Année 2019-2020 Université Grenoble Alpes, Polytech, $3^{\text{ième}}$ année

Examen de Mathématiques tronc commun

Jeudi 12 décembre 2019, durée 2h30

Téléphones interdits. Calculatrices interdites. Deux feuilles de notes A4 recto-verso et les formulaires primitives et développements limités de fonctions usuelles sont autorisés. Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction. Le barème est indicatif, et pourra être légèrement modifié.

Exercice 1. (5 points)

1. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$.
2. (a) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{t^2-1}$.

   (b) En effectuant le changement de variable $t=\sqrt{1+e^x}$, calculer $\displaystyle\int_{\ln 3}^{3\ln 2} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$.
3. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+\cos(2t)}{t^2+1}\,dt; \qquad \int_0^1 \frac{1}{t^3}\,dt$$

Exercice 2. (4 points)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'+2y=x^2-2x+3$, pour $x\in\mathbb{R}$.
2. $y''+2y'+4y=xe^x$, pour $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 3. (6 points)

1. Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$
2. Effectuer les produits matriciels suivants quand ils sont bien définis : AB et CB où

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \qquad C=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Résoudre le système linéaire suivant en utilisant la méthode de pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

4. Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Soit
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } y - z = 0\}$$
Trouver une base et la dimension de E.

Exercice 4. (5 points)
Pour chaque matrice M_j ci-dessous ($j = 1, 2$) déterminer si M_j est diagonalisable ou non en justifiant votre réponse.
Si M_j est diagonalisable, donner une matrice diagonale D_j et une matrice inversible P_j telles que $M_j = P_j D_j P_j^{-1}$
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$