Année 2019-2020 Université Grenoble Alpes, Polytech, 3ième année

Examen de Mathématiques tronc commun

Jeudi 12 décembre 2019, durée 2h30

Téléphones interdits. Calculatrices interdites. Deux feuilles de notes A4 recto-verso et les formulaires primitives et développements limités de fonctions usuelles sont autorisés. Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction. Le barème est indicatif, et pourra être légèrement modifié.

Exercice 1. (5 points)

1. Calculer l'intégrale $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$.

   On choisit $u'(x) = \frac{1}{x^3}$ **et donc** $u(x) = -\frac{1}{2x^2}$ **et** $v(x) = \ln(x)$ **et donc** $v'(x) = \frac{1}{x}$**.**

   On a alors $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx = \left[-\frac{\ln(x)}{2x^2}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^3}dx = \left[-\frac{\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\right]_1^2$ **et donc** $\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx = \frac{3}{16} - \frac{\ln(2)}{8}$

2. (a) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{t^2-1}$

   On commence par factoriser le dénominateur. On a $t^2 - 1 = (t-1)(t-1)$ et donc :
   $\frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)$**.**

   Pour trouver a **et** b**, il suffit de mettre au même dénominateur** $\frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$ **et de faire une identification.** .

   (b) En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{1+e^x}$, calculer $\int_{\ln 3}^{3\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$

   $t = \sqrt{1+e^x}$ **donc** $dt = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}dx = \frac{t^2-1}{2t}dx$ **donc** $dx = \frac{2t}{t^2-1}dt$**. On a donc :**

   $$\int_{\ln 3}^{3\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx = \int_2^3 \frac{1}{t}\frac{2t}{t^2-1}dt = \int_2^3 \frac{2}{t^2-1}dt = \int_2^3 \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}dt = \left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^3 = \ln(\frac{3}{2})$$

3. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{1+\cos(2t)}{t^2+1}\,dt; \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^3}\,dt$$

   La fonction $t \mapsto \frac{1+\cos(2t)}{t^2+1}$ **est continue sur** $[0,+\infty[$**. Ensuite** $\forall t \geq 0$ **on a** $\left|\frac{1+\cos(2t)}{t^2+1}\right| \leq \frac{2}{1+t^2}$ **et l'intégrale** $\int_0^1 \frac{2}{1+t^2}$ **converge (Il suffit de voir qu'une primitive de** $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ **est** $\arctan$ **ou comparer pour** $t \geq 1$ **à une intégrale de Riemmann.**

   La deuxième intégrale est divergente, c'est du cours.

Exercice 2. (4 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$, pour $x \in \mathbb{R}$. **On commence d'abord par la résolution de l'équation homogène $y' + 2y = 0$. Les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.**
   Ensuite, on cherche une solution particulière y_p. Comme il s'agit d'une équation à coefficients constants et que le second membre est un polynôme de degré, on cherche alors une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. En injectant dans l'équation on trouve : $2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c = x^2 - 2x + 3$. On obtient par identification $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$ et $c = \frac{9}{4}$. Les solutions générales de l'équation sont donc $x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.
2. $y'' + 2y' + 4y = xe^x$, , pour $x \in \mathbb{R}$.
   On résout d'abord l'équation homogène. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+4 = 0$, qui admet pour solution $-1 - i\sqrt{3}$ et $-1 + i\sqrt{3}$. Les solutions de l'équations homogènes sont donc $x \mapsto \left(A\cos(x\sqrt{3}) + B\sin(x\sqrt{3})\right) e^{-x}$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
   on cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax + b)e^x$. En injectant dans l'équation, on trouve $y_p(x) = \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right) e^x$

Exercice 3. (6 points)

1. Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$

   En développant par rapport à la troisième colonne on trouve $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 9$.
2. Effectuer les produits matriciels suivants quand ils sont bien définis : AB et CB où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   CB **n'est pas défini et** $AB = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$
3. Résoudre le système linéaire suivant en utilisant la méthode de pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

   La matrice augmentée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 2 & 5 & -9 & -10 \\ 3 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

   On effectue d'abord les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, on obtient donc

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & 15 & 23 \end{array}\right]$$

   On fait ensuite, $L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

On obtient alors une unique solution

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il suffit d'appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan. La matrice augmentée est :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

On permute les lignes 1 et 2, on obtient : $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$**.**

Ensuite, on fait $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ **:** $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$**.**

Puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ **:** $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right]$**.**

Puis $L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3$ **:** $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$**.**

Ensuite, $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ **et** $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ **on obtient :** $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$**.**

Enfin, on fait $L_2 \leftarrow -L_2$ **:** $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$**.**

l'inverse de A **est la matrice :** $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$**. Il suffit de vérifier !**

5. Soit

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } y - z = 0\}$$

Trouver une base et la dimension de E.
$E = vect((-2, 1, 1))$ **et** $dim(E) = 1$**.**

Exercice 4. (5 points)
Pour chaque matrice M_j ci-dessous ($j = 1, 2$) déterminer si M_j est diagonalisable ou non en justifiant votre réponse.

Si M_j est diagonalisable, donner une matrice diagonale D_j et une matrice inversible P_j telles que $M_j = P_j D_j P_j^{-1}$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de M_1 est $\chi_{M_1}(x) = \begin{vmatrix} -x & 3 & 2 \\ -2 & 5-x & 2 \\ 2 & -3 & -x \end{vmatrix}$. En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, on obtient : $\chi_{M_1}(x) = \begin{vmatrix} -x & 3 & 2 \\ -2 & 5-x & 2 \\ 0 & 2-x & 2-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} -x & 3 & 2 \\ -2 & 5-x & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.
Puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ donne :

$$\chi_{M_1}(x) = (2-x) \begin{vmatrix} -x & 1 & 2 \\ -2 & 3-x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Enfin, en développant par rapport à la dernière ligne on trouve : $\chi_{M_1}(x) = (2-x)(x^2-3x+2) = -(x-1)(x-2)^2$ (on peut aussi faire en première étape $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 - C_3$).
Les valeurs propres de M_1 sont donc 1 et 2. On commence d'abord par déterminer E_2 comme 2 est racine double du polynôme caractéristique. On résout alors $M_1 X = 2X$. Ce qui aboutit à la résolution du système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

c'est équivalent à $2x - 3y - 2z = 0$. C'est l'équation d'un plan et $E_2 = vect((1,0,1),(3,2,0))$ donc $dim(E_2) = 2$. A ce stade, on peut conclure que M_1 est diagonalisable.
Pour déterminer E_1 on résout $M_1 X = X$.

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

On résout ce système en effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$:

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ 0 - 2y - 2z = 0 \\ 0 + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ 0 - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

On montre alors que $E_1 = vect((-1,-1,1))$. On a $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Le polynôme caractéristique de M_2 est $\chi_{M_2}(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & -1 \\ 2 & 1-x & -2 \\ 3 & -1 & -2-x \end{vmatrix}$. En effectuant l'opération

$C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, **on obtient :** $\chi_{M_2}(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & -1 \\ 0 & 1-x & -2 \\ 1-x & -1 & -2-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1-x & -2 \\ 1 & -1 & -2-x \end{vmatrix}$. **Ensuite, on peut faire** $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. **On obtient donc :** $\chi_{M_2}(x) = (1-x)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1-x & -2 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = -(1+x)(x-1)^2$.

On commence d'abord par déterminer E_1 **en résolvant** $M_2X = X$. **Cela donne le système :**

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$$

ce qui donne $x = z$ **et** $y = 0$ **et donc** $E_1 = vect((1,0,1))$. $dim(E_1) = 1 < 2$ **qui est l'ordre de multiplicité de** 1 **dans le polynôme caractéristique, la matrice** M_2 **n'est pas diagonalisable.**