1

(1) 熟知存在线性泛函 f 满足 $f(x) = ||x||$ 且 $f(y) \le ||y||, \forall y \in X$. 故由弱收敛知

$$||x|| = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \varliminf_{n\to\infty} ||x_n||.$$

(2) 若 $x \notin Y$, 由 Y 是闭子空间知存在连续线性函数 f 满足 $f|_Y = 0, ||f|| = 1, f(x) = d(x, Y) > 0$. 但 x_n 弱收敛到 x 且 $f(x_n) = 0$, 故 $f(x) = 0$, 矛盾!

(3)

(4) 不妨设 x 就是原点, 若 $0 \in A$ 结论显然成立, 下设 $d(x, A) > 0$. 设 $m = \inf_{a\in A} ||a|| > 0, \forall n > 0, \exists a_n \in A$ 使得 $m < ||a_n|| < m + \frac{1}{n}$. 由 A 是凸集知 $\frac{a_{n_1}+a_{n_2}}{2} \in A$, 则有:

$$m < ||a_{n_1}|| < m + \frac{1}{n_1}, \tag{1}$$
$$m < ||a_{n_2}|| < m + \frac{1}{n_2}, \tag{2}$$
$$m < ||\frac{a_{n_1}+a_{n_2}}{2}|| < m + \frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}. \tag{3}$$

$$\begin{aligned} ||a_{n_1} - a_{n_2}|| &\le 2||a_{n_1}||^2 + 2||a_{n_2}||^2 - ||a_{n_1} + an_2||^2 && (4)\\ &\le 2(m + \frac{1}{n_1})^2 + 2(m + \frac{1}{n_2})^2 - (2m + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})^2 && (5)\\ &\le 4m(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}) + 2(\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2}). && (6) \end{aligned}$$

故 $\{a_n\}$ 是柯西列, 由完备性知其收敛, 收敛结果即为所求 a_0.
Remark: 不难看出这个 a_0 还是唯一的.

2

(1) 设 $[0, 1]$ 上所有零测开集的并为 A.
$\forall x \in A$,x 必属于某个零测开集 U, 故 $x \notin \mathrm{supp}(\mu)$, 从而 $x \notin \mathrm{supp}(\mu)^c$, 所以 $A \subset \mathrm{supp}(\mu)^c$.
$\forall x \in \mathrm{supp}(\mu)^c$,$x$ 必属于某个零测开集, 故 $x \in A$, 所以 $\mathrm{supp}(\mu)^c \subset A$, 综上即证.

(2)"$\Rightarrow$": 设 $x \in \text{supp}(\mu)$,$f \in C_c([0,1])$ 且 $f(x) > 0$, 由 f 的连续性, 存在 x 的开邻域 U 使得 f 在 U 上大于某个正数 ε, 从而:

$$\int_{[0,1]} f(x)\, d\mu \geq \int_U f(x)\, d\mu > \varepsilon\mu(U) > 0$$

"$\Leftarrow$": 设 x 满足题设条件, 设 U 是 $[0,1]$ 内任意包含 x 的开集,$\forall\varepsilon > 0$, 令 $f_\varepsilon(y) = (1 - \frac{d(y,U)}{\varepsilon})^+$, 显然 $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$,$f_\varepsilon \in C_c([0,1])$, 且 $f_\varepsilon(x) = 1 > 0$. 另一方面设 $\delta > 0$ 使得 $B(x,\delta) \subset U$, 令 $f(y) = (1 - \frac{d(x,y)}{\delta})^+$, 易见 f 也满足上述条件且 $f \leq f_\varepsilon, \forall\varepsilon > 0$. 故

$$\mu(B(U,\varepsilon)) = \int_{B(U,\varepsilon)} d\mu \geq \int_{B(U,\varepsilon)} f_\varepsilon d\mu \geq \int_{B(x,\delta)} f d\mu > 0,$$

在上式中令 $\varepsilon \to 0$ 即证.
(3) 若不然, 设紧集 $K \subset \text{supp}(\mu)$ 满足 $\mu(K^c) = 0$, 而 K^c 是开集, 由 (1) 知 $K^c \subset \text{supp}(\mu)^c$, 故 $\text{supp}(\mu) \subset K$, 矛盾.