# 第二章 线性规划

## §2.1 问题的提出

例2.1:某工厂有三种机器，其中机器台，机器台，机器台，该厂生产四种产品，每单位产品所需要的机器时数如下表所示：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

其中= 产品生产一个单位需要机器的时数，。

设四种产品单位利润分别为。假定生产这四种产品所用的机器没有先后次序之分。试问一周内应如何安排生产，使所获的利润达到最大？已知每周机器开动时间为60小时。

设四种产品每周产量分别为，则问题化为：

机器一周内开动的总时数为。

满足约束条件：

·目标函数

·约束条件

例2.2：某饲养场为牲口安排饲料，要求每个牲口每天所需要的m种营养素的量为其中为营养素i的需要量。现有n种食品，设每单位食品j中营养素i的含量为，而食品j的单位价格为元，。在满足营养要求的条件下，使饲料成本最低，试问饲料应如何组成？

设每个牲口需要食品i的量为单位，问题导致在约束条件下：

使成本 达到最小值。即

例2.3：某种产品有m个产地，其产量分别为，有n个销地，需求量分别是。设从产地i运往销地j的单位运费为。

而且产销平衡，即

试问应如何合理地安排产品的调配？

合理的调配应使运费最省。设从产地i运往销地j的量为，问题是求

满足约束条件：

## §2.2 问题的提法及其几何意义

### 一．线性规划

1.线性规划：目标函数是线性函数，约束条件是一组线性不等式。在满足约束条件的前提下，求目标函数的极大或极小值。

2.数学表示：

令,

，

可表示为矩阵形式：

### 二．线性规划的几何意义

例2.4：

\*图形见图2.1

·允许解域

·极大值点

·等位线

例2.5： 求的最大值和最小值

\*图形见图2.2

例2.6： 求的最大、最小值。

\*图见图2.3

在允许解域S上没有最大值，但在.

## §2.3 凸集

### 一．凸集的定义

1.定义：设C是n维的欧氏空间的非空集合，是集合C的任意两点，t是0与1之间的任意实数，则点，属于C，则称C是凸集。

\*z是直线段上任一点，是两点的坐标。

2. 图示：(见图2.4 )

3. 允许解域：

约束条件：

C:

是以n维空间的m个超平面，及n个坐标面X = 0为边界的域，称为允许解域，用C表示。

4．允许解域是凸集

证明：C是凸集。

设

。

对任意实数t，，构造

，则，而且

故 。

所以 ，即C是凸集。或称超凸多面体。

5. 线性规划的几何意义

因允许解域C是超凸多面体，目标函数是超平面，故目标函数必然在超凸多面体C的顶点上取得极大值和极小值。这样在凸集C上求极大(极小)值的问题缩小到在凸集的有限个角点找极大(极小)值。

### 二．凸集中点表示成端点的线性组合

1. 一维的情况：(见图2.5 )

若，则

则 ，

2. 二维的情形

二维空间的直线 (见图2.6)

在二维空间中，最简单的凸集是三角形，三角形三个顶点为，

三角形内部一点p。见图2.7

设p点坐标为, q点坐标为，则存在

，满足，使得

类似的理由，存在 使得

3. n维的情形

定理2.1：设是有界超凸多面体

的全体顶点的座标构成的列向量。对于满足条件的k个正数，

则。

反之，对于C内的任一点Z，必存在满足条件的k个正数，使得

证明：先证定理的前半部分。显然又

。

现在用数学归纳法证定理的后半部分。

一维情形已知为真。设定理对于凸集C的维数不超过k时为真。进而证维数等于k+1时，定理是对的。已知，若Z在C的边界面上，由于边界面上的维数少于k+1，不失一般性，设存在

()及，满足

如果Z不在C的边界上，过引直线交于边界面一点Y，存在，有

显然 ，而且

故 。证毕。

5. 无界凸集的情形

当C是无界凸集，是C的有界顶点，存在极方向，维空间的l个不同方向的方向数。则对于C上任意一点Z，恒有满足，以及非负数

，使得

\*举例说明：见图2.8

\*上式前半部分确定向量的起点，后半部分确定向量的终点。