## §1.6 可满足性问题与Cook定理

### 一．可满足性问题

1.例子：给出一个合取范式

A, B, C, D为逻辑变量，取“真”和“假”两个值，用T和F表示。

的补，的补等等。

称为合取范式的子句。一个合取范式为T当且仅当每个子句取T值。上例中

时，(1.1)式为T。

判断(1.1)式是否可满足的问题相当于在每个子句中取一个文字组成集合，使得所选取的文字集合避免出现互补的一对。上例中，取

。

2. 可满足性问题：

设

的有限子集，称为子句。每个中不出现L中互补的一对, 。所谓可满足性问题，是确定是否存在一个集合，满足以下两个要求：

。

可满足性问题用SAT表示。

### 二．Cook定理

##### 定理1.5(Cook定理)：若。

证：由于SAT问题属于NP类，故只要证任一属于NP类的问题L在多项式时间内可转换为SAT问题。

设已知一非确定型图灵机M，在T(n)多项式界内对输入x进行识别，只要找一有多项式界的方法把输入符号串x转换为一组子句f(x)，而且 M接受x当且仅当f(x)是可满足的。

设NDTM状态集为，其中，为初始状态，

。NDTM的带字母表为，其中为空格符#。

\*NDTM在不超过N步内接受x，每一步，读写头最多左移或右移一格。故读写头的活动范围不超过以初始位置为中心的左、右各N格，共2N+1格。

\*每行的2N+1个方格上的符号串，机器的当时状态以及读写头的位置，这些信息完全描绘了机器的瞬间图像。共有N行，描述了N个时刻的机器的瞬间图像。

t从1到N，每个时刻机器的瞬间图像是x被接受的全过程。

引入一的方格，第t行记录下t时刻带上的符号，第t行第i列的方格用表示。令

其中：。

初始输入符号串为，带上符号为

可用下列子句叙述如下：

初始状态为时，读头位于第N+1格，对应子句

(1)对于任一t, ，机器有一种状态，而且只有一种状态，对应子句为

由德·摩根律，可化为

(2)对于的任一方格，一个字符，和(3)相似，对应子句为

(3)对于的任何时刻，读写头在一个方格上且仅在一个方格上，对应子句为

(4)从t时刻到时刻，只有t时刻读写头所在的方格，它的符号才有所改变。对应子句为

上式易于化为合取式。

(5)对于t时刻机器的状态，则时刻机器状态，读写头所在的位置，以及原来t时刻读写头所在位置的符号的改变，这三者均服从机器的控制功能。对应有

后面括号中的的是根据当前的状态和当前读头读到的带符号对转移函数的所有转移动作进行的。

(1.9)式有两种可能：一是t时刻机器状态与

二是A,H,S满足t时刻的状态，这时

描述了时刻机器的可能状态。

(6)NDTM总有一个时刻处于停机状态

表达式(1.9)可满足，当且仅当NDTM存在一个接受x的动作序列。

对以上所有子句作合取，经逻辑变换，可化为合取范式。该逻辑表达式可满足当且仅当NDTM接受x。而把输入串x化为这一公式的过程的时间复杂度有多项式的上界。从而所有NP类问题可化为可满足性问题。证毕。

## §1.7 其它NP完全问题及归约

\*上一节我们证明了可满足性问题是NP完全问题，本节我们根据定理1.4，给出几个其它的NP完全问题，并介绍证明NP完全问题的归约技术。

#### 一．团问题：

若完全图是图G的子图，则称是图G的团。

团问题：已知图G和整数k，试判定图G是否存在k个顶点的团。

##### 定理1.6：团问题属于NPC。

证：可满足性问题可化为团问题。做法如下：令图的顶点分别对应于表达式中出现的文字。两个顶点之间有边相连当且仅当

两个顶点对应的文字不出现在同一子句中；

两个顶点对应的文字不相互补。

故存在k个顶点的团(k为合取范式中子句的个数)的充分必要条件

是子句集合是可满足的。显然，团的问题属于NP类，故团的问题是NP完全的。证毕。

#### 二．3SAT

3SAT问题：每个子句恰有3个文字的可满足性问题。

##### 定理1.7：3SAT问题属于NPC。

证：3SAT问题显然属于NP。对合取范式的每个子句

代以

继续以上过程，直到每个子句都不超过3个文字为止，其中是不出现在原合取范式中的文字。

下面证明(1.12)是可满足的充要条件是(1.13)是可满足的。

设，则存在。若，则令，则有。

若中有一个为T，则令，上式依然成立。

故如果(1.12)可满足，则(1.13)也可满足。

反之，若(1.13)可满足，由于，故中至少有一个为T。即有。

故如果(1.13)式可满足，则(1.12)式也可满足。

若k = 1或2，则有以下两个等值式：

(1)

(2)

用上述等值式左边代替右边，可将SAT问题化为3SAT问题。以上将SAT问题转化为3SAT问题的过程所需时间显然为多项式时间。证毕。

#### 三．独立集、顶点覆盖

设是一个图，。若集合S中任意两个顶点都不相邻，则称S为图G的独立集。若，且G的任一边至少有一个端点属于C，则称C为图G的顶点覆盖。

独立集问题：已知图，问是否存在独立集，使得？

顶点覆盖问题：已知图，正整数，问是否存在顶点覆盖，使得

##### 定理1.8：独立集问题属于NPC。

证：因独立集问题属于NP类，只要证团问题可以多项式归约于独立集问题即可。

已知图及k，作图G的补图，当且仅当。充要条件是：对于图，S是独立集。证毕。

##### 定理1.9：顶点覆盖问题属于NPC。

证：顶点覆盖问题显然属于NP类，只要证独立集问题可以多项式归约为顶点覆盖问题。

已知图及整数k，令。

如果有一独立集S，使得 显然是图G的顶点覆盖，的顶点数为。

反之，如果C是图G的顶点覆盖集，，则是独立集，且的顶点数为。证毕。

#### 四．哈密顿道路问题

已知有向图及两个顶点，问是否存在以u为始点，以v为终点的有向哈密顿道路？这个问题称为有向哈密顿道路问题。

##### 定理1.10：有向哈密顿道路问题属于NPC。

证：显然有向哈密顿道路问题属于NP类。只要证顶点覆盖问题可以多项式归约为有向哈密顿道路问题。

已知无向图是正整数，与点相关联的边(即以为一端点的边)的数目设为，这些边设为现构造一有向图如下：

顶点集V’有以下两个组成部分：

(a)新增加k+1个顶点：

(b)对于任一顶点，对应有个顶点：

有向边集E’的组成部分有：

(a)

(b)

(c)对于图G中相邻两个顶点u和v，设则有边：

(d)对于每个，对应有边：

故对应每个顶点，存在一个道路

对应于边的两端点u和v，道路之间存在边

即边对应一由4个顶点组成的子图：(见图1.6)

若有哈密顿道路进入点，则必须从点退出该子图。如果从退出，则或者无法经过，或者无法经过。由进入由退出有两种可能，一是经过这4个顶点，另一个是走退出这个子图。

从图1.6可见，若图G中有则G’图中存在从的道路： 和

图G’存在有向哈密顿道路的充要条件是图G有k个顶点的顶点覆盖，设

是图G的顶点覆盖，可构造图G’的从到的哈密顿道路，步骤如下：

(a)构造一从到的哈密顿道路P (见图1.7)

(b)对于边设点u属于顶点覆盖C，但z不属于C，则道路P中的一段为绕道通过两点一段所取代。其中 ，即中的一段改道为，从而吸收了点。因C是顶点覆盖，故可以吸收G’的所有顶点，正如u点和z点通过边相邻，从而吸收一样。

反之，可以从图G’构造G的顶点覆盖集S。由于哈密顿道路过所有的顶点，故过所有的。由于E’中不存在从的边，故哈密顿道路可以分解为若干段，每一段从某个到另一个，中间不存在其它的。对于每一条从的道路对应一顶点，使得道路的端点为，这样的k个顶点便是图G的顶点覆盖集。 证毕。