## §2.4 单纯形法的基础

### 1.松弛变元

以下问题作例子，介绍单纯形法：

上式化为线性规划问题

称为松驰变元

### 2.例子

例2.7：

变换成

### 3.引入松弛变元的几何意义

\*图示见图2.9(a)

凸多边形的边界正好是的4条直线。

允许解域见图2.9(b)

### 4.凸多面体

问题可化为

令超凸多面体

设，如果不存在，及实数t，使得，

，则称X为S的顶点。

##### 定理2.2：设z(X)是定义在凸多面体S上的线性函数，则

1. **z(X)在S的顶点取得最大(最小)值；**
2. **z(X)在S的最大(最小)点集是一个凸集。**

证：设是S的所有顶点，对S内部的点X，存在非负实数满足，而且

令 ，则

即z(X)在S中的最大值在S的顶点取得。

设是S中任意两个取得最大值的点，即

，对任意t，，令，

。

这表明同理可证最小值的情形。

记A的第j列向量为。令。如果可写成少于m个

的线性组合，称之为退化情形。如果无特别申明，我们总假设不是退化情形。

### 5.凸多面体顶点的充要条件

##### 定理2.3：是S的顶点的充分必要条件是中非零元素的数目不超过m个。

证明：先证必要性，即若X是顶点，则非零元素不超过m个。用反证法证明，当X的非零元素超过m个，则必非顶点。若X是S的顶点，但非零元素为m+1个，设

。

取 ，则方程组

为m+1个未知数，m个齐次方程，必有非零解。

设为一非零解，令

则。令，，

其中为充分小的正数，则的所有分量不为负数，且

即，而且

这与X是S的顶点的假设矛盾。

下面证充分性。设 ，，

。我们证其必然是S的顶点。如若不然，可找到，不失一般性，令

使之

由于

令

因是任意实数，故可适当选择，使Y的前面m个元素中至少有一个元素(设为)为零，其余元素保持非负。

约束条件 可写成

所以 又可写成

由于，故

而中至少有一个为零，即列向量b可由少于m个列向量的线性组合来表示，这与非退化的假设矛盾。证毕。

## §2.5 单纯形法

### 1.单纯形法的思想

凡是线性规划问题，其允许解域是一个超凸多面体，即由超平面包围起来的一个域。目标函数是一线性函数，它的梯度方向是一固定的向量，故极值点必在凸多面体的顶点上取得。很容易想到把有限个顶点求出来，从中挑出最优的，问题就解决了。但n维空间必须由n个超平面确定一个顶点，超凸多面体的边界超平面共n+m个，其中n个坐标面，m个约束条件。估计最坏的情况凸多面体的顶点数可多达

故单纯形法本质上是一个指数时间的算法。

后来由俄罗斯数学家设计出椭球算法，证明线性规划问题是P问题，但椭球算法实际运行得很慢，而单纯形法实际运行得很快，比椭球算法快。

近年来，数学家们设计出内点法，它可以证明是多项式时间算法，同时实际运行速度也很快。但内点法求出的是近似解，当我们要求线性规划问题的整数最优解时，内点法可能无能为力。故单纯形法目前仍是有生命力的实用的求线性规划问题的方法。

### 2.基变量

线性规划问题：

显然满足约束条件，是S的一个顶点，对应目标函数 。

单纯形法企图从顶点出发，换到另一个S的顶点，使目标函数z改善，经过有限步使之达到最优。

##### 定理2.4：为顶点的必要条件是X的非零元素对应的列向量线性无关。

证明：已知S的顶点中不为零。证线性无关。如若不然，存在非全0的使

适当地选取使得

而且 。

令，由于不全为0，故，同时

同理可证。即，且。

这与X是S的顶点的假设相矛盾。证毕。

例如：，对应基

\*这是一组线性无关的基，但不是唯一一组基。

设是一组基，

\*解释的含义

### 3. 基的选进与退出

则取而选进入基。

\*这里要求和所有均为非负数。

上述过程实际上是从S的一个顶点获得S的另一个顶点

k m+j

该顶点的目标函数为

本线性规划问题要求从顶点，目标函数有所增加，取使。其中

当目标函数取得最大值时，有。

### 4.例子

例2.8：

第一步：进入基的选择

故都可选作进入基，不妨选进入基。

退出基的确定：

然后对原来的方程组作行变换，得

第二步：进入基的选择

选作为进入基。

退出基的确定：

即

再对方程组作行变换，得

目标函数无法改善，即得最优解：

\*图示见图2.10

##### 定理2.5：对于上述线性规划问题，若作为一组基，对应的允许解

而且

证：设是一允许解。不失一般性，设所求的解为 ， 则

因Y是一允许解，故，

因而是使目标函数z达到最大值的顶点，即为最优解。证毕。