§9.3 Euler公式

定理9.7：若G是连通平图，则

证：对G的面数用归纳法。当时，G的每条边都是割边，又由于G是连通的，所以G是树。由定理知，本定理显然成立。假设对于面数小于n的所有连通平图，本定理是正确的，且设G是有个面的连通平图。任选G的一条不是割边的边e，则

是连通平图且有个面，因为G被e分隔的两个面结合成的一个面。根据归纳假设，有

再利用关系式：

即得 。

根据归纳法原理，定理得证。

推论9.7.1：给定的连通平面图的所有平面嵌入有相同的面数。

证：设G和H是给定的连通平面图的两个平面嵌入。由于。故

，应用定理9.7，就有

推论9.7.2：若G是的简单平面图，则。

证：显然只要对连通的图证明这一点就够了。设G是的简单连通平面图，则对所有，成立，并且

根据定理9.6，有

于是，从定理9.7得

即 。

推论9.7.3：若G是简单平面图，则。

证：对于，结论是显然的。若，则由定理和推论9.7.2

有

由此推出。

推论9.7.4：。

证：若是平面图，由推论9.7.2有

于是，必须是非平面图。

推论9.7.5：是非平面图。

证：假设是平面图，并设G是的一个平面嵌入。由于不具有长小于4的圈，G的每个面的度必然至少为4。所以，根据定理9.6有

即 。

于是从定理9.7得到

，

得到矛盾。故是非平面图。

§9.4 平面图的判定

片：设的子图。图G的相关于的一个片是：或者

1. 一条边，其中；或者
2. 的一个连通分支加上该连通分支与相关联的边。

例子：(见图9.7)

接触点：

桥：

一个图是平面图当且仅当它的每一个块是平面图。

\*因此，以后我们讨论一个图是否平面图时，我们讨论的都是块。

设C是图G的一个圈，是它的平面嵌入，内部面，外部面：

C上的两座桥被称为不相容的()是说：当它们被放入C的同一个面中时，它们至少有一条边交错。(见图9.8)

两个图被称为是同态的是说：通过在这两个图中加入和压缩2度点，可以使这两个图同构。

剖分图：

一个图是非平面图当且仅当它的同态图也是非平面图。

例子：(见图9.9)

定理9.8 (Kuratowski定理)：一个图G是平面图当且仅当G中不包含同态于或的子图。

证明：在9.3节，我们已证明了不是平面图，再由定理9.4可知，当一个图G包含的子图，则G不是平面图。从而定理的必要性得证。

现在我们来证明定理的充分性。我们对G的边数归纳证明。当G只有条边时，显然G是平面图。现在我们假设当G的边数

N时，G是平面图。现在设G有条边。我们证明：如果G不包含同态于的子图，但G不是平面图，则导出矛盾。

设G不是平面图，则有以下几个结论：

1. G必须是连通的；
2. G不包含割点；
3. 如果G中任一边(x, y)被删除，则所得到的图中存在包含x和y的圈。

我们来证明结论(c)。注意到是连通的，这因为G不包含割点。如果中不存在包含x和y的圈，那么从x到y的每条路径都经过一个公共点z。换句话说，z是的一个割点。那么可以在z处分解成两个连通分支我们在中加入边

xz，得，在中加入边yz得。这时

的子图。这是因为是G的子图不可能包含同态于的子图，假如中包含这样的子图，则该子图必然经过边xz，而在G中可找到一条从z到y的路径P再加上边yx代替xz，从而G中存在同态于的子图，这与假设矛盾。同理可证对结论成立。

由归纳假设，是平面图。根据定理9.5，我们可以找到的平面嵌入，使得xz在外部面上，也可以找到的平面嵌入，使得yz

在外部面上，令，并用xy边取代xz和yz边，则可以得到G的一个平面嵌入，这与G不是平面图的假设矛盾。从而证明了不包含割点。即是一个块。再由定理，x和y包含在的一个圈C中，事实上，C可能是包含x和y的若干个圈中的一个。

因为不包含同态于的子图，并且比G少一条边，由归纳假设，是平面图。设是的平面嵌入。我们选择C为包含x和y且把的尽可能多的面包围在其内部的圈。的在C的内部的桥称为内部桥，而在C外部的桥称为外部桥。我们给C赋予一个顺时针的方向。如果p和q是C上两个顶点，那么表示C上从p到q顺时针方向的路径的顶点集。。注意到，C的任意一个外桥在或S[y, x]上不可能有两个接触点，否则我们可以找到一个圈包含x和y且比C包围更多的面到其内部。

G是由平面图加上一条边到对C的外桥和内桥的要求以及G不是平面图的假设，C一定有一个外桥E和一个内桥I。对于外桥E，E只能有两个接触点i和j，使得

I在C上可以有任意多个接触点，但I至少有两个接触点满足：

否则(x,y)就可以加入到C的内部，从而得到G的平面嵌入，矛盾。

我们同时要求内桥还有接触点

以使内桥I和外桥E不相容，这样，内桥就不能嵌入到C的外部面上去。

这样，我们就有以下几种情形(见图9.10)

在所有这些情形中，G中都有同态于的子图，从而得到矛盾。

定理9.9：图G是平面图当且仅当G中既没有可以收缩成的子图，也没有可以收缩成的子图。

§9.5 平面图判定算法

\*首先根据平面图的一些明显的充分条件和必要条件，我们可以对算法做一些简化。

(a) 如果G是不连通的，只要测试每个分支是否平面图；

(b) 如果G有割点，那么G是平面图当且仅当G的每个块是平面图；

(c) 删去环不影响图G的平面性；

(d) 把2度点压缩成一条边不影响平面性；

(e) 删去多重边不影响平面性；

(f) 如果，则该图肯定是平面图；

(g) 如果，那么由推论9.7.2，该图肯定不是平面图。

G允许的：设是G的子图H的平面嵌入。如果存在G的一个平面嵌入，使得，那么就称为是G允许的。

例子：(见图9.11) (a)是原图G；(b)中实线图是G允许的。(c)中实线图是G不允许的。

平面图判定算法：

1. 找出G中一个圈C；
2. ；
3. ；
4. ；
5. EMBEDDABLE；
6. while EMBEDDABLE do

begin

1. 找G中和相关的一个桥B；
2. 对每个B找；
3. if 对某个B, then

begin

1. ；
2. 输出信息：“G是非平面图”；

end；

1. if EMBEDDABLE then

begin

1. if 对某个B, then

else 设B是任意一个桥，F是；

1. 找B中连接B在上两个接触点的一条路；
2. ；
3. 通过在的面F中画路的一个平面嵌入；
4. ；
5. ；
6. if then 输出信息：“G是平面图”

end；

end；

\*其中：中的面的集合。

例子：(见图9.12)