1 第一题

1.1

记 $\mathbb{R}$ 上的开集族为 $\mathcal{A}$, 显然 $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, 且 σ 代数一定是 σ 环, 故 $\Sigma(\mathcal{F}) \subset \Sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. 另一方面, 由 $\mathbb{R} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}(n, n+1)$ 知 $\mathbb{R} \in \Sigma(\mathcal{F})$, 故 $\forall A \in \Sigma(\mathcal{F}), A^c = \mathbb{R} - A \in \Sigma(\mathcal{F})$, 所以 $\Sigma(\mathcal{F})$ 实际上是一个 σ 代数. 又熟知 $\mathbb{R}$ 上开集是至多可数个开集的并, 故一定属于 $\Sigma(\mathcal{F})$, 从而 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \Sigma(\mathcal{F})$.

1.2

2

2.1

$\mu(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E) \geq 0$. 设 $E \cap F = \varnothing$, 则 $\forall n, \mu_n(E \cup F) = \mu_n(E) + \mu_n(F)$. 所以 $\mu(E \cup F) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E \cup F) = \lim\limits_{n\to\infty}(\mu_n(E) + \mu_n(F)) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E) + \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) = \mu(E) + \mu(F)$. 反例:

2.2

由测度定义只用证对两两不交的 $\{A_n\}$ 有另一边的不等式成立. 而对任意正整数 N 有:

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{N} A_n) \leq \mu(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n)$$

上式令 $N \to \infty$ 即证.

3

设 $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \alpha$, 则 $\forall \epsilon > 0, \exists \{A_{k_n}\}$ 使得 $\mu(A_{k_n}) < \alpha + \epsilon, \forall n$. 显然 $k_n \geq n$, 故

$$\cap_{i>n} A_k \subset \cap_{i>n} A_{k_i}$$

, 进一步

3.1

两两不交时由测度的可列可加性知成立. 反过来, 设 $B_n = A_n - \cup_{k>n} A_k$, 则易知 B_n 满足:

(1)$B_i \cap B_j = \varnothing, \forall i \neq j$

(2)$\cup_n B_n = \cup_n A_n$

则 $\mu(\cup_n A_n) = \mu(\cup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$, 结合条件知上式的不等号实际上是等号. 故 $\sum_n \mu(A_n - B_n) = 0$, 从而每一项都为 0. 所以 $A_n - B_n = A_n \cap (\cup_{k>n} A_k)$ 是零测集, 所以 A_n 两两相交为零测集.