POLYTECH
GRENOBLE

3° ANNEE
TRONC COMMUN de MATHEMATIQUES
MATHEMATIQUES GENERALES
ALGEBRE LINEAIRE
TD

Année universitaire 2020-2021

Ne pas s'ennuyer.
Apprendre à faire des choses.

TD1 Espaces vectoriels, sous espaces vectoriels, familles libres, familles génératrices et bases d'un sous espace vectoriel, changement de base, applications linéaires

Dans ce TD1, on n'utilise pas la notion de matrice.

Exercice 1
$\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels.
C'est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 dont la base canonique est $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$
Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Génératrices de $\mathbb{R}^3$? Des bases de $\mathbb{R}^3$?
(a) $\big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$
(b) $\big((1,1,1),(0,0,0)\big)$
(c) $\big((1,1,1),(1,2,1),(0,1,0)\big)$
(d) $\big((1,0,1),(0,1,1),(1,1,0),(1,1,1)\big)$

Exercice 2
$\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels.
C'est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 dont la base canonique est $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$
1) Montrer que les vecteurs $u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,0,1)\ et\ u_3 = (1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$
2) Trouver les coordonnées du vecteur $u = (1,1,1)$ dans cette base.

Exercice 3
Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
Expliquer le plus simplement possible pourquoi l'ensemble E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, en donner la dimension et une base.

Exercice 4
Soient :
E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3
$B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E
$e_1' = e_1 + e_2 + e_3$ $\quad$ $e_2' = e_1 + e_2$ $\quad$ $e_3' = 2e_1$

1) Montrer que $B' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E
2) Déterminer les composantes du vecteur $u = 2e_1' - e_2' + e_3'$ dans la base B
3) Déterminer les composantes du vecteur $v = 11e_1 + e_2 + 3e_3$ dans la base B'

Exercice 5
Soient :
E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3
$B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E
f l'endomorphisme de E (c'est-à-dire l'application linéaire de E dans E) défini par :
$\mathrm{f}(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$ $\quad$ $\mathrm{f}(e_2) = 2e_1 + 3e_2$ $\quad$ $\mathrm{f}(e_3) = -e_1 - 3e_3$

1) Déterminer $\mathrm{f}(e_1 - 2e_2 + e_3)$
2) Déterminer $Ker(f)$ (une base et sa dimension).
3) Déterminer $Im(f)$ (une base et sa dimension).
<u>Remarque</u> : comment pouvait-on déduire la dimension de $Im(f)$ de la question 2) ?

Exercice 6
Soient :
E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3
$B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E
$e_1' = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ $\quad$ $e_2' = e_1 + e_2$ $\quad$ $e_3' = e_2 + e_3$
f l'endomorphisme de E (c'est-à-dire l'application linéaire de E dans E) défini par :
$\mathrm{f}(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$ $\quad$ $\mathrm{f}(e_2) = e_1 + 2e_2$ $\quad$ $\mathrm{f}(e_3) = e_1 - e_2 - e_3$

1) Montrer que $B' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E
2) Déterminer les images par f des vecteurs de B' (on donnera leurs composantes dans B').

Exercices supplémentaires

Exercice 7

Soient :

E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3 et $B_E = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E

F un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2 et $B_F = (f_1, f_2)$ une base de F

g l'application linéaire de E dans F définie par :

g$(e_1) = f_1 + f_2$

g$(e_2) = 2f_1 + 3f_2$

g$(e_3) = -f_1 - 3f_3$

1) Déterminer g$(e_1 + 2e_2 - 3e_3)$

2) Déterminer $Im(f)$ de manière immédiate et en déduire la dimension de $Ker(f)$

3) Déterminer une base de $Ker(f)$

Exercice 8

Les ensembles suivants sont-ils des sous espaces vectoriels du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$?

$A_1 = \{(x, y, 0) \ / \ x \ et \ y \ \in \mathbb{R}\}$

$A_2 = \{(x, y, z) \in \ \mathbb{R}^3 / \ x + y + z = 0\}$

$A_3 = \{(x, y, z) \in \ \mathbb{R}^3 / \ x + y + z = 1\}$

$A_4 = \{(x, y, z) \in \ \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 \ = z^2\}$

$A_5 = \{(x, y, z) \in \ \mathbb{R}^3 / 3 \ x = 2y + 5z\}$

Exercice 9

Soient F et G les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$F = \{(x, y, z) \in \ \mathbb{R}^3 / \ x - 2y + z = 0\}$

$G = \{(x, y, z) \in \ \mathbb{R}^3 / \ 2x - y + 2z = 0\}$

1) Donner une base de F, une base de G et leurs dimensions.

2) Donner une base de $F \cap G$ et sa dimension.

Exercice 10

Soient F et G les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$F = \{(a, b, c, d) \in \ \mathbb{R}^4 / \ b - 2c + d = 0\}$

$G = \{(a, b, c, d) \in \ \mathbb{R}^4 / \ a = d \ et \ b = 2c\}$

1) Donner une base de F, une base de G et leurs dimensions.

2) Donner une base de $F \cap G$ et sa dimension.

Exercice 11

On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par : $F = \{(x, y, z, t) \in \ \mathbb{R}^4 / \ x + y = 0 \ et \ x + z = 0\}$

1) Donner une base de F.

2) Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$

3) On pose $u_1 = (1,1,1,1), u_2 = (1,2,3,4) \ et \ u_3 = (-1,0,-1,0)$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ?

4) Soit G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1, u_2 \ et \ u_3$. Quelle est la dimension de G ?

5) Donner une base de $F \cap G$

TD2 Matrices

Exercice 1 : produits matriciels : possibles ou pas, pas souvent commutatifs, binôme de Newton

Exercice 2 : déterminants
Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

Exercice 3 : inverse d'une matrice
Calculer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : systèmes linéaires : interprétation géométrique et méthode du pivot de Gauss
Pour chaque système linéaire :
- interpréter chaque équation du système linéaire comme l'équation d'un sous espace affine (de quelle dimension ?) d'un ℝ espace affine E_0 de dimension n (avec n qui vaut ?).
- interpréter le système linéaire, dans le cas où il aurait un ensemble de solutions non vide, comme un système d'équations d'un sous espace affine F_0 de E_0
- résoudre le système linéaire par la méthode du pivot de Gauss et en déduire, dans le cas où il a un ensemble de solutions non vide :
la dimension de F_0
un point de F_0
une base de F (où F est le sous espace vectoriel de E associé à F_0 où E est le ℝ espace vectoriel associé à E_0).
<u>Remarque</u> : une base de F s'il y a lieu (« s'il y a lieu » ? Pourquoi ?).

1) $\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+y-2z=4 \\ x+2y+2z=1 \\ 3x+3y=5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+4y-4z+t=0 \\ 3x+6y+z-2t=-7 \\ -x+y+2z+3t=4 \\ x+y-4z+t=2 \end{cases}$

Exercices supplémentaires

Exercice 5 : astuce pour calculer l'inverse d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$, en déduire que A est inversible puis calculer A^{-1}

TD3 Espaces vectoriels et utilisation des matrices

Exercice 1 : la formule $\boldsymbol{X = PX'}$
On reprend l'exercice 4 du TD1 mais on le résout avec des méthodes utilisant les matrices.
Soient :
E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3
$B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E
$e_1' = e_1 + e_2 + e_3$ $\quad$ $e_2' = e_1 + e_2$ $\quad$ $e_3' = 2e_1$

1) Indiquer la matrice de passage P de B à $B' = (e_1', e_2', e_3')$
Montrer que $B' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E :
a) en calculant le déterminant de P.
b) en appliquant la méthode du pivot de Gauss à la matrice P.

2) Indiquer la colonne U' des composantes du vecteur $u = 2e_1' - e_2' + e_3'$ dans la base B'
En déduire la colonne U des composantes de u dans la base B.

3) Indiquer la colonne V des composantes du vecteur $v = 11e_1 + e_2 + 3e_3$ dans la base B
En déduire la colonne V' des composantes de v dans la base B'
Indication : inversion de matrice…

Exercice 2 : la formule $\boldsymbol{Y = AX}$
On reprend l'exercice 5 du TD1 mais on le résout avec des méthodes utilisant les matrices.
Soient :
E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3
$B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E
f l'endomorphisme de E (c'est-à-dire l'application linéaire de E dans E) défini par :
$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$ $\quad$ $f(e_2) = 2e_1 + 3e_2$ $\quad$ $f(e_3) = -e_1 - 3e_3$

1) Indiquer $A = M_B(f)$ (c'est-à-dire la matrice de l'endomorphisme f dans la base B).
Indiquer la colonne X des composantes du vecteur $x = e_1 - 2e_2 + e_3$ dans la base B.
Déterminer alors la colonne Y des composantes du vecteur $y = f(e_1 - 2e_2 + e_3)$ dans la base B.

2) Déterminer $Ker(A)$ (une base et sa dimension) en appliquant la méthode du pivot de Gauss à la matrice A.
Retraduction : donner une base et la dimension de $Ker(f)$

3) Déduire de la question 2) la dimension de $Im(f)$ (c'est-à-dire la dimension de $Im(A)$).
Déterminer une base de $Im(A)$ par simple lecture de la matrice A.
Retraduction : donner une base de $Im(f)$

Exercice 3 : la formule $\boldsymbol{A' = P^{-1}AP}$
On reprend l'exercice 6 du TD1 mais on le résout avec des méthodes utilisant les matrices.
Soient :
E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 3
$B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E
$e_1' = e_1 + 2e_2 + 3e_3$ $\quad$ $e_2' = e_1 + e_2$ $\quad$ $e_3' = e_2 + e_3$
f l'endomorphisme de E (c'est-à-dire l'application linéaire de E dans E) défini par :
$f(e_1) = 2e_1 + e_2 - e_3$ $\quad$ $f(e_2) = e_1 + 2e_2$ $\quad$ $f(e_3) = e_1 - e_2 - e_3$

1) Donner la matrice de passage P de B à $B' = (e_1', e_2', e_3')$ et montrer que $B' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de E.

2) Indiquer $A = M_B(f)$ (c'est-à-dire la matrice de l'endomorphisme f dans la base B).
Par inversion d'une matrice puis en effectuant un produit de matrices, déterminer $A' = M_{B'}(f)$ (c'est-à-dire la matrice de l'endomorphisme f dans la base B').
Indiquer alors les images par f des vecteurs de B' (on donnera leurs composantes dans B').

TD4 Diagonalisation ou trigonalisation de matrices carrées

Exercice 1 : Diagonalisabilité et CNS sur la dimension des sous espaces propres

Pour chacune des matrices A suivantes :

1) Déterminer le polynôme caractéristique PC_A
2) Montrer que A est diagonalisable ou pas en déterminant la dimension de ses sous espaces propres clés.
3) Si A est diagonalisable, expliciter une diagonalisée A' de A.
4) Déterminer une base de chaque sous espace propre de A
5) Si A est diagonalisable alors diagonaliser A (c'est-à-dire déterminer une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ -10 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :
Dans le cas où A est diagonalisable, détermination de la puissance k° de A par changement de base (méthode nécessitant le calcul de P^{-1})

Soient b un complexe non nul, a un complexe et $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est diagonalisable en déterminant la dimension de ses sous espaces propres clés.
2) Déterminer une matrice diagonale A' et une matrice inversible P telles que $A = PA'P^{-1}$
3) Calculer P^{-1} puis $A^k, \forall k \in N$

Exercice 3 :

Dans le cas où A est diagonalisable, résolution du système différentiel $\frac{dX}{dt} = AX$ par changement de base (méthode ne nécessitant pas le calcul de P^{-1})

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est diagonalisable en déterminant la dimension de ses sous espaces propres clés.
2) Déterminer une matrice diagonale A' et une matrice inversible P telles que $A' = P^{-1}AP$
3) Déterminer la solution générale du système différentiel $\frac{dX}{dt} = AX$

Exercice 4 : trigonalisation de matrices

Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable et est semblable à $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercices supplémentaires

Exercice 5 : vrai ou faux ?
1) Soit A une matrice carrée. Si A est diagonalisable alors A^2 est diagonalisable.
2) Soit A une matrice carrée. Si A^2 est diagonalisable alors A est diagonalisable.
3) La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Exercice 6 : diagonalisation de matrices
1) Chacune des matrices A_k suivantes est-elle diagonalisable ?
Si oui alors diagonaliser A_k (c'est-à-dire déterminer une matrice $A_k{}'$ diagonale et une matrice P_k inversible telles que $A_k{}' = P_k{}^{-1} A_k P_k$).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Expliquer sans calcul pourquoi la matrice $M = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 7 : calcul d'une puissance n° d'une matrice carrée
1) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser (c'est-à-dire déterminer une matrice A' diagonale et une matrice P inversible telles que $A' = P^{-1}AP$).
2) En déduire la matrice $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$