

1

唯一性: 设 $g_1, g_2 \in L^1(\nu)$ 均满足条件, 则

$$\int_E g_1 d\nu = \int_E g_2 d\nu, \forall E \in \mathcal{M}$$

从而 $g_1 = g_2$ ν 几乎处处成立, 即 g 唯一.

存在性: 令测度 ν' 定义如下:

$$\nu'(E) = \int_E f d\mu,$$

显然 $\nu' \ll \mu$, 故 $\nu' \ll \nu$, 从而存在 $g \in L^1(\nu)$ 使得

$$\nu'(E) = \int_E g d\nu, \forall E \in \mathcal{M},$$

故

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\nu, \forall E \in \mathcal{M}$$