Chapitre 4:

Echantillonnage

4.1. Echantillons représentatifs et échantillons biaisés

Le but principal de la statistique est de déterminer les caractéristiques d'une population donnée à partir de l'étude d'une partie de cette population, appelée échantillon.

> La façon de sélectionner l'échantillon est aussi importante que la manière de l'analyser.

Il faut que l'échantillon soit *représentatif* de la population.

L'*échantillonnage aléatoire* est le meilleur moyen d'y parvenir.

Un *échantillon aléatoire* est un échantillon *tiré au hasard* dans lequel tous les individus ont la *même chance* de se retrouver.

Dans le cas contraire, l'échantillon est *biaisé*.

Un petit échantillon représentatif est, de loin, préférable à un grand échantillon biaisé.

Exemple :

Nous désirons déterminer la taille moyenne des étudiants de 2^{e} candi. commu. (97-98) qui étaient présents au 1er cours de statistique, à partir d'un échantillon de 10 individus.

(la réponse exacte, pour la population totale de 86 étudiants, est de 174,0 cm).

Mus par une bonne intention, sachant que les garçons sont, en général, plus grands que les filles, nous choisissons un échantillon contenant autant de filles que de garçons.

Soient 5 filles et 5 garçons choisis au hasard :

Taille des filles (cm)	Taille des garçons (cm)
171	193
165	187
173	180
174	185
166	178

A partir de cet échantillon de 10 individus, nous obtenons une taille moyenne de 177,2 cm, soit 3,2 cm de plus que la valeur exacte.

Avons-nous procédé correctement au choix de l'échantillon, sachant que la population contient 51 filles et 35 garçons ?

Non, car chaque garçon avait plus de chances d'être choisi que chaque fille.

En effet, les 5 garçons étant tirés au hasard dans une population de 35 individus, chacun d'eux avait 5 chances sur 35 d'être choisi, soit une probabilité de $5/35 \cong 0{,}143$.

Les 5 filles étant choisies dans une population de 51 individus, chacune d'entre elles avait 5 chances sur 51 d'être choisie, soit une probabilité de $5/51 \cong 0{,}098$, donc nettement plus faible que pour les garçons.

Nous avons biaisé l'échantillon en faveur des garçons. Il n'est donc pas surprenant que nous obtenions un résultat trop élevé.

La manière correcte de procéder est de choisir au hasard dans toute la population, sans considération du sexe.

Un tel tirage au hasard a donné les tailles suivantes (en cm) :

187, 165, 180, 168, 165, 160, 174, 183, 168, 176

La moyenne de l'échantillon est de 172,6 cm.

Elle est plus proche de la valeur exacte (erreur de – 1,4 cm).

[En fait, vu les petits échantillons utilisés, le hasard aurait pu donner un résultat inverse. Ce sera beaucoup moins probable pour de grands échantillons. Le raisonnement est néanmoins valable en toute généralité].

Une autre manière de procéder est d'utiliser la technique des *quotas*.

Sachant que la population étudiée contient $35/86 \cong 40\%$ de garçons et $51/86 \cong 60\%$ de filles, nous pourrions nous assurer que l'échantillon respecte les mêmes proportions, soient 4 garçons et 6 filles.

Exercice :

Les échantillons suivants sont-ils représentatifs de la population visée ?

1. Pour connaître les opinions politiques de la population d'une ville, on envoie 5 enquêteurs interroger les gens à la sortie de 5 grands magasins. Ils doivent questionner les clients jusqu'à ce qu'ils réunissent, chacun, un échantillon de 200 réponses.

   R.: Non, car les clients des supermarchés ne sont pas typiques de l'ensemble de la population (en général, dans un ménage, c'est toujours la même personne qui fait les courses; l'échantillon contiendra probablement trop de femmes, d'inactifs,…)

2. On désire faire une enquête sur les goûts musicaux de la population belge.
   Pour cela, on choisit au hasard 1000 numéros de téléphone dans l'ensemble des annuaires et on les appelle pendant les heures de bureau. On obtient 583 réponses.

   R.: Non car cet échantillon élimine pratiquement tous les individus actifs (étudiants, travailleurs, …).
   Une amélioration de cet échantillon consisterait à téléphoner en soirée et à répéter l'appel pendant plusieurs jours si on n'obtient pas de réponse, de telle manière que l'échantillon obtenu se rapproche le plus possible de l'échantillon sélectionné.

Ces exemples illustrent la difficulté de réunir un échantillon représentatif, surtout lorsqu'il s'agit d'êtres humains (certains sont plus faciles à joindre, d'autres refusent de répondre,…).

4.2. Précision de la moyenne

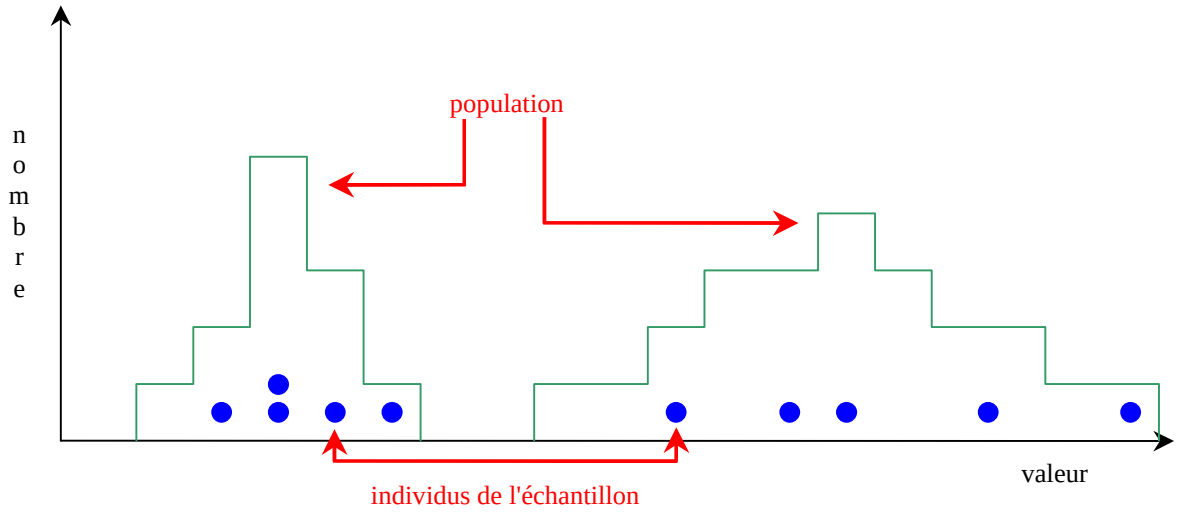
Nous supposons maintenant que notre échantillon est représentatif de la population.

La moyenne sur l'échantillon est donc une estimation de la moyenne sur la population.

Nous désirons savoir quelle est la précision de cette estimation, afin de connaître de quelle quantité la vraie valeur est susceptible de s'écarter de notre estimation.

En fait, la précision va dépendre :

- de la taille de l'échantillon
- de la dispersion de la population



Dans une population peu dispersée, toutes les valeurs de l'échantillon seront forcément proches de la moyenne.

Dans une population plus dispersée, les valeurs de l'échantillon seront généralement plus éloignées de la moyenne. La moyenne de l'échantillon pourra donc s'écarter plus fortement de celle de la population.

Soient:

- n le nombre d'individus dans l'échantillon,
- σ l'écart type de la population

Alors, la précision de la moyenne peut être mesurée par un écart type sur la moyenne :

$$\sigma\left(\overline{X}\right)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

La précision sur la valeur moyenne sera donc d'autant meilleure que :

1. la population sera peu dispersée (σ petit)
2. l'échantillon sera grand (n grand)

La présence d'une racine carrée au dénominateur implique que :

- pour une précision 2 fois meilleure, il faut un échantillon 4 fois plus grand.
- pour une précision 10 fois meilleure, il faut un échantillon 100 fois plus grand.

→ la précision coûte cher !

Exemple :

1. Dans la population de 51 filles de 2e candi communication, la taille moyenne est de

   $$\mu = 167{,}9 \text{ cm}$$

   (nous noterons μ la valeur moyenne – généralement inconnue – pour la population et $\overline{X}$ la valeur moyenne pour l'échantillon)

   L'écart type sur la taille est de:

   $$\sigma = 5{,}3 \text{ cm}$$

   Si on estime la taille moyenne à partir d'un échantillon de 4 personnes, on aura une précision (écart type) sur la moyenne de

   $$\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{5{,}3}{\sqrt{4}} = \frac{5{,}3}{2} = 2{,}65 \text{ cm}$$

   A partir d'un échantillon de 10 personnes, l'écart type serait de :

   $$\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{5{,}3}{\sqrt{10}} \cong 1{,}7 \text{ cm}$$

2. Nous désirons déterminer la taille moyenne des hommes belges âgés d'une vingtaine d'années.

   Nous disposons d'un échantillon de 35 étudiants de 2e candi communication.

   Si cet échantillon est représentatif, sa taille moyenne est une estimation de celle de la population en question.

   Elle est de 182,9 cm.

   Pour estimer la précision de cette moyenne, il faudrait connaître l'écart type de la taille pour toute la population considérée, ce qui n'est pas le cas.

   Si notre échantillon n'est pas trop petit (en principe, au moins 100 individus), nous pouvons remplacer l'écart type σ de la population par l'écart type *s* de l'échantillon.

   Dans ce cas, il vaut $s = 6{,}7$ cm

   La précision sur la moyenne serait donc de :

   $$\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{6{,}7}{\sqrt{35}} \cong 1{,}1 \text{ cm}$$

Comme pour la moyenne, nous réserverons les lettres grecques pour les grandeurs relatives à la population et les caractères romains pour les grandeurs correspondant à l'échantillon.

	moyenne	écart type
population	μ	σ
échantillon	X	*s*

Écart type de la moyenne : $\sigma(\overline{X})$

Si l'écart type de la grandeur analysée dans la population n'est pas connu, on peut le remplacer par l'écart type calculé dans l'échantillon, pour autant que cet échantillon soit suffisamment grand.

$$\sigma\left(\overline{X}\right) \cong \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (si \quad n \geq 100)$$

4.3. Un exemple d'échantillonnage statistique : l'audimat

Une application courante des sondages statistiques est l'estimation de l'audience des émissions de télévision. Nous allons passer en revue quelques-unes des méthodes utilisées, en présentant leurs principaux avantages et inconvénients.

Cet exemple illustre bien les difficultés auxquelles on peut parfois se heurter pour réunir un échantillon représentatif, permettant de mesurer la grandeur effectivement recherchée.

1. Analyse du courrier

Méthode peu coûteuse

Défaut: l'échantillon de personnes qui écrivent aux stations n'est pas représentatif.

2. Interviews

On questionne les gens pour connaître les programmes qu'ils ont regardé la veille.

Défauts: 1. fait appel à la mémoire → risque d'erreurs
2. favorise les émissions qui passaient la veille à l'heure de l'interview.

3. Panels avec journaux d'écoute

Ce sont des groupes permanents de personnes chargées de noter leurs écoutes et leurs appréciations des programmes.

Méthode peu coûteuse

Défauts:
1. le travail des panélistes est assez astreignant
2. difficulté d'obtenir un échantillon représentatif car certaines catégories de personnes risquent d'être peu disponibles pour ce travail.

4. Panels audimétriques

Des appareils enregistreurs (audimètres) sont placés dans les foyers qui participent au panel.

Ils enregistrent le fonctionnement du récepteur et envoient automatiquement l'information par voie téléphonique au milieu de la nuit.

Avantages:
1. rapidité
2. précision (mesure à la seconde près)
3. exactitude (pas d'erreur humaine)

Inconvénient: ne mesurent que le fonctionnement du récepteur, sans tenir compte des auditeurs

Solutions:
1. adjonction d'un clavier avec boutons permettant aux auditeurs de signaler leur présence (source possible d'erreurs)
2. système automatique pour identifier les personnes présentes

Difficultés générales

1. l'augmentation du nombre de canaux:
   - rend plus difficile le recours à la mémoire
   - nécessite des panels plus nombreux pour conserver la même précision
2. l'utilisation du magnétoscope complique les mesures

Questions non résolues

1. Faut-il compter toutes les personnes présentes dans la pièce ou essayer de déterminer lesquelles regardent effectivement la TV ?
2. Quelle doit être la durée minimale d'écoute pour considérer qu'un programme est suivi ?
3. Comment procéder lorsque les panélistes sont absents pour de longues périodes (vacances,…) ?

Les solutions adoptées varient d'un pays à l'autre