3° ANNEE
TRONC COMMUN de MATHEMATIQUES
MATHEMATIQUES GENERALES
ANALYSE
TD

Année universitaire 2020-2021

TD1 Des trucs de base, dérivation

Exercice 1 : inéquations
Résoudre les inéquations suivantes :

1) $|2x+1| < 1$

2) $|x-1| < |x+1|$

Exercice 2 : fonctions usuelles
1) Déterminer une expression explicite de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :
(a) la courbe de f coupe l'axe des abscisses en 3 et f a pour pente 2
(b) la courbe de f passe par le point de coordonnées $(2,3)$ et $f'(-2) = 4$
(c) la courbe de f passe par les points de coordonnées $(-1,2)$ et $(2,1)$

2) Tracer la courbe de la fonction $f : x \longmapsto 2|x-1| - |x+1|$

Exercice 3 : domaine de définition, parité
Pour chacune des fonction suivantes, déterminer son domaine de définition et dire si la fonction est paire ou impaire :
1) $f : x \longmapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
2) $f : x \longmapsto \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$
3) $f : x \longmapsto ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
4) $f : x \longmapsto x^3 + x + 1$
5) $f : x \longmapsto x^2 - x - 1$

Exercice 4 : dérivation
Calculer la dérivée de la fonction f (après avoir, si nécessaire, précisé son domaine de définition) :
(a) $f : x \longmapsto \sqrt{1 + cos^2 x}$
(b) $f : x \longmapsto \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}$
(c) $f : x \longmapsto cos(3x+1)$
(d) $f : x \longmapsto cos(x^2)$
(e) $f : x \longmapsto (x^2+1)e^{2x}$
(f) $f : x \longmapsto (x^2 - 2x + 3)^5$
(g) $f : x \longmapsto sin^3(4x)$
(h) $f : x \longmapsto \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
(i) $f : x \longmapsto \sqrt{lnx}$
(j) $f : x \longmapsto exp(-x^2 + 2x - 1)$
(k) $f : x \longmapsto \frac{1}{x^3 - 2x - 3}$

Exercice 5 : dérivation
Soient f une fonction définie et dérivable sur ℝ et g, h et k les fonctions définies sur ℝ par :
$g(x) = \sin^3(f(x))$
$h(x) = \sin(f^3(x))$
$k(x) = \sin(f(x^3))$
Sans aucune difficulté, les fonctions g, h et k sont dérivables sur ℝ.
Déterminer, en fonction de f et de f′, l'expression de la dérivée de chacune de ces trois fonctions.

TD2 Intégrales et primitives

Exercice 1

1) Déterminer les uniques réels a et b tels que $\dfrac{x}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$

En déduire les primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$ sur l'intervalle $]1,2[$

2) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{x(1+x^2)^2}$ et calculer ses primitives sur $]0,+\infty[$

3) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{(x^2-1)(x^2+3)}{2x^2+2x}$ et calculer ses primitives sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2

Calculer les primitives suivantes :

1) $\int xe^x dx$
2) $\int lnx dx$
3) $\int x^2 lnx dx$
4) $\int ln^2 x dx$
5) $\int cosx e^x dx$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsinx dx \quad (IPP)$

2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$ (changement de variable)

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ (changement de variable $x = tant$)

4) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right) arctanx dx$ (changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$)

Exercice 4

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{arctanx}{(1+x)^2} dx$ par IPP

Exercice 5

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+cosx} dx$ (changement de variable $t = tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$)

TD3 Intégrales généralisées

Exercice 1

Montrer que $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+e^{x})(1+e^{-x})} dx$ est convergente et calculer cette intégrale.

Exercice 2

Etudier la convergence de $\int_{0}^{1} lnx dx$ et, si elle converge, la calculer.

Exercice 3

1) Montrer que $\int_{1}^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ *est convergente* (à l'aide d'une IPP) et en déduire la convergence de $\int_{0}^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$

2) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, |sint| \geq \frac{1-cos(2t)}{2}$ et en déduire que $\frac{sint}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ (autrement dit que $\int_{0}^{+\infty} \left|\frac{sint}{t}\right| dt$ n'est pas convergente)

Exercice 4

Soit la fonction f : t $\longmapsto e^{-t^2}$

1) Montrer que f est intégrable sur $[0,+\infty[$

2) Exprimer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ en fonction de $\int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

3) Montrer par une IPP que : $\forall x > 0, \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_{x}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2t^2} dt$

4) En déduire que $\int_{x}^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$

Exercice 5

Soit p>0

1) Convergence et calcul de $\int_{0}^{+\infty} te^{-pt} dt$

2) Convergence et calcul de $\int_{0}^{+\infty} sin(t)e^{-pt} dt$ *et* $\int_{0}^{+\infty} cos(t)e^{-pt} dt$

TD4 Equations différentielles

Exercice 1 : équations différentielles linéaires du 1° ordre
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$

2) $(1+x)y' + y = 1 + ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$

3) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$

4) $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$

5) $y' - \dfrac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$

Exercice 2 : équations différentielles linéaires du 2° ordre à coefficients constants
Résoudre les équations différentielles suivantes :
1) $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{-x}$
2) $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)e^{x}$
3) $y'' - 2y' + y = (x^2+1)e^{x} + e^{3x}$
4) $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{x} + xe^{2x}cosx$

Exercice 3
La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé dans l'eau et on observe que 5 minutes plus tard il reste 10g. Dans combien de temps restera-t-il seulement 1g ?

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles suivantes en effectuant un changement de variable :
1) $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ en posant $t = e^x$
2) $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$ sur $]-1,1[$

Exercices supplémentaires

Exercice 5 : raccordement de solutions
Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :
1) $ty' - 2y = t^3$
2) $t^2y' - y = 0$
3) $(1-t)y' - y = t$

Exercice 6

En formant une équation différentielle vérifiée par f, calculer la valeur de $\mathrm{f}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{-i2\pi xt} dt$

Indication
$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 7
Prouver que toute solution de l'équation différentielle $y' + e^{x^2}y = 0$ tend vers 0 en $+\infty$

Exercice 8
Déterminer les fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et vérifiant : $\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{f}(s+t) = \mathrm{f}(s)\mathrm{f}(t)$