅行商问题为NP难题。

\*所谓对称型的旅行商问题指的是旅费矩阵是对称的，即。

证：对称型旅行商问题不属于NP类。只要证明一无向图是否存在哈密顿回路问题可在多项式时间内转换为对称型旅行商问题，定理便得到了证明。

已知无向图, ，构造旅行商问题如下：令

显然，图G的旅行商问题有解n的充要条件是图G有哈密顿回路。注意：若G不含哈密顿回路，这时旅行商问题的解至少为n+1。证毕。

一般说来，判定问题可能属于NP完全类，相应的最优化问题则是NP难题。