## §8.6旅行售货员问题(TSP)

一．旅行售货员问题的两种定义

给定一个赋权无向图G。

1.第一种定义：找G中一个最短回路，它经过G中每一个顶点恰好一次。即找G中的一个最短的哈密顿圈。

2.第二种定义：找G中一个最短的回路，它经过G中每一个顶点至少一次。

3.例子：

在图8.13中，第一种定义的回路是(a,b,c,a)。第二种定义的回路是(a,b,a,c,a)。见图8.13和图8.14

4.三角不等式：设G是赋权无向图，对任意边表示边(u,v)上的权，如果对G中任意一对顶点u,v，满足：

对所有顶点成立，则称G满足三角不等式。

\*如果G表示地面的道路的距离，则三角不等式肯定成立。如果G表示运输代价，则不一定成立。

\*我们可以将图G的旅行售货员问题转化为完全图的最小权哈密顿圈问题。

给定任一赋权图，构造赋权完全图。其中，对任意边等于G中从u到v的最短路径的长度。我们可以对任一边标记上在G中从u到v的最短路径。(见图8.14)。这样的图满足三角不等式。

定理8.7：旅行售货员问题在G中的一个解对应并且等于完全图的一个最短Hamilton圈的长度。

证明：假设C是图G中旅行售货员问题的一个解，但它不等价于的一个最短哈密顿圈。设中的一个等价的回路。注意到中的边序列一定和C在G中的边序列相同。这是因为中任一边(u,v)在中只可能比它在G中有更小的权，通过用中标记在(u,v)上的边序列来替换C中的(u,v)边将得到G中旅行售货员问题的一个更小的解。

假设访问某个顶点s两次。设r是第二次访问s之前访问的顶点，t是第二次访问s之后访问的顶点，我们用(r,t)代替子路径(r,s,t),替换后的仍是等价于G中旅行售货员问题的最优解。这因为中的w(s,t)等于G中从s到t的最短路径的长度。用这种方式，我们最终删出中的所有对顶点的多次访问，所得到的解仍等价于G中的旅行售货员问题的最优解，而最终变成一个哈密顿圈。注意一定是中的最短哈密顿圈，因为中的最短哈密顿圈等价于G的旅行售货员问题的一个最优解。

二．旅行售货员问题的算法分析

因为任一赋权图G的旅行售货员问题等价于赋权完全图的最短哈密顿圈问题。我们对赋权完全图作分析。

设G有n个顶点，它的不同的哈密顿圈有个，再加上计算每个圈的圈长的时间，求的最短哈密顿圈需时间。用一个每秒的计算机计算，需要的时间如下：

n 时间

12 5秒

15 3小时

20 800年

50 年

由于计算的算法时间增长率太大，由上一节的内容知旅行售货员问题是NP-难题，现在还没有已知的多项式时间的算法。因此，设计一个多项式时间的算法，求该问题在一个已知界内的解是非常有用的，这样的算法称为近似算法。

三．近似算法

设L是旅行售货员问题的算法(近似算法)求出的解中哈密顿圈的长度，是最优哈密顿圈的长度，我们要求近似算法的解L满足：

并使尽可能接近1。

一个很容易想到的近似算法是：从任一顶点出发，取距离最近的顶点作为下一个要访问的顶点，假设已访问，取

中距离最近的顶点作为下一个要访问的顶点。最后访问到，再取边，即得一个哈密顿圈。但这个算法中，

。这个算法称为最近邻法，其近似因子随图G的顶点数增加，不满足近似算法的要求。

近似算法1：

1.求G的一个最小权生成树T；

2.考虑T的一个深度优先搜索，对每个顶点v得到一个深度优先搜索序号；

3.输出一个近似最小权哈密顿圈：，其中：

。

图8.15给出了近似算法1作用于一个图的例子。其中红线画出的是一个最小生成树T。T的深度优先搜索序号为，按这个序号得到的近似最小权的哈密顿圈为。

近似算法1称为两次遍历最小权生成树算法。

定理8.8：对任何满足三角不等式的旅行售货员问题，用两次遍历最小权生成树算法求出的解，其近似因子。

证明：设W是G的最小权生成树的权，是G的最小权哈密顿圈的权。我们首先注意到有：

这因为每个最小权哈密顿圈删去一条边后得到一个生成树，而W是最小权生成树的权。我们下面观察到深度优先搜索遍历一棵生成树，恰好遍历该生成树每一条边两次，得到一个回路。对最小权生成树来说，该回路的长度是。现在由算法得到的哈密顿圈C按照访问每个顶点的顺序走，但C从每一个顶点直接走到下一个未访问过的顶点，而不再重新访问任何顶点。由于三角不等式成立，C的长度小于等于，因此定理结论成立。

近似算法2：

1.求G中一棵最小权生成树T;

2.用T中奇度顶点构造顶点集，求中的最小权完美对集M;

3.将M中的边加入T得到欧拉图;

4.求G’的欧拉回路，按照第一次访问每个顶点的顺序给每个顶点一个序号L(v);

5.输出一个近似最小权Hamilton圈，其中：

。

例子：以图8.15为例。最小权生成树用红边标出。由于其中每个顶点都是奇度顶点，求G中最小权完美对集

。将M中的边加到树T中得到的图(见图8.16)是欧拉图。求得的欧拉回路。

v

L(v) 1 3 4 5 2 6

最后求得近似最小权哈密顿圈。

近似算法2称为旅行售货员问题的最小权对集算法。

定理8.9：对任何满足三角不等式的旅行售货员问题，旅行售货员问题的最小权对集算法的近似因子。

证明：因为三角不等式成立，圈C的长度小于等于欧拉回路。正如上一个算法那样，圈C沿着走，从一个顶点直接走到下一个尚未访问过的顶点，而不是重新访问某些顶点。的权等于树T的权(记为W)加上对集M的权(记为)。我们用表示G中最小权哈密顿圈的权。正如定理8.8，我们有 。

我们只需证就可以完成本定理的证明。

给定一个具有权的哈密顿圈H。我们可以构造一个只经过奇度顶点集中顶点的圈，由于三角不等式成立，的长度小于等于H的长度。由于有偶数个顶点，在上可以构造两个上的完美对集，是的交错圈。考虑中权小的那个对集，不失一般性，设为。故

。从而，定理结论成立。

第九章 平面图

§9.1 平图和平面图

平面图：如果一个图能画在平面上使得它的边仅在端点相交，则称这个图为可嵌入平面的，或称为平面图。平面图G的这样一种画法称为G的一个平面嵌入。有时把平面图的平面嵌入称为平图。

例子：(见图9.1)

Jordan曲线：是指一条连续的自身不相交的，起点和终点相重合的曲线。

设J是平面上的一条Jordan曲线，平面的剩下部分被分成两个不相交的开集，称为J的内部和外部，分别记为int J和ext J，并且用Int J

和Ext J表示它们的闭包。显然，Int 。

Jordan曲线定理：连接int J的点和ext J的点的任何连线，必在某点和J相交。 (见图9.2)

定理9.1：是非平面图。

证：利用Jordan曲线定理可证。

球极平面射影：(见图9.3)

定理9.2：图G可嵌入平面当且仅当它可嵌入球面。

证：假设G有一个球面嵌入。在球面上选择一个不在中的点z。则在从z出发的球极平面射影下，的象就是G的一个平面嵌入。其逆可类似证明。

定理9.3：若图G是平面图，则G的任何子图都是平面图。

定理9.4：若图G是非平面图，则G的任何母图也都是非平面图。

§9.2 对偶图

面：一个平图G把平面划分成若干连通的区域：这些区域的闭包称为G的面。

例子：(见图9.4)

用表示平图G中面的集合和面的个数。

\*每个平图恰有一个无界的面，称为外部面。例如：图9.4中的。

定理9.5：设v是平面图G的顶点，则存在G的一个平面嵌入，使得v在这个嵌入的外部面上。

证：考察G的一个球面嵌入；由定理9.2知，这样的嵌入是存在的。设z是包含v的某个面内部的点，并设是在从z出发的球极平面射影下的象。显然就是所要的G的平面嵌入。

用表示平图G中面f的周界。

面f的度：是指和f关联的边的条数(即中边的条数，其中割边被计算两次)。

例子：(见图9.4)

对偶图：给出平图G，可以定义另一个图如下：对于G的每个面f，都有的顶点与之对应，对于G的每条边e，都有的边与之对应；中顶点中与顶点

的面f和g被边e分隔。图称为G的对偶图。

例子：(见图9.5)

\*注意：若e是平图G的环，则的割边，反之亦然。

\*当G是连通图，则

\*同构的图的不同平面嵌入的对偶图可能不同构。

例子：(见图9.6)

\*是平面图，而且是平面嵌入。

\*是连通图。

\*下列关系式可直接从的定义得到：

定理9.6：若G是平图，则

证：设是G的对偶图，则