2024 年 11 月 20 日

1

(1)

$$f(x)=\begin{cases}x,x\le 0\\ x^2,x>0\end{cases}$$

由条件中的级数知 $\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N$:

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\mu(A_k)<\epsilon$$

故:

$$\mu(\limsup_{n\to\infty}A_n)=\mu(\bigcap_{l=1}^{+\infty}\bigcup_{k=l}^{+\infty}A_k)\le\mu(\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k)\le\sum_{k=n}^{+\infty}\mu(A_k)\le\epsilon$$

由 ϵ 的任意性即知结果.

(2) 熟知 $x\in\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\iff x$ 属于无穷多个 A_n

$x\in\liminf\limits_{n\to\infty}A_n\iff x$ 不属于有限多个 A_n.

故 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\backslash\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 是由既属于无穷多个 A_n 也不属于无穷多个 A_n 的 x 组成. 而 $\forall n>0$ 这个集合显然都是 $\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_{k+1}\backslash A_k$ 的子集. 由级数和类似第一问的论证知 $\mu(\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\backslash\liminf\limits_{n\to\infty}A_n)=0$.

2

(1) 由 g 连续知 $\forall B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),g^{-1}(B)\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, 又由 f 可测知 $f^{-1}g^{-1}(B)$ 可测, 故 gf 可测.

(2) 由 f 单调知 $\forall a,\{f(x)<a\}$ 是形如 $\{x<b\}$ 或 $\{x>b\}$ 或全集的集合, 总之为可测集.

(3) 熟知可测函数的差是可测函数, 故 $\{x : |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$ 是可测集. 故

$$\begin{aligned}
&\{x : f_n(x) converge\} \\
=&\{\forall k > 0, \exists N > 0, \forall m, n > N, |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\} \\
=&\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{m,n=N+1}^{+\infty} \{x : |f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\}
\end{aligned} \tag{1}$$

是可测集.

(4)

$$\begin{aligned}
&\{x : f'(x) < a\} \\
=&\{x : \lim_{r\to 0} \frac{f(x+r) - f(x)}{r} < a\} \\
=&\{x : \exists N > 0, \forall n > N, f(x + \frac{1}{n}) - f(x) < \frac{a}{n}\} \\
=&\bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{n=N+1}^{+\infty} \{x : f(x + \frac{1}{n}) - f(x) < \frac{a}{n}\}
\end{aligned} \tag{2}$$

是可测集.

3

(1) 令 $E_n = \{x : 2^n \le |f(x)| < 2^{n+1}\}$, 则

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} E_n = \{x : f(x) \neq 0\}$$

故若设

$$a_n = \int_{E_n} |f| \mathrm{d}\mu,$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = \|f\|_1.$$

所以 $\forall \epsilon > 0, \exists N > 0$ 使得 $\forall n > N$,

$$|\|f\|_1 - \sum_{n=-N}^{N} a_n| < \epsilon.$$

令 $F_N=\bigcup_{n=-N}^N E_n$, 只用证这是有限测度集即可. 而

$$\mu(E_n)\le 2^{-n}\int_{E_n}|f|\mathrm{d}\mu\le 2^{-n}\|f\|_1<+\infty,$$

故得证.

(2) 令 $A_n=\{x:n-1\le f(x)<n\}, a_n=\int_{A_n}|f|\mathrm{d}\mu$, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=\int_{A_n}|f|\mathrm{d}\mu<+\infty,$$

故 $\forall\epsilon,\exists N>0$ 使得

$$\int_{\{|f(x)|\ge N-1\}}|f|\mathrm{d}\mu=\sum_{n=N}^{+\infty}a_n<\frac{\epsilon}{2}.$$

令 $\delta=\frac{\epsilon}{2N}, B_N=\bigcup_{k=N}^{+\infty}A_n.\forall\mu(E)<\delta$ 有:

$$\begin{aligned}\int_E|f|\mathrm{d}\mu&=\int_{E\cap B_N}|f|\mathrm{d}\mu+\int_{E\setminus B_N}|f|\mathrm{d}\mu\\&\le\frac{\epsilon}{2}+(N-1)\mu(E)\\&<\frac{\epsilon}{2}+\frac{(N-1)\epsilon}{2N}\\&<\epsilon\end{aligned}\tag{3}$$

(3)

$$|\{f(x)>\lambda\}|\lambda\le\int_{\{f(x)>\lambda\}}f\mathrm{d}\mu\le\|f\|_1$$

反之不然, 令 $f(x)=\frac{1}{x}$, 则 $|\{f(x)>\lambda\}\|=\frac{1}{\lambda}$, 但 f 不属于 $L^1(X)$.

(4) 由

$$\int|\sum_{n=1}^{+\infty}f_n|\mathrm{d}\mu\le\sum_{n=1}^{+\infty}\int|f_n|\mathrm{d}\mu<\infty$$

知其是可积函数.

由题设收敛级数知 $\forall\epsilon>0,\exists N>0,\forall n>N,\sum_{k=n}^{+\infty}\int|f_n|\mathrm{d}\mu<\epsilon$. 故 $\forall n>N$ 有

$$|\int\sum_{k=1}^{+\infty}f_k\mathrm{d}\mu-\sum_{k=1}^{n-1}\int f_k\mathrm{d}\mu|=|\int\sum_{k=n}^{+\infty}f_k\mathrm{d}\mu|\le\sum_{k=n}^{+\infty}\int|f_n|\mathrm{d}\mu<\epsilon,$$

由极限定义即知.