Chapitre 3:

Caractérisation des données

L'histogramme et le polygone des effectifs donnent une vue globale et détaillée de la distribution des individus dans un échantillon ou une population. Il est souvent très utile d'extraire de cette information des grandeurs numériques qui en résument les caractéristiques essentielles.

Nous passerons tout d'abord en revue les grandeurs mesurant le *centre* de la distribution.

Ensuite, nous considérerons les différentes mesures de *l'étalement* ou *dispersion* de la distribution.

3.1. Centre d'une distribution

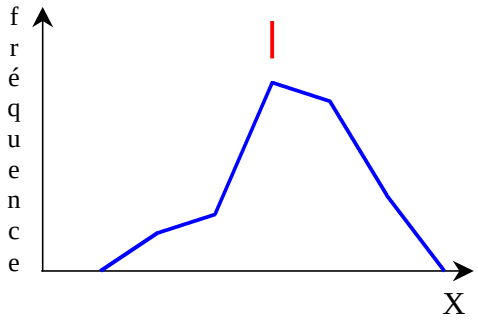
3.1.1. Le mode

Il correspond au sommet de la distribution:

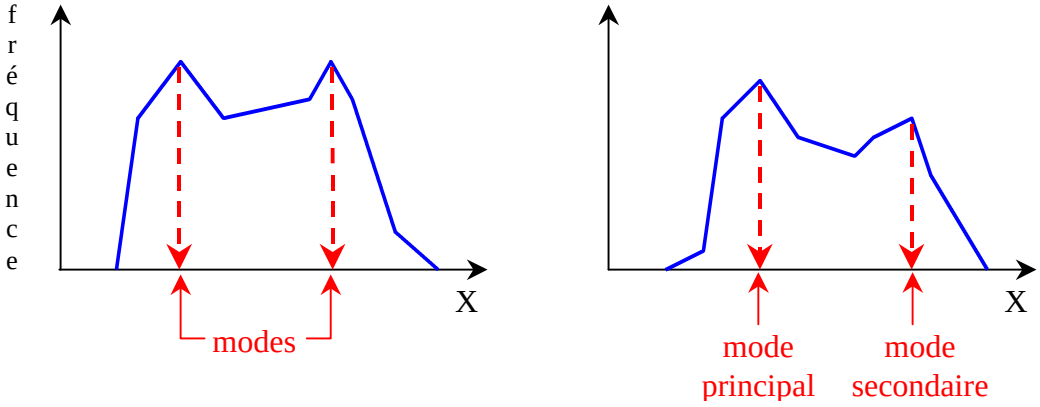
le mode est la valeur la plus fréquente

c'est la valeur la plus « à la mode ».

On appelle *distribution unimodale*, une distribution présentant un seul mode

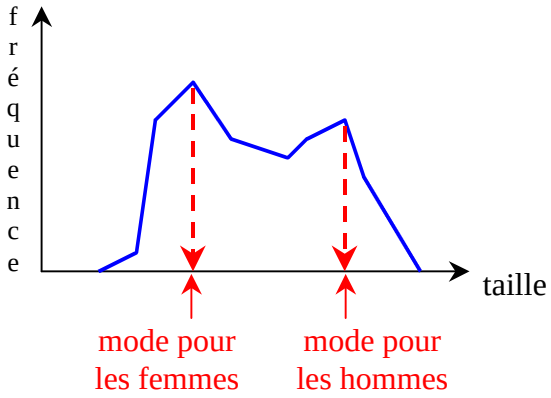


Une *distribution bimodale* est une distribution présentant deux modes



Une *distribution multimodale* est une distribution présentant plusieurs modes (2,3,…). Elle est souvent le reflet d'une population composée de plusieurs sous-populations distinctes.

Par exemple, le polygone des fréquences ci-dessous, qui représente la distribution de la taille des individus dans une population adulte, présente deux modes. Ceux-ci sont le reflet de la présence de deux sous-populations : les femmes et les hommes, ces derniers étant généralement plus grands.



3.1.2. La médiane

Elle correspond au milieu de la distribution:

> la médiane est la valeur pour laquelle il y a autant d'individus à gauche qu'à droite dans l'échantillon

Pour déterminer la médiane d'un échantillon ou d'une population :

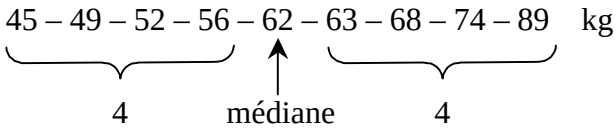
(1) on classe les individus par ordre croissant
(2) on prend celui du milieu

Exemple :

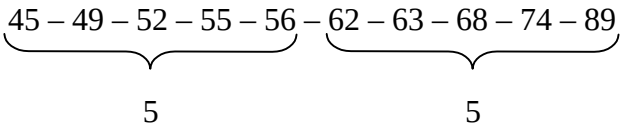
- Soit un échantillon de 9 personnes dont le poids est :

45 – 68 – 89 – 74 – 62 – 56 – 49 – 52 – 63 kg

classés par ordre croissant :



- Si le nombre d'individus est pair, on prend la moyenne entre les deux valeurs centrales :



$$\text{médiane} = \frac{56 + 62}{2} = 59 \quad \text{kg}$$

En règle générale, si n est le nombre d'individus dans l'échantillon, la médiane porte le numéro d'ordre $\frac{n+1}{2}$ dans la suite des individus classés par ordre croissant.

Lorsqu'on obtient un numéro demi entier (ex : 24,5), on calcule la moyenne des deux valeurs adjacentes.

Calcul de la médiane pour les grands échantillons répartis en classes

(1) Déterminez le numéro d'ordre de la médiane.

(2) Déterminez dans quelle classe elle se situe à l'aide du tableau des *nombres cumulés* (total des individus de cette classe et des précédentes).

(3) Rangez par ordre croissant les éléments (individus) de cette classe.

(4) Sélectionnez l'élément (individu) correspondant au numéro choisi.

Exemple :

Soient les pourcentages obtenus par 49 élèves à un examen, rangés par classes de 10 pourcents de large:

Classe	*nombre*	*nombre cumulé*
1-10	2	2
11-20	4	6
21-30	5	11
31-40	8	19
41-50	7	26
51-60	9	35
61-70	6	41
71-80	6	47
81-90	2	49

49 individus $\longrightarrow$ la médiane porte le n°25

$$\left[\frac{49+1}{2} = 25\right] \Longrightarrow \text{dans la classe 41-50}$$

car, d'après le tableau des nombres cumulés, cette classe contient les individus portant les numéros d'ordre 20 à 26.

Examinons le contenu de cette classe :

46 – 42 – 45 – 44 – 50 – 43 – 49

Rangeons-les par ordre croissant :

42 – 43 – 44 – 45 – 46 – 49 – 50

Il y a 19 individus dans les classes précédentes

$\longrightarrow$ Le premier de cette classe porte le n°20 et nous devons choisir le 25^{e}

Numéro :	20	21	22	23	24	25	26
Valeur :	42	43	44	45	46	49	50

La médiane vaut donc 49.

3.1.3. La moyenne

Elle correspond à une répartition « équitable » de la grandeur mesurée sur tous les individus:

> la moyenne est la somme des grandeurs mesurées divisée par le nombre d'individus

Exemple :

- Dans le précédent échantillon de 9 personnes, le poids moyen vaut :

$$\overline{X} = \frac{45+68+89+74+62+56+49+52+63}{9} = 62 \quad kg$$

- Dans le second échantillon de 10 personnes, le poids moyen vaut :

$$\overline{X} = \frac{45+49+52+55+56+62+63+68+74+89}{10} = 61{,}3 \quad kg$$

Pour un échantillon de *n* individus, la moyenne est calculée par :

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n}$$

En utilisant la lettre grecque Σ pour représenter une somme, on obtient la notation compacte suivante :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X$$

Pour des données groupées en classes, on peut calculer une valeur approximative de la moyenne en supposant que tous les individus d'une classe se situent au centre de celle-ci.

Dans l'exemple précédent (9 personnes), la répartition est la suivante:

Classe	*Centre*	*Nombre*
45-55	50	3
55-65	60	3
65-75	70	2
75-85	80	0
85-95	90	1

$$\overline{X} \cong \frac{3\times 50 + 3\times 60 + 2\times 70 + 0\times 80 + 1\times 90}{9} = 62{,}2 \quad \text{kg}$$

Si x est le centre de la classe et f le nombre d'individus dans celle-ci, la formule approchée s'écrit :

$$\overline{X} \cong \frac{1}{n}\sum x.f$$

Dans l'exemple précédent, la formule approchée donne un poids moyen de 62,2 kg au lieu de 62 kg.

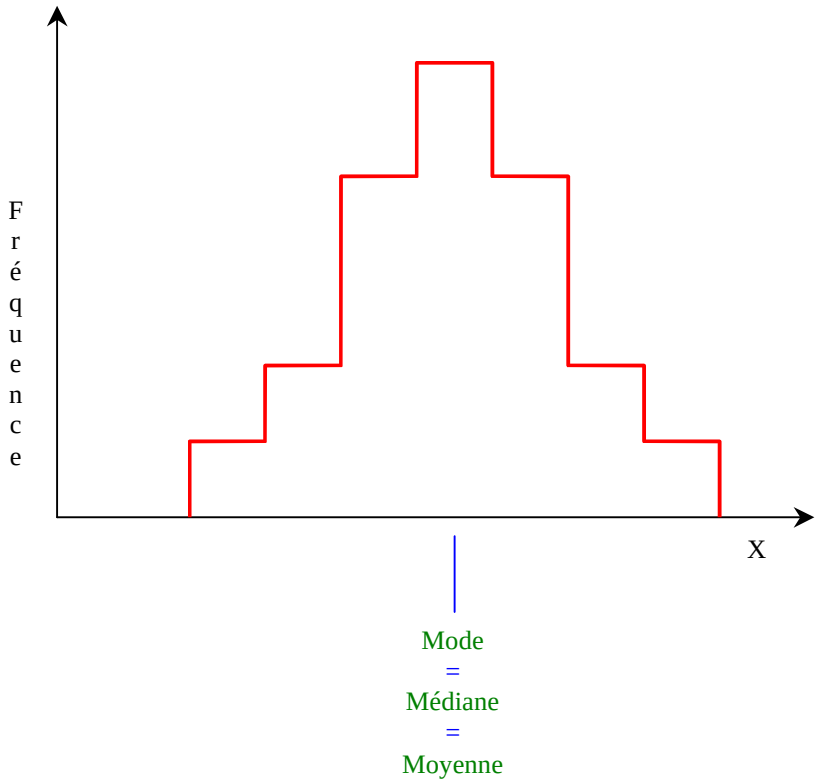
La formule approchée donnera des résultats d'autant meilleurs que :

- les classes seront étroites
- le nombre d'individus par classe sera grand.

3.1.4. Positions relatives des trois mesures du centre d'une distribution

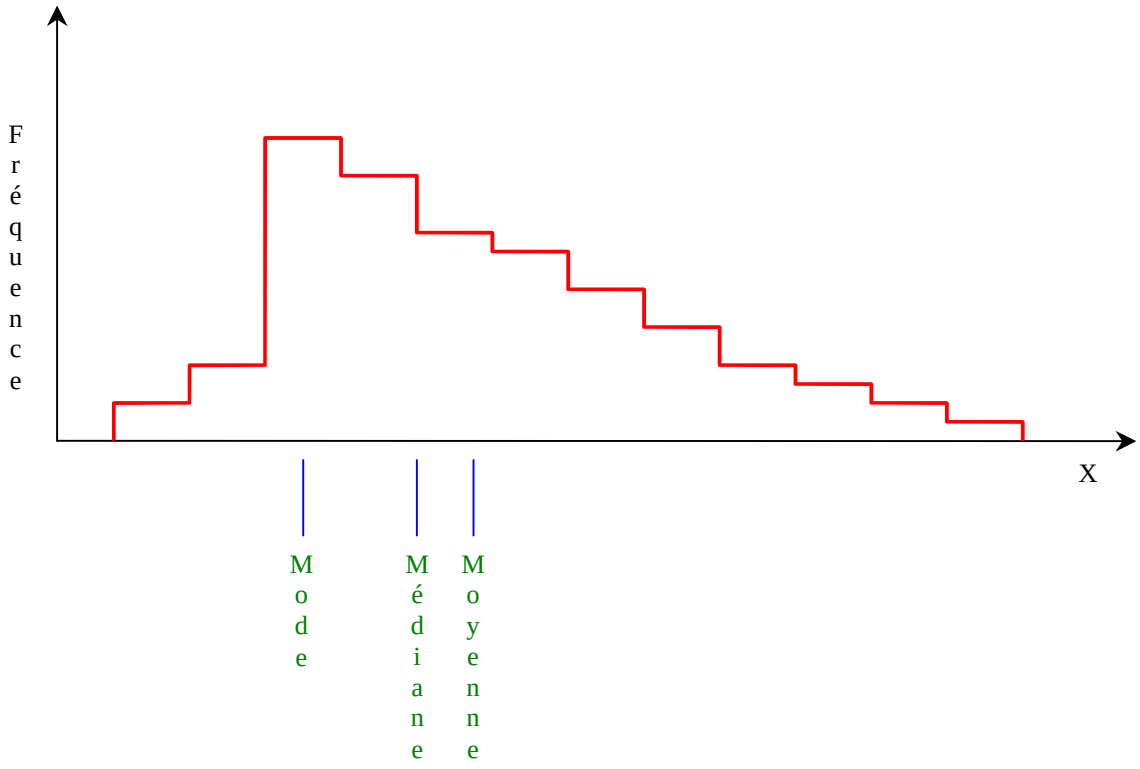
a) Distribution unimodale et symétrique

Dans une distribution unimodale et symétrique, le mode, la médiane et la moyenne sont confondus.

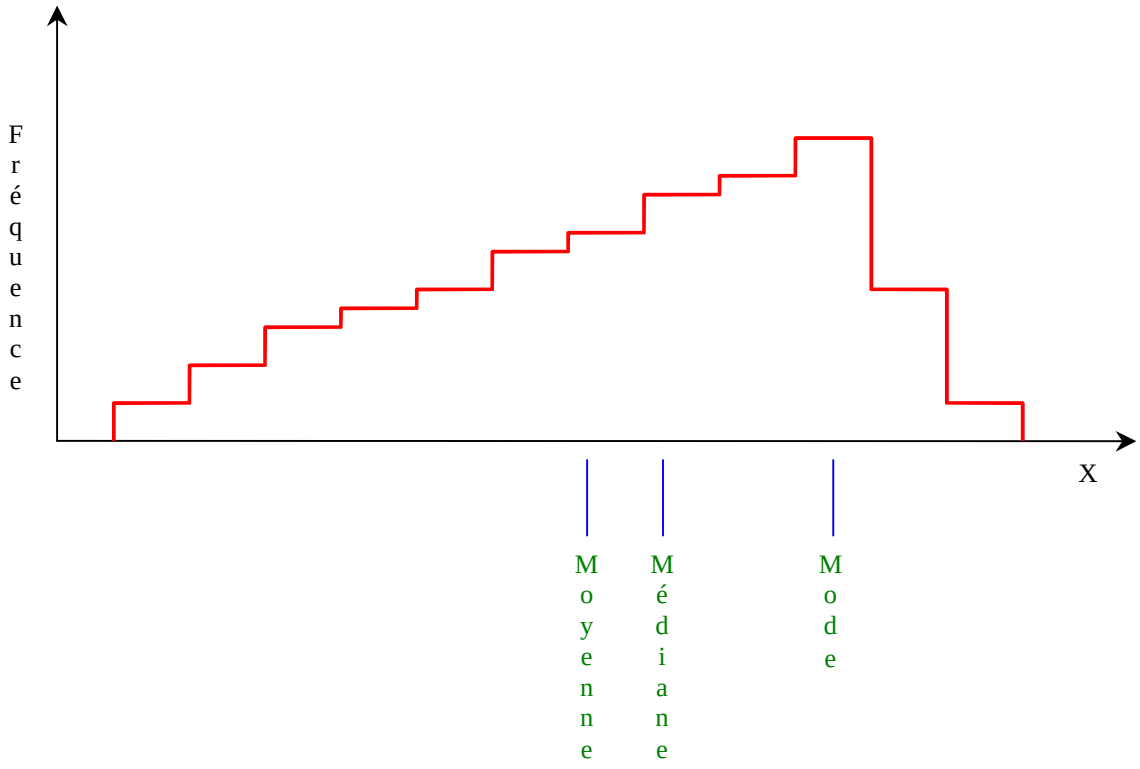


b) Distribution asymétrique

Si la distribution est étalée à droite, on a généralement: mode < médiane < moyenne



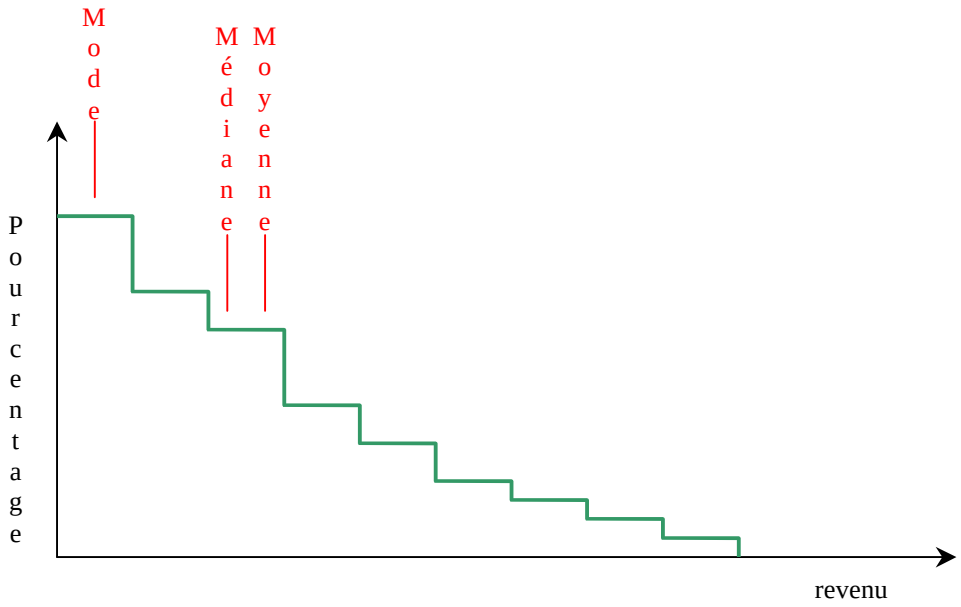
Si la distribution est étalée à gauche, on a généralement: moyenne < médiane < mode



3.1.5. Qualité comparée des trois mesures du centre d'une distribution

Exemple :

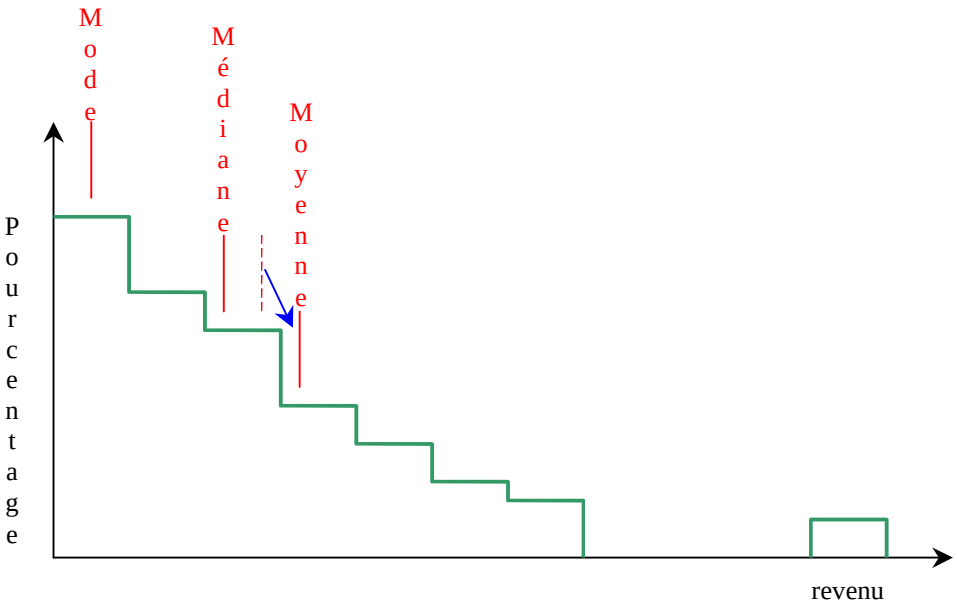
Répartition des revenus dans une population.



Le mode est la plus mauvaise mesure du centre, car la classe la mieux représentée n'est pas nécessairement au centre de la distribution.

Si les valeurs extrêmes sont modifiées, la médiane ne change pas car elle n'est pas sensible aux valeurs extrêmes. Par contre la moyenne change car elle tient compte de toutes les valeurs.

On préférera la médiane ou la moyenne selon que l'on veut une mesure sensible ou non aux valeurs extrêmes.

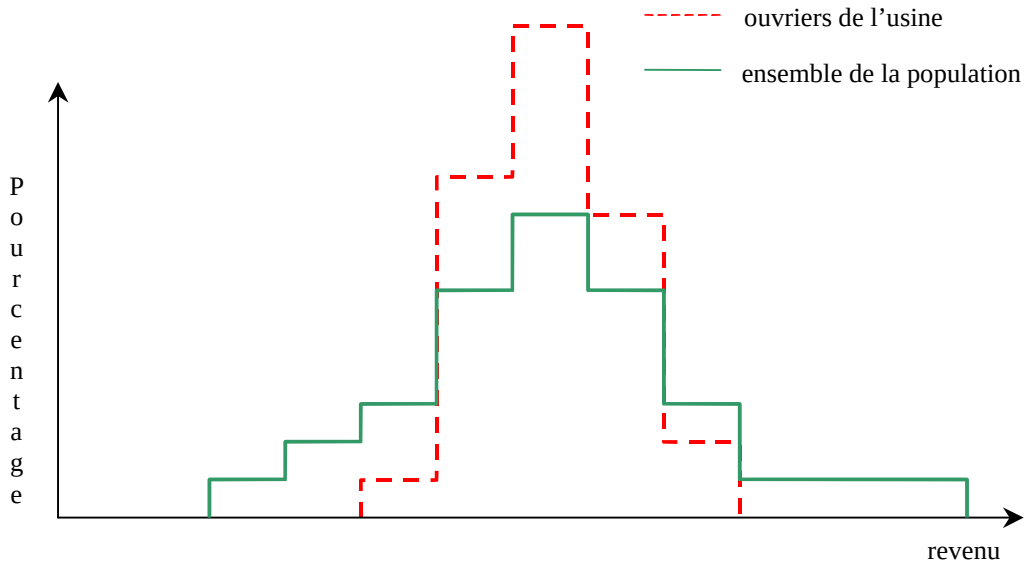


3.2. Etalement d'une distribution

3.2.1. Dispersion d'une distribution

Supposez que l'on désire comparer les revenus des ouvriers d'une usine à ceux de l'ensemble de la population de leur région.

Les résultats sont résumés sur l'histogramme suivant :



Dans ce cas, les deux distributions ont le même centre mais elles sont manifestement différentes :

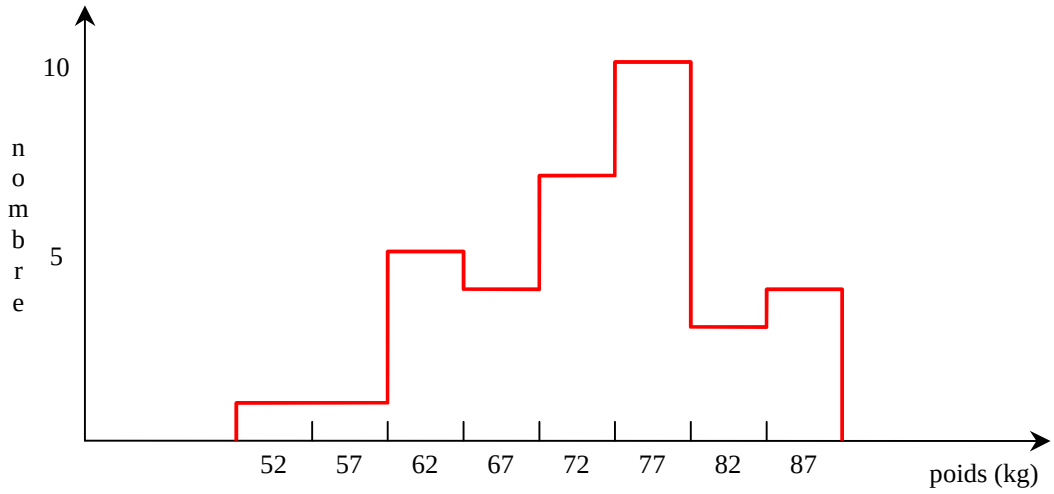
elles diffèrent par leur *dispersion*

Mesures de la dispersion

Exemple :

Les poids de 35 garçons de 2e candi. communication (97-98) sont repris dans le tableau et l'histogramme suivants :

classe (kg)	individus : poids en kg
50-54	52
55-59	58
60-64	62 60 60 63 62
65-69	65 65 66 65
70-74	72 70 72 74 74 74 70
75-79	75 75 75 75 76 75 75 75 75 78
80-84	80 80 80
85-89	89 88 88 87



Pour caractériser l'étendue d"une distribution, les statisticiens ont introduit toute une série de grandeurs, dont nous allons considérer les principales.

3.2.2. L'étendue

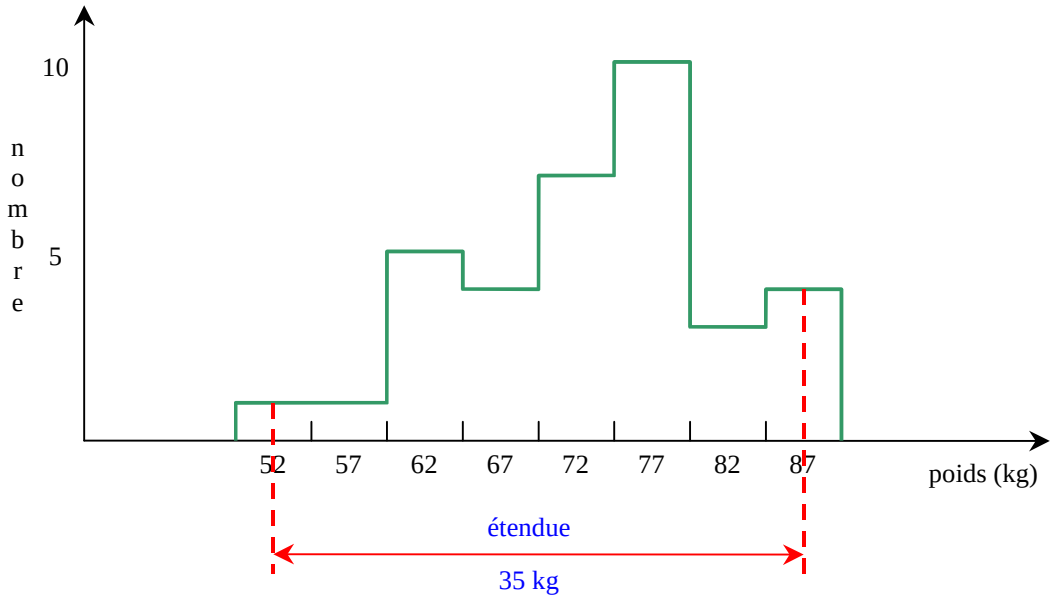
L'étendue est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur.

Dans l'exemple précédent, le calcul exact donne :

$$89-52 = 37 \text{ kg}$$

Un calcul approché, prenant en compte le centre des classes, donnerait :

$$87-52 = 35 \text{ kg}$$



3.2.3. L'étendue interquartile

Le premier quartile est l'individu ayant 25 % de l'échantillon en-dessous de lui et 75% de l'échantillon au-dessus.

Le deuxième quartile est l'individu ayant 50 % de l'échantillon en-dessous de lui et 50 % de l'échantillon au-dessus:

c'est donc la médiane

Le troisième quartile est l'individu ayant 75 % de l'échantillon en-dessous de lui et 25 % de l'échantillon au-dessus.

L'étendue interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartiles

Dans notre exemple, on a :

1^{er} quartile = 65 kg
2^{me} quartile = 76 kg

Etendue interquartile (EIQ) = 76 – 65 = 11 kg

n°	poids (kg)		
1		52	
2		58	
3		60	
4		60	
5		62	
6		62	
7		63	
8		65	
9	→	65	1^{er} quartile
10		65	
11		66	
12		70	
13		70	
14		72	
15		72	
16		74	
17		74	
18	→	74	médiane
19		75	
20		75	
21		75	
22		75	
23		75	
24		75	
25		75	
26		75	
27	→	76	$3^{ème}$ quartile
28		78	
29		80	
30		80	
31		80	
32		87	
33		88	
34		88	
35		89	

EIQ : 76 –65 = 11 kg

3.2.4. L'écart absolu moyen

On désire une quantité qui mesure l'écart moyen par rapport à la moyenne.

On ne peut pas simplement calculer la moyenne des écarts, car celle-ci est toujours nulle.

Exemple :

Soient les 5 valeurs suivantes : 4-6-9-10-11

La moyenne vaut : $\frac{4+6+9+10+11}{5} = \frac{40}{5} = 8$

valeur	écart à la moyenne
4	4 – 8 = –4
6	6 – 8 = –2
9	9 – 8 = 1
10	10 – 8 = 2
11	11 – 8 = 3

moyenne des écarts : $\frac{-4-2+1+2+3}{5} = \frac{0}{5} = 0$

Ce résultat est toujours valable, il résulte de la définition de la moyenne.

L'écart absolu moyen est la moyenne des écarts par rapport à la moyenne, toujours comptés positifs.

C'est donc la moyenne des valeurs absolues des écarts à la moyenne.

Dans le dernier exemple, il vaut :

$$\frac{4+2+1+2+3}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

3.2.5. L'écart quadratique moyen (EQM)

Pour des raisons mathématiques, il est préférable, pour éliminer les signes – , de calculer le carré des écarts plutôt que leur valeur absolue

On calcule donc la moyenne des carrés des écarts, puis on prend la racine carrée :

$$EQM = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left(x - \overline{X}\right)^2}$$

Dans l'exemple ci-dessus, on a :

$$EQM = \sqrt{\frac{4^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{5}} = \sqrt{\frac{16 + 4 + 1 + 4 + 9}{5}} = \sqrt{\frac{34}{5}} = \sqrt{6.8} \cong 2.6$$

3.2.6. L'écart type

Toujours pour des raisons mathématiques, il est préférable, de diviser par *n-1* plutôt que par *n* pour estimer précisément la dispersion d'une population à partir d'un échantillon.

On obtient alors l'écart type, qui est préférable à l'écart quadratique moyen, et l'on retiendra seulement la formule suivante :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(x - \overline{X}\right)^2}$$

Dans l'exemple ci-dessus, on a :

$$\sigma = \sqrt{\frac{4^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \sqrt{8.5} \cong 2.9$$

Pourquoi l'écart type est-il préférable à l'écart quadratique moyen ?

Si on se contentait de décrire l'échantillon, l'écart quadratique moyen serait une bonne mesure de la dispersion.

Mais, en général, nous sommes intéressés par la population sous-jacente, dont l'échantillon n'est qu'une partie (supposée représentative).

On veut donc estimer la moyenne et la dispersion de la population à partir de l'échantillon.

Cas extrême :

Supposons que nous ne disposions que d'un échantillon de 1 individu.

On peut estimer le poids moyen de la population : ce sera le poids de l'individu (ex : 65 kg).

L'écart quadratique moyen donnerait une dispersion nulle, ce qui suggère que toute la population pèse précisément 65 kg !

L'écart type nous indique que nous ne pouvons pas estimer la dispersion dans la population si notre échantillon ne comporte pas au moins 2 individus, (car on ne peut pas diviser par zéro).

Calcul de l'écart type pour un échantillon réparti en classes.

Soient : x les centres des classes
f les effectifs
$\overline{X}$ la moyenne de l'échantillon
n le nombre total d'individus

On peut calculer une valeur approchée de l'écart type en supposant que tous les individus d'une classe sont au centre de celle-ci :

$$s \cong \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum f\left(x-\overline{X}\right)^2}$$