Année 2018-2019 Université Grenoble Alpes, Polytech', 3$^{\text{ième}}$ année

Examen de Mathématiques tronc commun

Jeudi 6 décembre 2018, durée 2h30

Téléphones interdits. Calculatrices autorisées, ainsi que deux feuilles de notes A4 recto-verso et les formulaires primitives et développements limités de fonctions usuelles. Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction. Le barème est indicatif, et pourra être légèrement modifié.

1 Analyse

Exercice 1. (6 points)

1. Préciser le domaine de définition et calculer la dérivée de la fonction :

$$f : x \mapsto \cos(x^3 + 1)$$

2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx$.
3. En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$, calculer $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$
4. Déterminer toutes les primitives de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$.
5. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt; \qquad \int_2^{+\infty} \ln(t)\, dt$$

6. (a) Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4X - 3$ par le polynôme $Q(X) = X^2 - 3X + 2$.
   (b) Montrer que 1 et 2 sont racines de Q.
   (c) Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$.
   (d) En déduire les primitives sur $]2; +\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x + 2}$.
7. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\cos(x)}$.

Exercice 2. (2 points)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = e^{-x}$,
2. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Exercice 3. (3 points)
On considère l'équation différentielle :

$$(E_1) : \ (1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) = (1+x)^3 e^x; \quad x \in]-1;+\infty[$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(E_2) : \ (1+x)y'(x) + 2xy(x) = (1+x)^3; \quad x \in]-1;+\infty[$$

2. Soit y une solution de (E_1) et z définie par $y(x) = z(x)e^x$. Montrer que y est solution de (E_1) si et seulement si z' est solution d'une équation différentielle à déterminer.
3. En déduire les solutions de (E_1).

2 Algèbre

Exercice 4. (4 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (2+3i)z - 5 + i = 0$$

Les solutions seront exprimées sous forme algébrique.

2. Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$
3. Effectuer les produits matriciels suivants quand ils sont bien définis : AB et CB où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Résoudre le système linéaire suivant en utilisant la méthode de pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Exercice 5. (5 points)
Pour chaque matrice M_j ci-dessous $(j = 1, 2)$

1. déterminer si M_j est diagonalisable ou non (justifier).
2. Si M_j est diagonalisable, donner une matrice diagonale D_j et une matrice inversible P_j telles que $M_j = P_j D_j P_j^{-1}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$