

*Jayme Luiz Szwarcfiter*  
*Lilian Markenzon*

# ESTRUTURAS DE DADOS E SEUS ALGORITMOS

2<sup>a</sup> Edição Revista



# ESTRUTURAS DE DADOS E SEUS ALGORITMOS

Jayme Luiz Szwarcfiter

Professor Titular do Instituto de Matemática  
Pesquisador do Núcleo de Computação Eletrônica  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Lilian Markenzon

Professor Adjunto do Instituto de Matemática  
Universidade Federal do Rio de Janeiro



Direitos exclusivos para a língua portuguesa  
Copyright © 1994 by Jayme Luiz Szwarcfiter e Lilian Markenzon  
**LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.**  
Travessa do Ouvidor, 11  
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040  
Tel.: 21-2221-9621  
Fax: 21-2221-3202

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação  
ou reprodução deste volume, no todo ou em parte,  
sob quaisquer formas ou por quaisquer meios  
(eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia,  
distribuição na Web ou outros),  
sem permissão expressa da Editora.

A Izrael, meu pai  
*J.L.S.*

Ao Newton  
*L.M.*

## Prefácio

Este é um livro de estruturas de dados, com ênfase em seus algoritmos. Tanto estruturas de dados como algoritmos são temas fundamentais, tendo em vista que praticamente todas as demais áreas da computação os utilizam. As estruturas de dados que compõem este texto foram escolhidas dentre as mais empregadas atualmente. No desenvolvimento dos algoritmos, o aspecto de eficiência é ressaltado.

Destina-se este livro basicamente a cursos de graduação, podendo alguns tópicos ou capítulos ser utilizados em nível de pós-graduação. Nesse sentido, parte de seus manuscritos já foram utilizados nas disciplinas Estruturas de Dados, do Departamento de Computação do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, e Algoritmos e Estruturas de Dados, do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, da COPPE/UFRJ. Este texto pode também ser utilizado por profissionais da área de desenvolvimento de software, para os quais é de grande importância o domínio de estruturas de dados.

Este trabalho é resultado de mais de vinte anos de experiência dos autores em ensino de computação. É a evolução de notas de aula e do material apresentado na Escola Brasileira de Otimização, realizada na UFRJ em janeiro de 1989. Expressamos os nossos agradecimentos a Paulo Roberto de Oliveira, coordenador do evento, que sugeriu o trabalho. Em novembro de 1989, a versão inicial foi publicada também pela Universidade Federal de Minas Gerais, para a Escola de Algoritmos e Otimização, organizada pelo Departamento de Ciência da Computação. Entretanto, ao longo desses cinco anos, foi consideravelmente modificada e ampliada.

O texto encontra-se organizado da seguinte forma. O capítulo 1 apresenta os conceitos básicos necessários. O capítulo 2 descreve a estrutura de dados mais simples, e talvez a mais importante sob o aspecto de aplicação: as listas. Um estudo inicial e geral de árvores é realizado no capítulo 3. O capítulo 4 particulariza esta estrutura para seu emprego eficiente em computação, apresentando as árvores binárias de busca. As árvores balanceadas, uma forma mais elaborada de estruturas de dados, constituem o objeto do capítulo 5. O capítulo 6 estuda as listas de prioridades, uma estrutura com aplicações, por exemplo, em problemas de otimização. O capítulo 7 descreve algumas estruturas auto-ajustáveis, isto é, cuja forma se modifica dinamicamente, visando tornar mais eficiente a sua manipulação. O capítulo 8 estuda as tabelas de dispersão, um método eficiente para resolver o problema de busca. O capítulo 9 descreve as árvores digitais, estruturas empregadas no processamento de textos. Finalmente, o capítulo 10 é dedicado a problemas envolvendo cadeias, caso em que os dados são dispostos sem qualquer tipo de estrutura.

Todos os capítulos contêm exercícios e notas bibliográficas. Os exercícios se encontram em ordem de apresentação do material. Os símbolos ° e •, ao lado dos exercícios, indicam dificuldade média e maior, respectivamente. Alguns dos exercícios marcados com • são problemas de pesquisa.

Para a realização deste trabalho, agradecemos o suporte recebido da Universidade Federal do Rio de Janeiro, nossa instituição de origem, bem como do Laboratoire de Recherche en Informatique, Université Paris-Sud, Orsay, França, e do Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Montreal, Canadá, onde, respectivamente, permanecemos como pesquisadores visitantes, durante parte do tempo em que este livro foi escrito.

Na fase em que foi utilizado como texto nas disciplinas da UFRJ, diversos alunos contribuíram com sugestões e se dedicaram ao trabalho de busca e correção de erros. Somos gratos aos alunos por esta contribuição. Manifestamos os nossos agradecimentos a José Fábio Marinho de Araújo e Ysmar Vianna e Silva Filho, pelo apoio recebido. Finalmente, à LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, pela qualidade de seu trabalho.

*Jayme Luiz Szwarcfiter*

*Lilian Markenzon*

Fevereiro 1994

# Sumário

## Capítulo 1 – Introdução, 1

- 1.1 – Introdução, 1
- 1.2 – Apresentação dos Algoritmos, 2
- 1.3 – Recursividade, 4
- 1.4 – Complexidade de Algoritmos, 7 *2*
- 1.5 – A Notação O, 10 *12*
- 1.6 – Algoritmos Ótimos, 13 *12*
- 1.7 – Exercícios, 15
- Notas bibliográficas, 17

## Capítulo 2 – Listas Lineares, 19

- 2.1 – Introdução, 19
- 2.2 – Alocação Seqüencial, 20
- 2.3 – Listas Lineares em Alocação Seqüencial, 21
- 2.4 – Pilhas e Filas, 28
- 2.5 – Aplicação: Notação Polonesa , 32 *2*
- 2.6 – Alocação Encadeada, 34
- 2.7 – Listas Lineares em Alocação Encadeada, 37
  - 2.7.1 – Listas simplesmente encadeadas, 37
  - 2.7.2 – Pilhas e filas, 40
  - 2.7.3 – Listas circulares, 43
  - 2.7.4 – Listas duplamente encadeadas, 45
- 2.7.5 – Aplicação: ordenação topológica, 47 *2*
- 2.8 – Alocação de Espaço de Tamanho Variável, 52 *2*
- 2.9 – Exercícios, 55
- Notas bibliográficas, 59

## Capítulo 3 – Árvores, 61

- 3.1 – Introdução, 61
- 3.2 – Definições e Representações Básicas, 62
- 3.3 – Árvores Binárias, 67
- 3.4 – Percurso em Árvores Binárias, 74
- 3.5 – Conversão de uma Floresta, 79
- 3.6 – Árvores com Costura, 83 
- 3.7 – Exercícios, 85
- Notas bibliográficas, 90

## Capítulo 4 – Árvores Binárias de Busca, 91

- 4.1 – Introdução, 91
- 4.2 – Árvore Binária de Busca, 92
  - 4.2.1 – Conceitos básicos, busca e inserção, 92
  - 4.2.2 – Busca com freqüências de acesso diferenciadas, 99
- 4.3 – Árvore de Partilha, 107
  - 4.3.1 – Conceitos Básicos, 107
  - 4.3.2 – A busca em árvores binárias de partilha, 107
  - 4.3.3 – Árvore binária de partilha ótima, 109
- 4.4 – Exercícios, 119
- Notas bibliográficas, 125

## Capítulo 5 – Árvores Balanceadas, 127

- ATÉ AQUI
- 5.1 – Introdução, 127
  - 5.2 – O Conceito de Balanceamento, 128 
  - 5.3 – Árvores AVL, 130
    - 5.3.1 – Balanceamento de árvores AVL, 130
    - 5.3.2 – Inclusão em árvores AVL, 134
    - 5.3.3 – Implementação da inclusão, 139
  - 5.4 – Árvores Graduadas e Rubro-negras, 144
    - 5.4.1 – Descrição, 144
    - 5.4.2 – Balanceamento, 150
    - 5.4.3 – Inclusão, 153
    - 5.4.4 – Implementação, 156
  - 5.5 – Árvores B, 160
    - 5.5.1 – Conceitos básicos, 160
    - 5.5.2 – Busca, inserção e remoção, 163

- 5.5.3 – Custos de busca, inserção e remoção, 169
- 5.6 – Exercícios, 171
- Notas bibliográficas, 174

## **Capítulo 6 – Listas de Prioridades, 175**

- 6.1 – Introdução, 175
- 6.2 – Implementação de Listas de Prioridades, 176
- 6.3 – Alteração de Prioridades, 179
- 6.4 – Inserção e Remoção em Listas de Prioridades, 182
- 6.5 – Construção de uma Lista de Prioridades, 184
- 6.6 – Aplicação: Ordenação, 185
- 6.7 – Máximos e Mínimos, 186
- 6.8 – Exercícios, 192
- Notas bibliográficas, 194

## **Capítulo 7 – Estruturas Auto-ajustáveis, 195**

- 7.1 – Introdução, 195
- 7.2 – Complexidade Amortizada, 196
- 7.3 – Listas, 199
  - 7.3.1 – Métodos de auto-ajuste para listas, 200
  - 7.3.2 – Análise do método mover para a frente, 202
- 7.4 – Conjuntos, 205
  - 7.4.1 – Fusão por tamanho, 207
  - 7.4.2 – Compactação de caminhos, 210
  - 7.4.3 – A complexidade das operações, 213
- 7.5 – Árvores de Difusão, 214
  - 7.5.1 – Operações de Difusão, 215
  - 7.5.2 – Complexidade das operações de difusão, 219
- 7.6 – Exercícios, 223
- Notas bibliográficas, 226

## **Capítulo 8 – Tabelas de Dispersão, 227**

- 8.1 – Introdução, 227
- 8.2 – Princípio de Funcionamento, 228
- 8.3 – Funções de Dispersão, 230
  - 8.3.1 – Método da divisão, 231
  - 8.3.2 – Método da dobraria, 232

- 8.3.3 – Método da multiplicação, 234
- 8.3.4 – Método da análise dos dígitos, 235
- 8.4 – Tratamento de Colisões por Encadeamento, 236
  - 8.4.1 – Encadeamento exterior, 236
  - 8.4.2 – Encadeamento interior, 239
- 8.5 – Tratamento de Colisões por Endereçamento Aberto, 243
  - 8.5.1 – Tentativa linear, 245
  - 8.5.2 – Tentativa quadrática, 247
  - 8.5.3 – Dispersão dupla, 248
- 8.6 – Tabela de Dimensão Dinâmica, 250
- 8.7 – Exercícios, 255
- Notas bibliográficas, 258

## **Capítulo 9 – Busca Digital, 259**

- 9.1 – Introdução, 259
- 9.2 – Árvore Digital, 260
- 9.3 – Árvore Digital Binária, 265
- 9.4 – Árvore Patrícia, 268
- 9.5 – Exercícios, 274
- Notas bibliográficas, 275

## **Capítulo 10 – Processamento de Cadeias, 277**

- 10.1 – Introdução, 277
- 10.2 – O Problema do Casamento de Cadeias, 278
- 10.3 – O Algoritmo da Força Bruta, 279
- 10.4 – O Algoritmo de Knuth, Morris e Pratt, 281
- 10.5 – Compactação de Dados, 292
- 10.6 – O Algoritmo de Freqüência de Caracteres, 293
- 10.7 – O Algoritmo de Huffman, 294
- 10.8 – Exercícios, 301
- Notas bibliográficas, 305

## **Referências Bibliográficas, 307**

## **Índice Analítico, 315**

---

# Preliminares

## 1.1 – Introdução

Um algoritmo é um processo sistemático para a resolução de um problema. O desenvolvimento de algoritmos é particularmente importante para problemas a serem solucionados em um computador, pela própria natureza do instrumento utilizado. Neste livro são abordados apenas esses problemas. Existem dois aspectos básicos no estudo de algoritmos: a *correção* e a *análise*. O primeiro consiste em verificar a exatidão do método empregado, o que é realizado através de uma prova matemática. A análise visa à obtenção de parâmetros que possam avaliar a eficiência do algoritmo em termos de tempo de execução e memória ocupada. A análise é realizada através de um estudo do comportamento do algoritmo. Ambos os aspectos serão considerados neste livro.

Um algoritmo computa uma *saída*, o resultado do problema, a partir de uma *entrada*, as informações inicialmente conhecidas e que permitem encontrar a solução do problema. Durante o processo de computação, o algoritmo manipula *dados*, gerados a partir de sua entrada. Quando os dados são dispostos e manipulados de uma forma homogênea, constituem um *tipo abstrato de dados*. Este é composto por um modelo matemático acompanhado por um conjunto de operações definido sobre esse modelo. Um algoritmo é projetado em termos de tipos abstratos de dados. Para implementá-los numa linguagem de programação, é necessário encontrar uma forma de representá-los nessa linguagem, utilizando tipos e operações suportadas pelo

computador. Na representação do modelo matemático emprega-se uma *estrutura de dados*, o assunto deste livro.

As estruturas diferem umas das outras pela disposição ou manipulação de seus dados. A disposição dos dados em uma estrutura obedece a condições preestabelecidas e caracteriza a estrutura.

O estudo de estruturas de dados não pode ser desvinculado de seus aspectos algorítmicos. A escolha correta da estrutura adequada a cada caso depende diretamente do conhecimento de algoritmos para manipular a estrutura de maneira eficiente. O conhecimento de princípios de complexidade computacional é, portanto, requisito básico para se avaliar corretamente a adequação de uma estrutura de dados. Essa preocupação algorítmica constitui fator dominante na escolha da forma de apresentação das estruturas descritas neste texto.

Este capítulo contém, principalmente, a notação e os conceitos básicos utilizados ao longo do texto. A seção 1.2 descreve a linguagem em que os algoritmos serão apresentados. Alguns desses algoritmos são recursivos. Uma noção geral de recursividade é, então, apresentada na seção 1.3. A seção seguinte, 1.4, introduz o conceito de complexidade, utilizado para avaliar a eficiência de algoritmos. As complexidades são obtidas, geralmente, através de uma notação matemática especial, denominada notação  $O$ . Este é o objeto da seção 1.5. Finalmente, o conceito de algoritmo ótimo é descrito na seção 1.6.

## 1.2 – Apresentação dos Algoritmos

Ao longo deste texto, os algoritmos serão descritos através de uma linguagem de leitura simples. Ela possui estrutura semelhante ao Pascal, por exemplo. Contudo, para facilitar a sua interpretação, será adotado o estilo do livre formato, quando conveniente.

As convenções seguintes serão utilizadas com respeito à linguagem.

- A linguagem possui uma estrutura de blocos semelhante ao Pascal. O início e o final de cada bloco são determinados por endentação, isto é, pela posição da margem esquerda. Se uma certa linha do algoritmo inicia um bloco, ele se estende até a última linha seguinte, cuja margem esquerda se localiza mais à direita do que a primeira do bloco. Por

exemplo, o bloco iniciado por `para` no algoritmo 1.1 inclui as três linhas seguintes.

- A declaração de atribuição é indicada pelo símbolo `:=`.
- As declarações seguintes são empregadas, com significado semelhante ao usual.

```
se ... então
  se ... então ... senão
    enquanto ... faça
      para ... faça
    pare
```

- Variáveis simples, vetores, matrizes e registros são considerados como tradicionalmente em linguagens de programação. Os elementos de vetores e matrizes são identificados por índices entre colchetes. Por exemplo,  $A[5]$  e  $B[i, 3]$  indicam, respectivamente, o quinto elemento do vetor  $A$  e o elemento identificado pelos índices  $(i, 3)$  da matriz  $B$ . No caso de registros, a notação  $T.chave$  indica o campo *chave* do registro  $T$ .
- A referência a registros pode ser também realizada por meio de ponteiros, que armazenam endereços, com o uso do símbolo `↑`. Cada ponteiro é associado a um único tipo de registro. Por essa razão, o nome do registro pode ser omitido. Por exemplo,  $pt \uparrow.info$  representa o campo *info* de um registro alocado no endereço contido em  $pt$ .
- São usados procedimentos e funções. A passagem de parâmetros é feita por referência, isto é, o endereço do parâmetro é transmitido para a rotina. Essa forma de transmissão possibilita a alteração do conteúdo da variável utilizada.
- A sentença imediatamente posterior ao símbolo `%` deve ser interpretada como comentário.

Como exemplo, seja uma seqüência de elementos armazenada no vetor  $S[i]$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Deseja-se inverter os elementos da seqüência no vetor, isto é, considerá-la de trás para a frente. Um algoritmo para resolver esse problema é simples. Basta trocar de posição o primeiro com o último elemento, em seguida o segundo com o antepenúltimo e assim por diante. A formulação seguinte descreve o processo.

```

algoritmo 1.1: Inversão de uma seqüênci
para  $i := 1, \dots, [n/2]$  faça
     $temp := S[i]$ 
     $S[i] := S[n - i + 1]$ 
     $S[n - i + 1] := temp$ 

```

A notação  $\lfloor x \rfloor$ , que aparece no algoritmo, significa *piso* de  $x$  e representa o maior inteiro menor ou igual a  $x$ . Analogamente,  $\lceil x \rceil$  é o *teto* de  $x$  e corresponde ao menor inteiro maior ou igual a  $x$ . Assim,  $\lfloor 9/2 \rfloor = 4$  e  $\lceil 9/2 \rceil = 5$ .

### 1.3 – Recursividade

Um tipo especial de procedimento será utilizado, algumas vezes, ao longo do texto. É aquele que contém, em sua descrição, uma ou mais chamadas a si mesmo. Um procedimento dessa natureza é denominado *recursivo*, e a chamada a si mesmo é dita *chamada recursiva*. Naturalmente, todo procedimento, recursivo ou não, deve possuir pelo menos uma chamada proveniente de um local exterior a ele. Essa chamada é denominada *externa*. Um procedimento não recursivo é, pois, aquele em que todas as chamadas são externas.

De modo geral, a todo procedimento recursivo corresponde um outro não recursivo que executa, exatamente, a mesma computação. Contudo, a recursividade pode apresentar vantagens concretas. Freqüentemente, os procedimentos recursivos são mais concisos do que um não recursivo correspondente. Além disso, muitas vezes é aparente a relação direta entre um procedimento recursivo e uma prova por indução matemática. Nesses casos, a verificação da correção pode se tornar mais simples. Entretanto, muitas vezes há desvantagens no emprego prático da recursividade. Um algoritmo não recursivo equivalente pode ser mais eficaz.

O exemplo clássico mais simples de recursividade é o cálculo do fatorial de um inteiro  $n \geq 0$ . Um algoritmo recursivo para efetuar esse cálculo encontra-se descrito em seguida. A idéia do algoritmo é muito simples. Basta observar que o fatorial de  $n$  é  $n$  vezes o fatorial de  $n - 1$ , para  $n > 0$ . Por convenção, sabe-se que  $0! = 1$ . No algoritmo a seguir, as chamadas recursivas são representadas pela função *fat*. A chamada externa é *fat(n)*.

**algoritmo 1.2:** factorial (recursivo)

**função**  $fatorial(i)$

$fat(i) := \text{se } i \leq 1 \text{ então } 1 \text{ senão } i \times fat(i - 1)$

Para efeito de comparação, o algoritmo 1.3 descreve o cálculo do fatorial de  $n$  de forma não recursiva. A variável  $fat$  representa, agora, um vetor e não mais uma função. O elemento  $fat[n]$  contém, no final, o valor do fatorial desejado.

**algoritmo 1.3:** factorial (não recursivo)

$fat[0] := 1$

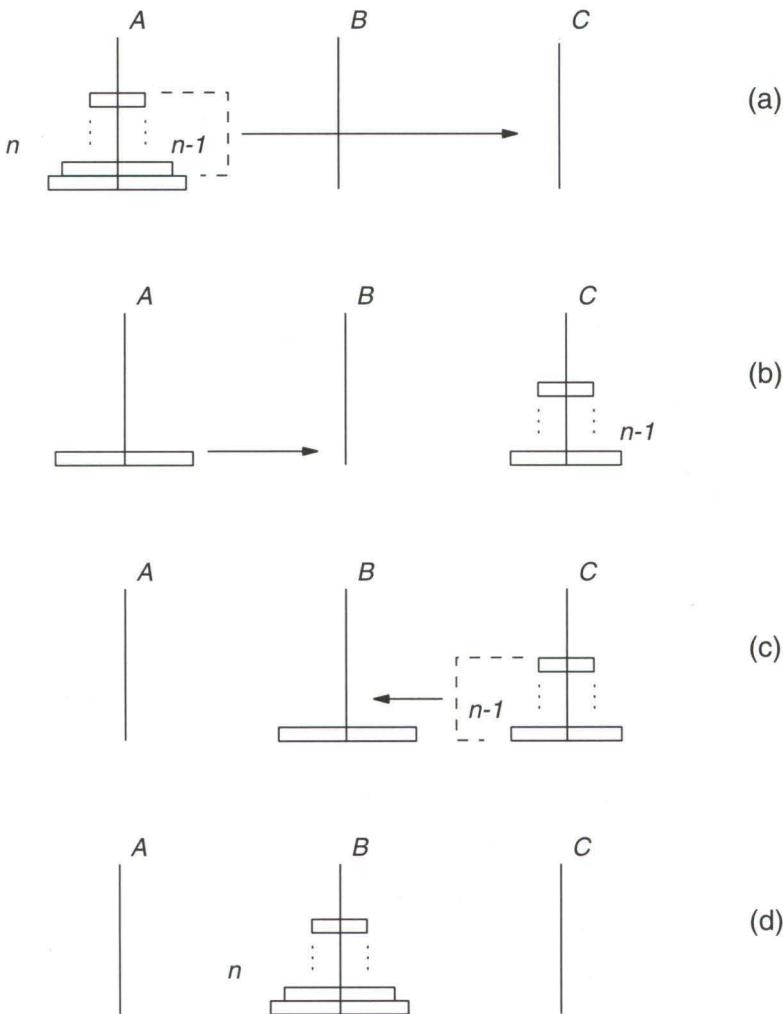
**para**  $j := 1, \dots, n$  **faça**

$fat[j] := j \times fat[j - 1]$

Um exemplo conhecido, onde a solução recursiva é natural e intuitiva, é o do *Problema da Torre de Hanói*. Este consiste em três pinos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , denominados *origem*, *destino* e *trabalho*, respectivamente, e  $n$  discos de diâmetros diferentes. Inicialmente, todos os discos se encontram empilhados no pino-origem, em ordem decrescente de tamanho, de baixo para cima. O objetivo é empilhar todos os discos no pino-destino, atendendo às seguintes restrições: (i) apenas um disco pode ser movido de cada vez, e (ii) qualquer disco não pode ser jamais colocado sobre outro de tamanho menor.

A solução do problema é descrita a seguir. Naturalmente, para  $n > 1$ , o pino-trabalho deverá ser utilizado como área de armazenamento temporário. O raciocínio utilizado para resolver o problema é semelhante ao de uma prova matemática por indução. Suponha que se saiba como resolver o problema até  $n - 1$  discos,  $n > 1$ , de forma recursiva. A extensão para  $n$  discos pode ser obtida pela realização dos seguintes passos.

- Resolver o problema da Torre de Hanói para os  $n - 1$  discos do topo do pino-origem  $A$ , supondo que o pino-destino seja  $C$  e o trabalho seja  $B$ .
- Mover o  $n$ -ésimo pino (maior de todos) de  $A$  para  $B$ .
- Resolver o problema da Torre de Hanói para os  $n - 1$  discos localizados no pino  $C$ , suposto origem, considerando os pinos  $A$  e  $B$  como trabalho e destino, respectivamente.



---

Figura 1.1: Problema da Torre de Hanói

Ao final desses passos, todos os discos se encontram empilhados no pino  $B$  e as duas restrições (i) e (ii) foram satisfeitas. O algoritmo 1.4 implementa o processo. O procedimento recursivo *hanoi* é utilizado com quatro parâmetros  $n$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , representando, respectivamente, o número de discos, o pino-origem, o destino e o trabalho.

**algoritmo 1.4:** Torre de Hanói

**procedimento** *hanoi(n, A, B, C)*

**se**  $n > 0$  **então**

*hanoi(n – 1, A, C, B)*

mover o disco do topo de *A* para *B*

*hanoi(n – 1, C, B, A)*

A figura 1.1 ilustra os passos efetuados pelo algoritmo. A chamada externa é *hanoi(n, A, B, C)*.

## 1.4 – Complexidade de Algoritmos

Conforme já mencionado, uma característica muito importante de qualquer algoritmo é o seu tempo de execução. Naturalmente, é possível determiná-lo através de métodos empíricos, isto é, obter o tempo de execução através da execução propriamente dita do algoritmo, considerando-se entradas diversas. Em contrapartida, é possível obter uma ordem de grandeza do tempo de execução através de métodos analíticos. O objetivo desses métodos é determinar uma expressão matemática que traduza o comportamento de tempo de um algoritmo. Ao contrário do método empírico, o analítico visa aferir o tempo de execução de forma independente do computador utilizado, da linguagem e compiladores empregados e das condições locais de processamento.

A tarefa de obter uma expressão matemática para avaliar o tempo de um algoritmo em geral não é simples, mesmo considerando-se uma expressão aproximada. As seguintes simplificações serão introduzidas para o modelo proposto.

- Suponha que a quantidade de dados a serem manipulados pelo algoritmo seja suficientemente grande. Isto é, algoritmos cujas entradas consistam em uma quantidade reduzida de dados não serão considerados. Somente o comportamento assintótico será avaliado, ou seja, a expressão matemática fornecerá valores de tempo que serão válidos unicamente quando a quantidade de dados correspondente crescer o suficiente.
- Não serão consideradas constantes aditivas ou multiplicativas na expressão matemática obtida. Isto é, a expressão matemática obtida será válida, a menos de tais constantes.

É necessário, ainda, definir a variável em relação à qual a expressão matemática avaliará o tempo de execução. O próprio conceito de algoritmo oferece a sugestão. Um algoritmo opera a partir de uma entrada para produzir uma saída, dentro de um tempo que se deseja avaliar. A idéia é exprimir o tempo de execução em função da entrada.

O processo de execução de um algoritmo pode ser dividido em etapas elementares, denominadas *passos*. Cada passo consiste na execução de um número fixo de operações básicas cujos tempos de execução são considerados constantes. A operação básica de maior freqüência de execução no algoritmo é denominada *operação dominante*. Como a expressão do tempo de execução do algoritmo será obtida a menos de constantes aditivas e multiplicativas, o número de passos de um algoritmo pode ser interpretado como sendo o número de execuções da operação dominante. Por exemplo, em diversos algoritmos para ordenar os elementos de uma seqüência dada, cada passo corresponde a uma comparação entre dois elementos da seqüência. Na realidade, o número de passos de um algoritmo constitui a informação de que se necessita para avaliar o seu comportamento de tempo. Assim, um algoritmo de um único passo possui tempo de execução constante.

Pelo exposto, é natural definir a expressão matemática de avaliação do tempo de execução de um algoritmo como sendo uma função que fornece o número de passos efetuados pelo algoritmo a partir de uma certa entrada.

Como exemplo, no algoritmo 1.1 de inversão de seqüências, cada entrada é uma seqüência que se deseja inverter. O algoritmo efetua, exatamente, as mesmas operações para seqüências de mesmo tamanho  $n$ . Cada passo corresponde à troca de posição entre dois elementos da seqüência. Ou seja, à execução das três instruções de atribuição dentro do bloco **para** do algoritmo. O número de passos é, pois, igual ao número de execuções do bloco **para**. Isto é, igual a  $\lfloor n/2 \rfloor$ ,  $n > 1$ .

Como exemplos adicionais, considere os problemas de determinar as matrizes soma  $C$  e produto  $D$  de duas matrizes dadas,  $A = (a_{ij})$  e  $B = (b_{ij})$ , ambas  $n \times n$ . Nesse caso,  $C$  e  $D$  também possuem dimensão  $n \times n$  e seus elementos  $c_{ij}$  e  $d_{ij}$  podem ser calculados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{ij} + b_{ij}, \\ d_{ij} &= \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} \cdot b_{kj}. \end{aligned}$$

O algoritmo 1.5 descreve a computação da matriz soma de duas matrizes, enquanto o algoritmo 1.6 fornece o produto.

**algoritmo 1.5:** Soma de matrizes

para  $i := 1, \dots, n$  faça

    para  $j := 1, \dots, n$  faça

$$c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

**algoritmo 1.6:** Produto de matrizes

para  $i := 1, \dots, n$  faça

    para  $j := 1, \dots, n$  faça

$$c_{ij} := 0$$

    para  $k := 1, \dots, n$  faça

$$c_{ij} := c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Como no caso do algoritmo 1.1, ambos os algoritmos de soma e produto efetuam as mesmas operações, respectivamente, sempre que  $A$ ,  $B$  forem matrizes de mesma dimensão  $n \times n$ . A variável independente é o parâmetro  $n$ . Cada passo do algoritmo 1.5 corresponde à execução de uma soma  $a_{ij} + b_{ij}$ , enquanto, no algoritmo 1.6, corresponde ao produto  $a_{ik} \cdot b_{kj}$ . O número total de passos é, pois, igual ao número total de somas  $a_{ij} + b_{ij}$  e produtos  $a_{ik} \cdot b_{kj}$ , respectivamente, para cada caso. Ou seja, o algoritmo 1.5 efetua  $n^2$  passos, enquanto o algoritmo 1.6 efetua  $n^3$ .

A noção de complexidade de tempo é descrita a seguir.

Seja  $A$  um algoritmo,  $\{E_1, \dots, E_m\}$  o conjunto de todas as entradas possíveis de  $A$ . Denote por  $t_i$ , o número de passos efetuados por  $A$ , quando entrada for  $E_i$ . Definem-se

$$\text{complexidade do pior caso} = \max_{E_i \in E} \{t_i\},$$

$$\text{complexidade do melhor caso} = \min_{E_i \in E} \{t_i\},$$

$$\text{complexidade do caso médio} = \sum_{1 \leq i \leq m} p_i t_i,$$

onde  $p_i$  é a probabilidade de ocorrência da entrada  $E_i$ .

De forma análoga, podem ser definidas *complexidades de espaço* de um algoritmo.

As complexidades têm por objetivo avaliar a eficiência de tempo ou espaço. A complexidade de tempo de pior caso corresponde ao número de passos

que o algoritmo efetua no seu pior caso de execução, isto é, para a entrada mais desfavorável. De certa forma, a complexidade de pior caso é a mais importante das três mencionadas. Ela fornece um limite superior para o número de passos que o algoritmo pode efetuar, em qualquer caso. Por isso mesmo é a mais utilizada. O termo *complexidade* será, então, empregado com o significado de complexidade de pior caso.

A complexidade de melhor caso é de uso bem menos freqüente. É empregada em situações específicas. A complexidade de caso médio, apesar de importante, é menos utilizada do que a de pior caso, por dois motivos. Em primeiro lugar, ela exige o prévio conhecimento da distribuição de probabilidades das diferentes entradas do algoritmo. Em diversos casos, essa distribuição é desconhecida. Além disso, o cálculo de seu valor  $\sum p_i t_i$  freqüentemente é de tratamento matemático complexo.

## 1.5 – A Notação O

Observe que as definições de complexidade da seção anterior implicam o atendimento das duas simplificações mencionadas no início do parágrafo. Em consequência, quando se considera o número de passos efetuados por um algoritmo, podem-se desprezar constantes aditivas ou multiplicativas. Por exemplo, um valor de número de passos igual a  $3n$  será aproximado para  $n$ . Além disso, como o interesse é restrito a valores assintóticos, termos de menor grau também podem ser desprezados. Assim, um valor de número de passos igual a  $n^2 + n$  será aproximado para  $n^2$ . O valor  $6n^3 + 4n - 9$  será transformado em  $n^3$ .

Torna-se útil, portanto, descrever operadores matemáticos que sejam capazes de representar situações como essas. As notações  $O$ ,  $\Omega$  e  $\Theta$  serão utilizadas com essa finalidade.

Sejam  $f, h$  funções reais positivas de variável inteira  $n$ . Diz-se que  $f$  é  $O(h)$ , escrevendo-se  $f = O(h)$ , quando existir uma constante  $c > 0$  e um valor inteiro  $n_0$ , tal que

$$n > n_0 \Rightarrow f(n) \leq c \cdot h(n).$$

Ou seja, a função  $h$  atua como um limite superior para valores assintóticos da função  $f$ . Em seguida são apresentados alguns exemplos da notação  $O$ .

$$f = n^2 - 1 \Rightarrow f = O(n^2).$$

$$f = n^2 - 1 \Rightarrow f = O(n^3).$$

$$f = 403 \Rightarrow f = O(1).$$

$$f = 5 + 2 \log n + 3 \log^2 n \Rightarrow f = O(\log^2 n).$$

$$f = 5 + 2 \log n + 3 \log^2 n \Rightarrow f = O(n).$$

$$f = 3n + 5 \log n + 2 \Rightarrow f = O(n).$$

$$f = 5 \cdot 2^n + 5n^{10} \Rightarrow f = O(2^n).$$

As seguintes propriedades são úteis para manipular expressões em notação  $O$ . Elas decorrem diretamente da definição.

Sejam  $g, h$  funções reais positivas e  $k$  uma constante. Então

- (i)  $O(g + h) = O(g) + O(h),$
- (ii)  $O(k \cdot g) = k \cdot O(g) = O(g).$

Essas duas propriedades foram empregadas, implicitamente, nos exemplos anteriores.

A notação  $O$  será utilizada, ao longo deste texto, para exprimir complexidades. Por exemplo, seja determinar as complexidades de pior, melhor e caso médio dos algoritmos 1.1 a 1.6. Todos eles apresentam a propriedade de o número de passos manter-se o mesmo quando aplicados a entradas diferentes de mesmo tamanho. Ou seja, para um mesmo valor de  $n$ , o número de passos mantém-se constante. Como a variável independente é o valor  $n$ , conclui-se que as complexidades de pior, melhor e caso médio são todas iguais entre si para cada algoritmo. O algoritmo 1.1 efetua sempre  $\lfloor n/2 \rfloor$  passos. Logo, a sua complexidade é  $O(n)$ . No algoritmo 1.3, o número de passos é igual ao número de produtos  $j \cdot \text{fat}(j - 1)$ , isto é,  $n$ . Sua complexidade, portanto, é  $O(n)$ . Da mesma forma, verifica-se de imediato que as complexidades dos algoritmos 1.5 e 1.6 são iguais a  $O(n^2)$  e  $O(n^3)$ , respectivamente.

Para encontrar a complexidade de procedimentos recursivos, pode-se aplicar a seguinte técnica. Determina-se o número total de chamadas ao procedimento recursivo. Em seguida, calcula-se a complexidade da execução correspondente a uma única chamada, sem que se considerem as chamadas recursivas encontradas. A complexidade total será o produto do número de

chamadas pela complexidade da computação de uma chamada isolada. Por exemplo, para calcular o factorial de  $n > 0$ , de forma recursiva, o algoritmo 1.2 efetua um total de  $n$  chamadas ao procedimento *fat*. A complexidade da computação correspondente a uma chamada é constante, isto é,  $O(1)$ . De fato, para  $n > 1$ , apenas um produto é efetuado e, quando  $n \leq 1$ , apenas uma atribuição é executada. Logo, a complexidade final do algoritmo é  $O(n)$ . A complexidade do algoritmo recursivo 1.4, para resolver o problema da Torre de Hanói, é  $O(2^n)$ , segundo o exercício 1.4.

Conforme mencionado, os algoritmos até agora examinados efetuam exatamente os mesmos passos para entradas diferentes de mesmo tamanho. Sem dúvida, este não é o caso geral. Como exemplo, suponha um problema cuja entrada consista em duas matrizes  $A$  e  $B$ , de dimensões  $n \times n$ , e um parâmetro binário  $x$ , com valores possíveis 0 e 1. Dependendo do valor de  $x$ , deve-se calcular a soma ou o produto das matrizes. Isto é, se  $x = 0$ , calcular a matriz  $A + B$ , ou, se  $x = 1$ , calcular  $A \cdot B$ . Um algoritmo para efetuar essa tarefa é simples. Sua entrada consiste em  $n^2 + 1$  informações, isto é, possui tamanho  $O(n^2)$ . Em seguida, verifica-se o valor  $x$  obtido da entrada. Se  $x = 0$ , então executa-se o algoritmo 1.5 da soma de matrizes. Se  $x = 1$ , o algoritmo 1.6 de produto de matrizes. Nesse caso, para cada valor de  $n$ , o algoritmo é sensível a duas entradas distintas, correspondendo aos valores 0 e 1 de  $x$ , respectivamente. A complexidade de melhor caso corresponde a  $x = 0$  e é dada pela complexidade do algoritmo 1.5, ou seja,  $O(n^2)$ . O pior caso ocorre quando  $x = 1$ . Sua complexidade é obtida do algoritmo 1.6, isto é,  $O(n^3)$ . Para determinar a complexidade do caso médio, seja  $q$  a probabilidade de que o valor de  $x$ , da entrada, seja igual a 0. Então a expressão da complexidade do caso médio é  $q n^2 + (1 - q)n^3$ . Um outro exemplo de complexidade de caso médio será descrito no próximo capítulo.

A notação  $\Theta$ , descrita a seguir, é útil para exprimir limites superiores justos. Sejam  $f$ ,  $g$  funções reais positivas da variável inteira  $n$ . Diz-se que  $f$  é  $\Theta(g)$ , escrevendo-se  $f = \Theta(g)$ , quando ambas as condições  $f = O(g)$  e  $g = O(f)$  forem verificadas. A notação  $\Theta$  expõe o fato de que duas funções possuem a mesma ordem de grandeza assintótica. Por exemplo, se  $f = n^2 - 1$ ,  $g = n^2$  e  $h = n^3$ , então  $f$  é  $O(g)$ ,  $f$  é  $O(h)$ ,  $g$  é  $O(f)$ , mas  $h$  não é  $O(f)$ . Conseqüentemente,  $f$  é  $\Theta(g)$ , mas  $f$  não é  $\Theta(h)$ . Da mesma forma, se  $f = 5 + 2\log n + \log^2 n$  e  $g = n$ , então  $f$  é  $O(g)$ , porém  $f$  não é  $\Theta(g)$ . No caso,  $f$  é  $\Theta(\log^2 n)$ .

Assim como a notação  $O$  é útil para descrever limites superiores assintóticos, a notação  $\Omega$ , definida a seguir, é empregada para limites inferiores assintóticos.

Sejam  $f, h$  funções reais positivas da variável inteira  $n$ . Diz-se que  $f$  é  $\Omega(h)$ , escrevendo-se  $f = \Omega(h)$  quando existir uma constante  $c > 0$  e um valor inteiro  $n_0$ , tal que

$$n > n_0 \Rightarrow f(n) \geq c \cdot h(n).$$

Por exemplo, se  $f = n^2 - 1$ , então são válidas as igualdades  $f = \Omega(n^2)$ ,  $f = \Omega(n)$  e  $f = \Omega(1)$ , mas não vale  $f = \Omega(n^3)$ .

## 1.6 – Algoritmos Ótimos

A noção de complexidade está relacionada a um dado algoritmo. Ela visa determinar o número de passos efetuados por um algoritmo específico, sem levar em consideração a possível existência de outros algoritmos para o mesmo problema. Essa questão mais abrangente será abordada na presente seção.

Seja  $P$  um problema. Um *limite inferior* para  $P$  é uma função  $\ell$ , tal que a complexidade de pior caso de qualquer algoritmo que resolva  $P$  é  $\Omega(\ell)$ . Isto é, todo algoritmo que resolve  $P$  efetua, pelo menos,  $\Omega(\ell)$  passos. Se existir um algoritmo  $A$ , cuja complexidade seja  $O(\ell)$ , então  $A$  é denominado *algoritmo ótimo* para  $P$ . Nesse caso, o limite  $\Omega(\ell)$  é o melhor (maior) possível.

Intuitivamente, um algoritmo ótimo é aquele que apresenta a menor complexidade dentre todos os possíveis algoritmos existentes para resolver o mesmo problema. Assim como a notação  $O$  é conveniente para exprimir complexidades, a notação  $\Omega$  é utilizada para limites inferiores.

Existem limites inferiores naturais, como, por exemplo, o tamanho da entrada. Todo possível algoritmo para o problema considerado deverá, necessariamente, efetuar a leitura da entrada. Assim, por exemplo, a entrada do algoritmo 1.1, de inversão de seqüências, consiste em uma seqüência de  $n$  elementos. Qualquer possível algoritmo para inverter a seqüência deverá efetuar a sua leitura. Isto é, um limite inferior para o problema de inversão de seqüências é  $\Omega(n)$ . A complexidade do algoritmo 1.1 é  $O(n)$ . Conclui-se então que ele é um algoritmo ótimo. Da mesma forma, qualquer algoritmo

para somar duas matrizes  $n \times n$  deverá, em primeiro lugar, efetuar a sua leitura. Isto é, um limite inferior para o problema de soma de matrizes é  $\Omega(n^2)$ . A complexidade do algoritmo 1.5, para somar as matrizes, é  $O(n^2)$ . Logo, ele é ótimo. Analogamente, um limite inferior para o problema do produto de matrizes é  $O(n^2)$ . A complexidade do algoritmo 1.6, que calcula o produto de matrizes é  $O(n^3)$ . Em princípio, nada poderia ser dito acerca desse algoritmo, quanto a reconhecê-lo como ótimo ou não. Contudo, são conhecidos algoritmos que efetuam o produto de matrizes dentro de uma complexidade inferior a  $O(n^3)$ . Isso significa que o algoritmo 1.6 não é ótimo.

De modo geral, o interesse é determinar a função que represente o *maior* limite inferior possível para um problema. Analogamente, para um certo algoritmo, o interesse é encontrar a função representativa da *menor* complexidade de pior caso do algoritmo. A determinação de complexidades justas é realizada, sem dificuldades, para uma grande quantidade de algoritmos conhecidos. O mesmo não se dá, contudo, para os limites inferiores. Sem dúvida, a determinação de limites inferiores triviais, como os provenientes do tamanho da entrada, pode ser de pouco interesse se os valores obtidos forem de grandeza sensivelmente inferior às complexidades dos algoritmos conhecidos. O cálculo de limites inferiores, de modo geral, não é um problema simples. Esse cálculo se baseia no desenvolvimento de propriedades matemáticas do problema, independentemente dos algoritmos empregados. Na realidade, são relativamente poucos os problemas para os quais existem limites inferiores não triviais conhecidos, como, por exemplo, o problema de ordenar uma sequência de  $n$  elementos. O limite trivial, extraído da leitura, é  $\Omega(n)$ . Contudo, há uma prova matemática de que  $\Omega(n \log n)$  é um limite inferior. Por outro lado, existem algoritmos conhecidos de ordenação, cujas complexidades são  $O(n \log n)$ . Isso permite concluir que tais algoritmos são ótimos e que o limite  $\Omega(n \log n)$  é o melhor possível. Para uma quantidade imensa de problemas de interesse, a distância entre o melhor (maior) limite inferior conhecido e o algoritmo de melhor (menor) complexidade é grande. Por exemplo, existem muitos problemas cujo maior limite inferior conhecido é um polinômio na variável representativa do tamanho da entrada, enquanto a menor complexidade de um algoritmo conhecido é exponencial nesta variável. Em todos esses casos, permanece a dúvida quanto a se é possível provar um novo limite inferior mais alto ou desenvolver um novo algoritmo de complexidade mais baixa ou ambos.

## 1.7 - Exercícios

**1.1** Responder se é certo ou errado:

Todo procedimento recursivo deve incorporar terminações sem chamadas recursivas, caso contrário ele seria executado um número infinito de vezes.

**1.2** Responder se é certa ou errada cada afirmativa abaixo:

- (i) O algoritmo 1.2, que calcula o fatorial de forma recursiva, requer apenas uma quantidade constante de memória.
- (ii) O algoritmo 1.3, fatorial não recursivo, requer o armazenamento do vetor *fat*, com  $n + 1$  elementos.

**1.3** Desenvolver um algoritmo não recursivo para o cálculo do fatorial de inteiro  $n \geq 0$ , de tal forma que prescinda do armazenamento de qualquer vetor.

**1.4** Mostrar que o algoritmo 1.4, para o problema da Torre de Hanói, requer exatamente  $2^n - 1$  movimentos de disco para terminar.

**1.5°** Provar que é mínimo o número de movimentos de discos no problema da Torre de Hanói, dado no exercício anterior.

**1.6** Escrever uma prova de correção para o algoritmo 1.4.

**1.7** Reescrever o algoritmo 1.4, de forma que a recursividade pare no nível correspondente a  $n = 1$ , e não a  $n = 0$ , como no algoritmo do texto. Há alguma vantagem em realizar essa modificação? Qual?

**1.8°** Elaborar um algoritmo não recursivo para o problema da Torre de Hanói.

**1.9** Considere a seguinte generalização do problema da Torre de Hanói. O problema, agora, consiste em  $n$  discos de tamanhos distintos e quatro pinos, respectivamente, o de origem, o de destino e dois pinos de trabalho. De resto, o problema é como no caso de três pinos. Isto é, de início, os discos se encontram todos no pino-origem, em ordem decrescente de tamanho, de baixo para cima. O objetivo é empilhar todos os discos no pino-destino, satisfazendo às condições (i) e (ii) do caso dos três pinos, descrito na seção 1.3.

Elaborar um algoritmo para resolver essa generalização. Determinar o número de movimentos de disco efetuados.

**1.10•** Elaborar um algoritmo para resolver o problema da Torre de Hanói, com quatro pinos, cujo número de movimentos de disco seja mínimo.

1.11º Elaborar um algoritmo para resolver o problema da Torre de Hanói com  $m \geq 3$  pinos, isto é, em que  $m - 2$  pinos são de trabalho. Determinar o número de movimentos de disco efetuados.

1.12º Provar ou dar contra-exemplo:

A solução do problema da Torre de Hanói é única. Isto é, só há uma única seqüência de movimentos de discos que conduz à solução, a menos de repetições de movimentos.

1.13 Repetir o exercício 1.12 para o caso de quatro pinos.

1.14 Escrever as seguintes funções em notação  $O$ :

$$n^3 - 1; \quad n^2 + 2 \log n; \quad 3n^n + 5 \cdot 2^n; \quad (n-1)^n + n^{n-1}; \quad 302.$$

1.15 Responder se é certo ou errado:

Se  $f, g$  são funções tais que  $f = O(g)$  e  $g = \Omega(f)$ , então  $f = \Theta(g)$ .

1.16 Responder se é certo ou errado:

A definição da notação  $\Theta$ , dada na seção 1.5, é equivalente à seguinte: sejam  $f, h$  funções reais positivas da variável inteira  $n$ . Diz-se que  $f = \Theta(h)$  quando existirem constantes  $c, d > 0$  e um valor inteiro  $n_0$ , tal que

$$n > n_0 \Rightarrow c \cdot h(n) \leq f(n) \leq d \cdot h(n).$$

1.17 Responder se é certo ou errado:

Se a complexidade de melhor caso de um algoritmo for  $f$ , então o número de passos que o algoritmo efetua, qualquer que seja a entrada, é  $\Omega(f)$ .

1.18 Responder se é certo ou errado:

Se a complexidade de pior caso de um algoritmo for  $f$ , então o número de passos que o algoritmo efetua, qualquer que seja a entrada, é  $\Theta(f)$ .

1.19 Responder se é certo ou errado:

A complexidade de melhor caso de um algoritmo para um certo problema é necessariamente maior do que qualquer limite inferior para o problema.

1.20 A *seqüência de Fibonacci* é uma seqüência de elementos  $f_1, \dots, f_n$ , definida do seguinte modo:

$$f_1 = 0,$$

$$f_2 = 1,$$

$$f_j = f_{j-1} + f_{j-2}, \quad j > 2.$$

Elaborar um algoritmo, não recursivo, para determinar o elemento  $f_n$  da seqüência, cuja complexidade seja linear em  $n$ .

1.21º Determinar a expressão do elemento  $f_n$  da seqüência de Fibonacci em termos de  $n$ .

1.22º Determinar o número de chamadas recursivas e a complexidade do seguinte algoritmo, para determinar o elemento  $f_n$  da seqüência de Fibonacci.

**função  $f(n)$**

```

 $f := \text{ se } n = 1 \text{ então } 0$ 
 $\quad \quad \quad \text{senão se } n = 2 \text{ então } 1$ 
 $\quad \quad \quad \text{senão } f(n - 1) + f(n - 2)$ 

```

1.23 Considere a seguinte seqüência de elementos  $g_1, \dots, g_n$  para um dado valor de  $k$ .

$$\begin{aligned} g_j &= j - 1, \quad 1 \leq j \leq k; \\ g_j &= g_{j-1} + g_{j-2}, \quad j > k. \end{aligned}$$

Elaborar um algoritmo para determinar o elemento  $g_n$  da seqüência, cuja complexidade seja  $O(n)$ .

## Notas Bibliográficas

As obras de Knuth [Kn68], [Kn69] e [Kn73] formam o texto pioneiro que comprehende o estudo de algoritmos e estruturas de dados, de forma sistemática. Outro importante marco no estudo de algoritmos é o livro de Aho, Hopcroft e Ullman [Ah74]. Os livros de Gonnet e Baeza-Yates [Go91] e de Cormen, Leiserson e Rivest [Co90] figuram entre os mais abrangentes na área. Mencionam-se, ainda, os livros de Baase [Ba88], Kozen [Ko92] e Froidevaux, Gaudel e Soria [Fr90]. O estudo da matemática relacionada à análise de algoritmos pode ser encontrado nos livros de Greene e Knuth [Gr82] e Graham, Knuth e Patashnik [Gr89]. O estudo da análise do caso médio pode ser encontrado nos trabalhos de Kemp [Ke84] e Hofri [Ho87]. Um segundo livro de Aho, Hopcroft e Ullman [Ah83] apresenta o estudo de estruturas de dados sob o aspecto de tipos abstratos de dados. Em língua portuguesa, mencionam-se os livros de Ziviani [Zi93], Terada [Te91] e Veloso, Santos, Azeredo e Furtado [Ve83].

---

# Listas Lineares

## 2.1 - Introdução

Dentre as estruturas de dados não primitivas, as listas lineares são as de manipulação mais simples. Neste capítulo, são discutidos seus algoritmos e estruturas de armazenamento.

Uma lista linear agrupa informações referentes a um conjunto de elementos que, de alguma forma, se relacionam entre si. Ela pode se constituir, por exemplo, de informações sobre os funcionários de uma empresa, sobre notas de compras, itens de estoque, notas de alunos etc. Na realidade, são inúmeros os tipos de dados que podem ser descritos por listas lineares.

Uma *lista linear*, ou *tabela*, é então um conjunto de  $n \geq 0$  nós  $\mathcal{L}[1], \mathcal{L}[2], \dots, \mathcal{L}[n]$  tais que suas propriedades estruturais decorrem, unicamente, da posição relativa dos nós dentro da seqüência linear. Tem-se:

- se  $n > 0$ ,  $\mathcal{L}[1]$  é o primeiro nó,
- para  $1 < k \leq n$ , o nó  $\mathcal{L}[k]$  é precedido por  $\mathcal{L}[k - 1]$ .

As operações mais freqüentes em listas são a *busca*, a *inclusão* e a *remoção* de um determinado elemento, o que, aliás, ocorre na maioria das estruturas de dados. Tais operações podem ser consideradas como básicas e, por essa razão, é necessário que os algoritmos que as implementem sejam eficientes. Outras operações, também importantes, podem ser mencionadas: a alteração de um elemento da lista, a combinação de duas ou mais listas lineares em uma única, a ordenação dos nós segundo um determinado campo, a determinação

do primeiro (ou do último) nó da lista, a determinação da cardinalidade da lista e muitas outras, dependendo do problema em estudo.

Casos particulares de listas são de especial interesse. Se as inserções e remoções são permitidas apenas nas extremidades da lista, ela recebe o nome de *deque* (uma abreviatura do inglês “double ended queue”). Se as inserções e as remoções são realizadas somente em um extremo, a lista é chamada *pilha*, sendo denominada *fila* no caso em que inserções são realizadas em um extremo e remoções em outro. Operações referentes a esses casos particulares serão analisadas individualmente.

O tipo de armazenamento de uma lista linear pode ser classificado de acordo com a posição relativa (sempre contígua ou não) na memória de dois nós consecutivos na lista. O primeiro caso corresponde à *alocação seqüencial de memória*, enquanto o segundo é conhecido como *alocação encadeada*. A escolha de um ou outro tipo depende essencialmente das operações que serão executadas sobre a lista, do número de listas envolvidas na operação, bem como das características particulares dessas listas. Nas seções que se seguem, tais alocações e suas características serão discutidas.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. O estudo é iniciado pela alocação seqüencial, apresentada na seção 2.2. Em seguida, são examinadas as listas lineares estruturadas sob forma seqüencial. São descritos os algoritmos básicos de busca e efetuado o cálculo da complexidade média. Nessa mesma seção, é também apresentada a busca binária. As pilhas e filas são estudadas na seção 2.4. A seção 2.5 apresenta, como aplicação, a notação polonesa para expressões aritméticas. A alocação encadeada é objeto da seção 2.6. O estudo das listas lineares em alocação encadeada é efetuado na seção 2.7. São examinadas as listas simplesmente encadeadas: pilhas e filas em alocação encadeada, as listas circulares, bem como as listas duplamente encadeadas. Ainda nessa seção é estudado, como aplicação, o problema da ordenação topológica. A seção se encerra com o exame de listas com nós de tamanho variável.

## 2.2 – Alociação Seqüencial

A maneira mais simples de se manter uma lista linear na memória do computador é colocar seus nós em posições contíguas. Nesse caso, o endereço real

do  $(j + 1)$ -ésimo nó da lista se encontra  $c$  unidades adiante daquele correspondente ao  $j$ -ésimo. A constante  $c$  é o número de palavras de memória que cada nó ocupa. A correspondência entre o índice da tabela e o endereço real é feita automaticamente pela linguagem de programação quando da tradução do programa.

Como a implementação da alocação seqüencial em linguagens de alto nível é geralmente realizada com a reserva prévia de memória para cada estrutura utilizada, a inserção e a remoção de nós não ocorrem de fato. Em vez disso utiliza-se algum tipo de simulação para essas operações (por exemplo, variáveis indicando os limites da memória realmente utilizada). Por essa razão, pode-se considerar tal alocação como uma *alocação estática*.

O armazenamento seqüencial é particularmente atraente no caso de filas e pilhas porque, nessas estruturas, as operações básicas podem ser implementadas de forma bastante eficiente. Esse tratamento pode, contudo, se tornar oneroso em termos de memória, quando se empregam diversas estruturas simultaneamente. Nesse caso, a utilização ou não do armazenamento seqüencial dependeria de um estudo cuidadoso das opções existentes.

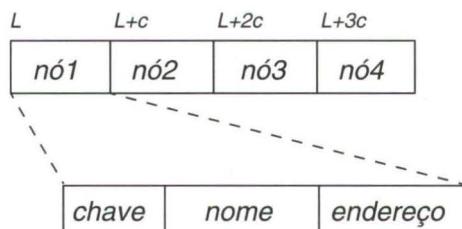
De início serão apresentadas as operações para listas genéricas.

## 2.3 – Listas Lineares em Alocação Seqüencial

Seja uma lista linear. Cada nó é formado por *campos*, que armazenam as características distintas dos elementos da lista. Além disso, cada nó da lista possui, geralmente, um identificador, denominado *chave*. Para evitar ambigüidades, supõe-se que todas as chaves são distintas. A chave, quando presente, se constitui em um dos campos do nó. Os nós podem se encontrar ordenados, ou não, segundo os valores de suas chaves. No primeiro caso, a lista é denominada *ordenada*, e *não ordenada* no caso contrário.

Suponha uma lista linear, de nome  $\mathcal{L}$ , que possui  $n$  elementos. Um exemplo da constituição dessa tabela é apresentado na figura 2.1.

O algoritmo 2.1 apresenta a busca de um nó na lista  $\mathcal{L}$ , conhecendo-se sua chave. A variável  $x$  corresponde à chave do nó procurado. A função *busca1* informa, ao final, o índice do nó que se deseja buscar; se este não for encontrado, o índice é nulo.



---

**Figura 2.1:** Exemplo de um nó

**algoritmo 2.1:** Busca de um elemento na lista  $\mathcal{L}$

**função** *busca1*(*x*)

```
i := 1;  busca1 := 0
enquanto i ≤ n faça
    se  $\mathcal{L}[i].chave = x$  então
        busca1 := i                      % chave encontrada
        i := n + 1
    senão i := i + 1                    % pesquisa prossegue
```

Observe que, para cada elemento da tabela referenciado na busca, o algoritmo realiza dois testes:  $i \leq n$  e  $\mathcal{L}[i].chave = x$ . Muitas vezes um pequeno artifício pode contribuir para a melhoria do processo. Por exemplo, o algoritmo 2.2 se propõe a efetuar a mesma busca que o algoritmo 2.1. A diferença entre os dois é a criação de um novo nó, que possui o valor procurado no campo *chave*, na posição  $n + 1$ . Dessa forma, o algoritmo sempre encontra um nó da tabela com as características desejadas, evitando o teste de fim de tabela.

**algoritmo 2.2:** Busca de um elemento na lista  $\mathcal{L}$

**função** *busca*(*x*)

```
 $\mathcal{L}[n + 1].chave := x$ ;  i := 1
enquanto  $\mathcal{L}[i].chave \neq x$  faça
    i := i + 1
    se i ≠ n + 1 então
        busca := i                      % elemento encontrado
    senão busca := 0                  % elemento não encontrado
```

A complexidade de pior caso dos algoritmos 2.1 e 2.2 é  $O(n)$ . Entretanto, o segundo é de execução mais rápida, pois a cada iteração correspondem dois testes no algoritmo 2.1 e apenas um no 2.2.

As complexidades médias dos algoritmos 2.1 e 2.2 também são idênticas. Para determiná-las, seja  $q$  a probabilidade de sucesso no resultado da busca. Além disso, suponha que sejam idênticas as probabilidades de a chave procurada se encontrar em posições distintas da lista. A observação fundamental para calcular a complexidade média é que, para o algoritmo, entradas distintas que tenham a chave procurada na mesma posição podem ser consideradas como idênticas. Assim, o algoritmo só reconhece  $n + 1$  entradas distintas, a saber: entradas em que a chave procurada se encontra na posição 1, posição 2, ..., posição  $n$  e entradas em que a chave não se encontra na lista.

Pelo capítulo 1, sabe-se que a complexidade média é dada por  $\sum p(E_k)t(E_k)$ . No caso, há somente  $n + 1$  entradas a considerar. Seja  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , uma entrada em que a chave procurada ocupa a  $i$ -ésima posição da lista, e  $E_0$  a entrada que corresponde à busca sem sucesso. Logo, as probabilidades das entradas são

$$\begin{aligned} p(E_k) &= q/n, \quad 1 \leq k \leq n \\ p(E_0) &= 1 - q, \end{aligned}$$

enquanto o número total de passos efetuados pelo algoritmo é

$$\begin{aligned} t(E_k) &= k, \quad 1 \leq k \leq n \\ t(E_0) &= n. \end{aligned}$$

Logo, a expressão da complexidade média é

$$\sum_{0 \leq k \leq n} p(E_k) t(E_k) = (1 - q)n + \sum_{1 \leq k \leq n} (q/n)k = (1/2)[(2 - q)n + q].$$

Como casos particulares, se  $q = 1$ , isto é, a chave se encontra sempre na lista, então a complexidade é  $\approx n/2$ . Se  $q = 1/2$ , esta cresce para  $\approx 3n/4$ . Se  $q = 0$ , isto é, todas as buscas são sem sucesso, a complexidade média atinge o valor  $n$ .

Quando a lista está ordenada, pode-se tirar proveito desse fato. Se o número procurado não pertence à lista, não há necessidade de percorrê-la até o final. A exemplo do algoritmo 2.2, a dupla comparação no bloco principal do algoritmo também pode ser evitada por meio da criação de um novo nó. O algoritmo 2.3 mostra essa busca.

**algoritmo 2.3:** Busca de um elemento na lista  $\mathcal{L}$ , ordenada  
função  $busca\text{-}ord}(x)$

```

 $\mathcal{L}[n + 1].chave := x; \quad i := 1$ 
enquanto  $\mathcal{L}[i].chave < x$  faça
     $i := i + 1$ 
se  $i = n + 1$  ou  $\mathcal{L}[i].chave \neq x$  então
     $busca\text{-}ord} := 0$ 
senão  $busca\text{-}ord} := i$ 

```

A complexidade de pior caso do algoritmo acima é, evidentemente, igual à dos algoritmos anteriores. Contudo, a maior eficiência do algoritmo se traduz na expressão da complexidade média. No seu cálculo, utilizam-se as mesmas premissas. Isto é,  $q$  é a probabilidade de sucesso do resultado da busca. Além disso, entradas em que a chave procurada se encontra em posições distintas da lista possuem a mesma probabilidade de ocorrência. Contudo, ao contrário do caso anterior, o algoritmo, agora, é sensível a um total de  $2n + 1$  entradas distintas, uma vez que, no algoritmo 2.3, também o insucesso pode ser reportado em situações distintas. Com isso, o número de passos efetuados  $t$  por uma busca sem sucesso torna-se variável. Por hipótese, os diferentes valores de  $t$  possuem a mesma probabilidade de ocorrência.

Para resolver o problema do caso médio, é necessário introduzir as definições seguintes. Sejam  $R_0, \dots, R_n$  conjuntos de elementos não pertencentes à lista, representando os “espaços” entre as chaves da lista em que a chave procurada poderia se encontrar. Isto é,  $R_0$  representa todos os valores possíveis menores do que a primeira chave de  $\mathcal{L}$ ,  $R_n$  corresponde aos valores maiores do que a última chave de  $\mathcal{L}$ , enquanto  $R_k$ ,  $1 \leq k < n$ , é o conjunto dos valores maiores do que a  $k$ -ésima e menores do que a  $(k + 1)$ -ésima. No caso de uma busca sem sucesso, a chave procurada se encontra em um dos conjuntos  $R_k$ .

As  $2n + 1$  entradas distintas podem ser descritas como:

$E_k$  = entrada em que a chave procurada é  $\mathcal{L}[k].chave$ ,  $1 \leq k \leq n$ ;

$E'_k$  = entrada em que a chave procurada pertence a  $R_k$ ,  $0 \leq k \leq n$ .

As probabilidades das entradas são:

$$p(E_k) = q/n, \quad 1 \leq k \leq n$$

$$p(E'_k) = (1 - q)/(n + 1), \quad 0 \leq k \leq n,$$

enquanto os números de iterações correspondentes são:

$$t(E_k) = k, \quad 1 \leq k \leq n$$

$$t(E'_k) = k + 1, \quad 0 \leq k \leq n$$

Logo, a expressão da complexidade média é:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n p(E_k) t(E_k) + \sum_{k=0}^n p(E'_k) t(E'_k) \\ &= \sum_{k=1}^n (q/n) \cdot k + \sum_{k=0}^n [(1 - q)/(n + 1)] \cdot (k + 1) \\ &= (n - q + 2)/2. \end{aligned}$$

Para efeito de comparação com os algoritmos 2.1 e 2.2, observe que o valor da complexidade média correspondente ao algoritmo 2.3 é aproximadamente  $n/2$ , para qualquer probabilidade  $q$ .

Ainda no caso de listas ordenadas, um algoritmo diverso e bem mais eficiente pode ser apresentado: a *busca binária*. A idéia básica do algoritmo é percorrer a tabela como se folheia, por exemplo, uma lista telefônica, abandonando-se as partes do catálogo onde o nome procurado, com certeza, não será encontrado. Em tabelas, o primeiro nó pesquisado é o que se encontra no meio; se a comparação não é positiva, metade da tabela pode ser abandonada na busca, uma vez que o valor procurado se encontra ou na metade inferior (se for menor), ou na metade superior (se for maior). Esse procedimento, aplicado recursivamente, esgota a tabela. O algoritmo 2.4 apresenta a busca.

**algoritmo 2.4:** Busca binária

**função** *busca-bin*(*x*)

```

inf := 1;   sup := n;   busca-bin := 0
enquanto inf ≤ sup faça
    meio := ⌊(inf + sup)/2⌋           % índice a ser buscado
    se L[meio].chave = x então
        busca-bin := meio           % elemento encontrado
        inf := sup + 1
    senão se L[meio].chave < x então
        inf := meio + 1
    senão sup := meio - 1

```

A complexidade do algoritmo pode ser avaliada da seguinte forma. O pior caso ocorre quando o elemento procurado é o último a ser encontrado, ou mesmo não é encontrado, isto é, quando a busca prossegue até a tabela se resumir a um único elemento. Na primeira iteração, a dimensão da tabela é *n*, e algumas operações são realizadas para situar o valor procurado. Na segunda, a dimensão se reduz a  $\lfloor n/2 \rfloor$ , e assim sucessivamente. Ora, ao final, a dimensão da tabela é 1 (observe o teste  $inf \leq sup$ ). Então, no pior caso:

- 1<sup>a</sup> iteração: a dimensão da tabela é *n*,
- 2<sup>a</sup> iteração: a dimensão da tabela é  $\lfloor n/2 \rfloor$ ,
- 3<sup>a</sup> iteração: a dimensão da tabela é  $\lfloor (\lfloor n/2 \rfloor)/2 \rfloor$ ,
- ...
- m*<sup>a</sup> iteração: a dimensão da tabela é 1.

Ou seja, o número de iterações é, no máximo,  $1 + \lceil \log_2 n \rceil$ . O tempo consumido pelas operações em cada iteração é constante. Logo, a complexidade da busca binária é  $O(\log n)$ .

Ambas as operações de inserção e remoção utilizam o procedimento de busca. No primeiro caso, o objetivo é evitar chaves repetidas e, no segundo, a necessidade de localizar o elemento a ser removido. A construção desses algoritmos implica tarefas complementares, uma vez que a ação de um é o inverso da ação do outro. A implementação dessas operações deve, naturalmente, respeitar tal fato. O algoritmo 2.5 apresenta a inserção de um nó contido na variável *novo* de chave *x*. O algoritmo 2.6 efetua a remoção de um nó sendo conhecido um de seus campos, no caso a chave *x*. Ambos os algoritmos consideram tabelas não ordenadas. A memória pressuposta disponível tem *M*

posições (na realidade  $M + 1$ , porque é necessária uma posição extra para o procedimento de busca). Devem-se levar em conta as hipóteses de se tentar fazer inserções numa lista que já ocupa  $M$  posições (situação conhecida como *overflow*), bem como a tentativa de remoção de um elemento de uma lista vazia (*underflow*). A atitude a ser tomada em cada um desses casos depende do problema tratado. Por essa razão, os procedimentos *overflow* e *underflow* são apenas indicados.

Como pode ser observado, o procedimento de inserção propriamente dito é bem simples, porém depende da busca que tem complexidade de  $O(n)$ . O algoritmo de remoção, além da busca, em geral efetua movimentação de nós, o que o torna ainda mais lento, se bem que também de complexidade  $O(n)$ .

**algoritmo 2.5:** Inserção de um nó na lista  $\mathcal{L}$

**se**  $n < M$  **então**

**se**  $busca(x) = 0$  **então**

$\mathcal{L}[n + 1] := novo\text{-valor}$

$n := n + 1$

**senão** “elemento já existe na tabela”

**senão** *overflow*

**algoritmo 2.6:** Remoção de um nó da lista  $\mathcal{L}$

**se**  $n \neq 0$  **então**

*indice* :=  $busca(x)$

**se** *indice*  $\neq 0$  **então**

*valor-recuperado* :=  $\mathcal{L}[\text{i}$ ndice $]$

**para**  $i := indice, n - 1$  **faça**

$\mathcal{L}[i] := \mathcal{L}[i + 1]$

$n := n - 1$

**senão** “elemento não se encontra na tabela”

**senão** *underflow*

Uma alternativa ao algoritmo de remoção é efetuar o deslocamento do último elemento da lista para a posição vaga. Nesse caso, entretanto, a seqüência dos elementos fica alterada.

No caso de tabelas ordenadas, o algoritmo de remoção não se modifica. O algoritmo de inserção, entretanto, precisa ser refeito, uma vez que, nesse caso, a posição do nó torna-se relevante. Isso implica movimentar parte da tabela, para permitir a inserção na posição correta, de maneira análoga à efetuada na remoção em listas não ordenadas (algoritmo 2.6). A complexidade de ambos os algoritmos (inserção e remoção) é, então,  $O(n)$ .

Observe que a utilização da busca binária diminui a complexidade da busca, mas não a da inserção ou da remoção. A complexidade dessas últimas operações é determinada pela movimentação dos nós.

## 2.4 – Pilhas e Filas

Em geral, o armazenamento seqüencial de listas é empregado quando as estruturas, ao longo do tempo, sofrem poucas remoções e inserções. Em casos particulares de listas, esse armazenamento é também empregado. Nesse caso, a situação favorável é aquela em que inserções e remoções não acarretam movimentação de nós, o que ocorre se os elementos a serem inseridos e removidos estão em posições especiais, como a primeira ou a última posição. Deques, pilhas e filas satisfazem tais condições.

Na alocação seqüencial de listas genéricas, considera-se sempre a primeira posição da lista no endereço 1 da memória disponível. Uma alternativa a essa estratégia consiste na utilização de indicadores especiais, denominados *ponteiros*, para o acesso a posições selecionadas. No caso da pilha, apenas um ponteiro precisa ser considerado, o ponteiro *topo*, pois as inserções e remoções são executadas na mesma extremidade da lista. A figura 2.2 mostra uma seqüência de operações realizadas numa pilha e o resultado de tais operações no ponteiro *topo*. Em seguida, os algoritmos 2.7 e 2.8 implementam a inserção e a remoção em uma pilha  $\mathcal{P}$ , considerando-se a memória disponível de  $M$  posições. Os algoritmos levam em consideração as hipóteses de *overflow* e *underflow*. A pilha vazia tem *topo* nulo.

**algoritmo 2.7:** Inserção na pilha  $\mathcal{P}$

```
se topo  $\neq M$  então
    topo := topo + 1
     $\mathcal{P}[\textit{topo}] := \text{novo-valor}$ 
senão overflow
```

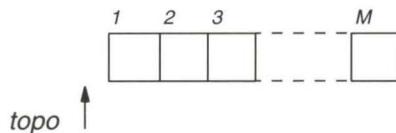
**algoritmo 2.8:** Remoção da pilha  $\mathcal{P}$

```
se topo  $\neq 0$  então
    valor-recuperado :=  $\mathcal{P}[\textit{topo}]$ 
    topo := topo - 1
senão underflow
```

A complexidade das operações apresentadas é constante,  $O(1)$ .

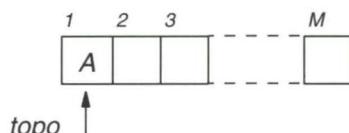
situação 1:

inicial : pilha vazia



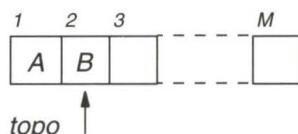
situação 2:

inserir informação A



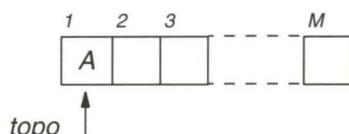
situação 3:

inserir informação B



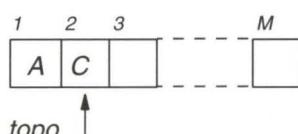
situação 4:

retirar informação (B)



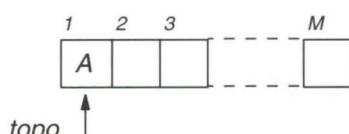
situação 5:

inserir informação C



situação 6:

retirar informação (C)



situação 7:

retirar informação (A)

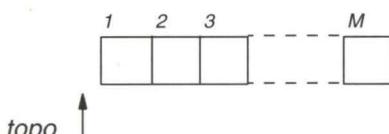


Figura 2.2: Operações em uma pilha

As filas exigem uma implementação um pouco mais elaborada. São necessários dois ponteiros: início de fila ( $f$ ) e retaguarda ( $r$ ). Para a adição de um elemento, move-se o ponteiro  $r$ ; para a retirada, move-se o ponteiro  $f$ . A situação de fila vazia é representada por  $f = r = 0$ . Observe, na figura 2.3, algumas operações realizadas em uma fila  $\mathcal{F}$ .

Note que, após qualquer operação, deve-se sempre ter o ponteiro  $f$  indicando o início da fila e  $r$ , a retaguarda. Isso implica, como já foi dito, movimentar o ponteiro  $r$  quando de uma inserção e o ponteiro  $f$  quando de uma remoção. Ora, pode-se observar claramente na figura 2.3 que, à medida que os ponteiros são incrementados na memória disponível, a fila “se move”, o que pode dar origem à falsa impressão de memória esgotada. Para eliminar esse problema, consideram-se os  $M$  nós alocados como se estivessem em círculo, onde  $\mathcal{F}[1]$  segue  $\mathcal{F}[M]$ . No algoritmo de inserção, a variável  $prov$  armazena provisoriamente a posição de memória calculada de forma a respeitar a circularidade, só sendo movimentado o ponteiro  $r$  se a operação for possível. A inicialização dos ponteiros  $f$  e  $r$  é  $f = r = 0$ .

**algoritmo 2.9:** Inserção na fila  $\mathcal{F}$

```

 $prov := r \bmod M + 1$ 
se  $prov \neq f$  então
     $r := prov$ 
     $\mathcal{F}[r] := novo\text{-valor}$ 
    se  $f = 0$  então
         $f := 1$ 
    senão overflow
```

**algoritmo 2.10:** Remoção da fila  $\mathcal{F}$

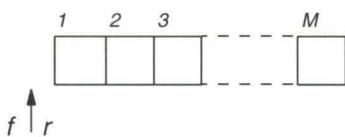
```

se  $f \neq 0$  então
     $valor\text{-recuperado} := \mathcal{F}[f]$ 
    se  $f = r$  então
         $f := r := 0$ 
    senão  $f := f \bmod M + 1$ 
senão underflow
```

Também nesse caso a complexidade das operações é constante.

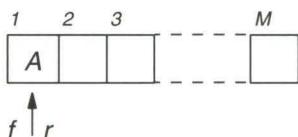
*situação 1:*

*inicial : fila vazia*



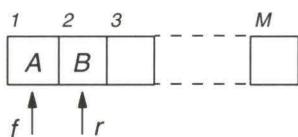
*situação 2:*

*inserir informação A*



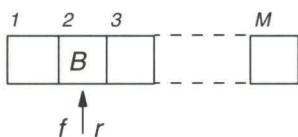
*situação 3:*

*inserir informação B*



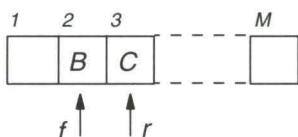
*situação 4:*

*retirar informação (A)*



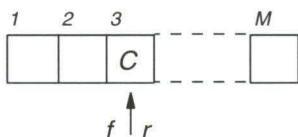
*situação 5:*

*inserir informação C*



*situação 6:*

*retirar informação (B)*



*situação 7:*

*retirar informação (C)*

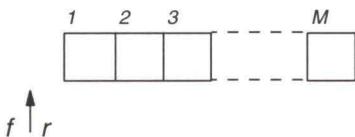


Figura 2.3: Operações em uma fila

## 2.5 – Aplicação: Notação Polonesa

Uma representação para expressões aritméticas, que seja conveniente do ponto de vista computacional, é assunto de interesse, por exemplo, na área de compiladores. A notação tradicional é ambígua e, portanto, obriga ao preestabelecimento de regras de prioridade. Isso, naturalmente, torna a tarefa computacional menos simples. Outras representações são apresentadas a seguir, considerando-se somente operações binárias.

- A notação completamente parentizada: acrescenta-se sempre um par de parênteses a cada par de operandos e a seu operador.

Exemplo:

notação tradicional:  $A * B - C/D$

notação parentizada:  $((A * B) - (C/D))$

- A notação polonesa: os operadores aparecem imediatamente antes dos operandos. Esta notação explicita quais operadores, e em que ordem, devem ser calculados. Por esse motivo, dispensa o uso de parênteses, sem ambigüidades.

Exemplo:

notação tradicional:  $A * B - C/D$

notação polonesa:  $- * AB/CD$

- A notação polonesa reversa: a notação polonesa com os operadores aparecendo após os operandos. Esta notação é tradicionalmente utilizada em máquinas de calcular.

Exemplo:

notação tradicional:  $A * B - C/D$

notação polonesa reversa:  $AB * CD/-$

Tanto a expressão original quanto a expressão transformada devem ser armazenadas em listas. Um algoritmo para efetuar a conversão da notação parentizada na notação polonesa reversa é apresentado aqui. Algumas observações auxiliam em tal conversão.

- Os operandos aparecem na mesma ordem na notação tradicional e na notação polonesa reversa.

- Na notação polonesa reversa, os operadores aparecem na ordem em que devem ser calculados (da esquerda para a direita).
- Os operadores aparecem imediatamente depois de seus operandos.

Note que, pela primeira observação, a ordem dos operandos não se modifica, podendo estes ser ignorados. A principal preocupação do algoritmo deve ser a ordem e a posição dos operadores. Na notação parentizada, essa ordem é indicada pelos parênteses; os mais internos significam operações prioritárias.

**algoritmo 2.11:** Conversão de notações

```

indexp := 1;    indpol := 0           % índices das expressões
topo := 0
enquanto indexp ≤ fim faça
    se exp[indexp] é operando então
        indpol := indpol + 1         % passa para a nova lista
        pol[indpol] := exp[indexp]
    senão se exp[indexp] é operador então
        topo := topo + 1           % coloca na pilha
        pilha[topo] := exp[indexp]
    senão se exp[indexp] = ")" então
        se topo ≠ 0 então % forma a operação
            operador := pilha[topo]
            topo := topo - 1
            indpol := indpol + 1
            pol[indpol] := operador
        senão "expressão errada"
    indexp := indexp + 1

```

Uma análise sintática prévia na expressão é pressuposta. Para efetuar a conversão, devem-se remover os parênteses e estabelecer a ordem conveniente de operadores. Estes então devem ser armazenados até que um ")" seja encontrado, o que indica que a operação mais interna, e por conseguinte a primeira a ser executada, foi detectada. O último operador armazenado corresponde a essa operação. Portanto, a estrutura utilizada no armazenamento dos operadores deve ser uma pilha. No algoritmo 2.11, a expressão a ser convertida se encontra no vetor *exp* e o resultado da conversão, no vetor *pol*. A variável *fim* indica a dimensão da expressão.

## 2.6 – Alocação Encadeada

Já foi observado que o desempenho dos algoritmos que implementam operações realizadas em listas com alocação seqüencial, mesmo sendo estes muito simples, pode ser bastante fraco. E mais, quando está prevista a utilização concomitante de mais de duas listas, a gerência de memória se torna mais complexa. Nesses casos se justifica a utilização da alocação encadeada, também conhecida por *alocação dinâmica*, uma vez que posições de memória são alocadas (ou desalocadas) na medida em que são necessárias (ou dispensadas). Os nós de uma lista encontram-se então aleatoriamente dispostos na memória e são interligados por ponteiros, que indicam a posição do próximo elemento da tabela. É necessário o acréscimo de um campo a cada nó, justamente o que indica o endereço do próximo nó da lista. A figura 2.4 apresenta uma lista linear em suas representações seqüencial e encadeada.

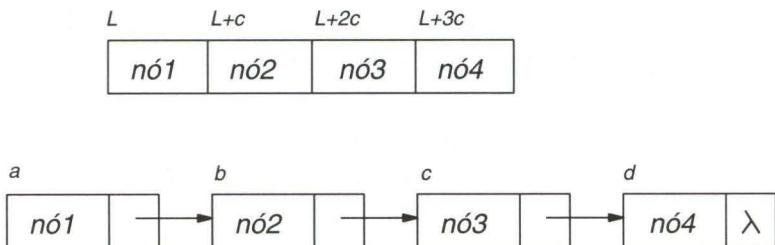


Figura 2.4: Alocação seqüencial e alocação encadeada

Há vantagens e desvantagens associadas a cada tipo de alocação. Estas, entretanto, só podem ser precisamente medidas ao se conhecerem as operações envolvidas na aplicação desejada. De maneira geral pode-se afirmar que a alocação encadeada, a despeito de um gasto de memória maior em virtude da necessidade de um novo campo no nó (o campo do ponteiro), é mais conveniente quando o problema inclui o tratamento de mais de uma lista. Isto se aplica tanto à gerência do armazenamento quanto às operações propriamente ditas envolvidas, como juntar listas, separar listas em sublistas etc. Por outro lado, o acesso ao  $k$ -ésimo elemento da lista é imediato na alocação

seqüencial, enquanto na alocação encadeada obriga ao percurso na lista até o elemento desejado.

Como já foi visto, na alocação encadeada os nós de uma lista se encontram em posições não obrigatoriamente contíguas de memória. Se nessa lista são feitas inserções e remoções, há necessidade de encontrar novas posições de memória para armazenamento e liberar outras que possam ser reutilizadas posteriormente. Um algoritmo para gerenciar as posições de memória disponíveis é então imprescindível. Para tal é criada uma lista especial, chamada *Lista de Espaço Disponível (LED)*, que contém posições de memória ainda não utilizadas ou dispensadas após sua utilização. Note que a organização dessas posições disponíveis independe completamente da estrutura empregada na solução do problema em estudo. Entretanto, deve-se observar que a LED e as estruturas estão compartilhando a memória disponível.

A implementação da LED pode ser executada de duas formas. A primeira, com o dimensionamento de um único vetor de nós  $\mathcal{M}$  (ou diversos vetores, um para cada campo do nó) simulando a memória total disponível. Nesse caso, o endereço do nó corresponde ao índice de uma posição do vetor. Essa abordagem permite ao usuário o controle total de posições ocupadas e livres e pode ser implementada na maioria das linguagens de programação existentes. No princípio, como a memória se acha totalmente disponível, todos os seus nós são encadeados na LED. A variável ponteiro *vago* se refere ao topo da estrutura. Para se inicializar uma LED são então necessários os passos seguintes.

Passo 1: os campos ponteiros dos nós são encadeados seqüencialmente.

Passo 2: o ponteiro *vago* é inicializado com o endereço do primeiro nó da lista que foi encadeada no primeiro passo.

Passo 3: o campo ponteiro do último nó recebe o valor  $\lambda$ , indicando fim de lista.

Para a efetivação das operações de inserção ou remoção de nós em listas encadeadas há necessidade, portanto, de manipular também a LED. Quando se precisa de um novo nó para executar o algoritmo de inserção, deve-se buscá-lo na LED. Analogamente, devolve-se à LED um nó dispensado pelo algoritmo de remoção. Procedimentos básicos de busca e devolução de nós à LED podem então ser preparados. Esses algoritmos utilizam sempre uma variável *pt* que indica o índice do nó disponível. No procedimento de busca,

esse nó fica assim reservado para uso futuro, e no procedimento de devolução é o nó a ser reincorporado. Os algoritmos 2.12 e 2.13 executam essas tarefas. O vetor  $\mathcal{M}$ , de nós, corresponde à *LED*; o campo que indica o próximo nó disponível tem o nome de *prox*.

**algoritmo 2.12:** Busca de um elemento na *LED*

**procedimento** *ocupar*(*pt*)

  se *vago*  $\neq \lambda$  então

*pt* := *vago*

*vago* :=  $\mathcal{M}[\textit{vago}]$ .*prox*

  senão *overflow*

**algoritmo 2.13:** Devolução de um nó à *LED*

**procedimento** *desocupar*(*pt*)

$\mathcal{M}[\textit{pt}]$ .*prox* := *vago*

*vago* := *pt*

É interessante observar que a hipótese de *overflow* é considerada no algoritmo 2.12. Isto indica que a possibilidade de memória esgotada é estudada de maneira global para todas as estruturas existentes no problema considerado.

A segunda opção, embora mais dependente da linguagem de programação, é a mais utilizada. As linguagens geralmente possuem um módulo de gerência de memória disponível ao usuário, bastando apenas que este se refira às rotinas internas de ocupação e devolução de nós da lista de espaço disponível. Em Pascal, por exemplo, as rotinas *new(pt)* e *dispose(pt)* executam essa tarefa. Nesse caso, uma notação diferente é utilizada nos algoritmos. Obviamente o nó na memória é o mesmo considerado até agora; a indicação do endereço desse nó, feita por um ponteiro, é que será representada pelo símbolo  $\uparrow$ . Cada ponteiro utilizado é associado a um único tipo de nó. Assim, por exemplo,  $pt \uparrow .info$  representa o campo *info* do nó apontado por *pt*. Um conjunto de nós encadeados forma uma tabela. A associação do ponteiro *pt* ao tipo de nó é definida previamente na declaração das variáveis.

## 2.7 – Listas Lineares em Alocação Encadeada

### 2.7.1 – Listas simplesmente encadeadas

Qualquer estrutura, inclusive listas, que seja armazenada em alocação encadeada requer o uso de um ponteiro que indique o endereço de seu primeiro nó. O percurso de uma lista é feito então a partir desse ponteiro. A idéia consiste em seguir consecutivamente pelos endereços existentes no campo que indica o próximo nó, da mesma forma que na alocação seqüencial se acrescentava uma unidade ao índice do percurso. O algoritmo 2.14 apresenta o percurso para impressão do campo *info* de uma lista, sendo *ptlista* o ponteiro para o primeiro nó.

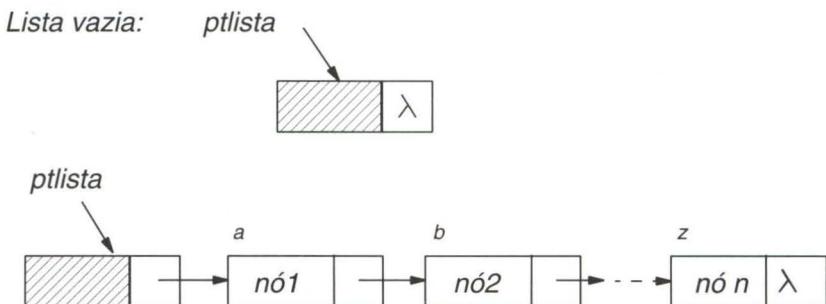
**algoritmo 2.14:** Impressão da lista apontada por *ptlista*

```

pont := ptlista
enquanto pont ≠ λ faça
    imprimir(pont ↑ .info)
    pont := pont ↑ .prox
```

Como já foi mencionado na seção 2.3, o algoritmo de busca, por ser utilizado em inserções, remoções e outras operações, deve ser muito eficiente. Na alocação encadeada, essa necessidade persiste. E mais, surgem novos problemas: por exemplo, a existência de um ponteiro indicando o primeiro nó da lista obriga os algoritmos de inserção e remoção a apresentarem testes especiais para verificar se o nó desejado é o primeiro da lista. Isto pode ser resolvido por uma pequena variação na estrutura de armazenamento: a criação de um nó especial, chamado *nó-cabeça*, nunca removido, que passa a ser o nó indicado pelo ponteiro de início de lista. Esse nó especial não deve conter informações relacionadas à tabela propriamente dita. Algumas vezes, entretanto, pode ser aproveitado para conter dados pertinentes ao algoritmo implementado. A figura 2.5 mostra a representação gráfica da lista encadeada com *nó-cabeça*, em sua situação inicial (vazia), e depois de algumas inserções.

O algoritmo 2.15 implementa a busca em uma tabela ordenada, em alocação encadeada, de maneira simples. Outra abordagem, um pouco mais eficiente, será vista na seção 2.7.3 (lista circular encadeada). No caso aqui considerado, o *nó-cabeça* da tabela é apontado por *ptlista*. O parâmetro *x* fornece



---

**Figura 2.5:** Lista encadeada com nó-cabeça

a chave procurada. O parâmetro *pont* retorna apontando para o elemento procurado, e *ant* para o elemento anterior ao procurado. Caso este não seja encontrado, *pont* aponta para  $\lambda$  e *ant* indica ainda o elemento anterior ao último pesquisado. Deve-se notar que o parâmetro *ant*, apesar de aparentemente inútil, é importante para os algoritmos de inserção e remoção, que serão vistos a seguir. Como o algoritmo estabelece um percurso pela tabela, sua complexidade é  $O(n)$ , sendo  $n$  o número de nós da lista.

**algoritmo 2.15:** Busca em uma lista ordenada

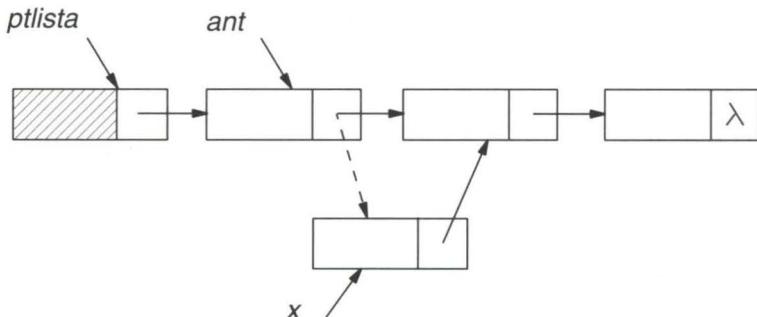
**procedimento** *busca-enc(x, ant, pont)*

```
ant := ptlista;  pont := λ
ptr := ptlista ↑ . prox           % ptr: ponteiro de percurso
enquanto ptr ≠ λ faça
    se ptr ↑ . chave < x então
        ant := ptr                  % atualiza ant e ptr
        ptr := ptr ↑ . prox
    senão se ptr ↑ . chave = x então
        pont := ptr                 % chave encontrada
        ptr := λ
```

Após a realização da busca, as operações de inserção e remoção em uma lista encadeada são triviais. Há três fases a serem cumpridas: a comunicação com a *LED*, o acesso ao campo de informação do nó e o acerto de estrutura. As operações de inserção e remoção realizam essas fases em ordem inversa. A

figura 2.6 e o algoritmo 2.16 mostram a inserção do nó contido na variável *novo*, após o nó apontado por *ant*. No algoritmo, as três fases se encontram assinaladas pelos comentários.

---



**Figura 2.6:** Inserção de um nó

**algoritmo 2.16:** Inserção de um nó após o nó apontado por *ant*  
*busca-enc(x, ant, pont)*

**se** *pont* =  $\lambda$  **então**

*ocupar(pt)* % solicitar nó

*pt*  $\uparrow$ .*info* := *novo-valor* % inicializar nó

*pt*  $\uparrow$ .*chave* := *x*; *pt*  $\uparrow$ .*prox* := *ant*  $\uparrow$ .*prox*

*ant*  $\uparrow$ .*prox* := *pt* % acertar lista

**senão** “elemento já está na tabela”

A remoção do nó apontado por *pont* é apresentada na figura 2.7 e no algoritmo 2.17. Observe as fases mencionadas nos comentários do algoritmo. A complexidade dessas operações é, em virtude da busca,  $O(n)$ .

**algoritmo 2.17:** Remoção do nó apontado por *pont* na lista  
*busca-enc(x, ant, pont)*

**se** *pont*  $\neq \lambda$  **então**

*ant*  $\uparrow$ .*prox* := *pont*  $\uparrow$ .*prox* % acertar lista

*valor-recuperado* := *pont*  $\uparrow$ .*info* % utilizar nó

*desocupar(pont)* % devolver nó

**senão** “nó não se encontra na tabela”

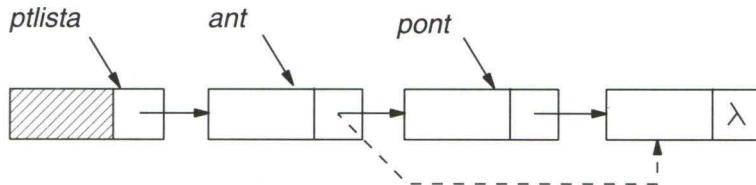


Figura 2.7: Remoção de um nó

Os algoritmos de busca, remoção e inserção em uma lista não ordenada constituem ligeiras variações dos anteriormente apresentados (exercício 2.11).

## 2.7.2 - Pilhas e filas

Como casos particulares, algumas modificações são necessárias para implementar operações eficientes em pilhas e filas. No caso de pilhas, as operações são muito simples. Considerando-se listas simplesmente encadeadas (sem nó-cabeça), o topo da pilha é o primeiro nó da lista, apontado por uma variável ponteiro *topo*. Se a pilha estiver vazia então  $\textit{topo} = \lambda$ . Filas exigem duas variáveis do tipo ponteiro: *inicio*, que aponta para o primeiro nó da lista, e *fim*, que aponta para o último. Na fila vazia, ambos apontam para  $\lambda$ . Os algoritmos que se seguem implementam essas operações.

**algoritmo 2.18:** Inserção na pilha

*ocupar(pt)*

% solicitar nó

*pt*  $\uparrow$ .*info* := novo-valor

% inicializar nó

$pt \uparrow . prox := topo$

*topo* := *pt*

% acertar pilha

algoritmo 2.19: Remoção da pilha

se  $\text{topo} \neq \lambda$  então

*pt* := topo

% acertar pilha

$\text{topo} := \text{topo} \uparrow, \text{prox}$

*valor-recuperado := pt↑.info*

% utilizar nó

*desocupar(pt)*

% devolver nó

senão *underflow*

**algoritmo 2.20:** Inserção na fila

```

ocupar(pt)
pt ↑ .info := novo-valor
pt ↑ .prox := λ
se fim ≠ λ então
    fim ↑ .prox := pt
senão inicio := pt
fim := pt

```

% solicitar nó  
% inicializar nó  
% acertar fila

**algoritmo 2.21:** Remoção da fila

```

se inicio ≠ λ então
    pt := inicio
    inicio := inicio ↑ .prox
    se inicio = λ então fim := λ
    valor-recuperado := pt ↑ .info
    desocupar(pt)
senão underflow

```

% acertar fila  
% utilizar nó  
% devolver nó

As complexidades dos algoritmos de manipulação de filas e pilhas é constante, ou seja,  $O(1)$ , uma vez que buscas não são empregadas.

Uma aplicação interessante de filas é a *ordenação por distribuição*, descrita a seguir. Seja uma lista  $\mathcal{L}$  composta de  $n$  chaves, cada qual representada por um número inteiro numa base  $b > 1$ . O problema consiste em ordenar essa lista. O algoritmo utiliza  $b$  filas, denotadas por  $\mathcal{F}_i$ ,  $0 \leq i \leq b - 1$ . Seja  $d$  o comprimento máximo da representação das chaves na base  $b$ . O algoritmo efetua  $d$  iterações, em cada uma das quais a tabela é percorrida. A primeira iteração destaca, em cada nó, o dígito menos significativo da representação  $b$ -ária de cada chave. Se este for igual a  $k$ , a chave correspondente será inserida na fila  $\mathcal{F}_k$ . Ao terminar o percurso da tabela, esta se encontra distribuída pelas filas, que devem então ser concatenadas em seqüência, isto é,  $\mathcal{F}_0$ , depois  $\mathcal{F}_1$ ,  $\mathcal{F}_2$ , etc. Para essa tabela, já disposta numa ordem diferente da original, o processo deve ser repetido levando-se em consideração o segundo dígito da representação, e assim sucessivamente até que tenham sido feitas tantas distribuições quantos são os dígitos na chave de ordenação. Veja um exemplo dessa ordenação na figura 2.8, onde  $b = 10$  e  $d = 2$ .

O algoritmo 2.22 descreve o processo. A notação  $\mathcal{F}_k \Leftarrow \mathcal{L}[j]$  significa a inserção na fila  $\mathcal{F}_k$  do elemento localizado em  $\mathcal{L}[j]$ . Analogamente,  $\mathcal{L}[j] \Leftarrow$

tabela: 19 13 05 27 01 26 31 16 02 09 11 21 60 07

Iteração 1: 1<sup>a</sup> distribuição (unidades simples)

*fila*<sub>0</sub> : 60  
*fila*<sub>1</sub> : 01, 31, 11, 21  
*fila*<sub>2</sub> : 02  
*fila*<sub>3</sub> : 13  
*fila*<sub>4</sub> :  
*fila*<sub>5</sub> : 05  
*fila*<sub>6</sub> : 26, 16  
*fila*<sub>7</sub> : 27, 07  
*fila*<sub>8</sub> :  
*fila*<sub>9</sub> : 19, 09

tabela: 60 01 31 11 21 02 13 05 26 16 07 27 19 09

Iteração 2: 2<sup>a</sup> distribuição (dezenas simples)

*fila*<sub>0</sub> : 01, 02, 05, 07, 09  
*fila*<sub>1</sub> : 11, 13, 16, 19  
*fila*<sub>2</sub> : 21, 26, 27  
*fila*<sub>3</sub> : 31  
*fila*<sub>4</sub> :  
*fila*<sub>5</sub> :  
*fila*<sub>6</sub> : 60  
*fila*<sub>7</sub> :  
*fila*<sub>8</sub> :  
*fila*<sub>9</sub> :

tabela: 01 02 05 07 09 11 13 16 19 21 26 27 31 60

$\mathcal{F}_k$  representa a remoção de um elemento da fila  $\mathcal{F}_k$  e seu armazenamento em  $\mathcal{L}[j]$ . A lista  $\mathcal{L}$  contém os elementos a serem ordenados. Supõe-se que as filas  $\mathcal{F}_i$  tenham sido inicializadas como vazias.

**algoritmo 2.22:** Ordenação por distribuição

para  $i = 1, \dots, d$  faça

    para  $j = 1, \dots, n$  faça

$k := i$ -ésimo dígito menos significativo da representação  
        de  $\mathcal{L}[j].chave$  na base  $b$

$\mathcal{F}_k \Leftarrow \mathcal{L}[j]$

$j := 1$

    para  $k = 0, \dots, b - 1$  faça

        enquanto  $\mathcal{F}_k \neq \emptyset$  faça

$\mathcal{L}[j] \Leftarrow \mathcal{F}_k$

$j := j + 1$

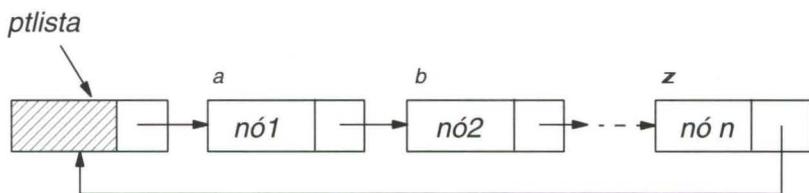
Ao final do processo, a lista  $\mathcal{L}$  encontra-se ordenada. Cada operação de inclusão ou remoção de um elemento é realizada em tempo constante. A complexidade do algoritmo é, portanto, igual a  $O(nd)$ . Como a implementação utiliza  $b$  filas, é óbvia a necessidade de que estas empreguem alocação encadeada. O algoritmo exige que seja calculada, previamente, a representação de cada chave na base  $b$ . Supondo-se que o computador utilize a base 2 para a codificação interna, a definição  $b = 2$  dispensaria tal cálculo. Nesse caso, uma forma de acelerar o processo seria dividir a representação binária em grupos de  $m$  bits consecutivos, o que corresponderia a utilizar a base  $2^m$ .

Entre os equipamentos de processamento de dados, precursores dos computadores, um dos mais importantes foi a *classificadora de cartões*. Esta efetuava a ordenação física dos cartões, segundo chaves representadas por perfurações localizadas em 12 alturas diferentes no cartão, o que permitia ordenação alfabética. O princípio utilizado era o da ordenação por distribuição. Cada fila correspondia a um escaninho existente no equipamento. A distribuição era mecânica, mas a concatenação se realizava manualmente.

### 2.7.3 – Listas circulares

A busca em uma tabela ordenada, apresentada na seção 2.7.1, pode ser considerada pouco eficiente quando comparada às outras buscas anteriormente mencionadas. Uma pequena modificação na estrutura física da lista pode ser

de grande auxílio: obrigar o último nó da lista a apontar para o nó-cabeça, criando assim uma *lista circular encadeada*, como é visto na figura 2.9. Dessa forma, o teste de fim de lista nunca é satisfeito. A preocupação passa a ser um critério de parada que possa ser incorporado ao teste da busca propriamente dita. A solução é colocar a chave procurada no nó-cabeça, de forma que uma resposta positiva seja sempre encontrada.



**Figura 2.9:** Lista circular encadeada

O algoritmo 2.23 apresenta a nova busca, no caso de listas ordenadas. Ao fim da busca, o ponteiro *pont* aponta para o último nó pesquisado. Naturalmente, modificações correspondentes devem ser introduzidas nos algoritmos de inserção e remoção.

**algoritmo 2.23:** Busca numa lista circular encadeada ordenada  
**procedimento** *busca-cir(x, ant, pont)*

```

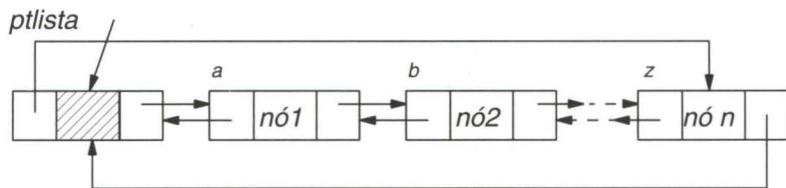
ant := pLista
pLista ↑ .chave := x
pont := pLista ↑ .prox
enquanto pont ↑ .chave < x faça
    ant := pont
    pont := pont ↑ .prox
se pont ≠ pLista e pont ↑ .chave = x então
    “chave localizada”
senão “chave não localizada”
```

No caso de listas não ordenadas, o mesmo princípio pode ser empregado, com as devidas adaptações.

## 2.7.4 – Listas duplamente encadeadas

Nos algoritmos vistos até agora para listas lineares utilizando alocação encadeada, o ponteiro *ant* se mostrou sempre útil. Sua função é “rastrear” o ponteiro que percorre a lista, permitindo sempre o retorno ao nó anterior. Algumas vezes, entretanto, isto não é suficiente, pois pode-se desejar o percurso da lista nos dois sentidos indiferentemente. Nesses casos, o gasto de memória imposto por um novo campo de ponteiro pode ser justificado pela economia em não reprocessar praticamente a lista inteira. A figura 2.10 apresenta uma *lista circular duplamente encadeada*, com nó-cabeça, que incorpora esse novo campo de ponteiro. Os campos de ponteiros tomam os nomes de *ant* (apontando para o nó anterior) e *post* (apontando o nó seguinte). Note-se, entretanto, que listas não circulares e listas sem nó-cabeça podem também ser duplamente encadeadas.

Os algoritmos de busca, inserção e remoção em tabelas ordenadas são muito simples, sendo apresentados a seguir. Na busca, a função retorna indicando o nó procurado ou, se este não for encontrado, o nó que seria seu consecutivo. Observe nas figuras 2.11 e 2.12 as modificações acarretadas por uma inserção e uma remoção.



**Figura 2.10:** Lista duplamente encadeada

**algoritmo 2.24:** Busca em uma lista duplamente encadeada ordenada função *busca-dup(x)*

```

ultimo := ptlista ↑ . ant
se x ≤ ultimo ↑ . chave então
    pont := ptlista ↑ . post
    enquanto pont ↑ . chave < x faça
        pont := pont ↑ . post
    busca-dup := pont
senão busca-dup := ptlista
  
```

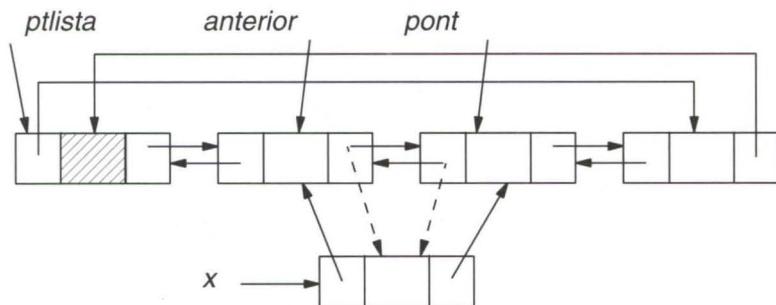


Figura 2.11: Inserção em lista duplamente encadeada

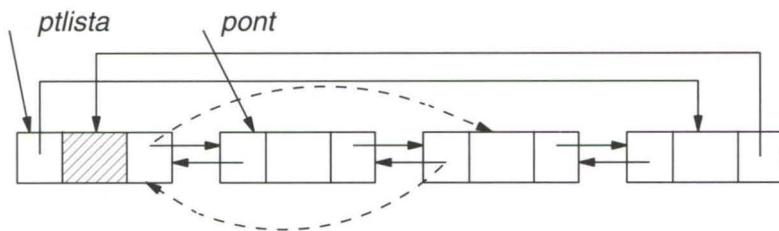


Figura 2.12: Remoção em lista duplamente encadeada

**algoritmo 2.25:** Inserção de um nó em uma lista duplamente encadeada  
 $pont := busca-dup(x)$

**se**  $pont = ptlista$  ou  $pont \uparrow .chave \neq x$  **então**

$anterior := pont \uparrow .ant$

$ocupar(pt)$

% solicitar nó

$pt \uparrow .info := novo-valor$

% inicializar nó

$pt \uparrow .chave := x$

$pt \uparrow .ant := anterior$

$pt \uparrow .post := pont$

$anterior \uparrow .post := pt$  % acertar lista

$pont \uparrow .ant := pt$

**senão** “elemento já se encontra na lista”

**algoritmo 2.26:** Remoção de um nó em uma lista duplamente encadeada

```

pont := busca-dup(x)
se pont ≠ ptlista e pont↑.chave = x então
    anterior := pont↑.ant
    posterior := pont↑.post
    anterior↑.post := posterior           % acertar lista
    posterior↑.ant := anterior
    valor-recuperado := pont↑.info      % utilizar nó
    desocupar(pont)                   % devolver nó
senão “elemento não se encontra na lista”

```

### 2.7.5 – Aplicação: ordenação topológica

Um problema que pode ser caracterizado como uma aplicação de listas lineares é a ordenação topológica. Sua importância se deve ao fato de ter um uso potencial todas as vezes em que o problema abordado envolve uma ordem parcial.

Uma *ordem parcial* de um conjunto *S* é uma relação entre os objetos de *S*, representada pelo símbolo “ $\preceq$ ”, satisfazendo as seguintes propriedades para quaisquer objetos *x*, *y* e *z*, não necessariamente distintos em *S*:

- i) se  $x \preceq y$  e  $y \preceq z$ , então  $x \preceq z$  (transitiva);
- ii) se  $x \preceq y$  e  $y \preceq x$ , então  $x = y$  (anti-simétrica);
- iii)  $x \preceq x$  (reflexiva).

A notação  $x \preceq y$  pode ser lida “x precede ou iguala y”. Se  $x \preceq y$  e  $x \neq y$ , escreve-se  $x \prec y$  e diz- se “x precede y”. Tem-se então:

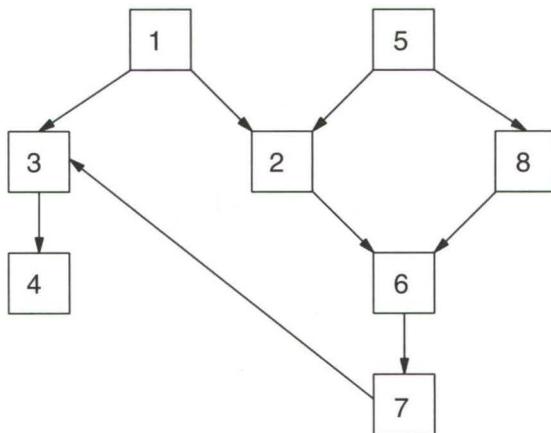
- i') se  $x \prec y$  e  $y \prec z$ , então  $x \prec z$  (transitiva);
- ii') se  $x \prec y$ , então  $y \not\prec x$  (assimétrica);
- iii')  $x \not\prec x$  (irreflexiva).

A notação  $y \not\prec x$  significa “y não precede x”. Assume-se aqui que *S* é um conjunto finito, uma vez que se deseja trabalhar no computador.

Muitos exemplos interessantes podem ser mencionados como utilização da ordem parcial. Entre outros, a execução de um conjunto de tarefas necessárias, por exemplo, à montagem de um automóvel. Uma ordem parcial

dessas tarefas pode ser representada como na figura 2.13. Cada caixa na figura representa uma tarefa a ser executada; cada tarefa é numerada arbitrariamente. Se existe a indicação de um caminho da caixa  $x$  para a caixa  $y$ , isto significa que a tarefa  $x$  deve ser executada antes da tarefa  $y$ .

---

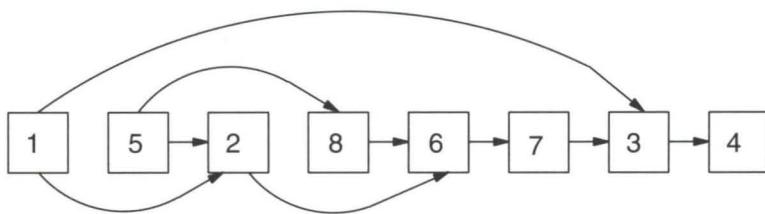


**Figura 2.13:** Representação de ordem parcial

A ordenação topológica trata de imergir a ordem parcial em uma ordem linear, isto é, rearrumar os objetos numa seqüência  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tal que sempre que  $a_j \prec a_k$ , tem-se  $j < k$ . A figura 2.14 mostra a ordem parcial do exemplo da figura 2.13 após a ordenação topológica.

Uma forma simples de obter uma ordenação topológica é vista a seguir. Inicialmente, considera-se um objeto que não é precedido por nenhum outro na ordem parcial. Esse objeto é o primeiro na saída, isto é, na ordem final. Agora, remova o objeto do conjunto  $S$ . O conjunto resultante obedece novamente a uma ordem parcial. O processo pode então ser repetido até que todo o conjunto esteja ordenado. Esse algoritmo só falharia se, em algum momento, a ordem parcial de um conjunto fosse tal que todos os elementos tivessem um predecessor. Ora, isso é impossível, porque contraria as propriedades (i) e (ii).

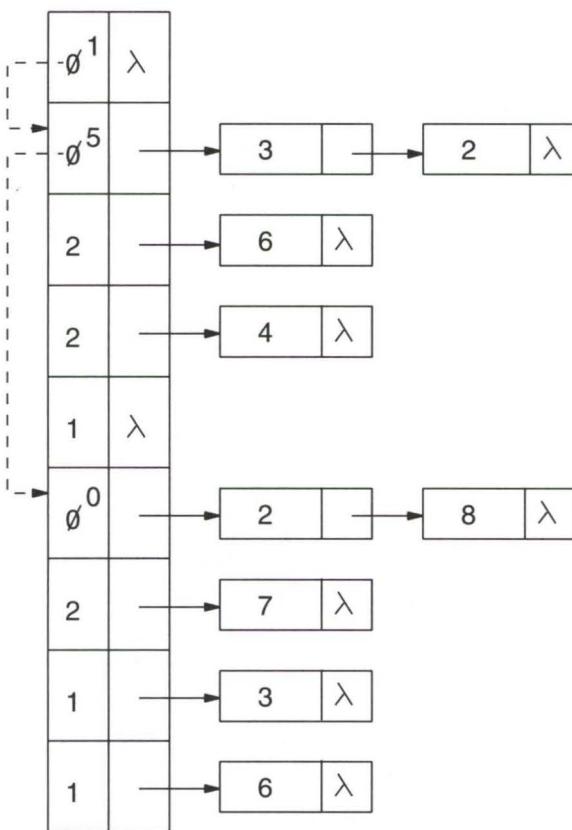
O desempenho desse algoritmo depende de sua implementação. Os objetos



**Figura 2.14:** Ordenação topológica

a serem ordenados são numerados de 1 a  $n$ , em qualquer ordem, e alo- cados seqüencialmente na memória. A entrada do algoritmo são os pares  $(j, k)$ , significando que o objeto  $j$  precede o objeto  $k$ . O número de objetos  $n$  e o número de pares  $m$  também são fornecidos. Devem constar da en- trada somente os pares necessários à caracterização da ordem parcial; pares supérfluos, entretanto, não constituem erro. Por exemplo, no problema a- presentado na figura 2.13, o par  $(8,7)$  é desnecessário, pois pode ser deduzido dos pares  $(8,6)$  e  $(6,7)$ .

O algoritmo lida com  $n$  listas encadeadas, uma para cada objeto. Na lista  $i$ , estão indicados todos os objetos  $k$  que aparecem em pares  $(i, k)$ , isto é, sucessores de  $i$ . Para cada lista é criado um nó-cabeça, chamado *CB*. No nó- cabeça da lista  $i$ , além do ponteiro para os sucessores de  $i$ , está armazenado o número de pares  $(k, i)$  existentes, isto é, o número de vezes em que  $i$  aparece como sucessor de outro objeto. Essa informação é denominada *contador*. A figura 2.15 mostra a atuação dessa fase do algoritmo no exemplo da figura 2.13. Uma vez organizadas as listas, os nós-cabeça são percorridos em busca de um objeto que não seja sucessor de nenhum outro, isto é, cujo campo *contador* seja nulo. Todos aqueles que obedecem a tal condição são en- cadeados pelo próprio campo *contador*, que passa assim a ter nova função. O resultado dessa fase pode ser visto, em pontilhado, na mesma figura. Em seguida, o objeto é “retirado” da tabela original, isto é, todos os contadores de seus sucessores são decrementados e imediatamente testados para que, ao chegarem a zero, sejam incluídos na seqüência de saída. O algoritmo termina quando todos os objetos forem retirados.



---

Figura 2.15: Armazenamento para a ordenação topológica

A complexidade do algoritmo pode ser deduzida da descrição apresentada a seguir. Existem  $n$  listas encadeadas, correspondentes a um total de  $m$  pares de relações “precede”. De início, a lista de nós-cabeça é percorrida em busca de objetos sem predecessores, que são encadeados como candidatos à saída. Essa parte do algoritmo tem complexidade  $O(n)$ . Na saída de cada candidato, os contadores de seus sucessores são decrementados, o que equivale ao percurso da lista encadeada correspondente ao candidato. Ao fim do algoritmo, todas as listas terão sido percorridas, o que leva  $O(m)$ . A complexidade é então  $O(n + m)$ .

algoritmo 2.27: Ordenação topológica

procedimento *inicializar*

```

    para  $i = 0, \dots, n$  faça           % inicializa nó-cabeça
         $CB[i].contador := 0$ 
         $CB[i].prox := \lambda$ 
    para  $i = 1, \dots, m$  faça
        ocupar(pt)                 % seja  $(j, k)$  o  $i$ -ésimo par
         $pt \uparrow .info := k;$     $pt \uparrow .prox := CB[j].prox$ 
         $CB[j].prox := pt$ 
         $CB[k].contador := CB[k].contador + 1$ 

```

*inicializar*

$fim := 0;$   $CB[0].contador := 0$

para  $i = 1, \dots, n$  faça % busca de objetos sem
 se  $CB[i].contador = 0$  então predecessores
  $CB[fim].contador := i$ 
 $fim := i$

$objeto := CB[0].contador$

enquanto  $objeto \neq 0$  faça

*saida(objeto)*

$pt := CB[objeto].prox$

enquanto  $pt \neq \lambda$  faça

$indice := pt \uparrow .info$

$CB[indice].contador := CB[indice].contador - 1$

se  $CB[indice].contador = 0$  então

$CB[fim].contador := indice$

$fim := indice$

$pt := pt \uparrow .prox$

$objeto := CB[objeto].contador$

## 2.8 – Alocação de Espaço de Tamanho Variável

Um modelo de memória comumente utilizado corresponde a um vetor  $\mathcal{M}$ , onde cada elemento é associado a uma unidade de memória denominada *palavra*. Um conjunto de  $b$  palavras de endereços consecutivos é chamado *bloco de tamanho b*. O *endereço* de um bloco é o índice em  $\mathcal{M}$  de sua primeira palavra. No modelo, todos os programas e dados competem pelo uso exclusivo de porções de  $\mathcal{M}$ .

Por exemplo, suponha que um programa deseje criar uma lista linear, contendo  $b$  nós, cada qual ocupando uma unidade de memória. Nesse caso, deve ser solicitada a reserva de um bloco de tamanho  $b$ , em algum endereço disponível. Quando da extinção da lista, este bloco deve ser liberado para possível uso com outra finalidade. Supondo a existência simultânea de diversas estruturas, a memória apresenta, alternadamente, blocos reservados e disponíveis. Essa configuração varia, dinamicamente, com as diferentes solicitações de reserva e liberação de blocos. A variação do tamanho dos blocos pode ser muito grande, pois depende das características individuais das estruturas utilizadas. Esse processo é denominado *sistema de alocação de memória*.

Um caso particular já foi examinado na seção 2.7.1. Quando todos os blocos possuem tamanho idêntico, a idéia utilizada consistiu em encadear a memória disponível em uma lista denominada *LED*. Os procedimentos *ocupar* e *desocupar*, dos algoritmos 2.12 e 2.13, respectivamente, efetuam as operações de reserva e liberação de blocos de tamanho fixo. O caso da alocação de memória de tamanho variado é bem mais complexo.

Basicamente, para elaborar os algoritmos de reserva e liberação é necessário, de antemão, decidir as três questões seguintes.

- Que estrutura utilizar para representar a memória disponível?
- Qual é o critério de seleção de blocos, para atender às solicitações de reserva de memória?
- Como definir a operação de liberação de blocos?

Podem-se considerar diversas abordagens para responder a essas questões. A solução descrita a seguir é uma das mais simples.

A memória disponível constituirá uma lista encadeada, onde cada nó está associado a um bloco. Essa lista será mantida na própria memória disponível. Em caso de alocação em memória secundária, contudo, é recomendável o armazenamento da lista na memória principal. As duas primeiras palavras de cada nó serão utilizadas pelo sistema de alocação. Se  $pt$  é o endereço de um bloco disponível, então  $\mathcal{M}[pt]$  contém o tamanho do bloco, e  $\mathcal{M}[pt + 1]$  é o ponteiro para o próximo nó da lista. Isto implica que o tamanho mínimo de qualquer bloco, disponível ou reservado, é igual a 2. Além disso, as duas primeiras palavras do vetor  $\mathcal{M}$  têm uso reservado.  $\mathcal{M}[1]$  será inicializada com zero e não será modificada. Enquanto isso,  $\mathcal{M}[2]$  será o ponteiro para o endereço do primeiro bloco da lista. Ao contrário do par  $\mathcal{M}[pt]$  e  $\mathcal{M}[pt + 1]$ , as palavras  $\mathcal{M}[1]$  e  $\mathcal{M}[2]$  não podem ser utilizadas para atender a qualquer reserva de memória. Assim sendo, supondo que o vetor  $M$  possua  $m$  palavras, a inicialização do processo consiste em efetuar as atribuições  $\mathcal{M}[1] := 0$ ,  $\mathcal{M}[2] := 3$ ,  $\mathcal{M}[3] := m - 2$  e  $\mathcal{M}[4] := \lambda$ .

Quanto ao critério de seleção de blocos para as solicitações de reserva, uma das características desejadas é a simplicidade do algoritmo correspondente. O método seguinte se denomina *primeira escolha* e, certamente, satisfaz essa condição. O critério consiste em selecionar o primeiro bloco da lista de memória disponível, cujo tamanho satisfaça as condições da reserva. Seja  $b$  o tamanho do bloco solicitado. O algoritmo de reserva deve percorrer a lista e selecionar o primeiro bloco de tamanho  $b' \geq \max\{2, b\}$ . Seja  $r = b' - b$ . Se  $r < 2$ , então o bloco inteiro deve ser reservado, o que corresponde a remover o bloco de tamanho  $b'$  da lista. Caso contrário, ele é dividido em dois outros, de tamanhos  $b$  e  $r$ , respectivamente. O primeiro é o correspondente à reserva, e o segundo é o bloco associado ao nó selecionado, cujo tamanho é reduzido a  $r$ . Observe que o bloco reservado deve ser o correspondente aos endereços mais altos, para não afetar as duas primeiras palavras, de uso do sistema de alocação.

Uma consequência indesejada desse método é a possível formação de blocos de tamanho muito reduzido, fenômeno conhecido por *fragmentação*. Para procurar evitá-la, uma alternativa é definir um limite inferior  $c \geq 2$ , tal que o sistema não permita a formação de blocos menores do que  $c$ . Suponha que seja solicitada a reserva de um bloco de tamanho  $b$  e que o bloco selecionado da lista possua tamanho  $b' \geq b$ , onde  $b' - b < c$ . Nesse caso, a idéia é incorporar ao bloco reservado a porção restante  $b' - b$ .

O procedimento que se segue descreve o processo. A chamada externa é *reserva(b, pont)*, sendo  $b$  o tamanho do bloco solicitado. O tamanho efetivamente reservado é pelo menos igual a  $\max\{2, b\}$ , porém menor do que  $b + c$ . Esse valor é atribuído a  $b$  no final do processo. O parâmetro *pont* indica, nessa ocasião, o endereço do bloco reservado. Se não existir bloco disponível que satisfaça as condições da solicitação, então *pont* =  $\lambda$ .

**algoritmo 2.28:** Reserva de um bloco de tamanho  $b$

**procedimento** *reserva(b, pont)*

```

pt :=  $\mathcal{M}[2]$ ; pont :=  $\lambda$ ; ant := 1
se  $b < 2$  então  $b$  := 2
enquanto pt ≠  $\lambda$  faça
    se  $\mathcal{M}[\textit{pt}] \geq b$  então
         $r$  :=  $\mathcal{M}[\textit{pt}] - b$  % bloco encontrado
        se  $r < c$  então
            pont :=  $\textit{pt}$  % fragmento incorporado
             $\mathcal{M}[\textit{ant} + 1] := \mathcal{M}[\textit{pt} + 1]$ 
             $b$  :=  $b + r$ 
        senão  $\mathcal{M}[\textit{pt}] := r$ 
        pont := pt +  $r$ 
    pt :=  $\lambda$ 
senão ant := pt
pt :=  $\mathcal{M}[\textit{pt} + 1]$ 
```

A operação de liberação de blocos será realizada de acordo com a seguinte estratégia. Sejam  $b$  e *pont* o tamanho e endereço do bloco liberado, respectivamente. Deve ser verificado se ele é contíguo a algum bloco disponível. Podem existir até dois blocos nessas condições. Em caso negativo, o bloco de endereço *pont* será simplesmente inserido na lista. Caso seja encontrado algum bloco contíguo ao liberado, os dois deverão ser fundidos num único. Aquele de endereço maior será incorporado ao menor. A inserção ou incorporação devem ser realizadas de tal modo que a lista seja mantida em ordem crescente de endereços de seus blocos. Observe que a estratégia descrita garante a inexistência de blocos disponíveis e contíguos ao longo de todo o processo. A formulação encontra-se descrita no algoritmo 2.29. Supõe-se que os blocos tenham sido incluídos na lista através do algoritmo 2.28, o que implica  $b \geq c \geq 2$ .

**algoritmo 2.29:** Liberação de um bloco

**procedimento** liberar( $b$ ,  $pont$ )

$pt := \mathcal{M}[2]$ ;  $ant := 1$

**enquanto**  $pt \neq \lambda$  e  $pt < pont$  **faça** % buscar posição do bloco

$ant := pt$

$pt := \mathcal{M}[pt + 1]$

**se**  $pont + b = pt$  **então**

$b := b + \mathcal{M}[pt]$

% bloco liberado contíguo ao

seguinte

**senão**  $\mathcal{M}[pont + 1] := pt$

**se**  $ant + \mathcal{M}[ant] = pont$  **então**

$\mathcal{M}[ant] := \mathcal{M}[ant] + b$

% bloco liberado contíguo ao

anterior

$\mathcal{M}[ant + 1] := \mathcal{M}[pont + 1]$

**senão**  $\mathcal{M}[ant + 1] := pont$

$\mathcal{M}[pont] := b$

Seja  $n$  o número de nós da lista que contém a memória disponível. No pior caso, os algoritmos de reserva e liberação efetuam  $O(n)$  passos. Em decorrência, um dos efeitos da fragmentação é o aumento da complexidade dos algoritmos. Utilizando-se uma estrutura mais elaborada para a memória disponível e mantendo-se o critério de reserva e liberação de blocos, é possível formular algoritmos que diminuem a complexidade dessas operações para  $O(\log n)$  (exercício 6.21).

## 2.9 – Exercícios

- 2.1 Apresentar os algoritmos de inserção e remoção de uma lista ordenada em alocação seqüencial.
- 2.2 Determinar a expressão da complexidade média de uma busca não ordenada, supondo que a probabilidade da busca de qualquer chave, exceto a última, é igual à metade da probabilidade da chave seguinte na lista. Supor também que a probabilidade de a chave procurada se encontrar na lista é igual a  $q$ .
- 2.3 Repetir o exercício anterior para o caso da busca ordenada.

2.4

Seja o seguinte algoritmo de busca em uma lista ordenada de tamanho  $n$  em alocação seqüencial:

```

função busca-ord1(x)
    se  $x \leq \mathcal{L}[n].chave$  então
         $i := 1$ 
        enquanto  $\mathcal{L}[i].chave < x$  faça
             $i := i + 1$ 
        se  $\mathcal{L}[i].chave \neq x$  então
            busca-ord1 := 0      % elemento não encontrado
        senão busca-ord1 := i      % elemento encontrado
        senão busca-ord1 := 0      % fora da tabela
    
```

Comparar o algoritmo apresentado com o algoritmo 2.3. Em que situação o desempenho dos dois é equivalente? Qual é a restrição que o algoritmo acima apresenta em relação ao algoritmo 2.3?

- 2.5 Determinar a expressão da complexidade média de uma busca não ordenada de  $n$  chaves,  $n$  par, em que as probabilidades de busca das chaves de ordem ímpar são iguais entre si, sendo esse valor igual ao dobro da probabilidade de qualquer chave par. Supor, ainda, que a probabilidade de a chave se encontrar na lista é igual a  $q$ .
- 2.6 Apresentar algoritmos para um deque em alocação seqüencial. São dados fornecidos:
  - na inserção: o nó a ser inserido e a extremidade desejada ( $E1$  ou  $E2$ ),
  - na remoção: a extremidade da remoção.
- 2.7 Criar algoritmos de inserção e remoção para duas pilhas armazenadas em alocação seqüencial que compartilham a memória de dimensão  $M$ .
- 2.8 Apresentar os algoritmos de inserção e remoção numa lista circular encadeada.
- 2.9 Apresentar o algoritmo de alteração do campo *info* de uma lista circular encadeada com nó-cabeça.
- 2.10 Apresentar o algoritmo de alteração do campo *chave* de uma lista circular encadeada com nó-cabeça.
- 2.11 Descrever algoritmos de inserção e remoção em uma lista não ordenada, em alocação encadeada.

- 2.12 Comparar algoritmos de busca, inserção e remoção em uma lista ordenada nas alocações seqüencial e encadeada.
- 2.13 Sejam duas listas, não ordenadas, simplesmente encadeadas com nó-cabeça. Apresentar um algoritmo que, enquanto possível, intercale as duas listas.
- 2.14 Sejam duas listas, ordenadas, simplesmente encadeadas com nó-cabeça. Apresentar um algoritmo que intercale as duas listas de forma que a lista resultante esteja também ordenada.
- 2.15 Imprimir, a partir de uma expressão em notação polonesa, a seqüência de operações a serem executadas, na ordem correta. Introduzir operandos especiais para armazenar resultados parciais.
- 2.16 Seja  $L$  uma lista simplesmente encadeada, composta dos números  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ , respectivamente, segundo a ordem de armazenamento. Escrever um algoritmo que, percorrendo  $L$  uma única vez, constrói uma outra lista  $L'$ , formada dos elementos seguintes.
- $\ell_2, \ell_3, \dots, \ell_n, \ell_1$ .
  - $\ell_n, \ell_{n-1}, \dots, \ell_1$ .
  - $\ell_1 + \ell_n, \ell_2 + \ell_{n-1}, \dots, \ell_{n/2} + \ell_{n/2+1}$ , onde  $n$  é par.
- 2.17 Uma palavra é um *palíndromo* se a seqüência de letras que a forma é a mesma, quer seja lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda (exemplo: raiar). Escrever um algoritmo eficiente para reconhecer se uma dada palavra é um palíndromo. Escolher a estrutura de dados conveniente para representar a palavra.
- 2.18 Seja um polinômio da forma  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ . Representar  $P(x)$  através de uma lista encadeada conveniente e escrever algoritmos eficientes para efetuar as seguintes operações, onde  $Q(x)$  é um outro polinômio.
- Calcular  $P(x_0)$ , onde  $x_0$  é um dado valor para  $x$ .
  - $P(x) + Q(x)$ .
  - $P(x) \cdot Q(x)$ .
- 2.19 Generalizar o algoritmo de ordenação topológica, de modo a gerar todas as ordenações topológicas distintas de uma ordem parcial.
- 2.20 Seja  $A$  uma matriz esparsa  $n \times m$ , isto é, boa parte de seus elementos são nulos ou irrelevantes. Descrever uma estrutura de dados que re-

presente  $A$ , e cujo espaço total seja  $O(k)$  em vez de  $O(n m)$ , onde  $k$  é o número total de elementos não irrelevantes de  $A$ .

- 2.21 Descrever um algoritmo para localizar um elemento  $a_{ij}$  da matriz  $A$ , armazenada segundo a estrutura obtida na solução do exercício anterior. Determinar a sua complexidade.
- 2.22 Descrever um algoritmo para computar a matriz  $A^2$ , utilizando a representação dos dois exercícios anteriores.
- 2.23 Seja  $1, 2, \dots, n$  uma seqüência de elementos que serão inseridos e posteriormente retirados de uma pilha  $P$  uma vez cada. A ordem de inclusão dos elementos na pilha é  $1, 2, \dots, n$ , enquanto a de remoção depende das operações realizadas. Por exemplo, com  $n = 3$ , a seqüência de operações

incluir em  $P$   
 incluir em  $P$   
 retirar de  $P$   
 incluir em  $P$   
 retirar de  $P$   
 retirar de  $P$

produzirá a permutação  $2, 3, 1$  a partir da entrada  $1, 2, 3$ . Representando por  $I$ ,  $R$ , respectivamente, as operações de inserção e remoção da pilha, a permutação  $2, 3, 1$  pode ser denotada por  $IIRIRR$ . De um modo geral, uma permutação é chamada *admissível* quando ela puder ser obtida mediante uma sucessão de inclusões e remoções em uma pilha a partir da permutação  $1, 2, \dots, n$ . Assim, por exemplo, a permutação  $2, 3, 1$  é admissível. Pede-se:

- (i) Determinar a permutação correspondente a  $IIRIRR$ ,  $n = 4$ .
- (ii) Dê um exemplo de permutação não admissível.

- 2.24 Escrever a relação de permutações admissíveis de  $1, 2, 3, 4$ .
- 2.25 Provar que uma permutação  $p_1, \dots, p_n$  é admissível se e somente se não existirem índices  $i, j, k$  satisfazendo  $i < j < k$  e  $p_j < p_k < p_i$ .
- 2.26 Repetir os exercícios 2.23 e 2.24 com uma fila, em vez de uma pilha.
- 2.27 Determinar as condições necessárias e suficientes para que uma permutação seja admissível, supondo que uma fila seja utilizada no lugar da pilha.

2.28 • Determinar as condições necessárias e suficientes para que uma permutação seja admissível, supondo que um deque seja utilizado no lugar da pilha.

2.29 ° No sistema de alocação de memória, o critério de *melhor escolha*, para a reserva de um bloco, seleciona aquele que esteja disponível e cujo tamanho seja o mais próximo possível do solicitado. Provar ou dar contra-exemplo da afirmativa a seguir.

O desempenho do método de melhor escolha é sempre não inferior ao da primeira escolha no seguinte sentido. Se for possível selecionar um bloco de tamanho  $\geq b$  num sistema que aplica a primeira escolha, o mesmo acontece para o método da melhor escolha.

## Notas Bibliográficas

Devido ao seu largo uso, a concepção de listas lineares se deu com o aparecimento do primeiro computador. O uso de pilhas e filas, por exemplo, transcende à computação. De fato, pilhas e filas eram empregadas em diversas áreas, anteriormente aos computadores. Contudo, foi Knuth ([Kn68]) quem, pela primeira vez, descreveu, de forma unificada, os algoritmos para as estruturas de dados mais básicas. As permutações admissíveis (exercícios 2.23 a 2.27) podem ser encontradas também em [Kn68]. Além disso, essa referência contém a técnica de implementação utilizada no algoritmo de ordenações topológicas, da seção 2.7. Um algoritmo de geração de todas as ordenações topológicas (exercício 2.19), com complexidade polinomial por ordenação, foi inicialmente apresentado por Knuth e Szwarcfiter [Kn74]. Um algoritmo ótimo para esse problema foi descrito por Pruesse e Ruskey [Pr91]. Os termos *primeira escolha* e *melhor escolha* (exercício 2.29) são provenientes do inglês “first-fit” e “best-fit”.

# Árvores

## 3.1 – Introdução

Em diversas aplicações, necessita-se de estruturas mais complexas do que as puramente seqüenciais, examinadas no capítulo anterior. Entre essas, destacam-se as árvores, por existirem inúmeros problemas práticos que podem ser modelados através delas. Além disso, as árvores, em geral, admitem um tratamento computacional simples e eficiente. Isto não pode ser dito de estruturas mais gerais do que as árvores, como os grafos, por exemplo.

Neste capítulo, são apresentados os conceitos iniciais relativos às árvores, bem como os algoritmos para sua manipulação computacional básica. Resalta-se, entretanto, que o estudo das árvores admite um tratamento puramente matemático, sem preocupação com sua finalidade computacional. Nesse último caso, o enfoque seria distinto do ora apresentado.

Na seção 3.2, são apresentadas as definições básicas e as diferentes formas de representação gráfica de uma árvore. Na seção 3.3, introduz-se a árvore binária, possivelmente a mais importante no aspecto computacional. Além disso, apresenta-se também a representação clássica dessa árvore em computador. Na seção seguinte, são estudados os algoritmos para o problema de percorrer uma árvore binária, segundo vários critérios. Na seção 3.5, descreve-se a conversão de uma árvore geral em binária. Essa questão é fundamental para a manipulação de árvores gerais. Finalmente, na última seção, são abordadas as árvores binárias com costura, que propiciam, em al-

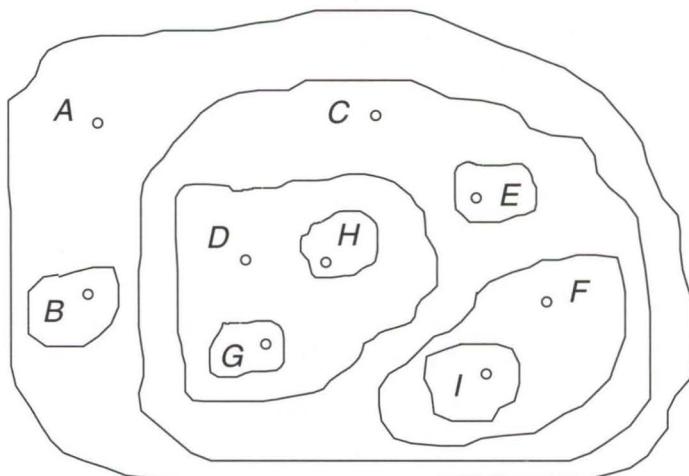
gumas aplicações, a formulação de algoritmos mais eficientes que os relativos às árvores binárias ordinárias.

### 3.2 – Definições e Representações Básicas

Uma árvore enraizada  $T$ , ou simplesmente árvore, é um conjunto finito de elementos denominados *nós* ou *vértices* tais que

- $T = \emptyset$ , e a árvore é dita *vazia*, ou
- existe um nó especial,  $r$ , chamado *raiz* de  $T$ ; os restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em  $m \geq 1$  conjuntos disjuntos não vazios, as *subárvores* de  $r$ , ou simplesmente *subárvores*, cada qual por sua vez uma árvore.

Uma floresta é um conjunto de árvores. Se  $v$  é um nó de  $T$ , a notação  $T_v$  indica a subárvore de  $T$  com raiz  $v$ .



**Figura 3.1:** Diagrama de inclusão

Para visualizar esse conceito, pode-se representá-lo graficamente. Há formas diferentes de representações gráficas de uma árvore. Em todas elas, cada

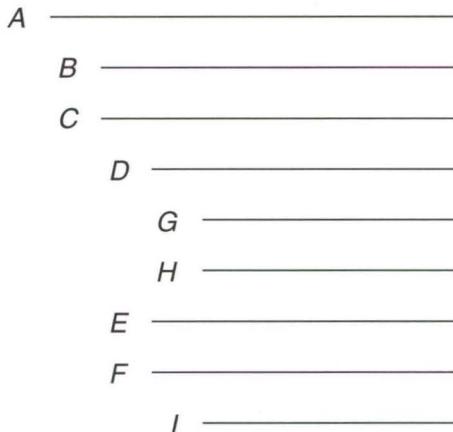
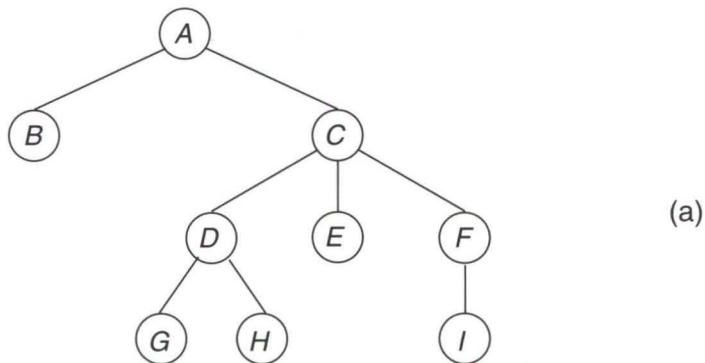
nó poderá ser associado a um identificador, denominado *rótulo*. Observa-se, contudo, que o estudo das árvores pode prescindir do uso desse identificador e basear-se unicamente na posição relativa de seus nós na estrutura.

A representação mais próxima à definição é o *diagrama de inclusão*, apresentado na figura 3.1, representação tradicionalmente utilizada para conjuntos. Na figura, a raiz de  $T$  é o nó  $A$ , o qual possui duas subárvore: a formada pelo único nó  $B$  e aquela cuja raiz é  $C$  e que contém todos os demais nós, e assim por diante. Os rótulos dos nós são  $A, B, \dots, H$ , respectivamente.

A forma mais comum de representar graficamente uma árvore é através de sua *representação hierárquica*, semelhante à utilizada para descrever organogramas de uma empresa. A figura 3.2(a) ilustra uma tal representação que descreve a mesma árvore da figura 3.1. Nessa representação, existe uma linha unindo cada nó às raízes de suas subárvore, quando não vazias, as quais se encontram sempre abaixo (acima) desse nó. Conforme a escolha dessa posição, abaixo ou acima, tem-se as representações das figuras 3.3(a) e 3.3(b), respectivamente. A representação da figura 3.3(a), com a raiz no topo, é a mais empregada na literatura da computação, razão pela qual é aqui adotada. A representação hierárquica é, de longe, a mais utilizada para visualizar uma árvore, pela forma clara como exibe as relações existentes entre os nós da estrutura. Além disso, do ponto de vista computacional, essa representação já sugere uma forma adequada de dispor os dados no computador, como se verá mais adiante.

A figura 3.2(b) ilustra a mesma árvore que as figuras 3.1 e 3.2(a), porém agora representada segundo um *diagrama de barras*. Neste, os nós são representados por barras horizontais, uma por linha. Se um nó  $v$  é raiz de uma subárvore que contém  $w$ , então a barra correspondente a  $v$  se localiza acima da de  $w$  e possui comprimento maior do que essa última. Raízes de subárvore de um mesmo nó possuem barras de comprimento idêntico. Por exemplo, índices de livros, muitas vezes, empregam esse método.

Seja agora uma seqüência  $S$  de  $2n$  parênteses, compreendendo  $n$  “(” e  $n$  “)”. A seqüência é dita *aninhada* quando, em cada subseqüência de  $S$ , iniciada na posição 1 e com extremidade  $i < 2n$ , o número de “(” é maior do que o de “)”. Por exemplo, a seqüência (( ) ( )) é aninhada, mas as seqüências (( )( ) e ( ) )( ) não o são. Uma seqüência desse tipo corresponde a uma outra representação de árvores, denominada *representação por parênteses aninhados* (ver exercício 3.3). A seqüência de parênteses representa as relações entre os



(A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I))))

(c)

---

**Figura 3.2:** Representações de uma árvore

nós da estrutura. O rótulo de cada nó é inserido imediatamente à esquerda do “(” correspondente. A figura 3.2(c) ilustra a representação por parênteses aninhados da mesma árvore representada nas figuras 3.1, 3.2(a) e 3.2(b).

Toda expressão aritmética pode ser colocada sob a forma de uma seqüência de parênteses aninhados. Basta parentizá-la completamente, isto é, um par

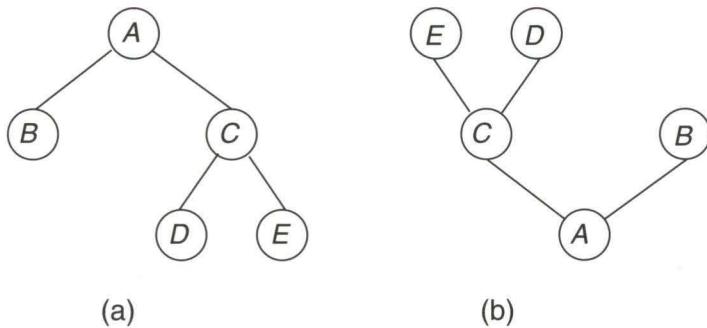


Figura 3.3: Representações hierárquicas

de “(”e “)” por par de operandos e operação. Pode-se então utilizar uma árvore para visualizar uma expressão aritmética na forma como ela seria computada. Cada operador binário e seu par de operandos correspondem a um nó da árvore e suas duas subárvore. Por exemplo, a expressão  $a + b * (c/d - e)$ , equivalente a  $(a + (b * ((c/d) - e)))$ , aparece na figura 3.4.

---

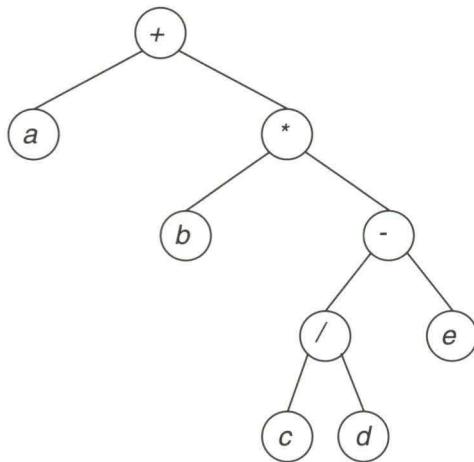


Figura 3.4: Expressão aritmética representada como árvore

Seja  $v$  o nó raiz da subárvore  $T_v$  de  $T$ . Os nós raízes  $w_1, w_2 \dots w_j$  das subárvore de  $T_v$  são chamados *filhos* de  $v$ ;  $v$  é chamado *pai* de  $w_1, w_2, \dots, w_j$ . Os nós  $w_1, w_2, \dots, w_j$  são *irmãos*. Se  $z$  é filho de  $w_1$ , então  $w_2$  é *tio* de  $z$  e  $v$  é *avô* de  $z$ . O número de filhos de um nó é chamado *grau de saída* desse nó. Se  $x$  pertence à subárvore  $T_v$ ,  $x$  é descendente de  $v$ , e  $v$ , ancestral de  $x$ . Nesse caso, sendo  $x$  diferente de  $v$ ,  $x$  é *descendente próprio* de  $v$ , e  $v$  é *ancestral próprio* de  $x$ . Um nó que não possui descendentes próprios é chamado *folha*. Toda árvore com  $n > 1$  nós possui no mínimo 1 e no máximo  $n - 1$  folhas (exercício 3.8). Um nó não folha é dito *interior*.

Uma seqüência de nós distintos  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , tal que existe sempre entre nós consecutivos ( $v_1$  e  $v_2$ ,  $v_2$  e  $v_3, \dots, v_{k-1}$  e  $v_k$ ) a relação “é filho de” ou “é pai de”, é denominada um *caminho* da árvore. Diz-se que  $v_1$  alcança  $v_k$  e vice-versa. Um caminho de  $k$  vértices é obtido pela seqüência de  $k - 1$  pares da relação. O valor  $k - 1$  é o *comprimento* do caminho. *Nível* de um nó  $v$  é o número de nós do caminho da raiz até o nó  $v$ . O nível da raiz é, portanto, igual a 1. A *altura* de um nó  $v$  é o número de nós do maior caminho de  $v$  até um de seus descendentes. As folhas têm altura 1. A altura da árvore  $T$  é igual ao nível máximo de seus nós. Representa-se a altura de  $T$  por  $h(T)$ , enquanto  $h(v)$  é a altura da subárvore de raiz  $v$ . Observe a árvore  $T$  da figura 3.2(a). O vértice  $C$  é ancestral próprio de  $G$ , de  $H$  e de  $F$ , entre outros. O nó  $D$  é descendente próprio de  $A$ . O nível do vértice  $F$  é 3 e sua altura é 2; o nível do vértice  $A$  é 1 e sua altura é 4. A altura da árvore é 4.

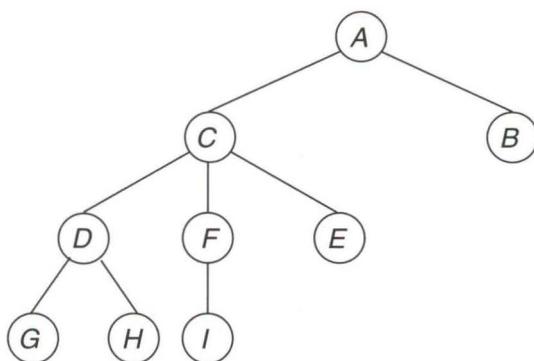


Figura 3.5: Exemplo para isomorfismo

Uma árvore *ordenada* é aquela na qual os filhos de cada nó estão ordenados. Assume-se que tal ordenação se desenvolva da esquerda para a direita. Assim, a árvore  $T$  da figura 3.2(a) e a árvore  $T'$  da figura 3.5 são distintas se consideradas como ordenadas. Contudo, elas podem se tornar coincidentes mediante uma reordenação de nós irmãos.

De modo geral, duas árvores não ordenadas são *isomorfas* quando puderem se tornar coincidentes através de uma permutação na ordem das subárvore de seus nós. As árvores das figuras 3.2(a) e 3.5 são então isomorfas. Por outro lado, duas árvores ordenadas são *isomorfas* quando forem coincidentes, segundo a ordenação existente entre os seus nós.

### 3.3 – Árvores Binárias

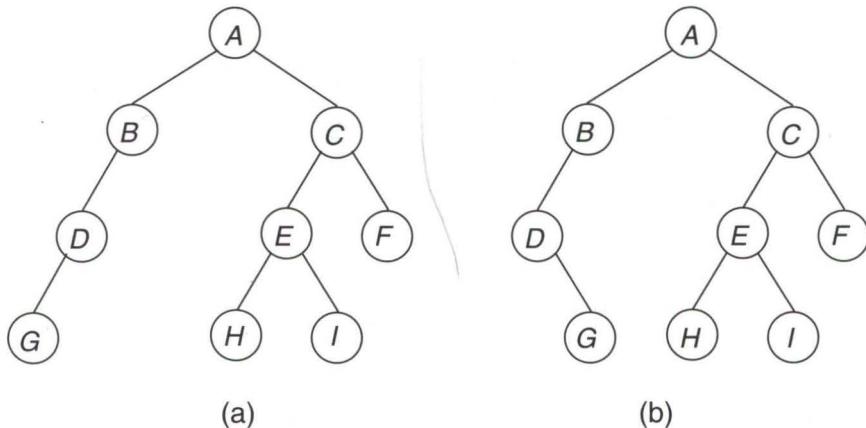
Conforme já mencionado, as árvores constituem as estruturas não seqüenciais com maior aplicação em computação. Dentre as árvores, as binárias são, sem dúvida, as mais comuns.

Uma *árvore binária*  $T$  é um conjunto finito de elementos denominados *nós* ou vértices, tal que

- $T = \emptyset$  e a árvore é dita *vazia*, ou
- existe um nó especial  $r$ , chamado *raiz* de  $T$ , e os restantes podem ser divididos em dois subconjuntos disjuntos,  $T_r^E$  e  $T_r^D$ , a *subárvore esquerda* e a *direita* de  $r$ , respectivamente, as quais são também árvores binárias.

A raiz da subárvore esquerda (direita) de um nó  $v$ , se existir, é denominada *filho esquerdo (direito)* de  $v$ . Naturalmente, o esquerdo pode existir sem o direito e vice-versa. Se  $r$  é a raiz de  $T$ , diz-se também que  $T_r^E$  e  $T_r^D$  são as subárvore esquerda e direita de  $T$ , respectivamente. Analogamente à seção anterior, a notação  $T_v$  indica a (sub) árvore binária, cuja raiz é  $v$  e cujas subárvore esquerda e direita de  $T$  são  $T_v^E$  e  $T_v^D$ , respectivamente.

A figura 3.6(a) ilustra um exemplo de árvore binária  $T$ . O nó  $A$  é a raiz de  $T$ , enquanto  $T_A^E$  e  $T_A^D$  são as subárvore binárias de  $T$  com raízes em  $B$  e  $C$ , respectivamente. O filho esquerdo de  $A$  é o nó  $B$  e o direito é  $C$ . O nó  $B$  possui  $D$  como filho esquerdo, mas não possui filho direito.



**Figura 3.6:** Árvores binárias

---

Observando atentamente as definições apresentadas, verifica-se que a árvore binária não obedece rigidamente à definição de árvore (ver exercício 3.10). Por exemplo, uma árvore binária pode ter duas subárvores vazias (a esquerda e a direita), enquanto o mesmo não ocorre com árvores gerais. Devem-se, portanto, considerar árvores binárias como uma extensão do caso geral. Observe a figura 3.6. As estruturas das figuras 3.6(a) e 3.6(b) são idênticas (isomórfas) se consideradas como árvores, mesmo se forem ordenadas, porém são distintas como árvores binárias (por quê?). Em particular, são também válidas para árvores binárias as definições e a notação, descritas na seção anterior, para árvores gerais.

Toda árvore binária com  $n$  nós possui exatamente  $n + 1$  subárvores vazias entre suas subárvores esquerdas e direitas. Por exemplo, a árvore da figura 3.6(a) possui 9 nós e 10 subárvores vazias: as subárvores esquerda e direita dos nós  $F, G, H, I$  e as subárvores direitas de  $B$  e  $D$ . A demonstração desse fato é simples, e é vista a seguir.

**Lema 3.1:**

O número de subárvores esquerdas e direitas vazias em uma árvore binária com  $n > 0$  nós é  $n + 1$ .

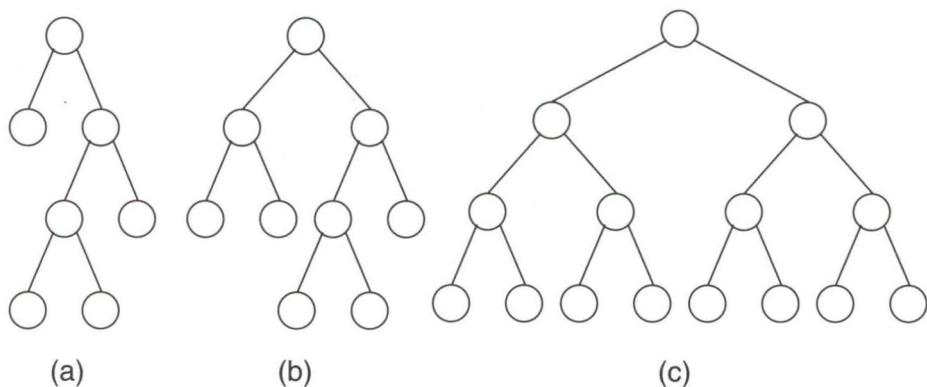
**Prova:**

Seja  $T$  a árvore binária. Utiliza-se indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , o resultado é verdadeiro, visto que  $T$  consiste em um único nó  $r$ , juntamente com as subárvore esquerda e direita de  $r$ , ambas vazias. Se  $n > 1$ , pela hipótese de indução, assume-se que o lema é verdadeiro para todas as árvores com menos de  $n$  nós. Da seção anterior sabe-se que  $T$  possui, pelo menos, uma folha  $v$ . Seja  $T - v$  a estrutura obtida de  $T$  pela remoção de  $v$ .  $T - v$  é certamente uma árvore binária, pois  $T - v$  é exatamente  $T$ , exceto que a subárvore de raiz  $v$  foi transformada em vazia. Por outro lado,  $T - v$  possui  $n - 1$  nós. Portanto, pode-se aplicar esse lema a  $T - v$  e concluir que  $T - v$  possui  $n$  subárvore vazias. Comparando-se, agora,  $T - v$  com  $T$ , verifica-se que todas as suas subárvore são idênticas, exceto que uma subárvore vazia de  $T - v$  foi retirada e em seu lugar foi acrescentada uma folha, isto é, o nó  $v$ , e mais as duas subárvore, esquerda e direita, de  $v$ , ambas vazias. Então o número total de subárvore vazias de  $T$  é igual a  $n - 1 + 2 = n + 1$ .  $\square$

Em seguida, são introduzidos alguns tipos especiais de árvores binárias, bastante utilizadas, e que serão mencionadas nos próximos capítulos.

Uma árvore *estritamente binária* é uma árvore binária em que cada nó possui 0 ou 2 filhos. Uma árvore binária *completa* é aquela que apresenta a seguinte propriedade: se  $v$  é um nó tal que alguma subárvore de  $v$  é vazia, então  $v$  se localiza ou no último (maior) ou no penúltimo nível da árvore. Uma árvore binária *cheia* é aquela em que, se  $v$  é um nó com alguma de suas subárvore vazias, então  $v$  se localiza no último nível. Segue-se que toda árvore binária cheia é completa e estritamente binária. Como exemplo, a figura 3.7(a) ilustra uma árvore estritamente binária, mas não completa. A árvore da figura 3.7(b) é completa, mas não cheia, enquanto a da figura 3.7(c) é cheia.

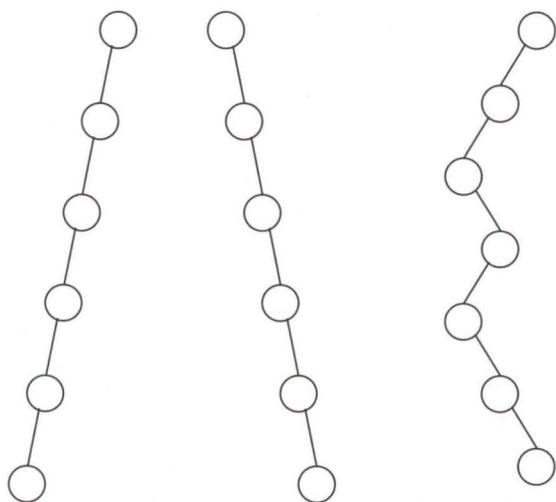
A relação entre a altura de uma árvore binária e o seu número de nós é um dado importante para várias aplicações. Para um valor fixo de  $n$ , indagar-se-ia quais são as árvores binárias que possuem altura  $h$  máxima e mínima. A resposta ao primeiro problema é imediata. A árvore binária que possui altura máxima é aquela cujos nós interiores possuem exatamente uma subárvore vazia. Essas árvores são denominadas *ziguezague* e encontram-se ilustradas na figura 3.8. Naturalmente, a altura de uma árvore ziguezague é igual a  $n$ . Por outro lado, uma árvore completa sempre apresenta altura mínima, conforme é visto a seguir.



---

Figura 3.7: Árvores estritamente binária, binária completa e cheia

---



---

Figura 3.8: Árvores ziguezague

**Lema 3.2:**

Seja  $T$  uma árvore binária completa com  $n > 0$  nós. Então  $T$  possui altura  $h$  mínima. Além disso,  $h = 1 + \lfloor \log n \rfloor$ .

**Prova:**

Seja  $T'$  uma árvore binária de altura mínima com  $n$  nós. Se  $T'$  é também completa, então  $T$  e  $T'$  possuem a mesma altura, isto é,  $T$  possui altura mínima. Se  $T'$  não é completa, efetua-se a seguinte operação: retirar uma folha  $w$  de seu último nível e tornar  $w$  o filho de algum nó  $v$  que possui alguma de suas subárvore vazias, localizado em algum nível acima do penúltimo. Repete-se a operação até que não seja mais possível realizá-la, isto é, até que a árvore  $T''$ , resultante da transformação, seja completa.  $T''$  não pode ter altura inferior a  $T'$ , pois  $T'$  é mínima.  $T''$  não pode ter altura superior a  $T'$ , pois nenhum nó foi movido para baixo. Então as alturas de  $T'$  e  $T''$  são iguais. Como  $T''$  é completa, conclui-se que as alturas de  $T$  e  $T''$  também coincidem. Isto é,  $T$  possui altura mínima.

Para mostrar que  $h = 1 + \lfloor \log n \rfloor$ , recorre-se à indução. Se  $n = 1$ , então  $h = 1 + \lfloor \log n \rfloor = 1$ , correto. Quando  $n > 1$ , suponha o resultado verdadeiro para todas as árvores binárias completas com até  $n - 1$  nós. Seja  $T'$  a árvore obtida de  $T$  pela remoção de todos os nós, em número de  $k$ , do último nível. Logo,  $T'$  é uma árvore cheia com  $n' = n - k$  nós. Pela hipótese de indução,  $h(T') = 1 + \lfloor \log n' \rfloor$ . Como  $T'$  é cheia,  $n' = 2^m - 1$ , para algum inteiro  $m > 0$ . Isto é,  $h(T') = m$ . Além disso,  $1 \leq k \leq n' + 1$ . Assim,

$$h(T) = 1 + h(T') = 1 + m = 1 + \log(n' + 1) = 1 + \lfloor \log(n' + k) \rfloor = 1 + \lfloor \log n \rfloor.$$

□

Serão examinadas a seguir algumas extensões da árvore binária.

Seja  $T$  uma árvore (ou uma árvore binária), e  $v$  um nó de  $T$ . Seja  $T_v$  a subárvore de  $T$  de raiz  $v$ , e  $S$  um conjunto de  $T_v$  tal que  $T_v - S$  é uma árvore. A árvore  $T' = T_v - S$  é chamada *subárvore parcial* de raiz  $v$ . Observe, por exemplo, a árvore  $T$  da figura 3.9(a). A árvore da figura 3.9(b) é subárvore de  $T$  de raiz  $E$ , enquanto a árvore da figura 3.9(c) é uma subárvore parcial de  $T$  de raiz  $E$ , porém não é subárvore de  $T$ . Observe que a diferença entre uma subárvore de raiz  $v$  e uma subárvore parcial de raiz  $v$  é que a primeira contém obrigatoriamente todos os descendentes de  $v$ , enquanto a segunda, não necessariamente.

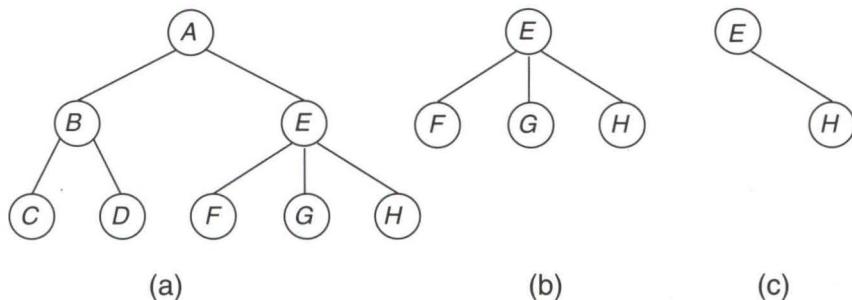


Figura 3.9: Subárvore e subárvore parcial

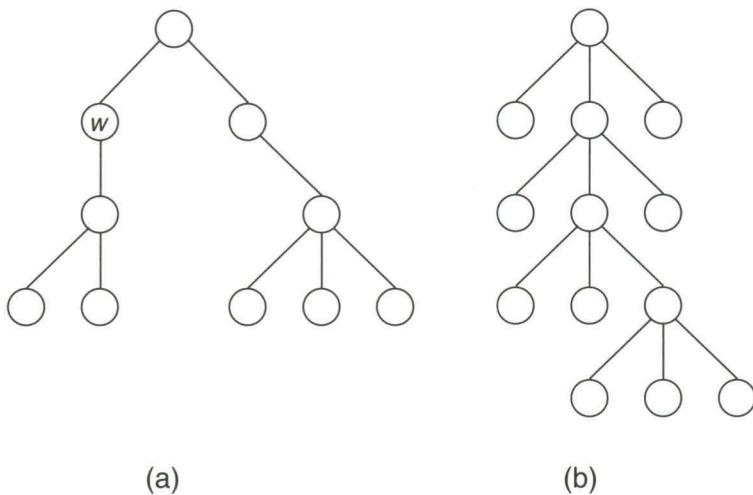
Uma árvore  $m$ -ária  $T$ ,  $m \geq 2$ , é um conjunto finito de elementos, denominados nós ou vértices, tais que

- $T = \emptyset$  e a árvore é dita vazia, ou
- contém um nó especial  $r$ , chamado *raiz* de  $T$ , e os restantes podem ser sempre divididos em  $m$  subconjuntos disjuntos, as  $i$ -ésimas subárvores de  $r$ ,  $1 \leq i \leq m$ , as quais são também árvores  $m$ -árias.

A raiz da  $i$ -ésima subárvore de um nó  $v$  de  $T$ , se existir, é denominada *i*-ésimo filho de  $v$ . Naturalmente, a árvore  $m$ -ária é uma generalização da árvore binária em que cada nó possui  $m$  subárvores. A árvore  $m$ -ária possui uma ordenação implícita nas subárvores de cada nó, mesmo que algumas ou todas essas subárvores sejam vazias. Por exemplo, as figuras 3.10(a) e 3.10(b) ilustram árvores 3-árias (ou ternárias). Observe que o nó  $w$ , na figura 3.10(a), possui um único filho, mas é possível a referência às três subárvores de  $w$ , sendo vazias a primeira e a terceira, enquanto a segunda não o é.

Analogamente ao caso binário, podem-se definir *árvore estritamente  $m$ -ária*, *árvore  $m$ -ária completa* e *cheia*. A figura 3.10(b) representa uma árvore estritamente ternária.

A importância das árvores  $m$ -árias de um modo geral e, em especial, da árvore binária decorre do número constante de subárvores de cada nó e de sua ordenação implícita. Quando surge o problema de como representar uma árvore internamente no computador, observa-se o fato de que este estabelece, necessariamente, uma ordem implícita nos dados, por características



**Figura 3.10:** Árvores ternárias

de construção. Assim sendo, pode-se aproveitar a compatibilidade entre essas duas ordenações e eleger a árvore  $m$ -ária para representá-la na memória de um computador. Além disso, o número constante de subárvores de cada nó em muito simplifica a representação. Os detalhes são apresentados a seguir.

O armazenamento de árvores pode utilizar alocação seqüencial ou encadeada. As vantagens e desvantagens de uma e outra já foram mencionadas no capítulo anterior. Sendo a árvore uma estrutura mais complexa do que listas lineares, as vantagens na utilização da alocação encadeada prevalecem. Mesmo assim, o exercício 3.30 apresenta uma estrutura de representação seqüencial que, em determinadas circunstâncias, pode ter um bom desempenho.

Não é difícil observar que a estrutura de armazenamento para árvores deve conter, em cada nó, ponteiros para seus filhos. A disposição mais econômica consiste em limitar o número de filhos a dois, exatamente o caso de árvores binárias. Note que o número de subárvores vazias cresce com o aumento do parâmetro  $m$  das árvores  $m$ -árias (exercício 3.13). Para um dado valor de  $n$ , a árvore binária é aquela que minimiza o número de ponteiros necessários.

O armazenamento de uma árvore binária surge naturalmente de sua definição. Cada nó deve possuir dois campos de ponteiros, *esq* e *dir*, que apontam para as suas subárvore esquerda e direita, respectivamente. O ponteiro *ptraiz* indica a raiz da árvore. Da mesma forma que na alocação encadeada de listas lineares, a memória é inicialmente considerada uma lista de espaço disponível. Os campos do nó da árvore que contêm as informações pertinentes ao problema serão aqui representados como um só campo de nome *info*. Excetuando-se esse último, necessita-se, então, de  $2n + 1$  unidades de memória para representar uma árvore binária com  $n$  nós.

A figura 3.11 ilustra a estrutura de ponteiros usada no armazenamento da árvore binária da figura 3.6(b).

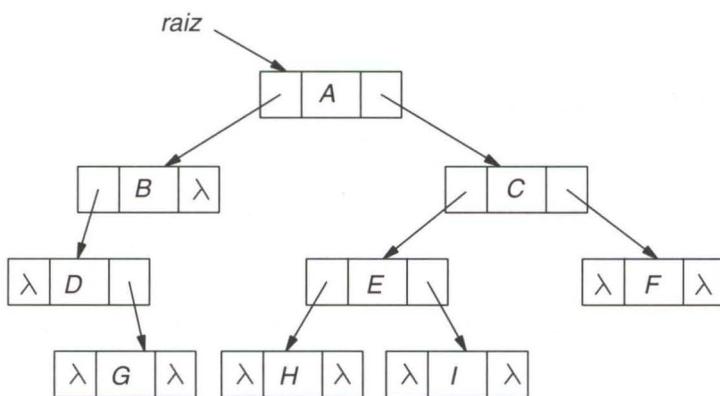


Figura 3.11: Armazenamento de uma árvore binária

### 3.4 – Percurso em Árvores Binárias

Nesta seção, são apresentados algoritmos para efetuar um *percurso* em uma árvore binária. Por percurso entende-se uma visita sistemática a cada um de seus nós; esta é uma das operações básicas relativas à manipulação de árvores. Uma árvore é, essencialmente, uma estrutura não seqüencial. Por

isso mesmo, ela pode ser utilizada em aplicações que demandem acesso direto. Contudo, mesmo nesse tipo de aplicação, é imprescindível conhecer métodos eficientes para percorrer toda a estrutura. Por exemplo, para listar o conteúdo de um arquivo é necessário utilizar algoritmos para percurso.

Para percorrer uma árvore deve-se, então, visitar cada um de seus nós. O conceito de visita, nesse caso, possui um caráter bem específico. Visitar um nó significa operar, de alguma forma, com a informação a ele relativa. Por exemplo, imprimir, atualizar suas informações etc. Em geral, percorrer uma árvore significa visitar os seus nós exatamente uma vez. Contudo, no processo de percorrer a árvore pode ser necessário passar várias vezes por alguns de seus nós sem visitá-los. A seguir são discutidas as idéias principais nas quais se baseiam alguns dos algoritmos de percurso em árvore.

Um dos passos de qualquer algoritmo de percurso é *visitar a raiz v* de cada subárvore da árvore  $T$ . Além disso, pode-se assumir que o algoritmo opere de forma tal que o percurso de  $T$  seja uma composição de percursos de suas subárvores. Nesse caso, poder-se-iam se identificar, no percurso de  $T$ , os percursos de suas subárvores em forma contígua. Esses percursos correspondem, no algoritmo, às operações de *percorrer subárvores esquerda e direita* de  $v$ , para cada nó  $v$  de  $T$ . Essas três operações (visitar e percorrer subárvores esquerda e direita) compõem um algoritmo. Resta definir em que ordem essas operações serão realizadas em cada caso. Por exemplo, pode-se pressupor que as ordens serão as mesmas para todos os nós. Ainda assim, obtêm-se percursos diferentes, dependendo da ordem relativa dessas operações. Cada um desses percursos pode ser mais ou menos adequado a um problema de aplicação dado. São apresentados a seguir três percursos diversos.

O *percurso em pré-ordem* segue recursivamente os seguintes passos, para cada subárvore da árvore:

- visitar a raiz;
- percorrer sua subárvore esquerda, em pré-ordem;
- percorrer sua subárvore direita, em pré-ordem.

Para a árvore da figura 3.11, o percurso em pré-ordem para impressão de nós fornece a seguinte saída: *A B D G C E H I F*.

O algoritmo 3.1, um algoritmo recursivo para o percurso em pré-ordem,

é muito simples. A variável  $pt$ , parâmetro do procedimento, é um ponteiro que indica a raiz da subárvore que está sendo considerada na chamada ativa. Em cada chamada, somente esse nó é analisado. Após a visita a esse nó, a existência de subárvore esquerda é testada. Caso a resposta seja afirmativa, a chamada recursiva fará com que se percorra toda essa subárvore antes que a subárvore direita seja analisada.

A versão não recursiva deve então manter sempre atualizados os caminhos percorridos a partir da raiz da árvore. Uma forma conveniente para se implementar tal procedimento consiste na utilização de uma pilha. O nó é visitado ao ser colocado na pilha, enquanto a retirada da pilha indica o final da visita à subárvore cuja raiz é o nó considerado. Além do caminho percorrido na árvore, deve ser armazenada a direção do percurso, isto é, se o caminho tomado a partir de cada nó é referente à sua subárvore esquerda ou direita. Isto ocorre porque o nó só é retirado da pilha após ambos os percursos serem realizados. Essa versão, um pouco mais trabalhosa do que a apresentada aqui, é deixada ao leitor.

**algoritmo 3.1:** Percurso em pré-ordem  
**procedimento**  $pre(pt)$

```

visita( $pt$ )
  se  $pt \uparrow .esq \neq \lambda$  então  $pre(pt \uparrow .esq)$ 
  se  $pt \uparrow .dir \neq \lambda$  então  $pre(pt \uparrow .dir)$ 
  se  $ptraiz \neq \lambda$  então  $pre(ptraiz)$ 

```

Um exemplo interessante de aplicação para esse percurso utiliza a expressão aritmética apresentada na árvore binária da figura 3.4. Aplicando o percurso em pré-ordem à árvore da figura, encontra-se a expressão  $+a * b - /cde$ , que corresponde à mesma expressão em notação polonesa (exercício 3.22).

O *percurso em ordem simétrica* é muito utilizado para árvores binárias de busca, um dos assuntos do próximo capítulo. Os passos que o compõem são os seguintes, para cada uma de suas subárvores:

- percorrer sua subárvore esquerda, em ordem simétrica;
- visitar a raiz;
- percorrer sua subárvore direita, em ordem simétrica.

O algoritmo 3.2, que mostra o procedimento recursivo que implementa esse percurso, é semelhante ao algoritmo 3.1. A única diferença decorre da

própria definição, uma vez que a visita ao nó apontado por  $pt$  é feita após a chamada recursiva que estabelece o percurso da subárvore esquerda.

**algoritmo 3.2:** Percurso em ordem simétrica

**procedimento**  $simet(pt)$

**se**  $pt \uparrow .esq \neq \lambda$  **então**  $simet(pt \uparrow .esq)$

**visita**( $pt$ )

**se**  $pt \uparrow .dir \neq \lambda$  **então**  $simet(pt \uparrow .dir)$

**se**  $ptraiz \neq \lambda$  **então**  $simet(ptraiz)$

O algoritmo 3.2, aplicado à árvore da figura 3.11 para impressão de seus nós, fornece o seguinte resultado:  $D G B A H E I C F$ .

Como exemplo de aplicação, o exercício 3.23 utiliza o percurso em ordem simétrica em sua solução.

Finalmente, de uma terceira alternativa de percurso, o *percurso em pós-ordem*, constam os seguintes passos:

- percorrer sua subárvore esquerda, em pós-ordem;
- percorrer sua subárvore direita, em pós-ordem;
- visitar a raiz.

A implementação recursiva do percurso em pós-ordem, apresentada no algoritmo 3.3, introduz poucas variações em relação aos algoritmos 3.1 e 3.2. A implementação não recursiva é também deixada ao leitor.

**algoritmo 3.3:** Percurso em pós-ordem

**procedimento**  $pos(pt)$

**se**  $pt \uparrow .esq \neq \lambda$  **então**  $pos(pt \uparrow .esq)$

**se**  $pt \uparrow .dir \neq \lambda$  **então**  $pos(pt \uparrow .dir)$

**visita**( $pt$ )

**se**  $ptraiz \neq \lambda$  **então**  $pos(ptraiz)$

O percurso em pós-ordem na árvore da figura 3.11 fornece o resultado  $G D B H I E F C A$ .

Em qualquer um dos três percursos apresentados, o procedimento correspondente é chamado recursivamente tantas vezes quantos são os nós da árvore.

Sendo  $n$  esse valor, a complexidade dos percursos, considerando-se o procedimento *visita* de complexidade constante, é  $O(n)$ .

O cálculo da altura de todos os nós de uma árvore binária é uma aplicação do percurso em pós-ordem. A altura das folhas, pela própria definição, é um. Para os outros nós, por exemplo  $v$ , é necessário conhecer o comprimento do maior caminho de  $v$  até um de seus descendentes. Isto equivale a dizer que a altura de  $v$  deve ser calculada após a visita a seus descendentes. O algoritmo 3.4 mostra a implementação do procedimento *visita(pt)*, que executa a tarefa de determinar a altura do nó apontado por  $pt$ . Considerase *altura* um campo do nó da árvore. As variáveis auxiliares *alt1* e *alt2* armazenam, respectivamente, as alturas das subárvore esquerda e direita do nó em questão. A altura desejada corresponderá à maior altura dentre as de suas duas subárvore incrementada de um.

**algoritmo 3.4:** Cálculo da altura de um nó da árvore binária  
**procedimento** *visita(pt)*

```

se  $pt \uparrow .esq \neq \lambda$  então
     $alt1 := (pt \uparrow .esq) \uparrow .altura$ 
senão  $alt1 := 0$ 
se  $pt \uparrow .dir \neq \lambda$  então
     $alt2 := (pt \uparrow .dir) \uparrow .altura$ 
senão  $alt2 := 0$ 
se  $alt1 > alt2$  então
     $pt \uparrow .altura := alt1 + 1$ 
senão  $pt \uparrow .altura := alt2 + 1$ 

```

Existem outras formas de percorrer uma árvore binária além das três aqui estudadas. Por exemplo, o *percurso em nível* é aquele em que os nós são dispostos em ordem não decrescente de seus níveis. Esse percurso é único quando se define a ordem em que os nós do mesmo nível são visitados, por exemplo, da esquerda para a direita. O percurso em nível, segundo esse critério, para a árvore da figura 3.11 fornece a seqüência *A B C D E F G H I*.

Observe que um percurso em nível difere, em sua essência, dos percursos em pré-ordem, ordem simétrica e pós-ordem. Enquanto nesses últimos o percurso da árvore pode ser decomposto em percursos (contíguos) de suas subárvore, o mesmo não acontece com o percurso em nível. Por esse motivo, o percurso em nível é de caráter não recursivo, isto é, um algoritmo para

obter um percurso em nível não deve ser recursivo. De forma equivalente, o algoritmo não deve usar a pilha como estrutura de dados auxiliar. Na realidade, tal algoritmo pode ser facilmente descrito através do uso de uma fila (exercício 3.27).

Até o presente momento, considerou-se unicamente o percurso em árvores binárias. Não há dificuldade em generalizar esse conceito para árvores. Basta considerar que cada nó possui, agora, um número qualquer de subárvores e realizar o percurso em cada uma dessas subárvores.

Dessa forma, pode-se definir o *percurso em pré-ordem* de uma árvore qualquer da seguinte maneira. Para cada uma de suas subárvores, é preciso efetuar, recursivamente, os passos:

- visitar a raiz;
- percorrer a primeira subárvore em pré-ordem;
- percorrer a segunda subárvore em pré-ordem;
- ...

Por exemplo, o percurso em pré-ordem da árvore da figura 3.5 é *A C D G H F I E B*. Observe que a definição assume, implicitamente, uma ordenação das subárvores.

De maneira análoga, pode-se definir o percurso em pós-ordem de uma árvore qualquer (exercício 3.33). A definição de percurso em nível é igual e abrange também árvores não binárias.

Os algoritmos para percorrer árvores quaisquer devem supor, de início, a árvore representada internamente no computador de alguma forma. Esse assunto será abordado na próxima seção.

## 3.5 – Conversão de uma Floresta

Todos os algoritmos examinados, até o momento, para árvores binárias supõem que estas estejam representadas, internamente no computador, como descrito na seção 3.3. Essa representação corresponde à utilização, em cada nó, de dois campos de ponteiros para as raízes das subárvores esquerda e direita. No caso de uma árvore com  $n$  nós, seriam necessárias  $2n$  posições de memória para esses ponteiros.

Considere, agora, o problema de representação interna de uma árvore qualquer. Poder-se-ia imaginar, inicialmente, a seguinte extensão direta da solução anterior, para árvores binárias. Numa árvore qualquer, cada nó pode possuir um número arbitrário de subárvores. Seja  $m$  o maior número de filhos dentre os nós da árvore. Então cada nó da árvore pode ser representado com  $m$  campos de ponteiros para as raízes de suas subárvores. Essa representação, ainda que correta, implica um grande desperdício de memória. Como  $m = O(n)$ , os  $m$  campos de ponteiros em cada nó correspondem à utilização de  $O(n^2)$  posições de memória – um consumo inaceitável de memória, visto que apenas  $n - 1$  dos  $O(n^2)$  campos contêm ponteiros diferentes de  $\lambda$ . Um exemplo extremo é apresentado na figura 3.12.

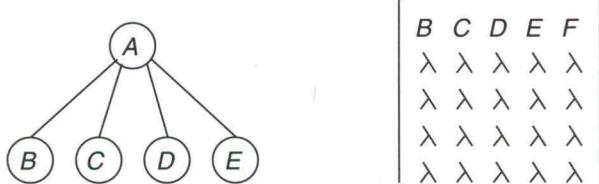


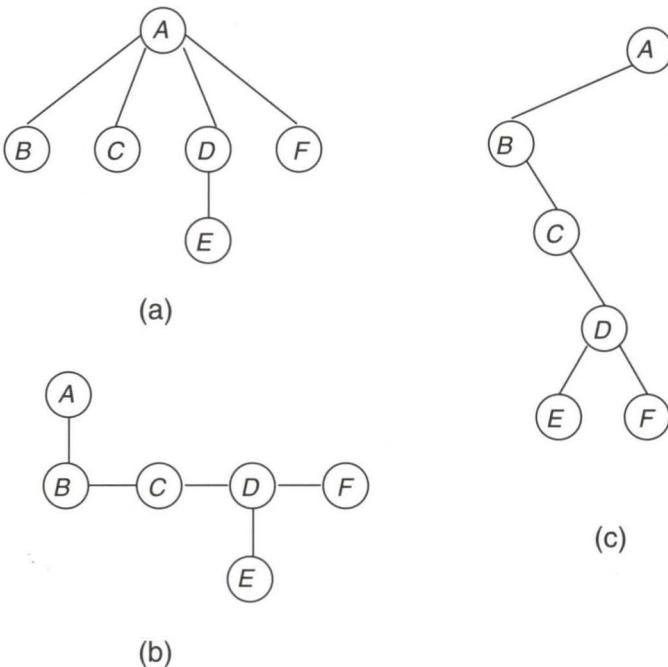
Figura 3.12: Árvore representada por uma matriz

Felizmente, existem maneiras mais eficientes de representação de árvores, conforme será descrito a seguir.

A idéia básica consiste em converter a árvore dada em uma árvore binária. Em seguida, usar a representação de árvores binárias, já descrita anteriormente. Por meio dessa conversão, obtém-se uma árvore binária com o mesmo número de nós que a árvore original. Do contrário, poderia não ser eficiente. Além disso, a conversão é única, pois sempre produz uma mesma árvore binária, a qual pode, em qualquer ocasião, ser reconvertida na árvore original (exercício 3.35).

Seja  $T$  uma árvore qualquer.  $T$  é convertida em uma árvore binária  $B(T)$  da seguinte maneira.  $B(T)$  possui um nó  $B(v)$ , para cada nó  $v$  de  $T$ . As raízes de  $T$  e  $B(T)$  coincidem.

- O filho esquerdo de um nó  $B(v)$  em  $B(T)$  corresponde ao primeiro filho de  $v$  em  $T$ , caso exista. Se não existir, a subárvore esquerda de  $B(v)$  é vazia.
  - O filho direito de um nó  $B(v)$  em  $B(T)$  corresponde ao irmão de  $v$  em  $T$ , localizado imediatamente à sua direita, caso exista. Se não existir, a subárvore direita de  $B(v)$  é vazia.
- 

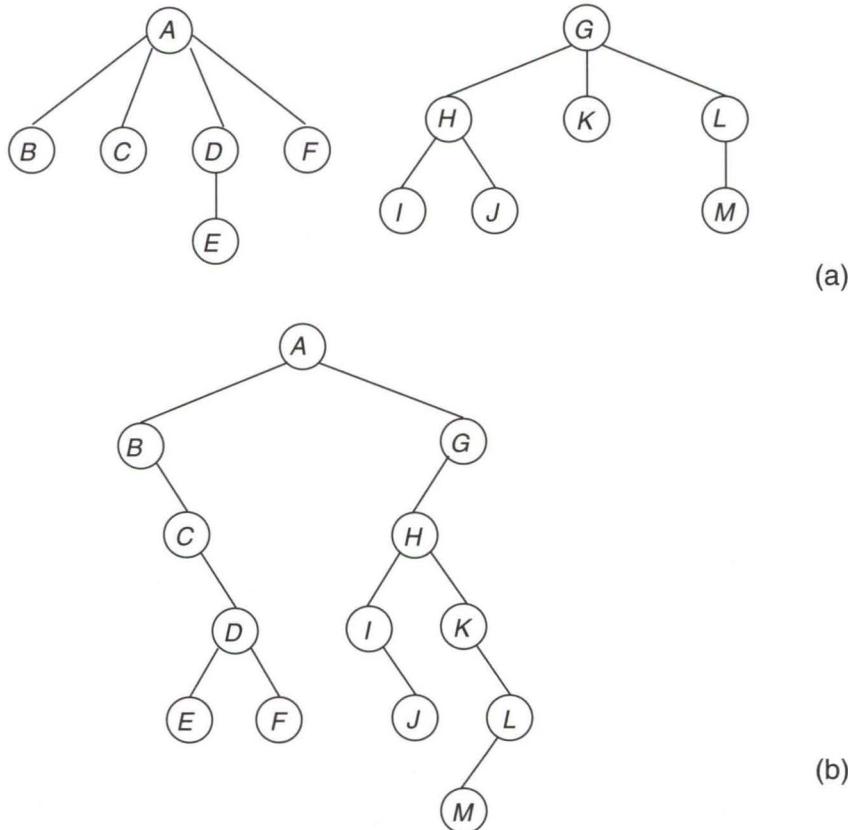


**Figura 3.13:** Conversão de árvore em árvore binária

Como exemplo, a árvore da figura 3.13(a) aparece convertida na árvore binária da figura 3.13(b). Observe que as ligações para os filhos esquerdo e direito aparecem como linhas verticais e horizontais, respectivamente. A figura 3.13(c) mostra a árvore binária da figura 3.13(b), com uma rotação de  $45^\circ$ .

Essa conversão é válida inclusive para florestas. Para converter uma floresta em uma árvore binária, basta considerar as raízes das árvores da floresta

como nós irmãos e aplicar a conversão anterior. Por exemplo, a floresta da figura 3.14(a) pode ser convertida na árvore binária da figura 3.14(b).



**Figura 3.14:** Conversão de uma floresta

O algoritmo 3.5 descreve a conversão de uma floresta em árvore binária. Sendo os nós da floresta rotulados de 1 a  $n$ , a entrada do algoritmo é um vetor de  $n$  conjuntos. O conjunto  $C_k$  tem como elementos os filhos do nó de rótulo  $k$ . Deve ser criado um conjunto especial,  $C_{n+1}$ , correspondente a um nó-cabeça, apontado por  $ptraiz$ , pai das raízes das árvores que constituem a floresta.

O procedimento *arvore* determina, para cada nó, sua posição na árvore binária. São passados como parâmetros o valor do rótulo do nó corrente, que possibilita a recuperação dos filhos do nó na árvore original, e o ponteiro para o último nó analisado. O primeiro filho de cada nó tem um tratamento especial, uma vez que este deve ser o nó indicado pelo ponteiro esquerdo de seu pai. A variável lógica *pai* identifica essa condição.

**algoritmo 3.5:** Conversão de uma árvore qualquer em árvore binária  
**procedimento** *arvore*(*v, pt*)

```

pai := V
para w ∈ C[v] faça
    ocupar(ptnovo)           % solicitar e preencher novo nó
    ptnovo ↑ .esq := λ;   ptnovo ↑ .dir := λ
    ptnovo ↑ .info := w
    se pai então           % inserir à esquerda
        pt ↑ .esq := ptnovo
        pai := F
    senão pt ↑ .dir := ptnovo      % inserir à direita
    arvore(w, ptnovo)
    pt := ptnovo

ocupar(pt);   pt ↑ .info := cabeca      % preparar nó-cabeça
pt ↑ .esq := λ;   pt ↑ .dir := λ
ptraiz := pt                         % ponteiro para o nó-cabeça
arvore(n + 1, pt)

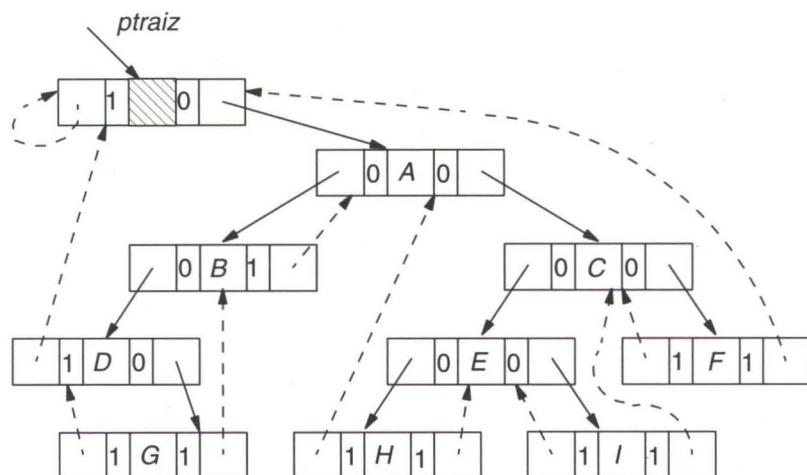
```

No algoritmo 3.5, cada nó da árvore é considerado exatamente uma vez, ou seja, o número de passos que o algoritmo efetua, no total, é igual a  $O(n)$ .

Assim sendo, toda árvore com  $n$  nós pode ser representada, internamente em um computador, de forma eficiente, utilizando-se, para seus ponteiros, apenas  $2n$  posições de memória.

## 3.6 – Árvores com Costura

Como se pode notar na estrutura de armazenamento até o momento utilizada para árvores, há um grande número de ponteiros (campos *esq* e *dir*) sem



**Figura 3.15:** Representação da árvore binária com costura

informação relevante, isto é, que apontam para  $\lambda$  (exercício 3.24). A idéia que se apresenta então é aproveitar a memória de maneira mais eficiente, armazenando nesse espaço uma informação útil. Por exemplo, seja *esq* o campo considerado, relativo ao nó  $v$ . Se o conteúdo de *esq* é  $\lambda$ , este pode ser substituído por um ponteiro para o nó anterior a  $v$ , considerando-se um determinado percurso de árvores binárias. Essa informação poderá ser utilizada, por exemplo, pelo algoritmo que produz o percurso, de forma a acelerá-lo. No caso de o conteúdo de *dir* ser  $\lambda$ , a idéia é substituí-lo pelo ponteiro para o nó que sucede  $v$  no percurso. A árvore construída dessa forma é chamada *árvore com costura*. Para que se possa distinguir entre o conteúdo de um campo de ponteiro tradicional e os novos ponteiros (as “costuras”), introduzem-se novos campos *ecostura* e *dcostura*, cujo conteúdo são valores lógicos, indicando a existência, ou não, de costura à esquerda e costura à direita, respectivamente. Note que cada um desses campos ocupa apenas um dígito binário. Assim, por exemplo, se *pt* for o ponteiro relativo ao nó  $v$ ,  $pt \uparrow .ecostura = V$  se  $pt \uparrow .esq$  corresponde a uma costura e  $pt \uparrow .ecostura = F$  quando  $pt \uparrow .esq$  aponta para o filho esquerdo de  $v$ .

É óbvio que uma mesma árvore gera tantas árvores com costura quantos são os percursos considerados, uma vez que cada costura diz respeito a um determinado tipo de percurso.

A figura 3.15 apresenta a árvore da figura 3.11 devidamente “costurada”, considerando-se o percurso em ordem simétrica.

No armazenamento da árvore com costura, é introduzido um nó-cabeça que permitirá maior eficiência na construção de algoritmos. Como já foi dito, a costura simplifica o caminhar na árvore binária. Os algoritmos 3.6 e 3.7 apresentam, respectivamente, a pesquisa do sucessor e do antecessor de um nó da árvore apontado por  $pt1$ , considerando-se a ordem simétrica. A resposta, em ambos os procedimentos, é devolvida em  $pt2$ . Caso não exista o nó procurado,  $pt2$  aponta para o nó-cabeça, isto é, toma o valor de  $ptraiz$ .

**algoritmo 3.6:** Pesquisa do sucessor

**procedimento**  $suc(pt1, pt2)$

```

 $pt2 := pt1 \uparrow .dir$ 
se não  $pt1 \uparrow .dcostura$  então
    enquanto não  $pt2 \uparrow .ecostura$  faça
         $pt2 := pt2 \uparrow .esq$ 

```

**algoritmo 3.7:** Pesquisa do antecessor

**procedimento**  $pred(pt1, pt2)$

```

 $pt2 := pt1 \uparrow .esq$ 
se não  $pt1 \uparrow .ecostura$  então
    enquanto não  $pt2 \uparrow .dcostura$ 
         $pt2 := pt2 \uparrow .dir$ 

```

Um percurso de uma árvore binária pode ser realizado pela pesquisa do sucessor repetida para todos os nós, a partir do primeiro nó do percurso. Como o leitor já deve ter observado, esta é uma implementação não recursiva para o percurso em ordem simétrica. Qual será a complexidade desse método?

## 3.6 – Exercícios

- 3.1 Desenvolver um algoritmo para produzir uma representação de uma árvore segundo o método das barras, dada a representação hierárquica.
- 3.2 Desenvolver um algoritmo para produzir uma representação hierárquica de uma árvore, dada a sua representação pelo método de barras.

- 3.3 Provar que a representação por parênteses aninhados é, de fato, uma representação.
- 3.4 Mostrar que toda árvore pode ser representada por uma seqüência binária. Quantos 0's e 1's possui essa seqüência?
- 3.5 Mostrar a equivalência entre as representações de uma árvore através do diagrama de inclusão e de parênteses aninhados.
- 3.6 Representar, através de uma árvore, a seguinte expressão aritmética:

$$[(a + b)(c + d)/e] - [(f + g)h].$$

- 3.7 Provar ou dar contra-exemplo:  
Se  $v$  é o pai de um nó  $w$  de uma árvore  $T$ , então:
- (i)  $nível(v) = nível(w) + 1$
  - (ii)  $altura(v) = altura(w) + 1$
  - (iii)  $\max_{v \in T} \{altura(v)\} = \max_{v \in T} \{nível(v)\}$
- 3.8 Mostrar que toda árvore com  $n > 1$  nós possui no mínimo 1 e no máximo  $n - 1$  folhas.
- 3.9 Provar ou dar contra-exemplo:  
Numa representação de árvores pelo método das barras,
- (i) as barras correspondentes a nós irmãos ocorrem necessariamente em linhas consecutivas.
  - (ii) o comprimento da barra correspondente a um nó  $v$  é maior do que o de um nó  $w$  se e somente se  $v$  for ancestral próprio de  $w$ .
- 3.10 Justificar o motivo pelo qual uma árvore binária não é formalmente uma árvore.
- 3.11 Provar ou dar contra-exemplo:  
As árvores binárias são exatamente as árvores ordenadas, em que cada nó possui no máximo dois filhos.
- 3.12 Provar ou dar contra-exemplo:  
Uma árvore binária é completa se e somente se ela possuir altura mínima para um dado número de nós.
- 3.13 Mostrar que o número de subárvores vazias de uma árvore  $m$ -ária com  $n > 0$  nós é  $(m - 1)n + 1$ .
- 3.14 Mostrar que uma árvore  $m$ -ária completa é aquela que possui altura mínima dentre todas as árvores  $m$ -árias,  $m > 1$ , com  $n > 0$  nós.

- 3.15 Determinar o valor das alturas máxima e mínima de uma árvore  $m$ -ária,  $m > 1$ , com  $n > 0$  nós.
- 3.16 • Quantos percursos distintos existem em uma árvore binária, obtidos através da aplicação das três operações básicas de visitar a raiz, percorrer a subárvore esquerda e a direita, para cada nó, supondo que a mesma ordem seja aplicada a todos os nós? Escrever esses percursos para a árvore da figura 3.11.
- 3.17 Seja um percurso definido pelas seguintes operações:

**Ordem A**

- visitar a raiz;
- percorrer a subárvore esquerda de  $v$  na ordem A;
- percorrer a subárvore direita de  $v$  na ordem B.

**Ordem B**

- percorrer a subárvore esquerda de  $v$  na ordem B;
- visitar a raiz;
- percorrer a subárvore direita de  $v$  na ordem A.

Supondo que o processo se inicie pela raiz da árvore, em ordem A, escrever o percurso final obtido quando o algoritmo for aplicado à árvore da figura 3.11.

- 3.18 Construir um algoritmo não recursivo para o percurso em pré-ordem de uma árvore binária. Sugestão: utilizar uma pilha.
- 3.19 Construir um algoritmo não recursivo para o percurso em ordem simétrica de uma árvore binária. Sugestão: utilizar uma pilha.
- 3.20 Construir um algoritmo não recursivo para o percurso em pós-ordem de uma árvore binária. Sugestão: utilizar uma pilha.
- 3.21 Escrever um algoritmo não recursivo para efetuar um percurso em pré-ordem em uma árvore binária sem utilizar uma pilha.
- 3.22 Uma expressão aritmética, em notação polonesa, é definida recursivamente da seguinte maneira:

Uma expressão, em *notação polonesa*, consiste em um operando ou, então, em um operador seguido por duas expressões em notação polonesa. Em vista disso, que toda expressão aritmética pode ser escrita de forma não ambígua em notação polonesa, dispensando-se o uso de parênteses. Escrever um algoritmo para transformar uma dada expressão aritmética em notação polonesa.

- 3.23 Dada a árvore binária que representa uma expressão aritmética (considerando-se apenas operações binárias), gerar a mesma expressão em notação completamente parentizada. Sugestão: utilizar o percurso em ordem simétrica.
- 3.24 Quantos campos iguais a  $\lambda$  possui a estrutura de armazenamento de uma árvore binária qualquer?
- 3.25 Escrever um algoritmo para determinar o número de nós das subárvores de  $v$ , para cada nó  $v$  de uma árvore binária.
- 3.26 Escrever um algoritmo para determinar o pai de cada nó  $v$  de uma árvore binária.
- 3.27 Descrever um algoritmo para percorrer em nível uma árvore binária. Sugestão: utilizar uma fila.
- 3.28 O *percurso em altura* de uma árvore binária é aquele em que os nós são dispostos em ordem não decrescente de suas alturas. Descrever um algoritmo para efetuar um percurso em altura de uma árvore binária.
- 3.29 Escrever um algoritmo para desenhar uma árvore binária, supondo que o número de nós não exceda o limite máximo de caracteres que pode ser impresso, em uma linha, por uma impressora. Sugestão: para cada nó  $v$ , utilizar como abscissa a posição de  $v$  num percurso em ordem simétrica e, como ordenada, o nível de  $v$ .
- 3.30 Considere a seguinte estrutura de armazenamento para árvores. A estrutura se compõe de dois vetores. Um deles contém os nós em pré-ordem. O outro, um vetor auxiliar, indica, para cada nó  $v$ , o índice do nó que imediatamente se segue à subárvore de raiz  $v$ , se existir. Caso não exista, essa informação é  $\lambda$ . Para a figura 3.2(a), a estrutura de armazenamento seria a seguinte:

Vetores de armazenamento:

1	2	3	4	5	6	7	8	9		índice
A	B	C	D	G	H	E	F	I		vetor
$\lambda$	3	$\lambda$	7	6	7	8	$\lambda$	$\lambda$		auxiliar

Apresente um algoritmo para determinar os níveis dos nós na árvore.

- 3.31 O percurso de uma árvore em pré-ordem resultou na impressão da sequência  $ABC F H D L M P N E G I$ , e o percurso da mesma árvore em

ordem simétrica resultou em *F C H B D L P M N A I G E*. Construa uma árvore que satisfaça esses percursos. Ela é única?

3.32 Provar ou dar contra-exemplo:

Uma árvore binária pode ser construída, de forma única, a partir das seguintes informações:

- (i) os percursos em pré-ordem e ordem simétrica.
- (ii) os percursos em pré-ordem e pós-ordem.
- (iii) os percursos em pré-ordem e em nível.
- (iv) os percursos em ordem simétrica e em nível.
- (v) o percurso em pré-ordem e a informação do número de nós em cada subárvore.
- (vi) o percurso em pós-ordem e a informação do número de nós em cada subárvore.
- (vii) o percurso em nível e a informação do número de nós em cada subárvore.

3.33 Definir percurso pós-ordem de uma árvore (qualquer) ordenada. Escrever o resultado do percurso para a árvore da figura 3.5.

3.34 Descrever um algoritmo para obter o percurso em pré-ordem para uma árvore qualquer. Sugestão: utilizar o algoritmo de conversão de uma árvore qualquer em binária.

3.35 Mostrar que a árvore binária obtida de uma árvore qualquer  $T$ , segundo a conversão da seção 3.5, pode ser reconvertida em  $T$ . Descrever um algoritmo para tal.

3.36º Caracterizar a família de árvores  $T$  tais que as árvores binárias convertidas  $B(T)$ , segundo a seção 3.5, sejam sempre estritamente binárias.

3.37 Descrever algoritmos para obter o antecessor e o sucessor de um nó de uma árvore binária com costura segundo um percurso em pré-ordem.

3.38 Descrever algoritmos para obter o antecessor e o sucessor de um nó de uma árvore binária com costura segundo um percurso em pós-ordem.

3.39 Descrever um algoritmo para verificar se duas árvores ordenadas são ou não isomórfas.

3.40 Descrever um algoritmo para verificar se duas árvores não ordenadas são ou não isomórfas.

## Notas Bibliográficas

As árvores figuram na literatura desde o século passado, seja através de um tratamento matemático puro ou em aplicações como na eletricidade e na química orgânica. Contudo, os conceitos básicos relativos às árvores de uso na computação apareceram, naturalmente, depois. Sua formulação foi realizada, em boa parte, por Knuth [Kn73], o qual exerceu enorme influência na maneira pela qual o assunto é atualmente enfocado.

# Árvores Binárias de Busca

## 4.1 – Introdução

Neste capítulo, são descritas estruturas de dados adequadas à solução de problemas de busca. Dado um conjunto de elementos, onde cada um é identificado por uma chave, o objetivo é localizar nesse conjunto o elemento correspondente a uma chave específica procurada. Em capítulos anteriores, foram examinados métodos diferentes para resolver esse problema, como busca linear e linear ordenada. No presente capítulo, serão vistos métodos de solução que empregam determinados tipos de árvores como estruturas nas quais se processa a busca. Ou seja, os elementos do conjunto são previamente distribuídos pelos nós de uma árvore de forma conveniente. A localização da chave desejada é então obtida através de um caminhamento apropriado na árvore.

É importante ressaltar, mais uma vez, a relevância desse problema na área de computação, em especial nas aplicações não numéricas. Sem dúvida, a operação de busca é uma das mais freqüentemente realizadas. Vários métodos de solução empregam árvores como estrutura de armazenamento das chaves. Neste capítulo, são examinados dois desses métodos: a árvore binária de busca propriamente dita e a árvore de partilha. O primeiro deles é estudado na seção 4.2. Após a introdução dos conceitos básicos, essa seção apresenta os algoritmos para busca e inserção em árvores binárias de busca. Em seguida, é considerado o caso real em que as chaves que compõem o problema da busca podem possuir freqüências de acesso distintas. Para esse

caso, é descrito um algoritmo que constrói a árvore ótima. Finalmente, uma solução mais sofisticada para o problema é descrita na seção 4.3: a árvore de partilha.

## 4.2 - Árvore Binária de Busca

### 4.2.1 - Conceitos básicos, busca e inserção

Seja  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  o conjunto de chaves satisfazendo  $s_1 < \dots < s_n$ . Seja  $x$  um valor dado. O objetivo é verificar se  $x \in S$  ou não. Em caso positivo, localizar  $x$  em  $S$ , isto é, determinar o índice  $j$  tal que  $x = s_j$ .

Para resolver esse problema, emprega-se uma árvore binária rotulada  $T$ , com as seguintes características:

- (i)  $T$  possui  $n$  nós. Cada nó  $v$  corresponde a uma chave distinta  $s_j \in S$  e possui como rótulo o valor  $r(v) = s_j$ .
- (ii) Seja um nó  $v$  de  $T$ . Seja também  $v_1$ , pertencente à subárvore esquerda de  $v$ . Então

$$r(v_1) < r(v).$$

Analogamente, se  $v_2$  pertence à subárvore direita de  $v$ ,

$$r(v_2) > r(v).$$

A árvore  $T$  denomina-se *árvore binária de busca* para  $S$ . Naturalmente, se  $|S| > 1$ , existem várias árvores de busca para  $S$ . A figura 4.1 ilustra duas dessas árvores para o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

Essa definição sugere como utilizar a árvore binária para resolver o problema de busca. Para determinar o índice  $j$  tal que  $s_j$  seja igual à chave desejada  $x$ , deve-se percorrer o caminho em  $T$  desde a sua raiz até  $s_j$ . Para determinar esse caminho, o passo inicial consiste em considerar a raiz de  $T$ . No passo geral, seja  $v$  o nó considerado. Se  $x = r(v)$ , a busca termina, pois a chave desejada foi encontrada. Caso contrário, o novo nó a considerar será o filho esquerdo  $w_1$  ou o direito  $w_2$  de  $v$ , conforme, respectivamente,  $x < r(v)$  ou  $x > r(v)$ . Caso não exista o nó que deveria ser considerado,  $w_1$  ou  $w_2$ , a busca termina. Nessa última hipótese,  $S$  não contém a chave procurada  $x$ .

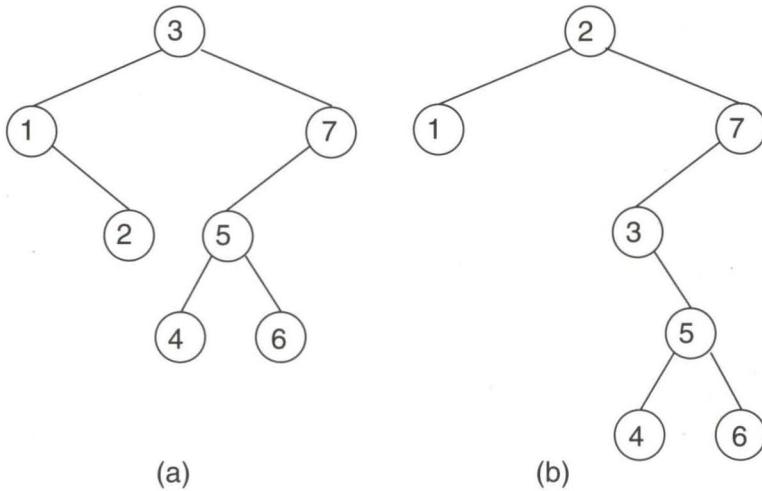


Figura 4.1: Árvores binárias de busca

O algoritmo seguinte implementa a idéia. Suponha que a árvore esteja armazenada da forma habitual, isto é, para cada nó  $v$ ,  $esq$  e  $dir$  designam os campos que armazemam ponteiros para os filhos esquerdo e direito de  $v$ , respectivamente. A raiz da árvore é apontada por  $ptraiz$ . A variável  $f$  designa a natureza final da busca. Tem-se então

$f = 0$ , se a árvore é vazia.

$f = 1$ , se  $x \in S$ . Nesse caso,  $pt$  aponta para o nó procurado.

$f > 1$ , se  $x \notin S$ .

**algoritmo 4.1:** Busca em árvore binária de busca

**procedimento** *busca-arvore*( $x, pt, f$ )

**se**  $pt = \lambda$  **então**  $f := 0$

**senão se**  $x = pt \uparrow .chave$  **então**  $f := 1$

**senão se**  $x < pt \uparrow .chave$  **então**

**se**  $pt \uparrow .esq = \lambda$  **então**  $f := 2$

**senão**  $pt := pt \uparrow .esq$

*busca-arvore*( $x, pt, f$ )

**senão se**  $pt \uparrow .dir = \lambda$  **então**  $f := 3$

**senão**  $pt := pt \uparrow .dir$

*busca-arvore*( $x, pt, f$ )

$pt := ptraiz$ ;   *busca-arvore*( $x, pt, f$ )

Para determinar a complexidade desse algoritmo, basta observar que, em cada passo, isto é, em cada chamada do procedimento *busca-arvore*, é efetuado um número constante de operações. Assim sendo, a complexidade é igual ao número total de chamadas ocorridas no processo. Esse número é também igual ao número de nós existentes no caminho desde a raiz de  $T$  até o nó  $v$  onde o processo termina. Em um pior caso,  $v$  pode se encontrar a uma distância  $O(n)$  da raiz de  $T$ . Assim sendo, este valor  $O(n)$  constitui a complexidade da busca para uma árvore  $T$  genérica.

Da observação anterior, conclui-se que a complexidade da busca, para uma árvore  $T$ , é igual (no pior caso) à sua altura. Assim sendo, a eficiência do pior caso do algoritmo será tão maior quanto menor for a altura de  $T$ . Portanto, é conveniente tentar uma construção da árvore  $T$ , de modo a obtê-la com altura mínima. A árvore que possui essa propriedade, para um conjunto de  $n$  chaves, é precisamente a completa, conforme demonstrado no capítulo anterior. Nesse caso, a complexidade do algoritmo é igual a  $O(\log n)$ . O lema seguinte fornece uma relação entre a altura e o número de nós de uma árvore binária completa.

#### Lema 4.1:

Seja  $T$  uma árvore binária completa com  $n$  nós e altura  $h$ . Então

$$2^{h-1} \leq n \leq 2^h - 1.$$

#### Prova:

O valor  $n = 2^h - 1$  ocorre quando a árvore é cheia. Nesse caso, basta observar que o número de nós em um dado nível é exatamente igual ao dobro do anterior. O valor  $2^{h-1}$  corresponde ao caso em que há exatamente apenas um nó no último nível de  $T$ . □

Para resolver o problema de inserção de nós na árvore de busca  $T$ , utilize-se também o procedimento *busca-arvore* do algoritmo 4.1. Seja  $x$  o valor da chave que se deseja inserir em  $T$  e *novo-valor* a informação associada a  $x$ . A idéia inicial é verificar se  $x \in S$ . Em caso positivo, trata-se de uma chave duplicata e a inserção não pode ser realizada. Se  $x \notin S$ , a chave de valor  $x$  será o rótulo de algum novo nó  $w$ , situado à esquerda ou à direita de  $v$ , para  $f = 2$  ou  $f = 3$ , respectivamente, de acordo com o procedimento *busca-arvore*. O algoritmo 4.2 descreve o processo.

**algoritmo 4.2:** Inserção em árvore binária de busca.

```

 $pt := ptraiz; \quad busca-arvore(x, pt, f)$ 
se  $f = 1$  então
    “inserção inválida”
senão ocupar( $pt1$ )
     $pt1 \uparrow .chave := x; \quad pt1 \uparrow .info := novo\text{-valor}$ 
     $pt1 \uparrow .esq := \lambda; \quad pt1 \uparrow .dir := \lambda$ 
    se  $f = 0$  então  $ptraiz := pt1$ 
    senão se  $f = 2$  então
         $pt \uparrow .esq := pt1$ 
    senão  $pt \uparrow .dir := pt1$ 
```

A complexidade desse processo é igual à do procedimento de busca *busca-arvore*. O problema da construção de uma árvore binária de busca é examinado a seguir.

Para construir uma árvore binária de busca, pode-se utilizar o algoritmo 4.2, uma vez para cada nó. Seja  $\{s_1, \dots, s_n\}$  o conjunto de chaves, não necessariamente ordenado, para o qual se deseja construir a árvore  $T$ . Um possível algoritmo pode consistir no seguinte procedimento. No passo inicial, seja  $T(1)$  a árvore formada por um só nó, rotulado  $s_1$ . Em seguida, para  $j = 2, \dots, n$ , utilizando o algoritmo 4.2, inserir em  $T(j-1)$  um novo nó, cujo rótulo é  $s_j$  e denotar por  $T(j)$  a árvore assim obtida. Ao final,  $T(n)$  é uma árvore binária de busca para  $\{s_1, \dots, s_n\}$ . Contudo, a árvore  $T(n)$  pode não ser muito adequada para a operação de busca, pois, dependendo do conjunto  $S$ , pode possuir altura  $n$ . A complexidade dessa construção alcança o valor  $O(n^2)$ . Uma árvore ziguezague é um exemplo desse caso.

Observa-se que a árvore obtida depende, na realidade, da ordem em que os nós foram considerados. Por exemplo, a árvore da figura 4.1(a) pode ser construída considerando-se a permutação 3172546 das chaves, pois a raiz da árvore, a chave 3, foi a primeira a ser inserida. Em seguida, o nó 1 pode ser incluído na árvore etc. Naturalmente, há outras permutações das chaves que produzem essa mesma árvore.

Para construir uma árvore de busca completa, basta aplicar a construção anterior ao conjunto de chaves convenientemente reordenado. Sejam  $s_0$  e  $s_{n+1}$  duas chaves fictícias e definidas como já inseridas na árvore final  $T$ . A idéia consiste em, a cada passo, inserir em  $T$  alguma nova chave que

seja de índice médio entre duas chaves  $s_i$  e  $s_j$ , já inseridas em  $T$ , e tais que nenhuma outra chave tenha sido ainda inserida entre estas duas. Essa nova chave torna-se *já inserida*, e repete-se o processo. Além de obter uma árvore completa, ou seja, mais conveniente para a operação de busca, essa construção é também mais eficiente que a anterior. Sua complexidade é  $O(n \log n)$ .

A árvore completa é ótima para o problema da busca no caso em que as freqüências de acesso aos diferentes nós são todas idênticas. Em um caso real, contudo, essas freqüências podem ser diferentes. Por exemplo, se cada nó representar um registro em um banco de dados, para diversas aplicações existirão casos de registros mais requisitados do que outros. Assim sendo, há interesse em construir a árvore binária que seja a melhor possível, no que diz respeito à busca, para um dado conjunto de chaves com freqüências de acesso conhecidas. É precisamente este o problema que é tratado na próxima seção.

A busca binária descrita no capítulo 2 na realidade corresponde a uma busca efetuada em uma árvore completa. A raiz  $r$  da árvore corresponde à chave que ocupa a posição central da seqüência  $S$  de chaves da tabela. As raízes das subárvores esquerda e direita de  $r$ , respectivamente, são os elementos centrais das subseqüências de  $S$ , à esquerda e à direita de  $r$ , e assim por diante.

Dada uma árvore binária de busca  $T$ , para um conjunto de chaves  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , uma informação importante a ser considerada é o número total de comparações entre chaves efetuadas para se localizar cada chave em  $S$ . Para buscar uma certa chave  $s_k$ , o algoritmo 4.1 percorre um caminho da raiz de  $T$  até o nó em que  $s_k$  se encontra armazenado. Então, o número de comparações efetuadas é igual ao nível  $\ell_k$  de  $s_k$ , em  $T$ . O número total de comparações necessário para o acesso a todas as chaves de  $S$  é, portanto, igual a  $\sum_{1 \leq k \leq n} \ell_k$ . Esse valor é denominado *comprimento de caminho interno* de  $T$ , e denotado por  $I(T)$ . Por exemplo, a árvore da figura 4.1(a) possui comprimento de caminho interno igual a  $1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 19$ .

Esse número representa o total de comparações efetuadas em buscas realizadas com sucesso, isto é, aquelas que acessam elementos de  $S$ . Quando se efetua uma busca a algum elemento não pertencente a  $S$ , obviamente são realizadas também comparações que devem ser levadas em consideração para se avaliar a estrutura de dados utilizada. Esse processo pode ser modelado

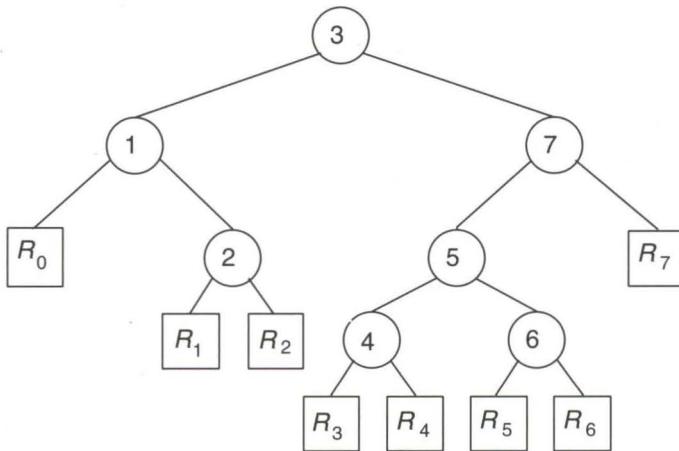
pelo seguinte esquema. Seja  $R$  o conjunto das chaves  $x$  buscadas ao longo de toda a computação. Sejam

$$R_0 = \{x \in R \mid x < s_1\};$$

$$R_n = \{x \in R \mid x > s_n\};$$

$$R_j = \{x \in R \mid s_j < x < s_{j+1}\} \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Os  $n + 1$  conjuntos  $R_j$ ,  $0 \leq j \leq n$ , representam os diferentes intervalos onde se localizam as chaves correspondentes às buscas sem sucesso. Por outro lado, observando-se o comportamento de uma árvore binária de busca  $T$ , verifica-se que uma busca sem sucesso termina, necessariamente, em alguma subárvore vazia. Além disso, os diferentes intervalos  $R_j$  ocorrem da esquerda para a direita em  $T$ , segundo valores crescentes de seus índices. Como exemplo, a figura 4.2 representa a árvore da figura 4.1(a), onde as chaves propriamente ditas correspondem a círculos, enquanto os intervalos de ausência de chaves são as folhas da árvore, representados por quadrados.



**Figura 4.2:** Árvore de busca com nós externos

Numa árvore binária de busca, que inclui a representação dos intervalos  $R_j$ , há portanto dois tipos de nós. Aqueles que contêm as chaves, denominados *internos*, e os referentes aos intervalos  $R_j$ , os nós *externos*. Esses últimos

constituem sempre as folhas da árvore. Observe que uma árvore binária, com os nós externos incorporados, é sempre estritamente binária.

Para determinar o número de comparações efetuadas em uma busca sem sucesso, utiliza-se esse modelo de árvore. A busca sem sucesso termina em algum nó externo  $R_k$ . Como no caso anterior, ela segue um caminho, na árvore, desde a raiz até  $R_k$ . Contudo, o objetivo é computar o número de comparações entre  $x$  e as chaves de  $S$ . Não há chave armazenada em  $R_k$ . Portanto, as comparações cessam no nó interno, pai de  $R_k$  na árvore. Seja  $\ell'_k$  o nível de  $R_k$  em  $T$ . Logo, o número de comparações correspondente a uma busca sem sucesso é igual a  $\ell'_k - 1$ . O total de comparações, considerando-se todos os nós externos, é, então, igual a  $\sum_{0 \leq k \leq n} (\ell'_k - 1)$ . Por analogia ao caso da busca com sucesso, esse valor é denominado *comprimento de caminho externo* de  $T$  e representado por  $E(T)$ . Por exemplo, a árvore da figura 4.2 possui comprimento de caminho externo igual a  $2+2+3+3+4+4+4+4 = 26$ .

Esses dois parâmetros, comprimento de caminho interno e externo, constituem um indicativo da qualidade da árvore para o problema da busca. Os valores  $I(T)/n$  e  $E(T)/(n + 1)$  representam os números médios de comparações efetuadas em operações de busca, com e sem sucesso, respectivamente. Por exemplo, para a árvore da figura 4.2, são necessários, em média,  $19/7 = 2.71$  comparações para localizar uma chave, ou  $26/8 = 3.25$  comparações para concluir que uma chave não está presente. Quanto menores  $I(T)$  e  $E(T)$ , melhor é a árvore  $T$ . Naturalmente, a árvore completa é aquela que minimiza tanto  $I(T)$  quanto  $E(T)$ .

Os valores dos comprimentos de caminho interno e externo de uma árvore binária de busca não são independentes. Eles guardam uma relação simples entre si, conforme descreve o lema seguinte.

#### **Lema 4.2:**

$$E(T) = I(T) + n.$$

#### **Prova:**

Utiliza-se indução em  $n$ . Se  $n = 1$ , então  $I(T) = 1$  e  $E(T) = 1 + 1 = 2$ . Portanto, vale o lema. Suponha o resultado verdadeiro para árvores com até

$n - 1$  nós (internos). Considere a árvore  $T$ , com  $n$  nós (internos) e um nó  $v$  de  $T$ , que seja pai de dois nós externos. Seja  $T'$  a árvore obtida de  $T$  pela remoção de  $v$  e de seus dois filhos, nós externos, e consequente inclusão de um nó externo, em lugar de  $v$ . Como  $T'$  possui  $n - 1$  nós internos, pode-se aplicar o lema e concluir que

$$E(T') = I(T') + n - 1. \quad (\text{i})$$

Por outro lado,  $T'$  foi obtido de  $T$  pela remoção de  $v$ . Isto é,

$$I(T') = I(T) - \ell_v, \quad (\text{ii})$$

sendo  $\ell_v$  o nível de  $v$  na árvore. O efeito da remoção dos dois filhos de  $v$  e a introdução de um nó externo em seu lugar correspondem a

$$E(T') = E(T) - \ell_v - 1. \quad (\text{iii})$$

De (i), (ii) e (iii) conclui-se que

$$E(T) = I(T) + n.$$

□

#### 4.2.2 – Busca com freqüências de acesso diferenciadas

Nesta seção, é estudado o problema da busca no caso geral em que as chaves apresentam freqüências de acesso possivelmente distintas. Será desenvolvido um algoritmo para determinar a árvore binária de busca que seja a melhor possível.

Inicialmente, é necessário conceituar-se, com precisão, o que significa “melhor árvore”. Seja  $T$  uma árvore binária de busca, em que cada chave  $s_k$  possui freqüência de acesso  $f_k$  e se localiza, em  $T$ , em um nível  $\ell_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . A árvore  $T$  também incorpora nós externos, correspondentes aos intervalos  $R_0, \dots, R_n$  onde terminam as buscas sem sucesso. Cada  $R_k$  possui freqüência de acesso  $f'_k$  e se localiza no nível  $\ell'_k$  de  $T$ ,  $0 \leq k \leq n$ . Toda vez que uma busca bem-sucedida é realizada para se localizar  $s_k$ , são efetuadas  $\ell_k$

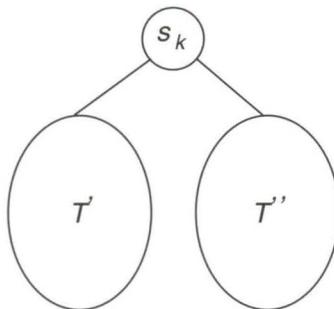
comparações. Portanto, a parcela de contribuição de  $s_k$  para uma estimativa do número total de comparações realizadas ao longo do processo é igual a  $f_k \ell_k$ . Considerando-se todas as chaves, o número total de comparações é  $\sum_{1 \leq k \leq n} f_k \ell_k$ . Esse valor é denominado *comprimento de caminho interno ponderado* de  $T$  e traduz o trabalho realizado para as buscas com sucesso.

A análise das buscas sem sucesso é semelhante. Toda busca sem sucesso termina em algum nó externo  $R_k$  e corresponde a  $\ell'_k - 1$  comparações envolvendo chaves do conjunto. Isto é, a parcela de contribuição de  $R_k$ , no total de comparações efetuadas, é  $f'_k(\ell'_k - 1)$ . Considerando-se todos os nós externos, o número total de comparações é  $\sum_{0 \leq k \leq n} f'_k(\ell'_k - 1)$ . Esse somatório denomina-se *comprimento de caminho externo ponderado* de  $T$  e representa as comparações referentes ao total de buscas sem sucesso. O número total de comparações efetuadas ao longo do processo, considerando-se buscas com e sem sucesso, denomina-se *custo*  $c(T)$  de  $T$ . Sua expressão é, portanto, igual a

$$c(T) = \sum_{1 \leq k \leq n} f_k \ell_k + \sum_{0 \leq k \leq n} f'_k(\ell'_k - 1).$$

A *árvore ótima* é, naturalmente, aquela que apresenta custo mínimo. Por exemplo, se na figura 4.2 a freqüência da chave 6 for 3, enquanto a das demais chaves e a de todos os nós externos forem iguais a 5, o custo da árvore será igual a  $(4 \times 3) + (41 \times 5) = 217$ . Esse número representa o total de comparações efetuadas pelo algoritmo de busca. Essa árvore não é ótima para o problema considerado.

O problema de construir a árvore binária de busca ótima para um dado conjunto  $S$  de chaves pode então ser formulado como o de determinar a árvore  $T$  cujo custo  $c(T)$  seja mínimo. Para resolver esse problema, aplica-se uma técnica denominada *programação dinâmica*. A idéia consiste em decompor o problema dado em dois outros de tamanho menor, isto é, correspondentes a subconjuntos próprios de  $S$ . Seja  $s_k$  a raiz de  $T$ . Representam-se por  $T'$  e  $T''$  as subárvore esquerda e direita de  $s_k$ , respectivamente, conforme indica a figura 4.3.



**Figura 4.3:** Decomposição da árvore de busca ótima

Note que  $T'$  é uma árvore binária de busca para o conjunto de chaves  $\{s_1, \dots, s_{k-1}\}$  e contém os nós externos  $R_0, \dots, R_{k-1}$ ;  $T''$ , por sua vez, é uma árvore para as chaves  $\{s_{k+1}, \dots, s_n\}$  com os nós externos  $R_k, \dots, R_n$ . A correção da decomposição efetuada se baseia no lema seguinte.

**Lema 4.3:**

As subárvore de uma árvore binária de busca ótima são também ótimas.

**Prova:**

Se assim não fosse, a substituição de uma subárvore não ótima pela ótima correspondente implicaria uma diminuição de custo da árvore ótima, uma contradição.  $\square$

Pelo lema 4.3, conclui-se que, se  $T$  é ótima, então  $T'$  e  $T''$  também o são. Assim sendo, uma vez conhecida  $s_k$  e sabendo-se como determinar  $T'$  e  $T''$ , a árvore  $T$  estará automaticamente construída. Para aplicar esse método, surgem espontaneamente duas questões:

- (i) Como conhecer  $s_k$ ?
- (ii) Como determinar  $T'$  e  $T''$ ?

A resposta a ambas as questões é simples. Na ausência de um método direto que forneça a raiz  $s_k$ , podem-se tentar todas as possibilidades, pois o número total de subproblemas a resolver não seria excessivo. Qualquer chave de  $S$

pode ser a raiz de  $T$ . A idéia é tentar cada uma delas, pois são apenas  $n$  possibilidades. Quanto à determinação de  $T'$  e  $T''$ , a idéia é aplicar esse mesmo princípio de forma recursiva. Isto é, para construir  $T'$ , por exemplo, escolhe-se para raiz uma chave pertencente a  $\{s_1, \dots, s_{k-1}\}$  e constroem-se as suas respectivas subárvores ótimas de forma recursiva. E assim por diante, até que cada subconjunto de chaves para o qual se deseja construir a subárvore ótima seja tão pequeno que o subproblema correspondente se torne trivial e a sua solução seja imediata. Um subconjunto de chaves vazio, naturalmente, satisfaz essa condição: sua árvore ótima também é vazia.

Finalmente, seja  $T(i, j)$  a árvore ótima correspondente ao subconjunto de chaves  $\{s_{i+1}, \dots, s_j\}$ ,  $0 \leq i \leq j \leq n$ . Seja  $F(i, j)$  a soma de todas as freqüências correspondentes a  $T(i, j)$ . Isto é,

$$F(i, j) = \sum_{i < k \leq j} f_k + \sum_{i \leq k \leq j} f'_k.$$

Para resolver o problema através do método exposto é necessário obter uma relação entre os valores da função custo da árvore  $T$  e aqueles correspondentes às subárvores  $T'$  e  $T''$ , nas quais  $T$  se decompõe. O lema seguinte fornece essa relação.

#### Lema 4.4:

Seja  $T(i, j)$  a árvore binária de busca ótima de raiz  $s_k$  correspondente às chaves  $\{s_{i+1}, \dots, s_j\}$ ,  $0 \leq i \leq j \leq n$ . Então

$$c(T(i, j)) = c(T(i, k-1)) + c(T(k, j)) + F(i, j).$$

#### Prova:

Para formar  $T(i, j)$  a partir de  $T(i, k-1)$  e  $T(k, j)$ , basta tomar  $s_k$  para raiz de  $T(i, j)$  e considerar como filhos esquerdo e direito de  $s_k$  os nós-raízes de  $T(i, k-1)$  e  $T(k, j)$ , respectivamente. Nesse caso, se  $\ell_q$  (ou  $\ell'_q$ ) representa o nível em que uma chave  $s_q$  (ou nó externo  $R_q$ ) se encontra em  $T(i, k-1)$  (ou  $T(k, j)$ ), o nível de  $s_q$  (ou  $R_q$ ) em  $T(i, j)$  será, obviamente,  $\ell_q + 1$  (ou  $\ell'_q + 1$ ). Como o nível de  $s_k$  em  $T(i, j)$  é igual a um, tem-se

$$\begin{aligned}
c(T(i, j)) &= f_k \times 1 + \sum_{i < q < k} f_q(\ell_q + 1) + \sum_{i \leq q < k} f'_q(\ell'_q + 1 - 1) \\
&\quad + \sum_{k < q \leq j} f_q(\ell_q + 1) + \sum_{k \leq q \leq j} f'_q(\ell'_q + 1 - 1) \\
&= \sum_{i < q < k} f_q \ell_q + \sum_{i \leq q < k} f'_q(\ell'_q - 1) + \sum_{k < q \leq j} f_q \ell_q \\
&\quad + \sum_{k \leq q \leq j} f'_q(\ell'_q - 1) + f_k + \sum_{i < q < k} f_q + \sum_{k < q \leq j} f_q \\
&\quad + \sum_{i \leq q < k} f'_q + \sum_{k \leq q \leq j} f'_q \\
&= c(T(i, k - 1)) + c(T(k, j)) + F(i, j)
\end{aligned}$$

□

O algoritmo agora encontra-se aparente. Basta calcular  $c(T(0, n))$  através da expressão fornecida pelo lema 4.4. Esse valor pode ser calculado de forma recursiva, sem qualquer dificuldade, sabendo-se que os valores iniciais (isto é, o fim da recursão), que correspondem às subárvores vazias, são iguais a

$$c(T(i, i)) = 0, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Contudo, a determinação de  $c(T(0, n))$  através de uma computação recursiva possui a enorme desvantagem de não reconhecer a ocorrência de subproblemas repetidos no processo. Assim, um mesmo custo  $c(T(i, j))$  seria recalculado diversas vezes no processo, sem necessidade. Como o número total de subproblemas produzidos por essa recursão é exponencial, pode-se concluir que o algoritmo correspondente também seria de complexidade exponencial.

Alternativamente, a idéia consiste em computar os custos de tal forma que cada valor  $c(T(i, j))$  seja calculado apenas uma vez. Para tanto, os custos são armazenados em uma tabela. Toda vez que algum custo já calculado fizer parte de alguma nova computação, a idéia é simplesmente transcrevê-lo diretamente da tabela. Nesse caso, não há necessidade de um novo cálculo para determinar esse custo. Observe que o número total de custos distintos envolvidos no processo é apenas  $n(n + 1)/2$ , ou seja, um para cada par de valores de  $i, j$  satisfazendo  $0 \leq i < j \leq n$ . Isto representa uma redução considerável em relação ao número exponencial de subproblemas produzidos por uma realização recursiva do processo.

Para implementar essa estratégia, é necessário calcular a expressão de custo do lema 4.4 de forma não recursiva. Assim sendo, para computar  $c(T(i, j))$ , é necessário que já estejam calculados todos os valores que aparecem do lado direito de sua expressão, isto é,  $c(T(i, k - 1))$ ,  $c(T(k, j))$  e  $F(i, j)$ . A computação de  $F(i, j)$  é independente da de  $c(T(i, j))$  e sua prévia determinação não oferece qualquer dificuldade. Para que os outros dois valores já estejam calculados quando o processo atingir o início da computação de  $c(T(i, j))$ , basta observar que a diferença de seus índices é sempre estritamente menor do que a correspondente a esse último valor. Isto é,  $(k - 1) - i < j - i$  e  $j - k < j - i$ . Assim sendo, computam-se os valores de  $c(T(i, j))$  em ordem não crescente de diferença de índices.

O algoritmo encontra-se descrito a seguir. As variáveis  $c$  e  $F$  são matrizes de dimensão  $(n + 1) \times (n + 1)$ . São dados os valores  $f_1, \dots, f_n, f'_0, f'_1, \dots, f'_n$ . O custo da árvore ótima, ao final, é o valor de  $c[0, n]$ .

**algoritmo 4.3:** Árvore binária ótima

para  $j = 0, \dots, n$  faça

$$c[j, j] := 0; F[j, j] := f'_j$$

para  $d = 1, \dots, n$  faça

para  $i = 0, \dots, n - d$  faça

$$j := i + d$$

$$F[i, j] := F[i, j - 1] + f_j + f'_j$$

$$c[i, j] := \min_{i < k \leq j} \{c[i, k - 1] + c[k, j]\} + F[i, j]$$

A complexidade desse algoritmo é  $O(n^3)$ , pois a execução da última linha do algoritmo, correspondente ao cálculo de  $c[i, j]$ , por si só demanda tempo  $O(n)$ , sendo efetuada  $O(n^2)$  vezes. Existe, contudo, uma variação desse algoritmo que reduz a sua complexidade para  $O(n^2)$ . Essa variação é baseada no princípio de monotonicidade da árvore binária de busca. Este princípio afirma que, se  $s_k$  é a chave da raiz de uma árvore ótima correspondente a um conjunto de chaves  $\{s_i, \dots, s_j\}$  e uma nova chave  $s_{j+1}$  é agregada ao conjunto, então existe uma árvore ótima para o conjunto  $\{s_i, \dots, s_j, s_{j+1}\}$ , com a chave  $s_q$ ,  $q \geq k$ , em sua raiz. Analogamente, se a chave  $s_{i-1}$  for agora agregada, há uma árvore ótima para  $\{s_{i-1}, s_i, \dots, s_j\}$  com  $s_q$ ,  $q \leq k$ , na raiz. Esse fato reduz o número de candidatos a figurar nas raízes das árvores ótimas correspondentes aos diversos subproblemas do processo. E, em última instância, pode ser provado que a complexidade total é reduzida para  $O(n^2)$  (exercícios 4.23 e 4.24).

O algoritmo 4.3, conforme foi descrito, na realidade calcula apenas o custo da árvore binária de busca ótima. O interesse anunciado, porém, era o de construir a árvore propriamente dita. Como efetuar essa construção, com base no algoritmo? A resposta a essa pergunta é simples. Em cada minimização para o cálculo de  $c[i, j]$  (última linha do algoritmo) deve ser armazenado o valor minimizante  $k$ . A subárvore ótima correspondente ao custo  $c[i, j]$  possui então raiz  $s_k$ , localizando-se as chaves  $\{s_i, \dots, s_{k-1}\}$  e  $\{s_{k+1}, \dots, s_j\}$  à esquerda e à direita de  $s_k$ , respectivamente. Com essa informação, a árvore ótima pode ser construída sem dificuldade. Observe que é necessária a utilização de uma outra matriz para armazenar os valores de  $k$ .

Em seguida, um exemplo ilustra o funcionamento do algoritmo. Seja um conjunto com  $n = 4$  chaves e as seguintes freqüências:

$j$	0	1	2	3	4
$f_j$	—	10	1	3	2
$f'_j$	2	1	1	1	1

A computação do algoritmo é equivalente ao preenchimento das matrizes correspondentes às variáveis  $c$ ,  $F$  e  $k$ . Estas são preenchidas diagonalmente, deslocando-se a computação da diagonal principal para o canto superior direito.

A figura 4.4 apresenta as matrizes preenchidas pelo algoritmo. Observe que  $c[0, 4] = 39$ , isto é, o algoritmo efetua 39 passos (comparações) para concluir todos os acessos solicitados. A construção da árvore ótima é realizada a partir da matriz  $k$ . Como  $k[0, 4] = 1$ , afigura-se que a chave  $s_1$  é a raiz da árvore ótima  $T$ . A subárvore esquerda de  $s_1$  é, portanto, vazia. Do valor  $k[1, 4] = 3$ , conclui-se que o filho direito de  $s_1$  é  $s_3$ . De  $k[1, 2] = 2$ , verifica-se que o filho esquerdo de  $s_3$  é  $s_2$ . Como  $k[3, 4] = 4$ , sabe-se que o filho direito de  $s_3$  é  $s_4$ . A figura 4.5 ilustra a árvore assim construída.

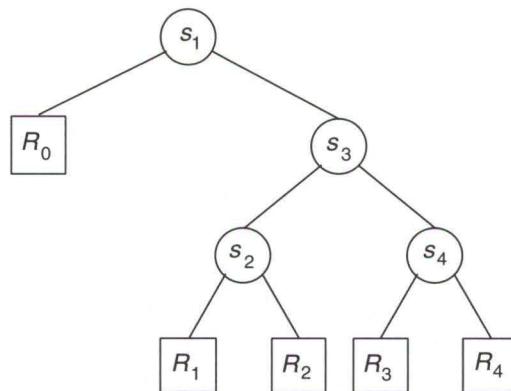
Observe que a árvore ótima não é necessariamente única. Com efeito, as diferentes árvores que possuem o mesmo custo ótimo podem ser obtidas a partir de valores diferentes de  $k[i, j]$  e que correspondam ao mesmo custo ótimo  $c[i, j]$ .

$$F \quad \begin{vmatrix} 2 & 13 & 15 & 19 & 22 \\ - & 1 & 3 & 7 & 10 \\ - & - & 1 & 5 & 8 \\ - & - & - & 1 & 4 \\ - & - & - & - & 1 \end{vmatrix}$$
$$c \quad \begin{vmatrix} 0 & 13 & 18 & 29 & 39 \\ - & 0 & 3 & 10 & 17 \\ - & - & 0 & 5 & 12 \\ - & - & - & 0 & 4 \\ - & - & - & - & 0 \end{vmatrix}$$
$$k \quad \begin{vmatrix} - & 1 & 1 & 1 & 1 \\ - & - & 2 & 3 & 3 \\ - & - & - & 3 & 3 \\ - & - & - & - & 4 \\ - & - & - & - & - \end{vmatrix}$$

---

Figura 4.4: As matrizes do algoritmo

---



---

Figura 4.5: Árvore binária de busca ótima

---

## 4.3 - Árvore de Partilha

### 4.3.1 – Conceitos básicos

Durante a construção de uma árvore binária de busca, foi colocado o problema de selecionar qual chave deve ser escolhida para compor a raiz de uma dada subárvore  $T$ . De um modo geral, a única restrição conceitual é que a chave escolhida deve pertencer, naturalmente, à subárvore  $T$ . Existem, basicamente, dois critérios de escolha, justificados de forma intuitiva:

- (i) Escolher a chave de maior freqüência de acesso.
- (ii) Escolher a chave de valor médio.

O critério (i) tem como efeito a construção de árvores em que chaves de maior freqüência se localizam mais próximo à raiz da árvore. O critério (ii) produz árvores平衡adas. O ideal, naturalmente, seria alcançar os dois objetivos simultaneamente. Contudo, eles podem ser contraditórios. Isto é, a política de colocar as chaves de maior freqüência junto à raiz pode produzir árvores altamente desbalanceadas. Enquanto isso, a insistência em escolher para raiz a chave de valor médio pode produzir uma árvore em que as chaves de menor freqüência estejam sempre mais próximas à raiz. Conforme já foi verificado, a aplicação isolada de somente um dos critérios não conduz, necessariamente, à árvore ótima.

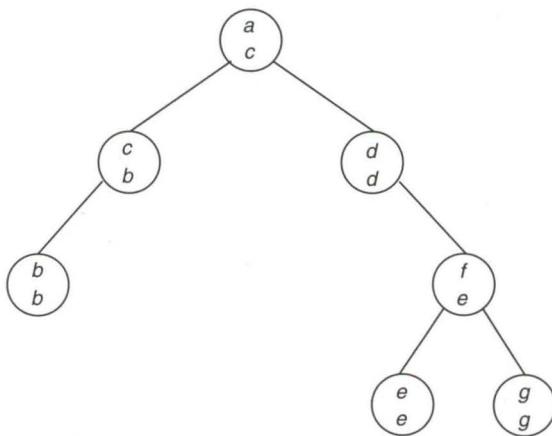
Numa tentativa de conciliar esses dois critérios foi desenvolvida a *árvore binária de partilha*. A idéia consiste em associar a cada nó da árvore duas chaves, em vez de uma única: a *chave real* e a *chave de partilha*. A chave real corresponde àquela que é objeto da busca. A chave de partilha é utilizada para definir as chaves que compõem as subárvores esquerda e direita do nó considerado. Em uma árvore binária de busca ordinária, essas duas chaves coincidem. O objetivo da utilização de duas chaves distintas é desvincular a chave armazenada em cada nó  $v$  daquela utilizada para determinar a seqüência da busca, ou à esquerda ou à direita de  $v$ .

### 4.3.2 – A busca em árvores binárias de partilha

No problema da busca, é dado um conjunto de chaves  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , bem como um valor de chave procurada  $x$ . O problema consiste em encontrar o índice  $j$  tal que  $x = s_j$ , se existir. Cada  $s_i$  do conjunto  $S$  possui uma

freqüência de acesso  $f_i$ . Para efetuar a busca, utiliza-se uma árvore binária especial, denominada *árvore binária de partilha*, e denotada por  $T$ . Cada nó  $q$  de  $T$  armazena uma chave do conjunto, denominada *chave real*, que será denotada por  $real(q)$ . Além disso, o nó  $q$  possui também uma segunda chave, denominada *chave de partilha*, que será denotada  $partilha(q)$ . O objetivo da chave de partilha é determinar o caminho a ser seguido pela busca, após a consulta do nó  $q$ . Isto é, se o próximo nó a ser testado será o da subárvore esquerda ou direita de  $q$ .

A busca se desenvolve segundo o processo seguinte: ao se alcançar um certo nó  $q$ , verifica-se se o nó procurado  $x$  é igual à chave  $real(q)$ . Em caso positivo, o processo termina, pois a chave foi localizada. Caso contrário, se  $x \leq partilha(q)$ , então o nó a ser alcançado é o filho esquerdo de  $x$  e, se  $x > partilha(q)$ , considera-se o filho direito de  $q$ .



**Figura 4.6:** Árvore binária de partilha

Uma árvore binária de partilha encontra-se representada na figura 4.6, onde as chaves são  $a, \dots, g$ , ordenadas alfabeticamente. O símbolo mais acima em cada nó corresponde à chave real, enquanto o mais abaixo é a chave de partilha. Assim, a chave real associada à raiz da árvore é  $a$ , enquanto a de partilha é  $c$ . Seja o caso em que se deseja localizar a chave  $x = b$ . O teste inicial é verificar se  $b = a$ . Como não é, compara-se, então,  $b$  com

c. O caminho da esquerda da raiz é o escolhido, pois  $b < c$ . A próxima comparação é verificar se  $b = d$ . A resposta negativa implica efetuar outra comparação, de  $b$  com  $b$ , e tomar, novamente o caminho da esquerda, pois  $b \leq b$ . Finalmente, alcança-se o nó cuja chave real é  $b$ , e a busca está terminada.

O algoritmo é apresentado a seguir. A variável  $ptraiz$  indica a raiz da árvore,  $pt$  aponta o nó corrente, enquanto *real* e *partilha* são campos de cada nó, que indicam as chaves correspondentes.

**algoritmo 4.4:** Busca em árvore binária de partilha

**procedimento** *busca-partilha*( $x, pt$ )

**se**  $pt = \lambda$  **então**

“a chave não se encontra no conjunto”

**senão se**  $x = pt \uparrow .real$  **então**

“chave encontrada no nó apontado por  $pt$ ”

**senão se**  $x \leq pt \uparrow .partilha$  **então**

$pt := pt \uparrow .esq$

*busca-partilha*( $x, pt$ )

**senão**  $pt := pt \uparrow .dir$

*busca-partilha*( $x, pt$ )

$pt := ptraiz$

*busca-partilha*( $x, pt$ )

Cada chave  $s_i \in S$  corresponde, exatamente, a uma chave real. O mesmo não ocorre, contudo, com as chaves de partilha, pois é possível que duas dessas chaves sejam idênticas. O valor da chave de partilha de cada nó, em princípio, pode ser qualquer valor de chave de  $S$  e não está restrito às chaves que formam a subárvore do nó considerado. A chave de partilha de qualquer folha é sempre irrelevante e pode ter qualquer valor.

#### 4.3.3 – Árvore binária de partilha ótima

Dado um conjunto  $S$  de chaves,  $\{s_1, \dots, s_n\}$ , cada  $s_i$  com uma freqüência de acesso  $f_i$ , deseja-se construir uma árvore binária de partilha  $T$  que seja ótima. Isto é, cujo custo seja mínimo. Como uma árvore binária de partilha é uma árvore binária de busca, sabe-se da seção 4.2 que o custo  $c(T)$  é

$$c(T) = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \ell_i$$

onde  $\ell_i$  é o nível de  $s_i$  em  $T$ .

Para construir uma árvore de partilha ótima, será utilizado um método de programação dinâmica, o qual é uma generalização daquele empregado para obter uma árvore binária de busca ótima.

Seja  $T$  uma árvore de partilha e  $v$  um nó de  $T$ . O *alcance* da subárvore  $T_v$  de  $T$ , de raiz  $v$ , é um par ordenado, definido, recursivamente, da seguinte maneira. Se  $v = \text{raiz}(T)$ , então  $\text{alcance}(T_v) = [1, n]$ . Caso contrário, seja  $w$  o pai de  $v$ , suponha que  $\text{alcance}(T_w) = [i_w, j_w]$  e que  $s_k$  é a chave de  $S$  selecionada como chave de partilha para o nó  $w$ . Então, se  $v$  é filho esquerdo de  $w$ , define-se  $\text{alcance}(T_v) = [i_w, k]$ ; se  $v$  for filho direito, então  $\text{alcance}(T_v) = [k + 1, j_w]$ . Segue-se dessa definição que, se  $\text{alcance}(T_v) = [i, j]$ , então toda chave  $s_p$  que está incluída em  $T_v$  se encontra no intervalo  $[i, j]$ , isto é,  $i \leq p \leq n$ . A recíproca não vale necessariamente. Isto é, nem toda chave pertencente ao intervalo  $[i, j]$  pertence à subárvore  $T_v$ . A razão dessa última afirmativa é que  $T_v$  pode conter menos que  $j - i + 1$  nós e, dessa forma, algumas das chaves do intervalo teriam de sobrar. A figura 4.7 apresenta os valores dos alcances dos nós da árvore ilustrada em 4.6, supondo-se que as chaves  $a, \dots, g$  correspondem aos índices 1, ..., 7, respectivamente.

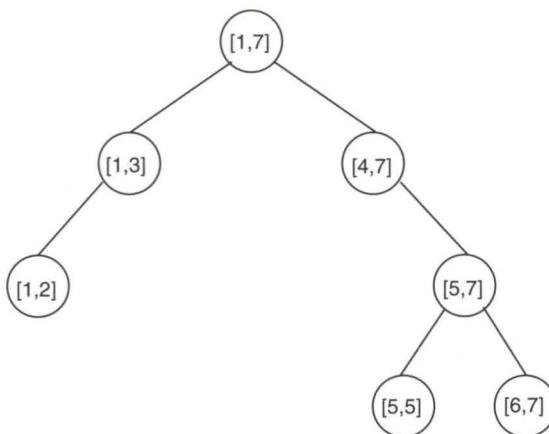
O lema a seguir é imediato.

### Lema 4.5:

As subárvores de uma árvore binária de partilha ótima são também ótimas.

Esse lema permite decompor o problema da construção da árvore ótima em outros subproblemas de tamanho menor. É um caso análogo ao da árvore binária de busca geral realizado anteriormente. Contudo, nesse último, cada subproblema pôde ser decomposto em no máximo dois outros, enquanto, na árvore de partilha, tal número pode ser maior.

Para determinar a árvore ótima, necessita-se especificar, para cada nó  $v$ , quais são os valores de  $\text{real}(v)$  e  $\text{partilha}(v)$ , isto é, as chaves, real e de partilha, que serão colocadas em  $v$ .



**Figura 4.7: Alcance dos nós**

Para selecionar a chave real a ser atribuída a cada nó da árvore, utiliza-se o lema que se segue.

**Lema 4.6:**

Seja  $T$  uma árvore binária de partilha ótima e  $v$ , um nó de  $T$ . A chave real que  $v$  contém é aquela de menor freqüência dentre as compreendidas no intervalo  $alcance(T_v)$  e que não figura em qualquer nó de  $T_v$ .

**Prova:**

A observação importante para provar o lema é que todas as chaves do intervalo  $alcance(T_v)$  ocorrem, ou na subárvore  $T_v$ , ou no caminho de  $raiz(T)$  até  $v$ . Se a chave real  $s_k$  de  $v$  não é a de menor freqüência, então existe uma outra chave  $s_\ell$  tal que  $\ell \in alcance(T_v)$ ,  $s_\ell \notin T_v$ , e  $f_\ell < f_k$ . Dessa observação conclui-se que  $s_\ell$  deve pertencer ao caminho de  $raiz(T)$  até  $s_k$ . Seja  $T'$  uma nova árvore binária de partilha, obtida a partir de  $T$  simplesmente trocando-se as posições das chaves reais  $s_k$  e  $s_\ell$ . Os formatos de  $T$  e  $T'$  coincidem, bem como os valores das respectivas chaves de partilha. Observe que a busca pode ser realizada corretamente também em  $T'$ , visto que  $k, \ell \in alcance(T_v)$ . Dessa forma,  $T'$  é também uma árvore binária de partilha. Como  $f_\ell < f_k$ ,  $T'$  possui custo menor do que  $T$ , o que contradiz  $T$  ser ótima. Logo, a chave

real de  $v$  é a de menor freqüência dentre aquelas compreendidas no intervalo  $alcance(T_v)$ , mas que não pertencem a  $T_v$ .  $\square$

O lema 4.6 é utilizado como um critério de escolha para a determinação das chaves reais dos nós. Para a seleção da chave de partilha, infelizmente, não se dispõe de um critério tão eficaz quanto este. Ao contrário, o processo para as chaves de partilha consiste em tentar todas as chaves possíveis e escolher aquela que produza as subárvores de menor custo, conforme detalhado a seguir.

Denota-se por  $c(i, j, d)$  o custo da subárvore binária ótima de partilha  $T(i, j, d)$ , contendo as chaves  $s_{i+1}, \dots, s_j$ , exceto  $d$  chaves que se encontram ausentes. Isto é,  $T(i, j, d)$  possui alcance  $[i+1, j]$  e exatamente  $j - i + d$  chaves do intervalo  $s_{i+1}, \dots, s_j$ , sendo aquela de custo mínimo nessas condições. Observe que a solução do problema é o custo  $c(0, n, 0)$ . Para computar esse valor, calcula-se  $c(i, j, d)$  para  $0 \leq i \leq j \leq n$  e  $0 \leq d \leq j - i$ . Denota-se por  $F(i, j, d)$  a soma das freqüências das chaves reais que compõem  $T(i, j, d)$ , por  $real(i, j, d)$  e  $partilha(i, j, d)$ , respectivamente, as chaves real e de partilha que formam o nó raiz de  $T(i, j, d)$ . A figura 4.8 ilustra a decomposição empregada.

Suponha que  $s_k$  seja a chave de partilha do nó raiz de  $T(i, j, d)$ . Pelo lema 4.5, as subárvores esquerda e direita desse nó são ótimas. Além disso, como  $d$  chaves reais estão faltando em  $T(i, j, d)$  e uma chave real é alocada à raiz de  $T(i, j, d)$ , conclui-se que o número total de chaves ausentes das subárvores definidas pelos filhos esquerdo e direito da raiz de  $T(i, j, d)$  é igual a  $d+1$ . Isto é, a subárvore esquerda do nó-raiz de  $T(i, j, d)$  é do tipo  $T(i, k, m)$ , enquanto a da direita é  $T(k, j, d-m+1)$ , para um certo valor de  $m$ , satisfazendo  $0 \leq m \leq d+1$ . Como se desconhece o valor de  $m$  que conduz à subárvore ótima, a alternativa é tentar todas as possibilidades dentro da faixa mencionada. A relação entre os custos de  $T(i, j, d)$ ,  $T(i, k, m)$  e  $T(k, j, d-m+1)$  é semelhante ao caso da árvore binária de busca geral. Isto é,  $c(i, j, d)$  é igual à soma dos outros dois custos, acrescido da soma das freqüências dos nós de  $T(i, j, d)$ . Finalmente, como se desconhece qual chave  $s_k$  deve ser alocada à raiz de  $T(i, j, d)$ , experimentam-se todas as alternativas possíveis, selecionando-se a de menor custo. Assim sendo,  $c(i, j, d)$  pode ser calculado segundo as equações seguintes, para  $0 \leq i \leq j \leq n$ .

$$c(i, j, d) = 0, \quad \text{para } 0 \leq i \leq j \leq n \text{ e } d = j - i. \quad (1)$$

$$c(i, j, d) = \infty, \quad \text{para } 0 \leq i \leq j \leq n \text{ e } d > j - i. \quad (2)$$

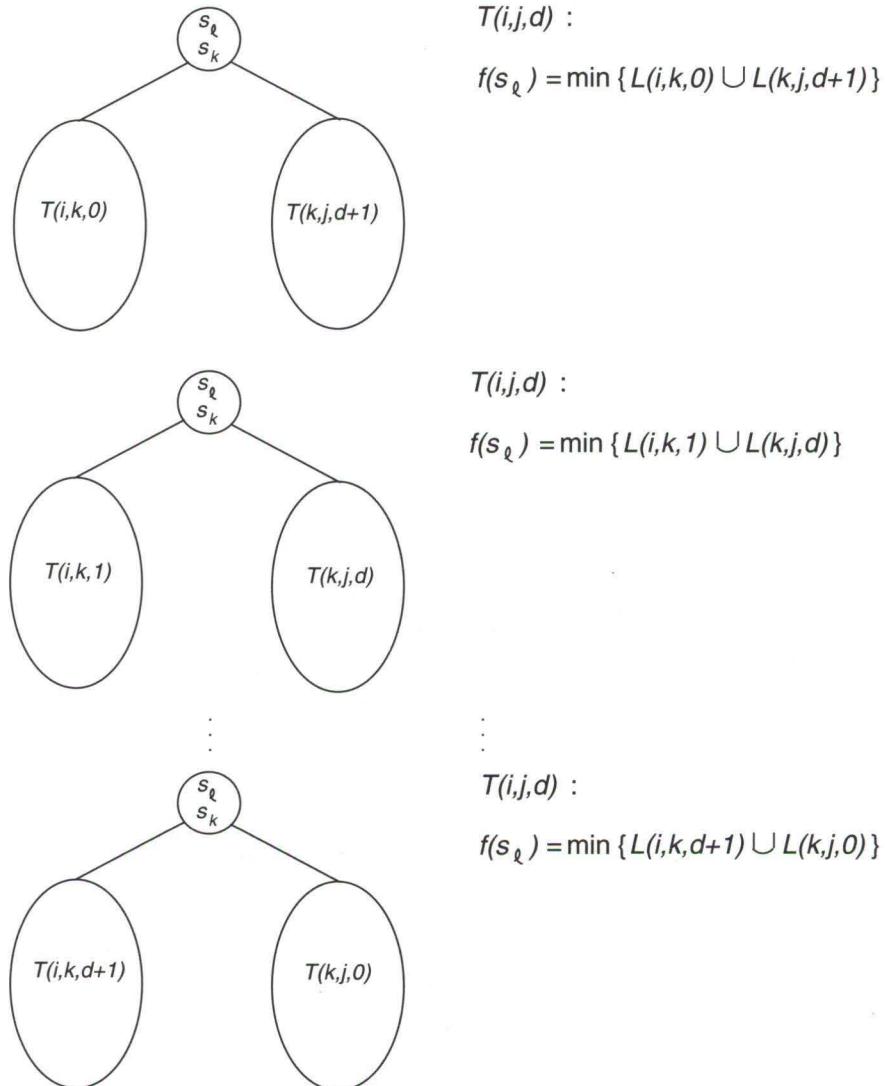
$$c(i, j, d) = \min_{\substack{i+1 \leq k \leq j \\ 0 \leq m \leq d+1}} \{c(i, k, m) + c(k, j, d - m + 1)\} + F(i, j, d), \quad (3)$$

$$\text{para } 0 \leq i < j \leq n \text{ e } 0 \leq d < j - i.$$

As equações (1) e (2) constituem as condições iniciais do problema. Observe que, se  $d = j - i$ , então  $T(i, j, d)$  é uma árvore vazia, o que justifica o valor  $c(i, j, d) = 0$  da equação (1). Em particular,  $c(i, i, 0) = 0$  pois  $T(i, i, 0)$  também é vazia. Por outro lado, se  $d > j - i$ , significa que  $T(i, j, d)$  deveria conter um número negativo de nós, o que é uma impossibilidade. Esse fato justifica o  $c(i, j, d) = \infty$  da equação (2). Finalmente, a equação (3) corresponde à decomposição ilustrada na figura 4.8.

Para computar a equação (3) de forma eficiente, é necessário que os valores de  $c(i, k, m)$  e  $c(k, j, d - m + 1)$  já sejam conhecidos quando do cálculo de  $c(i, j, d)$ . Para alcançar esse objetivo, basta computar  $c(i, j, d)$  em ordem não decrescente de  $j - i$  e, para um valor fixo de  $j - i$ , calcular  $c(i, j, d)$  em ordem decrescente de  $m$ . Isto é, o desenvolvimento da computação é o seguinte. Inicialmente,  $j - i = 0$  e  $d = 0$ . Em seguida,  $j - i = 1$  e  $d = 1$  e, após,  $d = 0$ . Para  $j - i = 2$ , computa-se  $d = 2$ , em seguida  $d = 1$  e, após,  $d = 0$ . E assim por diante. Observe também que, para computar  $c(i, j, d)$ , é necessário calcular, previamente,  $F(i, j, d)$ . Acontece que  $F(i, j, d)$  depende de  $T(i, k, m)$ ,  $T(k, j, d - m + 1)$  e do valor da chave real atribuída ao nó-raiz de  $T(i, j, d)$ . Esse cálculo se desenvolve do seguinte modo.

Para um dado valor experimental da chave de partilha  $s_k$ , seja  $\ell$  o índice da chave de menor freqüência dentre  $s_{i+1}, \dots, s_j$ , mas não pertencentes tanto a  $T(i, k, m)$ , quanto a  $T(k, j, d - m + 1)$ . De acordo com o lema 4.5,  $s_\ell$  será a chave real da raiz de  $T(i, j, d)$ . O valor de  $F(i, j, d)$  depende dessa chave real alocada à raiz de  $T(i, j, d)$ . Assim, deve-se determinar, inicialmente,  $s_\ell$ . Para encontrar  $s_\ell$ , é necessário conhecer, exatamente, as chaves que compõem as subárvores  $T(i, k, m)$  e  $T(k, j, d - m + 1)$  de  $T(i, j, d)$ . Esse problema poderia ser resolvido através da manutenção de uma lista que informasse, para cada subárvore  $T(i, j, d)$ , quais são as chaves que a compõem. Na realidade, necessitar-se-ia saber quais são as chaves dentre  $s_{i+1}, \dots, s_j$  que não se encontram em  $T(i, j, d)$ . Isto é, o mais conveniente é manter uma lista  $L(i, j, d)$



---

Figura 4.8: Decomposição da árvore ótima

que contenha exatamente essa última informação. A chave  $s_\ell$  é precisamente aquela de menor freqüência dentre as que compõem  $L(i, j, d)$ . Se se manter  $L(i, j, d)$  ordenada segundo valores não decrescentes das freqüências das chaves qua a formam, a chave  $s_\ell$  será a primeira chave dessa ordenação. Essa técnica permite determinar a chave real a ser alocada a cada nó da árvore em tempo constante.

Uma vez encontradas as chaves reais que compõem cada nó de  $T(i, j, d)$ , inclusive a chave  $s_\ell$  do nó raiz de  $T(i, j, d)$ , pode-se determinar o valor de  $F(i, j, d)$  facilmente. Analogamente à seção anterior, o somatório das freqüências das chaves reais que formam  $T(i, j, d)$  é igual ao somatório das freqüências das chaves das subárvores definidas pelos filhos da raiz de  $T(i, j, d)$  acrescida da freqüência da chave real  $s_\ell$  alocada à raiz de  $T(i, j, d)$ . Então, para um dado valor de  $k$ , calcula-se  $F(i, j, d)$  através de

$$F(i, j, d) = F(i, k, m) + F(k, j, d - m + 1) + f(s_\ell) \quad (4)$$

Já se dispõe de todos os elementos para escrever o algoritmo da árvore binária de partilha ótima. A estratégia encontra-se detalhada a seguir.

- A inicialização consiste em determinar  $c(i, j, d)$  para  $0 \leq i \leq j \leq n$  e  $j - i \leq d \leq n$  de acordo com as equações (1) e (2). Além disso, as listas  $L$  são inicializadas para esses casos segundo  $L(i, j, d) = \{s_{i+1}, \dots, s_j\}$ .
- Para um dado par de índices  $i, j$ , suponha que  $c(i', j', d')$ ,  $F(i', j', d')$  e  $L(i', j', d')$  já tenham sido previamente calculados para todos os valores de  $i'$ ,  $j'$ ,  $d'$  satisfazendo a  $0 \leq j' - i' < j - i$  e  $0 \leq d' \leq j' - i'$ , bem como  $j' - i' = j - i$  e  $d' > d$ . Em particular, quando se considera uma certa subárvore  $T(i, j, d)$ , supõe-se que as chaves real e de partilha já tenham sido determinadas para cada nó que compõe  $T(i, j, d)$ , exceto a raiz. A determinação das chaves real e de partilha da raiz de  $T(i, j, d)$  é o objetivo da computação corrente, abaixo discriminada.
- Para cada valor de  $d$ ,  $d < j - i$ , considera-se a variação de  $m$  segundo  $0 \leq m \leq d + 1$ . Para cada par de valores  $i$  e  $j$ ,  $0 \leq j - i \leq n$ , considera-se também a variação do índice  $k$  da chave de partilha tentativa,  $i + 1 \leq k \leq j$ , conforme indicado na equação (3). Para uma certa tentativa de valores de  $m$  e  $k$  fixos a lista  $L(i, j, d)$  se compõe da união das listas  $L(i, k, m)$  e  $L(k, j, d - m + 1)$ . Para o par de valores  $m$  e  $k$  considerados, a chave real  $s_\ell$  que seria alocada à raiz de  $T(i, j, d)$  é a

de menor freqüência dentre as que compõem  $L(i, j, d)$ . Observe que todas as listas  $L$  devem ser mantidas ordenadas, ao longo do processo.

- Para o par de valores  $m$  e  $k$  considerados e a chave  $s_\ell$  obtida como acima, determina-se  $F(i, j, d)$  de acordo com a equação (4).
- Uma vez obtido  $F(i, j, d)$ , determina-se o valor  $c(i, j, d)$  correspondente ao par de valores  $m$  e  $k$  pela equação (3).
- O valor final de  $c(i, j, d)$  será o mínimo entre todos os experimentados para cada par  $m$  e  $k$ .
- O valor final de  $L(i, j, d)$ , bem como o da chave real  $s_\ell$ , o de  $F(i, j, d)$  e o da chave de partilha  $s_k$  alocados à raiz de  $T(i, j, d)$  serão os correspondentes ao par  $m$  e  $k$  que produziram o mínimo da equação (3).
- A computação termina quando  $c(0, n, 0)$  é calculado.

A determinação da complexidade desse processo não apresenta dificuldade. Existem  $O(n^2)$  pares  $i, j$ , com  $0 \leq i \leq j \leq n$  e  $O(n^3)$  triplas  $i, j, d$ , sendo  $0 \leq d \leq j - i$ . Logo, o número total de subárvores a serem consideradas, isto é, de subproblemas, é de  $O(n^3)$ . Para computar o custo de cada subárvore  $T(i, j, d)$ ,  $k$  e  $m$  variam de acordo com  $i + 1 \leq k \leq j$  e  $0 \leq m \leq d + 1$ . Ou seja, um total de  $O(n^2)$  computações. As operações da união das listas, bem como a escolha da chave de menor probabilidade em cada lista, podem ser realizadas em tempo inferior a estas. Portanto, a complexidade final é de  $O(n^5)$ .

Como exemplo, determine-se a árvore binária de partilha ótima de um conjunto de 3 chaves cujas freqüências são as seguintes:

chave	freqüência $f(i)$
$s_1$	10
$s_2$	3
$s_3$	2

Em seguida, é efetuado o cálculo da árvore ótima, passo a passo. Os subproblemas a serem considerados são  $T(i, j, d)$ , onde  $0 \leq i \leq j \leq 3$  e  $0 \leq d \leq j - i$ .

$(i, j, d)$	$c$	$F$	$L$	chave de partilha	chave real
$(0, 0, 0)$	0	0	$\emptyset$	—	—
$(1, 1, 0)$	0	0	$\emptyset$	—	—
$(2, 2, 0)$	0	0	$\emptyset$	—	—
$(3, 3, 0)$	0	0	$\emptyset$	—	—
$(0, 1, 1)$	0	0	$\{s_1\}$	—	—
$(1, 2, 1)$	0	0	$\{s_2\}$	—	—
$(2, 3, 1)$	0	0	$\{s_3\}$	—	—
$(0, 1, 0)$	10	10	$\emptyset$	$s_1$	$s_1$
$(1, 2, 0)$	3	3	$\emptyset$	$s_2$	$s_2$
$(2, 3, 0)$	2	2	$\emptyset$	$s_3$	$s_3$
$(0, 2, 2)$	0	0	$\{s_1, s_2\}$	—	—
$(1, 3, 2)$	0	0	$\{s_2, s_3\}$	—	—
$(0, 2, 1)$	3	3	$\{s_1\}$	$s_1$	$s_2$
$(1, 3, 1)$	2	2	$\{s_2\}$	$s_2$	$s_3$
$(0, 2, 0)$	16	13	$\emptyset$	$s_1$	$s_1$
$(1, 3, 0)$	7	5	$\emptyset$	$s_2$	$s_2$
$(0, 3, 3)$	0	0	$\{s_1, s_2, s_3\}$	—	—
$(0, 3, 2)$	2	2	$\{s_1, s_2\}$	$s_1$	$s_3$
$(0, 3, 1)$	7	5	$\{s_1\}$	$s_1$	$s_2$
$(0, 3, 0)$	20	15	$\emptyset$	$s_2$	$s_1$

**Figura 4.9:** Cálculo da árvore ótima

A computação se processa para valores ascendentes de  $j - i = 0, 1, 2, 3$ . Para cada valor de  $j - i$ ,  $c(i, j, d)$  é computado na seqüência decrescente de  $d = j - i, j - i - 1, \dots, 0$ . A figura 4.9 apresenta os valores de  $c(i, j, d)$ ,  $F(i, j, d)$ ,  $L(i, j, d)$ , bem como as chaves de partilha e real correspondentes, para cada tripla  $(i, j, d)$  satisfazendo  $0 \leq i \leq j \leq 3$  e  $0 \leq d \leq j - i$ , na ordem em que essas triplas são consideradas pelo algoritmo. Observa-se que em vários casos a solução não é única, devido ao empate de valores. Quando isso ocorre, o algoritmo desempata de forma arbitrária. A figura 4.9 ilustra uma das soluções possíveis. As subárvores ótimas dos subproblemas estão indicadas nas figuras 4.10(a) até 4.10(j).

$T(0,1,0)$



(a)

$T(1,2,0)$



(b)

$T(2,3,0)$



(c)

$T(0,2,1)$



(d)

$T(1,3,1)$



(e)

$T(0,2,0)$



(f)

$T(1,3,0)$



(g)

$T(0,3,2)$



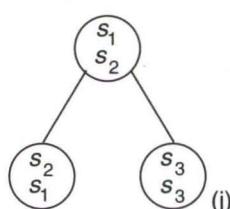
(h)

$T(0,3,1)$

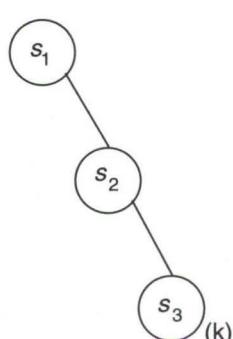


(i)

$T(0,3,0)$



(j)



(k)

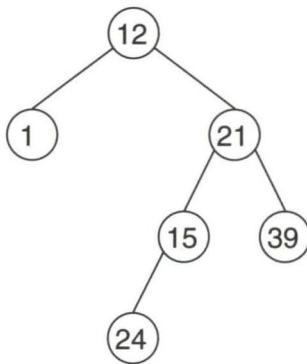
---

Figura 4.10: Subárvores construídas pelo algoritmo

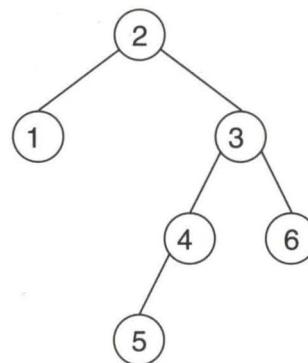
Esse exemplo evidencia o ganho no custo de uma árvore binária de partilha ótima sobre uma árvore binária de busca ótima. A primeira corresponde ao subproblema  $T(0, 3, 0)$ , possui custo 20 e encontra-se ilustrada na figura 4.10(j). Enquanto isso, a árvore binária de busca ótima, para o mesmo conjunto de chaves, aparece na figura 4.10(k) e possui custo 22.

## 4.4 – Exercícios

- 4.1 Verificar se cada uma das árvores binárias da figura 4.11 é uma árvore de busca.
- 



(a)



(b)

**Figura 4.11:** Exercício 4.1

---

- 4.2 Seja  $S = \{s_1, \dots, s_7\}$  um conjunto de chaves,  $s_i < s_{i+1}$ ,  $i < 7$ . Desenhar a árvore binária de busca construída pelo algoritmo 4.2 supondo que a inserção dos nós seja efetuada segundo a permutação  $s_3 s_7 s_1 s_2 s_6 s_5 s_4$ .
- 4.3 Seja  $S = \{s_1, \dots, s_7\}$  um conjunto de chaves,  $s_i < s_{i+1}$ ,  $i < 7$ . Desenhar uma árvore binária de busca  $T$  para  $S$  com as seguintes propriedades:

- (i)  $T$  possui altura máxima.
- (ii)  $T$  possui altura mínima.

Quantas árvores distintas existem, em cada caso?

- 4.4** Escrever as permutações do conjunto de chaves  $S = \{s_1, \dots, s_7\}$ ,  $s_i < s_{i+1}$ ,  $i < 7$ , que correspondam à árvore binária de busca com:
- (i) altura máxima.
  - (ii) altura mínima.
- 4.5°** Resolver o exercício anterior para o conjunto  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $s_1 < \dots < s_n$
- 4.6** Provar ou dar contra-exemplo:  
 Sejam  $p_1, p_2$  duas permutações de um conjunto de chaves  $S$  e  $T_1, T_2$  as árvores binárias de busca correspondentes a  $p_1, p_2$ , respectivamente. Então,  $p_1 \neq p_2$  se e somente se  $T_1 \neq T_2$ .
- 4.7°** Determinar as condições necessárias e suficientes para que duas permutações distintas de um conjunto de chaves correspondam a árvores binárias de busca idênticas.
- 4.8°** Seja  $S = \{1, \dots, n\}$  um conjunto, e  $\pi_1, \dots, \pi_n$  uma permutação  $p$  de  $S$ . Uma *inversão* de  $p$  é um par de elementos  $\pi_i, \pi_j$ , tal que  $\pi_i < \pi_j$  e  $i > j$ . Seja  $T$  a árvore de busca construída segundo a permutação  $p$ . Provar, ou apresentar contra-exemplo, para cada uma das seguintes afirmativas.
- (i) Se  $p$  possui um número máximo de inversões, então  $T$  possui altura máxima.
  - (ii) Se  $p$  possui um número mínimo de inversões, então  $T$  possui altura mínima.
  - (iii) Se o número de inversões de  $p$  é a mediana dos números de inversões das permutações de  $S$ , então  $T$  possui altura mínima.
- 4.9** Seja  $S = \{s_1, \dots, s_7\}$  um conjunto de chaves,  $s_i < s_{i+1}$ ,  $i < 7$ . Duas permutações de  $S$  são *semelhantes* se correspondem à mesma árvore binária de busca. Sejam  $P_{\min}$  e  $P_{\max}$  subconjuntos de permutações de  $S_7$  semelhantes entre si, com cardinalidades mínima e máxima, respectivamente. Determinar a árvore binária de busca
- (i) correspondente a  $P_{\min}$ .
  - (ii) correspondente a  $P_{\max}$ .
- 4.10•** Resolver o exercício anterior para o conjunto  $\{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $s_1 < \dots < s_n$ .

**4.11º** Determinar os comprimentos de caminho interno e externo das árvores binárias de busca correspondentes às permutações seguintes.

- (i)  $1 \ 2 \ \dots \ n$ .
- (ii)  $1 \ 3 \ \dots \ n \ 2 \ 4 \ \dots \ n - 1$ ,  $n$  ímpar.
- (iii)  $1 \ 3 \ \dots \ n - 1 \ 2 \ 4 \ \dots \ n$ ,  $n$  par.

**4.12º** Provar ou dar contra-exemplo:

- (i) Toda árvore ziguezague possui o mesmo comprimento de caminho interno.
- (ii) Toda árvore ziguezague possui o mesmo comprimento de caminho externo.
- (iii) Se  $T$  e  $T'$  são árvores binárias de busca tais que  $h(T) > h(T')$ , então  $I(T) > I(T')$ .

**4.13•** Determinar os comprimentos de caminho interno e externo ponderado de uma árvore binária completa.

**4.14** Provar ou dar contra-exemplo:

Sejam  $T$  e  $T'$  duas árvores binárias de busca, tais que  $c(T) > c(T')$ . Então  $I(T) > I(T')$  e  $E(T) > E(T')$ .

**4.15** Descrever um algoritmo para remover uma dada chave de uma árvore binária de busca. A complexidade do algoritmo deve ser da ordem da altura da árvore.

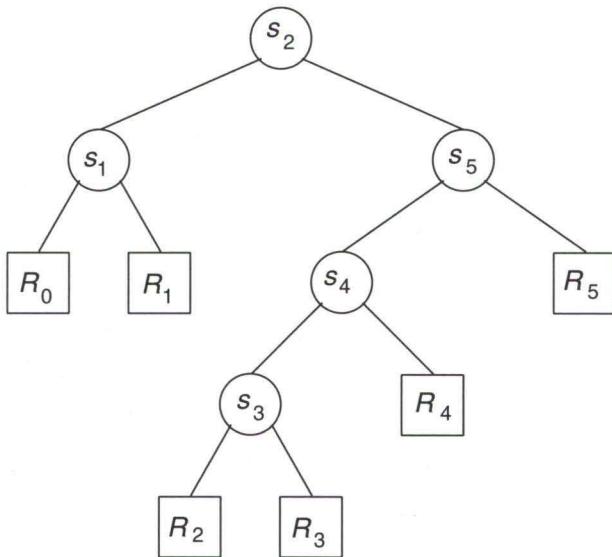
**4.16** As chaves da árvore da figura 4.12 apresentam as seguintes freqüências de acesso:

$i$	0	1	2	3	4	5
$f_i$	–	1	3	2	1	2
$f'_i$	2	2	1	0	1	2

Determinar os comprimentos de caminho interno e externo ponderados, bem como o custo da árvore.

**4.17** Desenhar a árvore binária de custo mínimo relativa às freqüências do exercício anterior.

**4.18º** Seja  $T$  uma árvore binária de busca qualquer para o conjunto de chaves  $S$ . Mostrar que  $T$  é uma árvore de custo mínimo para algum conjunto de valores das freqüências de acesso.



---

**Figura 4.12:** Exercício 4.16

- 4.19 Seja  $T$  uma árvore binária de busca mínima para um conjunto de chaves  $\{s_1, \dots, s_n\}$ , cada  $s_i$  com freqüência de acesso  $f_i$ . Provar ou dar contra-exemplo:
- $f_i < f_j \Rightarrow \text{nível}(s_i) < \text{nível}(s_j)$ , em  $T$ .
  - $\text{nível}(s_i) < \text{nível}(s_j)$ , em  $T \Rightarrow f_i < f_j$ .
  - $f_1 = \dots = f_n \Rightarrow T$  é completa.
  - $f_{s_i}$  é a freqüência mediana das chaves da árvore  $T_{s_i}$ , de raiz  $s_i$ , de  $T$ .
- 4.20 Determinar o valor médio dos comprimentos de caminho interno e externo dentre as árvores binárias.
- 4.21 Verificar que a expressão do lema 4.2,  $E(T) = I(T) + n$  torna-se incorreta se for adotada a convenção de que o nível da raiz da árvore é igual a 0, em vez de 1. Nesse caso, mostrar que a fórmula correta é  $E(T) = I(T) + n - 2$ .
- 4.22• Determinar o valor médio dos comprimentos de caminho interno e externo dentre as árvores ternárias.

- 4.23 • Provar o princípio da monotonicidade, descrito na seção 4.2.2.
- 4.24 • Utilizar o princípio da monotonicidade para modificar o algoritmo 4.3 de construção de árvore binária ótima, de modo a reduzir a sua complexidade para  $O(n^2)$ .
- 4.25 Determinar a árvore de custo mínimo para o conjunto de chaves  $\{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $s_i < s_{i+1}$ , onde  $f_i = 2 \cdot f_{i-1}$ ,  $1 < i \leq n$ , e  $f'_i = 0$ ,  $0 \leq i \leq n$ .
- 4.26 • Uma *árvore múltipla de busca* é uma árvore  $T$   $t$ -ária em que cada nó interno  $v$  armazena  $k < t$  chaves e possui  $k + 1$  filhos, entre nós externos e internos. As folhas de  $T$  são os seus nós externos. A busca se desenvolve da seguinte maneira. Sejam  $s_{p_1} < \dots < s_{p_k}$  as chaves armazenadas em  $v$ . Ao se atingir o nó  $v$ , verifica-se se a chave procurada  $x$  é uma dentre  $s_{p_1}, \dots, s_{p_k}$ . Caso contrário, há duas possibilidades. Se  $x > s_{p_k}$  então o próximo nó a ser examinado é o último filho de  $v$ . Se  $x < s_{p_k}$ , seja  $j$  o menor índice tal que  $x < s_{p_j}$ . Nesse caso, o próximo nó a ser examinado é o  $j$ -ésimo filho de  $v$ . Supondo que  $f_1, \dots, f_n$  e  $f'_1, \dots, f'_n$  sejam as freqüências de acesso das chaves, desenvolver um algoritmo para encontrar a árvore múltipla de busca de custo mínimo.
- 4.27 ° Mostrar, através de um exemplo, que o princípio da monotonicidade não é verdadeiro no caso de árvores múltiplas de busca.
- 4.28 Uma *árvore  $t$ -ária alfabetica* é aquela em que as informações que se deseja armazenar se encontram nas folhas da árvore, isto é,  $f_1 = \dots = f_n = 0$  e  $f'_0, \dots, f'_n \neq 0$ . Apresentar um exemplo de uma árvore ternária alfabetica com 7 nós.
- 4.29 • Escrever um algoritmo eficiente para determinar uma árvore binária alfabetica ótima, dadas as freqüências  $f'_0, \dots, f'_n \neq 0$ .
- 4.30 • Seja um problema de busca com *chaves de comprimento variável*, isto é, em que cada chave  $s_i$  possui um tamanho  $\ell_i \geq 0$ . Uma árvore de busca para um conjunto de chaves dessa natureza é semelhante à árvore múltipla de busca (exercício 4.26), exceto pelo fato de que cada nó armazena uma quantidade variável de chaves com tamanho total  $\sum \ell_i$  menor ou igual a  $L$ , onde  $L$  é um *limite* dado. Desenvolver um método para construir a árvore de busca que minimiza o espaço utilizado, isto é, que possui um número mínimo de nós, para um certo limite  $L$ , e tamanhos  $\ell_1, \dots, \ell_n$ .
- 4.31 • Descrever um algoritmo para construir a árvore de busca de altura

mínima, para um dado conjunto de chaves de comprimento variável  $\ell_1, \dots, \ell_n$ , e limite  $L$ .

- 4.32 Mostrar que o princípio da monotonicidade não se aplica às árvores de busca que minimizam tanto o espaço (exercício 4.30) quanto a altura (exercício 4.31) quando as chaves são de comprimento variável.
- 4.33 • Desenvolver um algoritmo para encontrar a árvore de busca de custo mínimo para um dado conjunto de  $n$  chaves de comprimento variável, dados os tamanhos  $\ell_1, \dots, \ell_n$ , o limite  $L$ , as freqüências  $f_1, \dots, f_n$  e  $f'_1, \dots, f'_n$ .
- 4.34 • Escrever um algoritmo para encontrar a árvore binária de busca ótima, com altura limitada por um valor dado  $h$ . Os dados do problema são as freqüências dos nós internos  $f_1, \dots, f_n$ , as dos nós externos  $f'_1, \dots, f'_n$  e o valor de  $h$ .
- 4.35 ° Determinar o número total de subproblemas considerados pelo algoritmo de construção da árvore binária de partilha mínima com  $n$  chaves.
- 4.36 ° Determinar o número total de somas  $f(i, k-1, m) + f(k-1, j, d-m+1)$ , de custos, que o algoritmo de construção da árvore binária de partilha mínima efetua.
- 4.37 Provar ou dar contra-exemplo:  
Seja  $T$  uma árvore binária de partilha para um conjunto de chaves  $\{s_1, \dots, s_n\}$ . Então,
  - (i)  $nivel_T(s_i) > nivel_T(s_j) \Rightarrow f_i \geq f_j$ .
  - (ii)  $f_i > f_j \Rightarrow nivel_T(s_i) \geq nivel_T(s_j)$ .
- 4.38 Implementar o algoritmo de determinação da árvore binária de partilha ótima.
- 4.39 ° Provar ou dar contra-exemplo:  
O custo da árvore binária de partilha ótima de um conjunto de chaves  $S$  tal que  $d$  chaves estão ausentes,  $|S| \geq d$ , é igual ao custo da árvore binária de busca ótima do conjunto formado a partir de  $S$  pela remoção de suas  $d$  chaves de maior freqüência de acesso.

- 4.40 Determinar a árvore binária de partilha ótima para o seguinte conjunto de chaves:

$s_i$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
$f_i$	4	3	7	6

- 4.41 • Generalizar o algoritmo de determinação da árvore binária de partilha ótima, de modo a incluir freqüências de acesso a buscas sem sucesso.
- 4.42 • Seja  $S$  um conjunto de  $n$  chaves e  $T$  uma certa árvore de partilha para  $S$ .  $T$  possui a propriedade de que a freqüência da chave de qualquer nó é maior do que a de qualquer um de seus descendentes. Seja  $c$  o custo de  $T$  e  $c_{ot}$  o custo da árvore binária de partilha ótima correspondente a  $S$ . Determinar a relação entre  $c$  e  $c_{ot}$ .
- 4.43 • Uma árvore *múltipla de partilha de ordem*  $m$  é uma árvore  $m$ -ária em que cada nó armazena até  $m$  chaves reais. Cada chave real possui uma chave de partilha associada. Um nó com  $\ell$  chaves possui até  $\ell + 1$  filhos. A busca de uma chave desejada  $x$  se processa do seguinte modo. Inicia-se pela raiz. Quando um certo nó  $q$  é atingido, verifica-se se  $x$  é alguma das chaves reais armazenadas em  $q$ . Em caso positivo, a busca termina. Caso contrário, sejam  $y_1 \leq \dots \leq y_\ell$  as chaves de partilha armazenadas em  $q$ . Se  $x < y_1$ , a busca prossegue no nó correspondente ao primeiro filho de  $q$ . Se  $x \geq y_\ell$  o próximo nó a ser pesquisado é o último filho de  $q$ . Caso contrário, prosseguir até o  $(k+1)$ -ésimo filho de  $q$ , onde  $y_k < x \leq y_{k+1}$ . Desenvolver um algoritmo para determinar a árvore múltipla de partilha ótima para um dado conjunto de chaves com freqüências conhecidas.

## Notas Bibliográficas

As árvores binárias de busca foram introduzidas na década de 50. O primeiro estudo probabilístico sobre o assunto foi realizado por Hibbard [Hi62]. Knuth [Kn73] contém um estudo completo e detalhado sobre árvores binárias de busca. Mahmoud [Ma92] escreveu um texto específico sobre a análise probabilística de árvores de busca, com resultados recentes. O algoritmo de árvore binária de busca ótima é de Gilbert e Moore [Gi59]. Knuth [Kn71]

incorporou os nós externos a esse algoritmo, bem como elaborou o princípio de monotonicidade (exercícios 4.23 e 4.24). Árvores binárias de busca com restrição de altura (exercício 4.34) foram consideradas por Garey [Ga74]. As árvores múltiplas de busca (exercícios 4.26 e 4.27) foram elaboradas por Gotlieb [Go81], Gotlieb e Wood [Go81a] e Vaishnavi, Kriegel e Wood [Va80]. A árvore  $t$ -ária alfabetica ótima (exercício 4.29) foi construída por Itai [It76]. Árvores de busca com chaves de comprimento variável (exercícios 4.30 a 4.33) foram tratadas por McCreight [Mc77] e Szwarcfiter [Sz84]. Um estudo de árvores ternárias de busca foi efetuado por Szwarcfiter e Wilson [Sz78].

As árvores de partilha foram introduzidas por Sheil em [Sh78]. Na definição original, a chave real de cada subárvore era predefinida como aquela de maior freqüência dentre as chaves que formam a subárvore, enquanto a chave de partilha era a mediana dessas chaves. O nome original atribuído a essa estrutura foi *árvore de partilha mediana*. Comer [Co80] considerou o caso em que mais de uma chave real pode ser atribuída a cada nó. Huang e Wong [Hu84a] consideraram as *árvores de partilha ponderadas*. O problema de determinar uma árvore de partilha ótima havia sido conjecturado como intratável por Sheil. Algoritmos para computar tais árvores ótimas, com complexidade  $O(n^5)$ , foram desenvolvidos por Perl [Pe84] e Huang e Wong [Hu84]. Contudo, a definição das árvores consideradas nesses trabalhos ainda levava em conta a restrição de que a chave real de cada nó seria a de maior freqüência dentre as subárvores desse nó. Foram Huang e Wong [Hu84a] que estenderam a definição, de modo a abolir essa restrição. Eles mostraram através de um exemplo que a árvore assim obtida pode ter custo estritamente melhor do que aquela definida com restrição de maior freqüência. Nesse mesmo trabalho, foi apresentado o algoritmo da construção da árvore ótima, segundo a nova definição. O nome atribuído a essa estrutura foi *árvore de partilha generalizada*. No capítulo 4 foi adotado simplesmente o nome *árvore de partilha*, com o mesmo significado. Os algoritmos de [Pe84] e [Hu84] exigiam que as freqüências fossem todas distintas. Hester, Hirschberg, Huang e Wong [He86] estenderam o algoritmo para manipular casos de freqüências possivelmente idênticas. A complexidade desse novo algoritmo é  $O(n^4)$  no caso de freqüências distintas, e  $O(n^5)$  no caso geral. Árvores múltiplas de partilha (exercício 4.43) foram consideradas por Huang [Hu87], que apresentou um algoritmo para encontrar a árvore ótima. Esse último continha a restrição de freqüências distintas. Essa restrição foi levantada por Liu, Chen e Wang [Li91].

# Árvores Balanceadas

## 5.1 – Introdução

Um aspecto fundamental do estudo de árvores de busca é, naturalmente, o custo de acesso a uma chave desejada. Com o intuito de minimizar esse custo, foram desenvolvidas as árvores binárias de busca e de partilha ótimas. Ambas, porém, se restringem a aplicações estáticas. Isto é, após um certo número de inserções e remoções, as árvores deixam de ser ótimas. Além disso, a complexidade da árvore de partilha ótima é muito elevada.

Para estruturas em que as probabilidades de acesso são idênticas entre si, há uma alternativa, considerada no presente capítulo. A idéia é manter o custo de acesso na mesma ordem de grandeza de uma árvore ótima, ou seja,  $O(\log n)$ . Esse custo deve se manter ao longo de toda utilização da estrutura, inclusive após inclusões e remoções. Para alcançar essa finalidade, a estrutura deve ser alterada, periodicamente, de forma a se moldar aos novos dados. O custo dessas alterações, contudo, se mantém em  $O(\log n)$ . Uma estrutura que opera com essas características é denominada *balanceada*.

Este capítulo é dedicado ao estudo de árvores balanceadas. O conceito de balanceamento é examinado na seção 5.2. As seções 5.3 e 5.4 estudam, respectivamente, duas árvores binárias de busca balanceadas. No primeiro caso, as árvores AVL e, no segundo, as árvores graduadas. Finalmente, a seção 5.5 examina um caso importante de árvores balanceadas: as árvores B. Essas últimas não são árvores binárias e possuem como característica o armazenamento de mais de uma chave por nó.

## 5.2 – O Conceito de Balanceamento

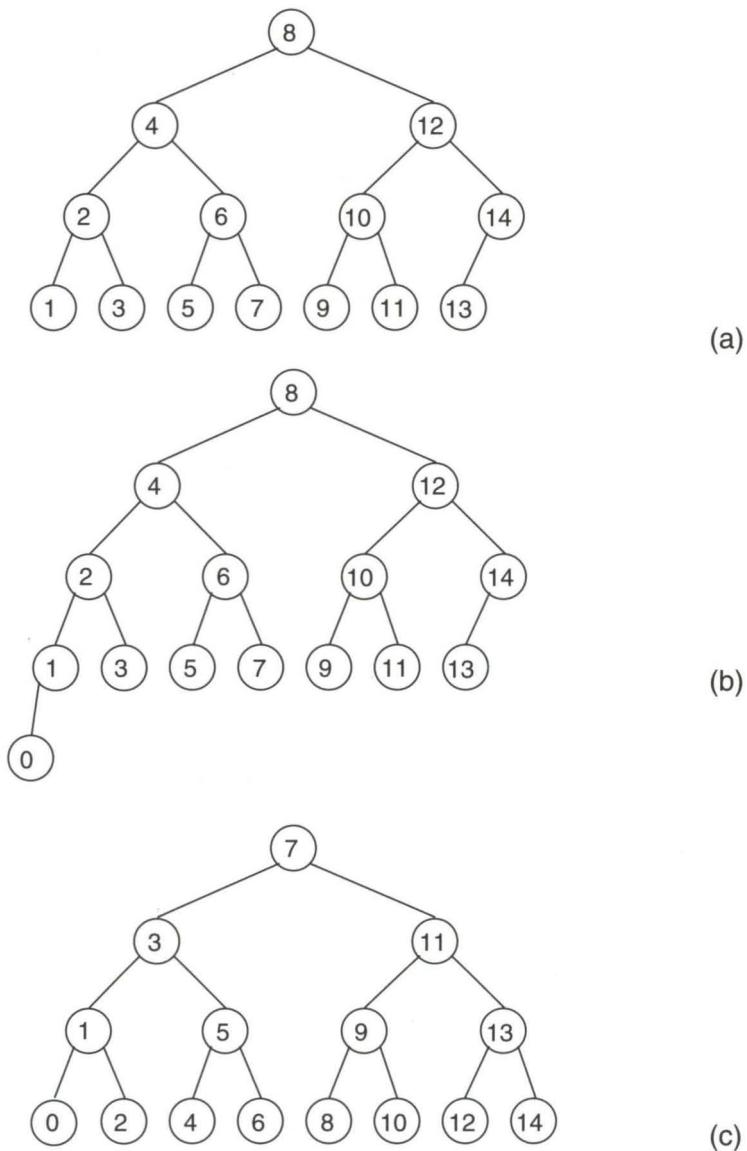
Conforme já foi observado, as árvores completas são aquelas que minimizam o número de comparações efetuadas no pior caso para uma busca com chaves de probabilidades de ocorrência idênticas.

Do ponto de vista das aplicações dinâmicas, contudo, o uso de árvores completas é, em geral, desaconselhável. Após um certo número de inclusões ou exclusões, a árvore pode assumir uma forma pouco recomendável para o problema de busca. Em um caso extremo, ela pode inclusive degenerar-se em uma lista.

Para contornar esse problema, uma idéia seria aplicar um algoritmo que tornasse a árvore novamente completa, tão logo tal característica fosse perdida após uma inclusão ou exclusão. A dificuldade reside em como efetuar essa operação utilizando menos que  $\Omega(n)$  passos, no pior caso. Por exemplo, considere uma árvore completa cujo último nível contenha todos os possíveis nós, exceto aquele que seria o mais à direita de todos. Nessa árvore só há uma possibilidade de inclusão sem aumento de altura. É a inclusão de uma chave maior do que todas demais, conforme indica a figura 5.1(a). Se nessa árvore, ao contrário, for incluído um nó de chave menor do que todas as outras, ela deixaria de ser completa, transformando-se na da figura 5.1(b). Para transformar esta última em uma árvore completa, observe que é necessário alterar a posição na estrutura de todos os seus nós. A figura 5.1(c) descreve a árvore completa restabelecida após a inclusão do nó 0 em 5.1(a). Observe, em particular, que os nós internos de 5.1(a) tornaram-se folhas em 5.1(c) e vice-versa. Para efetuar essas transformações nas representações usuais de árvores binárias, é necessário percorrer todos os nós da árvore. Isso implica que o algoritmo de restabelecimento da estrutura requer, pelo menos,  $\Omega(n)$  passos.

Naturalmente, o custo de  $\Omega(n)$  passos para o restabelecimento da árvore é excessivo, mormente considerando-se que operações como inserção ou remoção seriam efetuadas em  $O(\log n)$  passos. Por esse motivo, as árvores completas (e a busca binária) não são recomendadas para aplicações que requeiram estruturas dinâmicas.

Uma alternativa para esse último caso consiste em utilizar um determinado tipo de árvore binária cujo pior caso para a busca não seja necessariamente tão pequeno quanto o mínimo  $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$  passos alcançado pela árvore com-



---

Figura 5.1: Um exemplo ruim para o restabelecimento de árvores completas

pleta. A idéia é exigir, porém, que a altura dessa nova árvore seja da mesma ordem de grandeza que a de uma completa com o mesmo número de nós. Isto é, que possua altura igual a  $O(\log n)$ . Além disso, é desejável que esta propriedade se estenda a todas as subárvore: cada subárvore que contém  $m$  nós deve possuir altura igual a  $O(\log m)$ . Uma árvore que satisfaça essa condição é denominada *balanceada*. Intuitivamente, a idéia é utilizar árvores cuja altura, embora possa ser maior do que a mínima  $1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$ , ainda assim não ultrapasse  $O(\log n)$ . Por outro lado, como a forma de uma árvore balanceada é menos rígida do que a de uma completa, torna-se, em princípio, mais fácil o seu rebalanceamento, isto é, o restabelecimento das condições de平衡amento, após a realização de operações como inclusão ou exclusão de nós. De fato, mais adiante serão examinados tipos de árvores binárias que satisfazem a condição de balanceamento e que, após a realização de inclusões ou exclusões, empregam operações de rebalanceamento que requerem apenas  $O(\log n)$  passos.

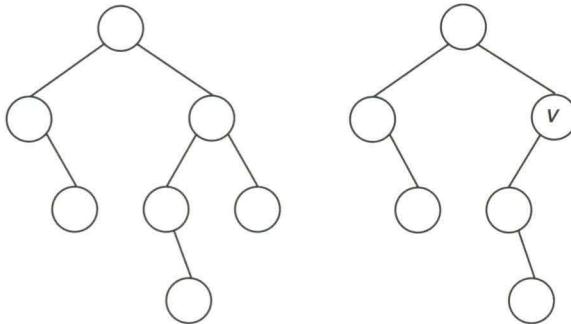
## 5.3 – Árvores AVL

Nesta seção, examina-se o primeiro tipo de árvores balanceadas, as árvores AVL. De início, conceitua-se a estrutura a ser estudada. Em seguida, prova-se que as árvores AVL são, de fato, balanceadas. O algoritmo de inclusão e as operações de rebalanceamento são analisados na última parte da seção.

Uma árvore binária  $T$  é denominada AVL quando, para qualquer nó de  $T$ , as alturas de suas duas subárvore, esquerda e direita, diferem em módulo de até uma unidade. Nesse caso,  $v$  é um nó *regulado*. Em contrapartida, um nó que não satisfaça essa condição de altura é denominado *desregulado*, e uma árvore que contenha um nó nessas condições é também chamada *desregulada*. Naturalmente, toda árvore completa é AVL, mas não necessariamente vale a recíproca. Por exemplo, a árvore da figura 5.2(a) é AVL enquanto a da figura 5.2(b) não o é, pois a subárvore esquerda do nó  $v$  assinalado possui altura 2 e a subárvore direita é de altura zero.

### 5.3.1 – Balanceamento de árvores AVL

A primeira tarefa consiste em mostrar que toda árvore AVL é balanceada. Para tal, a idéia é considerar uma árvore AVL com  $n$  nós, determinar o



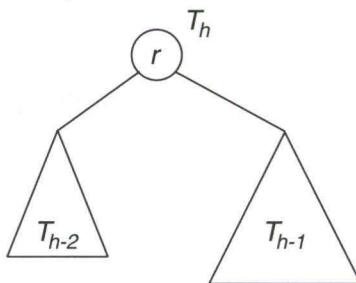
**Figura 5.2:** Árvores AVL e não AVL

valor máximo que sua altura  $h$  pode alcançar e verificar se esse valor satisfaz  $h = O(\log n)$ . Ou, então, pode-se fixar  $h$  e determinar o valor mínimo do número de nós. Isto é, o problema que se apresenta pode ser formulado nos seguintes termos: dada uma árvore AVL de altura  $h$ , qual seria o valor mínimo possível para  $n$ ?

Para resolver esse problema, observa-se, inicialmente, que numa árvore binária de altura  $h$  a altura de uma das subárvore da raiz é  $h - 1$ , enquanto a da outra é menor ou igual a  $h - 1$ . Numa árvore AVL, porém, a altura dessa última subárvore se restringe a  $h - 1$  ou  $h - 2$ , uma vez que, se fosse menor do que  $h - 2$ , sua raiz estaria desregulada. Contudo, como se deseja uma árvore AVL com número mínimo de nós, deve-se considerar a segunda subárvore como de altura  $h - 2$  e não  $h - 1$ .

Essa observação permite construir a árvore procurada de forma recursiva. Seja  $T_h$  uma árvore AVL com altura  $h$  e número mínimo de nós. Para formar  $T_h$ , consideram-se, inicialmente, os casos triviais. Se  $h = 0$ ,  $T_h$  é uma árvore vazia. Se  $h = 1$ ,  $T_h$  consiste em um único nó. Quando  $h > 1$ , para formar  $T_h$ , escolhe-se um nó  $r$  como raiz. Em seguida, escolhe-se  $T_{h-1}$  para formar a subárvore direita de  $r$ , e  $T_{h-2}$  para a esquerda. A figura 5.3 ilustra o processo de construção.

Observe que se pode intercambiar as subárvore direita e esquerda de  $r$  sem alterar o balanceamento dos nós da árvore. Isto é, para  $h > 1$ , existem várias árvores AVL com a mesma altura  $h$  e o mesmo número mínimo de

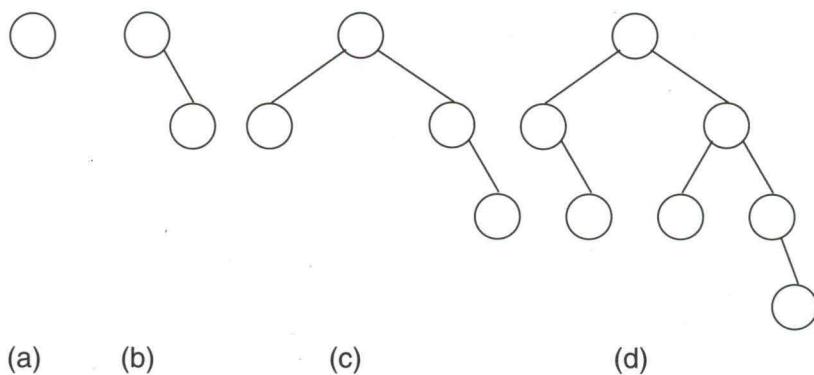


---

**Figura 5.3:** Construção da árvore mínima AVL

nós. É possível contudo se restringir à forma de construção anterior, sem perda de generalidade. Por exemplo, na figura 5.4, as árvores (a), (b), (c) e (d) correspondem às construções de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  respectivamente.

---



---

**Figura 5.4:** Árvore de Fibonacci

Dispondo dos meios para construir  $T_h$ , o próximo passo é determinar o número de nós de  $T_h$ . Para facilitar essa tarefa, observa-se que basta calcular um limite inferior do valor procurado em termos de  $h$ . Seja  $|T_h|$  o número de nós de  $T_h$ . Da construção anterior, segue-se que

$$\begin{cases} |T_h| = 0, & \text{para } h = 0 \\ |T_h| = 1, & \text{para } h = 1 \\ |T_h| = 1 + |T_{h-1}| + |T_{h-2}|, & \text{para } h > 1 \end{cases}$$

Os valores de  $|T_h|$  encontram-se tabelados na figura 5.5 até  $h = 10$ .

---

$h$	$ T_h $
0	0
1	1
2	2
3	4
4	7
5	12
6	20
7	33
8	54
9	88
10	143

Figura 5.5: Número de nós em árvores de Fibonacci

---

Para encontrar o valor de  $|T_h|$  em termos de  $h$ , compara-se, inicialmente,  $|T_h|$  com  $F_h$ , o  $h$ -ésimo termo da seqüência de Fibonacci, cujo valor é aqui reproduzido:

$$\begin{cases} F_h = 0, & \text{para } h = 0 \\ F_h = 1, & \text{para } h = 1 \\ F_h = F_{h-1} + F_{h-2}, & \text{para } h > 1 \end{cases}$$

Observe a analogia existente entre o número de nós  $|T_h|$  e o valor  $F_h$ . Por esse motivo,  $T_h$  é denominada *árvore de Fibonacci*. Segue-se, diretamente, que  $|T_h| \geq F_h$ .

Para  $h > 1$ , o  $h$ -ésimo termo da seqüência de Fibonacci (exercício 5.3) é dado por

$$F_h = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^h - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^h \right].$$

Como  $h > 0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^h < 1$ . Portanto,

$$|T_h| > \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^h - 1.$$

Fazendo  $a = (1 + \sqrt{5})/2$  tem-se

$$|T_h| > \frac{1}{\sqrt{5}} a^h - 1.$$

Ou seja,

$$\log_a (|T_h| + 1) > h - \log_a \sqrt{5}.$$

Transformando o logaritmo para a base 2, conclui-se que

$$h < \frac{1}{\log_2 a} \log_2 (|T_h| + 1) + \log_a \sqrt{5} = O(\log n).$$

Esse resultado indica que a árvore AVL é, de fato, balanceada.

### 5.3.2 – Inclusão em árvores AVL

Seja  $T$  uma árvore AVL, na qual serão efetuadas inclusões de nós. Para que  $T$  se mantenha como árvore AVL após as inclusões (e, consequentemente, permaneçam válidos os resultados descritos, relativos ao seu balanceamento) é preciso efetuar operações de restabelecimento da regulagem de seus nós, quando necessário.

A idéia consiste em verificar, após cada inclusão, se algum nó  $p$  se encontra desregulado, isto é, se a diferença de altura entre as duas subárvores de  $p$  tornou-se maior do que um. Em caso positivo, aplicar transformações apropriadas para regulá-lo.

Serão utilizadas as quatro transformações indicadas na figura 5.6, denominadas, respectivamente, *rotação direita*, *rotação esquerda*, *rotação dupla direita* e *rotação dupla esquerda*. As subárvores  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  que aparecem na figura podem ser vazias ou não. O nó  $p$  é chamado *raiz* da transformação.

Por exemplo, a figura 5.7(c) representa o efeito de uma rotação direita da raiz  $e$ , efetuada na árvore da figura 5.7(b). Observe que essas transformações preservam a natureza da árvore como sendo binária de busca. Isto é, se o

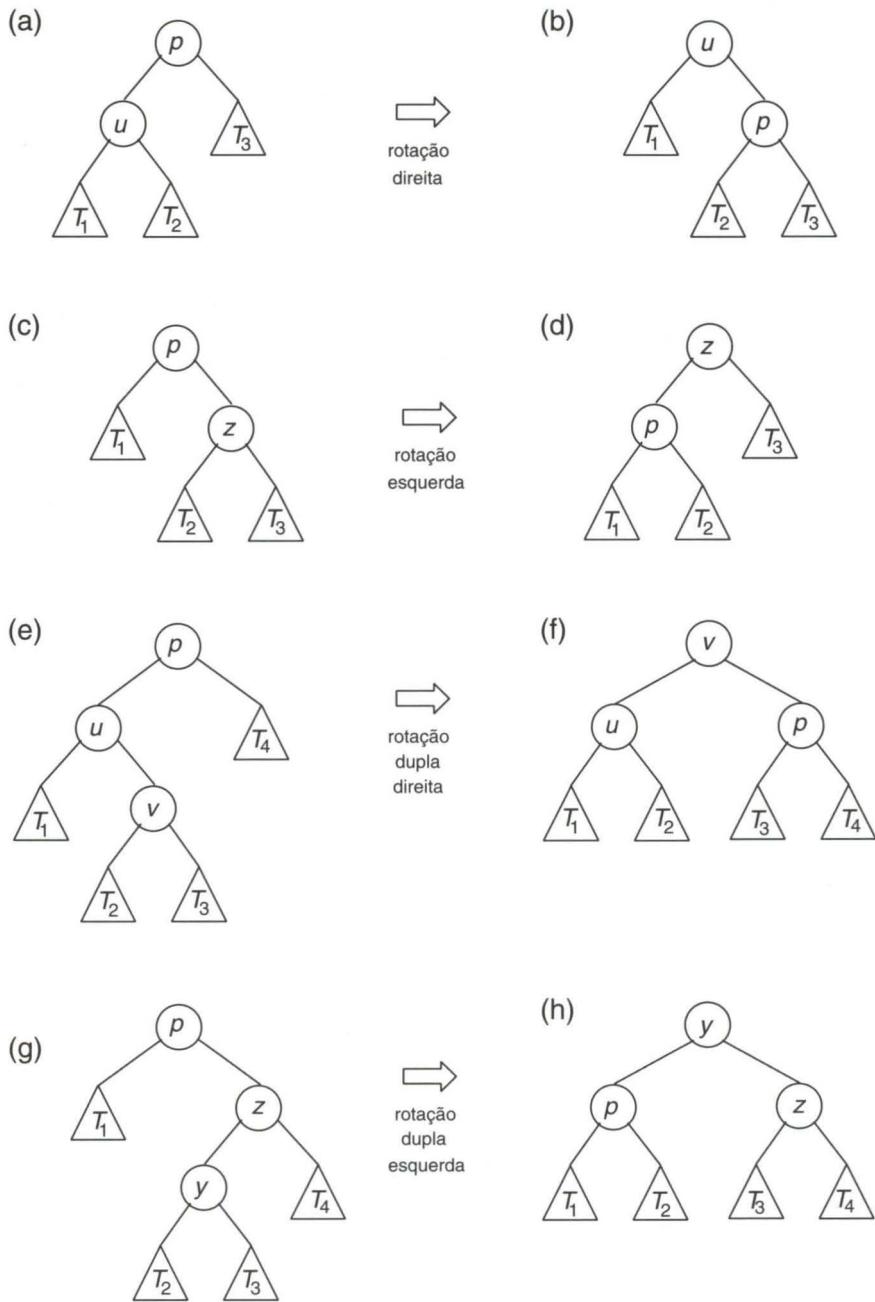


Figura 5.6: Rotações em árvores binárias de busca

valor da chave de um nó  $v$  for inferior ao da correspondente ao nó  $w$ , então acontece uma dentre as seguintes possibilidades:  $v$  pertence à subárvore esquerda de  $w$ , ou  $w$  pertence à subárvore direita de  $v$ .

Uma análise da operação de inclusão é efetuada a seguir. No processo, tornar-se-á evidente como aplicar as transformações.

Suponha que o nó  $q$  foi incluído em  $T$ . Se após a inclusão todos os nós mantiveram-se regulados, então a árvore manteve-se AVL e não há nada a efetuar. Caso contrário, seja  $p$  o nó mais próximo às folhas de  $T$  que se tornou desregulado. Observe que não há ambigüidade na escolha de  $p$ , pois qualquer subárvore de  $T$  que se tornou desregulada após a inclusão de  $q$  deve necessariamente conter  $p$ . Então  $p$  se encontra no caminho de  $q$  à raiz de  $T$ , e sua escolha é única. Sejam  $h_E(p)$  e  $h_D(p)$  as alturas das subárvores esquerda e direita de  $p$ , respectivamente. Naturalmente,  $|h_E(p) - h_D(p)| > 1$ . Então, conclui-se que  $|h_E(p) - h_D(p)| = 2$ , pois  $T$  era uma árvore AVL e, além disso, a inclusão de um nó não pode aumentar em mais de uma unidade a altura de qualquer subárvore. Podem-se identificar os seguintes casos de análise:

### Caso 1: $h_E(p) > h_D(p)$

Então,  $q$  pertence à subárvore esquerda de  $p$ . Além disso,  $p$  possui o filho esquerdo  $u \neq q$ . Pois, caso contrário,  $p$  não estaria desregulado. Finalmente, por esse mesmo motivo, sabe-se que  $h_E(u) \neq h_D(u)$ . As duas seguintes possibilidades podem ocorrer:

#### Caso 1.1: $h_E(u) > h_D(u)$ .

Essa situação corresponde à da figura 5.6(a), sendo  $q$  um nó pertencente a  $T_1$ . Observe que  $h(T_1) - h(T_2) = 1$  e  $h(T_2) = h(T_3)$ . Conseqüentemente, a aplicação da rotação direita da raiz  $p$  transforma a subárvore considerada na da figura 5.6(b), o que restabelece a regulagem de  $p$ .

#### Caso 1.2: $h_D(u) > h_E(u)$

Então  $u$  possui o filho direito  $v$ , e a situação é ilustrada na figura 5.6(e). Nesse caso, vale

$$|h(T_2) - h(T_3)| \leq 1 \text{ e } \max\{h(T_2), h(T_3)\} = h(T_1) = h(T_4).$$

Aplica-se então a rotação dupla direita da raiz  $p$ . A nova configuração aparece na figura 5.6(f) e a regulagem de  $p$  é restabelecida.

**Caso 2:**  $h_D(p) > h_E(p)$ 

Dessa vez,  $p$  possui o filho direito  $z \neq q$ . Segue-se que  $h_E(z) \neq h_D(z)$  e as demais situações são as seguintes:

**Caso 2.1:**  $h_D(z) > h_E(z)$ 

Esse caso corresponde à figura 5.6(c), sendo  $q$  pertencente a  $T_3$ . As relações de altura são agora

$$h(T_3) - h(T_2) = 1 \text{ e } h(T_2) = h(T_1).$$

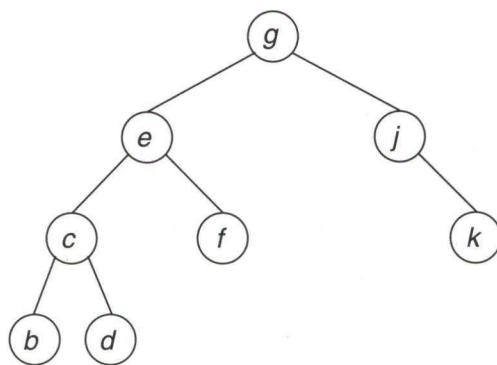
Isso significa que a rotação esquerda torna a árvore novamente AVL (figura 5.6(d)).

Finalmente, a última possibilidade é

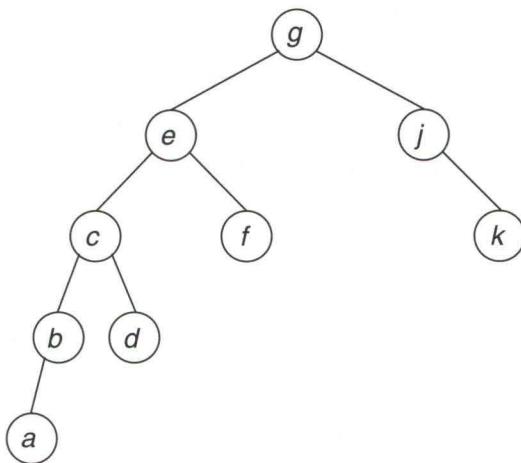
**Caso 2.2:**  $h_E(z) > h_D(z)$ 

Então  $z$  possui o filho esquerdo  $y$  (figura 5.6(g)). Observe que as alturas das subárvores  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  satisfazem as mesmas relações do caso 1.2. Dessa forma, a aplicação da rotação dupla esquerda transforma a subárvore na indicada em 5.6(h). E  $p$  torna-se novamente regulado.

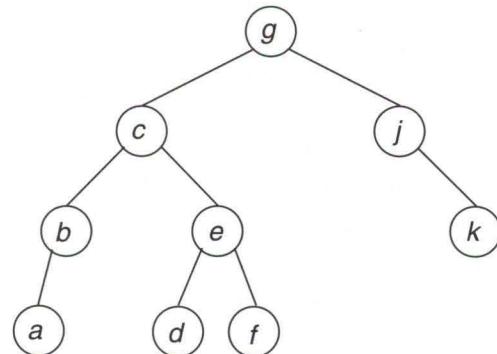
A argumentação apresentada mostra que a regulagem de  $p$  é restabelecida pela aplicação apropriada de uma das transformações estudadas. Além disso, é fácil concluir que o pai de  $p$ , após a transformação, encontra-se também regulado, pois a transformação diminui de uma unidade a altura da subárvore da raiz  $p$ . Isto assegura a regulagem de todos os nós ancestrais de  $p$ . Conseqüentemente, uma única transformação é suficiente para regular  $T$ . Como exemplo, considere a árvore AVL da figura 5.7(a), onde o valor de cada chave é o valor alfabético indicado. Suponha que o nó  $a$  deva ser incluído na árvore. Após a inclusão, esta se transforma na árvore da figura 5.7(b), que não é AVL. O nó  $e$  tornou-se desregulado, pois a altura de sua subárvore esquerda excede em duas unidades a da direita. Além disso, esse nó é o mais próximo às folhas da árvore, dentre aqueles desregulados. Finalmente, o novo nó  $a$  pertence à subárvore esquerda do filho  $c$  de  $e$ . Logo, a situação corresponde ao caso 1 da análise. A aplicação de uma rotação direita da raiz  $e$  torna esse nó novamente regulado. O resultado da rotação está ilustrado na figura 5.7(c). Observe, na figura 5.7(b), que o nó  $g$  também se encontra desregulado. A rotação utilizada também o regula.



(a)



(b)



(c)

---

Figura 5.7: Regulagem de árvore AVL

### 5.3.3 – Implementação da inclusão

Nessa seção, é apresentada a implementação da operação de inclusão em árvores AVL.

Seja  $T$  uma árvore AVL e  $x$  a chave a ser incluída em algum novo nó  $q$ . O processo completo de inclusão pode ser dividido do seguinte modo. Inicialmente, efetua-se uma busca em  $T$  para verificar se  $x$  já se encontra em  $T$ . Em caso positivo, o processo deve ser encerrado, pois trata-se de uma chave duplicata. Caso contrário, a busca encontra o local correto do novo nó. Segue-se, então, a inclusão propriamente dita. Deve-se verificar, em seguida, se essa operação tornou algum nó desregulado. Em caso negativo, o processo termina, pois  $T$  permanece AVL. Caso contrário, a regulagem de  $T$  deve ser efetuada. De acordo com a última seção, essa regulagem consiste na execução de uma das operações de rotação da figura 5.6. A última etapa, pois, consiste no reconhecimento da operação de rotação indicada ao caso e em sua posterior execução. Isto devolve a  $T$  a condição de árvore AVL.

Em seguida, serão discutidos alguns aspectos do procedimento anterior. O primeiro problema ainda não detalhado é o de verificar se algum nó  $v$  de  $T$  se tornou desregulado após a inclusão. Há uma solução direta bastante simples para resolver essa questão. Basta determinar as alturas de suas duas subárvores e subtrair uma da outra. Essa operação pode ser realizada, sem dificuldades, percorrendo-se a subárvore de raiz  $v$  em  $T$ . Mas isto consome tempo  $O(|T_v|)$ , ou seja,  $O(n)$ . Além disso, em princípio, qualquer nó do caminho de  $q$  até a raiz da árvore pode ter se tornado desregulado. Então, a aplicação direta desse procedimento conduz a um algoritmo de complexidade  $O(n \log n)$ , o que o torna fora de cogitação. Essa complexidade pode ser facilmente reduzida para  $O(n)$ , percorrendo-se  $T$  de baixo para cima e armazenando-se o valor da altura de cada subárvore. Naturalmente,  $h(v) = 1 + \max\{h_E(v), h_D(v)\}$ . Entretanto, para alcançar a meta de efetuar a inclusão em tempo  $O(\log n)$ , utiliza-se um processo diferente. Define-se o rótulo  $balanço(v)$ , para cada nó  $v$  de  $T$  como

$$balanço(v) = h_D(v) - h_E(v).$$

Observa-se que  $v$  está regulado se e somente se  $-1 \leq balanço(v) \leq 1$ . O problema é como atualizar  $balanço(v)$  de forma eficiente, tendo em vista a inclusão de  $q$ . A idéia consiste em determinar o efeito dessa inclusão nos valores de  $balanço(v)$ . Se  $q$  pertencer à subárvore esquerda de  $v$  e essa

inclusão ocasionar um aumento na altura dessa subárvore, então subtrai-se uma unidade de  $\text{balanço}(v)$ . Se esse valor decrescer para  $-2$ , indica que  $v$  se tornará desregulado. Analogamente, se  $q$  pertencer à subárvore direita de  $v$  e provocar um aumento de sua altura, adiciona-se uma unidade a  $\text{balanço}(v)$ . O nó  $v$  ficará desregulado, nesse caso, se  $\text{balanço}(v)$  aumentar para  $2$ .

Para completar o processo, resta ainda determinar em que casos a inclusão de  $q$  provoca um acréscimo na altura  $h(v)$  da subárvore  $T_v$ . Para resolver esta questão, é interessante que se obtenha um método simples e eficiente, isto é, que possa ser resolvido em tempo constante. De início, observa-se que a inserção do nó  $q$  acarreta obrigatoriamente uma alteração na altura da subárvore esquerda ou direita (de acordo com a nova chave) de seu nó pai  $w$ . A situação do campo *balanço* permite avaliar se essa alteração pode, ou não, se propagar aos outros nós  $v$  do caminho de  $w$  até a raiz da árvore. Suponha que o nó  $q$  é inserido na subárvore esquerda de  $v$ . A análise se inicia com  $v = w$  e prossegue em seus nós ancestrais, de forma recursiva. O processo se encerra quando da constatação de que a altura de  $T_v$  não foi modificada, ou de que  $v$  se tornou regulado. Três casos distintos podem ocorrer:

**Caso 1:**  $\text{balanço}(v) = 1$  antes da inclusão.

Neste caso,  $\text{balanço}(v)$  se torna  $0$  e a altura da subárvore de raiz  $v$  não foi modificada. Conseqüentemente, as alturas dos nós restantes do caminho até a raiz da árvore não se alteram.

**Caso 2:**  $\text{balanço}(v) = 0$  antes da inclusão.

Neste caso,  $\text{balanço}(v)$  se torna  $-1$  e a altura da subárvore de raiz  $v$  foi modificada. Conseqüentemente, os nós restantes do caminho até a raiz também podem ter suas alturas modificadas e devem ser analisados. Se  $v$  é a raiz de  $T$ , a análise se encerra, pois nenhum nó se tornou desregulado. Caso contrário, repetir o processo com  $v$  substituído por seu pai.

**Caso 3:**  $\text{balanço}(v) = -1$  antes da inclusão.

Neste caso,  $\text{balanço}(v)$  se torna  $-2$  e o nó está desregulado. A rotação correta deve ser empregada. Qualquer rotação implica que a subárvore resultante tenha a mesma altura da subárvore antes da inclusão. As alturas dos ancestrais de  $v$  não mais necessitam de avaliação.

Para uma inserção na subárvore direita de  $v$ , casos simétricos devem ser considerados.

Após a regulagem da árvore, completa-se o processo. O algoritmo visto a seguir busca e insere, se possível, uma nova chave  $x$  numa árvore AVL. Observe que um só algoritmo foi considerado para as duas tarefas, ao contrário do que já foi visto em capítulos anteriores. Tal enfoque se deve à necessidade de conhecer todo o caminho da raiz até o nó inserido ao se regular a árvore. O procedimento recursivo *ins-AVL* cumpre essa tarefa.

De início, a posição de inserção é procurada determinando-se, na pilha de recursão, o caminho da raiz até o novo nó. O procedimento *inicio-no* aloca o novo nó. Após a inserção, o procedimento percorre o caminho inverso na árvore, acertando o campo *bal* que implementa o rótulo *balanço*, já mencionado. Por meio deste pode-se conferir a regulagem de cada nó, determinando-se então o nó  $p$  apontado por *pt*. A operação de rotação conveniente é efetuada imediatamente. O parâmetro lógico *h* retorna se houve ou não alteração na altura da subárvore do nó em questão, induzindo então à atualização do campo *bal*. A variável *ptraiz* é um ponteiro para a raiz da árvore. A chamada externa é *ins-AVL*( $x, ptraiz, h$ ).

**algoritmo 5.1:** Busca e inserção em árvore AVL

**procedimento** *inicio-no*(*pt*)

*ocupar*(*pt*)

*pt*  $\uparrow .esq := \lambda$ ; *pt*  $\uparrow .dir := \lambda$

*pt*  $\uparrow .chave := x$ ; *pt*  $\uparrow .bal := 0$

**procedimento** *caso1*(*pt, h*)

*ptu* := *pt*  $\uparrow .esq$

**se** *ptu*  $\uparrow .bal = -1$  **então**

*pt*  $\uparrow .esq := ptu \uparrow .dir$ ; *ptu*  $\uparrow .dir := pt$

*pt*  $\uparrow .bal := 0$ ; *pt* := *ptu*

**senão** *ptv* := *ptu*  $\uparrow .dir$

*ptu*  $\uparrow .dir := ptv \uparrow .esq$ ; *ptv*  $\uparrow .esq := ptu$

*pt*  $\uparrow .esq := ptv \uparrow .dir$ ; *ptv*  $\uparrow .dir := pt$

**se** *ptv*  $\uparrow .bal = -1$  **então** *pt*  $\uparrow .bal := 1$  **senão** *pt*  $\uparrow .bal := 0$

**se** *ptv*  $\uparrow .bal = 1$  **então** *ptu*  $\uparrow .bal := -1$  **senão** *ptu*  $\uparrow .bal := 0$

*pt* := *ptv*

*pt*  $\uparrow .bal := 0$ ; *h* := *F*

**procedimento** *caso2(pt, h)*

```

 $ptu := pt \uparrow .dir$ 
se  $ptu \uparrow .bal = 1$  então
     $pt \uparrow .dir := ptu \uparrow .esq; \quad ptu \uparrow .esq := pt$ 
     $pt \uparrow .bal := 0; \quad pt := ptu$ 
senão  $ptv := ptu \uparrow .esq$ 
     $ptu \uparrow .esq := ptv \uparrow .dir; \quad ptv \uparrow .dir := ptu$ 
     $pt \uparrow .dir := ptv \uparrow .esq; \quad ptv \uparrow .esq := pt$ 
    se  $ptv \uparrow .bal = 1$  então  $pt \uparrow .bal := -1$  senão  $pt \uparrow .bal := 0$ 
    se  $ptv \uparrow .bal = -1$  então  $ptu \uparrow .bal := 1$  senão  $ptu \uparrow .bal := 0$ 
     $pt := ptv$ 
 $pt \uparrow .bal := 0; \quad h := F$ 

```

**procedimento** *ins-AVL(x, pt, h)*

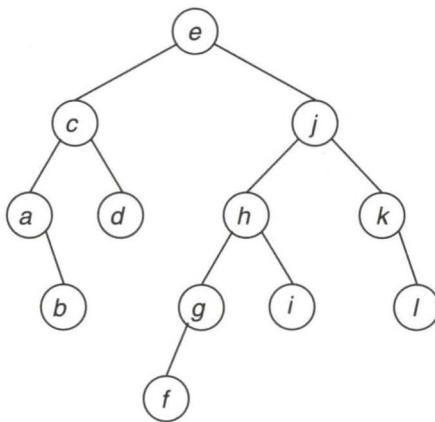
```

se  $pt = \lambda$  então
    inicio-no(pt)
     $h := V$ 
senão se  $x = pt \uparrow .chave$  então pare
    se  $x < pt \uparrow .chave$  então
        ins-AVL(x, pt \uparrow .esq, h)
    se  $h$  então
        caso  $pt \uparrow .bal$  seja
            1:    $pt \uparrow .bal := 0; \quad h := F$ 
            0:    $pt \uparrow .bal := -1$ 
            -1:  caso1(pt, h)           % rebalanceamento
    senão ins-AVL(x, pt \uparrow .dir, h)
    se  $h$  então
        caso  $pt \uparrow .bal$  seja
        -1:   $pt \uparrow .bal := 0; \quad h := F$ 
        0:    $pt \uparrow .bal := 1$ 
        1:   caso2(pt, h)           % rebalanceamento

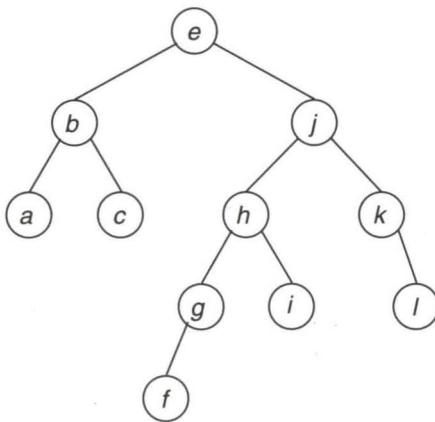
```

É imediato verificar que apenas uma operação de rotação, simples ou dupla, foi realizada. Além disso, o procedimento *ins-AVL* produz o efeito de percorrer a árvore desde a sua raiz até o nó *q* incluído. Portanto, o número de passos realizados é  $O(\log n)$ .

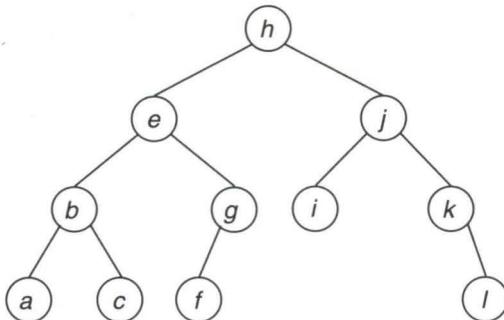
A operação de exclusão de nós em árvores AVL também pode ser efetuada em  $O(\log n)$  passos. Basicamente, após a exclusão do nó desejado, a idéia



(a)



(b)



(c)

Figura 5.8: Remoção em árvore AVL

consiste em verificar se a árvore se tornou desregulada. Analogamente ao caso das inclusões, a computação pode se restringir ao exame dos nós no caminho da raiz até alguma folha. Contudo, ao contrário do caso anterior, não basta necessariamente uma única rotação para regular a árvore. De fato, o número de operações de rotação necessárias pode atingir  $O(\log n)$ . Por exemplo, a figura 5.8(a) apresenta uma árvore AVL, da qual se deseja excluir o nó  $d$ . Após a exclusão, o nó  $c$  deve ser regulado. Aplica-se uma rotação dupla direita (figura 5.8(b)), o que tornará, por sua vez, o nó  $e$  desregulado. É necessária, então, uma rotação adicional, e o processo se encerra. O resultado final é visto na figura 5.8(c).

## 5.4 – Árvores Graduadas e Rubro-negras

### 5.4.1 – Descrição

Nesta seção será examinado outro tipo de árvores binárias de busca, as árvores graduadas. Elas constituem uma generalização das árvores AVL e preservam a característica de balanceamento. Essa nova família de árvores será aqui descrita e discutidas suas formas de representação. Em seguida, se demonstrará que árvores graduadas são平衡adas. Finalmente, um algoritmo de inclusão será apresentado e o problema da exclusão, discutido. O estudo das árvores graduadas será feito em paralelo ao estudo das árvores rubro-negras. Essas duas estruturas são equivalentes entre si. Todas as árvores de busca consideradas nesta seção compreendem também a representação dos nós externos. Por extensão da definição de altura, considera-se a altura de um nó externo 0.

Seja  $T$  uma árvore binária de busca. Considere a associação de um rótulo inteiro, denominado *posto*, a cada um de seus nós.  $T$  é *graduada* quando, para todo  $v \in V$ ,  $\text{posto}(v)$  satisfaz:

- (i) se  $v$  é um nó externo,  $\text{posto}(v) = 0$ ;
- (ii) se  $v$  é pai de nó externo,  $\text{posto}(v) = 1$ ;
- (iii) se  $v$  possui pai  $w$ ,  $\text{posto}(v) \leq \text{posto}(w) \leq \text{posto}(v) + 1$ ;
- (iv) se  $v$  possui avô  $w$ ,  $\text{posto}(v) < \text{posto}(w)$ .

O nó  $v$  é denominado *equilibrado* se satisfaz (i)–(iv) e *desequilibrado* em caso contrário. Naturalmente, uma árvore graduada é aquela cujos nós são todos equilibrados. Por exemplo, na figura 5.9(a) todos os nós estão equilibrados, exceto o nó  $v$  assinalado. O valor  $\text{posto}(v) = 2$  contradiz (iv). Alterando-se esse valor para 1, como indicado na figura 5.9(b), obtém-se uma rotulação correta. O exemplo da figura 5.9(c) é o de uma árvore não graduada, pois não existe rotulação possível para seus nós que satisfaça (i)–(iv). Observa-se que (ii) implica  $\text{posto}(v) = \text{posto}(t) = 1$ , enquanto (iv) implica  $\text{posto}(v) < \text{posto}(t)$ .

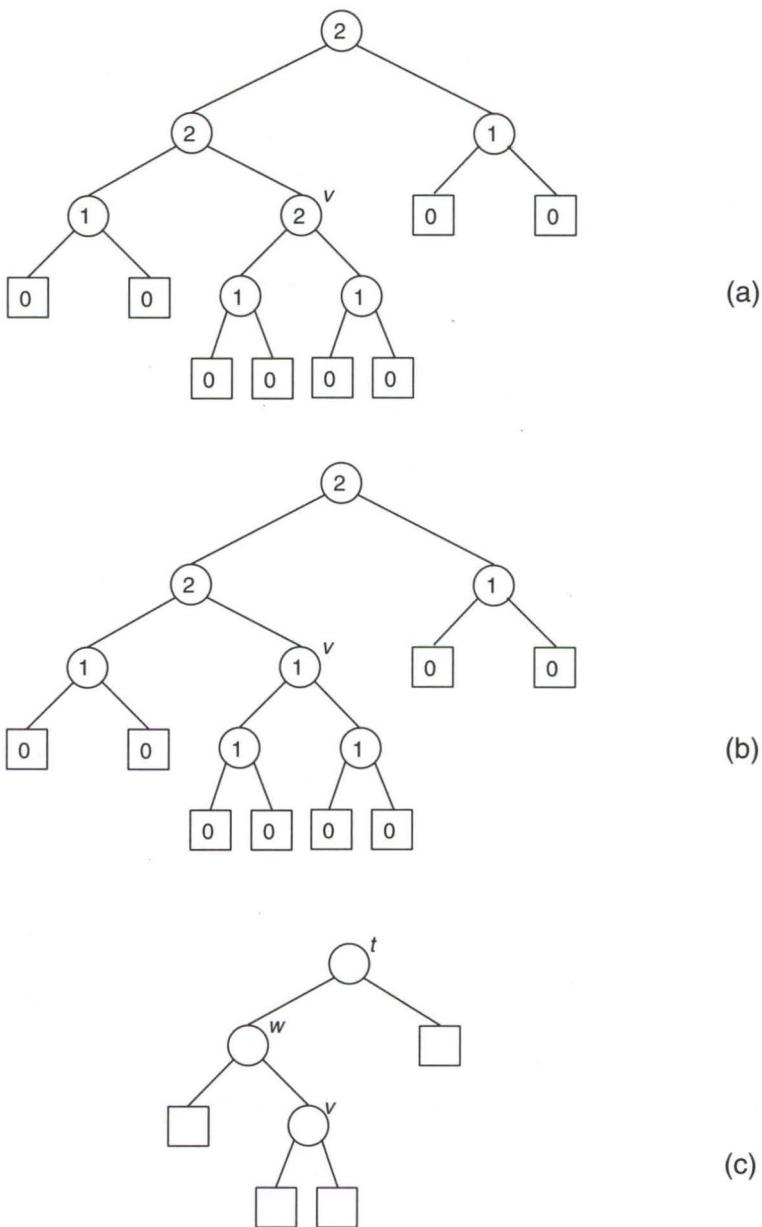
Uma outra família de árvores, fortemente relacionada às árvores graduadas, é definida a seguir.

Seja  $T$  uma árvore binária de busca. Considere agora a associação de uma cor *rubra* ou *negra* a cada um de seus nós.  $T$  é *rubro-negra* quando existe uma coloração dos nós de  $T$  tal que:

- (a) se  $v$  é externo,  $v$  é negro;
- (b) os caminhos de  $v$  para seus descendentes nós externos possuem idêntico número de nós negros;
- (c) se  $v$  é rubro e não é a raiz da árvore então seu pai é negro.

Analogamente ao caso das árvores graduadas, um nó que satisfaz (a)–(c) é denominado *equilibrado* e, caso contrário, *desequilibrado*. Uma árvore rubro-negra é, portanto, aquela cujos nós são todos equilibrados. Se, pelo menos, um de seus nós for desequilibrado, então a árvore também é dita *desequilibrada*. Por exemplo, a árvore da figura 5.10 é rubro-negra. As cores de seus nós estão representadas pelas iniciais *R* e *N*. Por outro lado, a da figura 5.9(c) não o é, pois não existe coloração possível para os seus nós de modo que (a)–(c) sejam sempre satisfeitos. Nesse exemplo, para satisfazer (a) e (b), os nós  $w$  e  $v$  devem ambos ser rubros, o que contradiz (c).

Existe uma correspondência entre árvores graduadas e rubro-negras. Dada uma árvore graduada, pode-se colorir seus vértices com as cores rubra ou negra, de modo que (a)–(c) sejam satisfeitas. Reciprocamente, em uma árvore rubro-negra é possível definir o rótulo  $\text{posto}(v)$  para cada um de seus vértices, de modo a satisfazer (i)–(iv). Essa correspondência é descrita a seguir.



---

Figura 5.9: Árvores graduadas e não graduadas

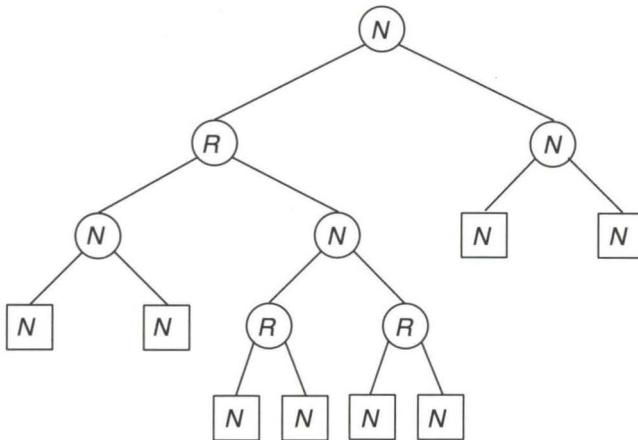


Figura 5.10: Árvore rubro-negra

#### Conversão A: Árvore Graduada $\Rightarrow$ Árvore Rubro-negra

Seja  $T$  uma árvore graduada. Atribui-se uma bicoloração a  $T$  percorrendo-se a árvore de cima para baixo. Se  $v$  é a raiz de  $T$ , então  $cor(v) := negra$ . Caso contrário, seja  $w$  o pai de  $v$ . Define-se  $cor(v) := rubra$  se  $posto(v) = posto(w)$  e  $negra$ , no caso contrário.

#### Conversão B: Árvore Rubro-negra $\Rightarrow$ Árvore Graduada

Seja  $T$  uma árvore rubro-negra. Efetua-se uma atribuição de valores  $posto(v)$  a seus nós percorrendo-se a árvore de baixo para cima. Se  $v$  é um nó externo, então  $posto(v) := 0$ . Caso contrário, seja  $q$  um filho de  $v$ . Define-se  $posto(v) := posto(q)$  se  $q$  for rubro, ou  $posto(v) := posto(q) + 1$  se  $q$  for negro.

É necessário provar que as conversões A e B estão corretas. Os lemas 5.1, 5.2 e o teorema 5.1 executam essa tarefa.

#### Lema 5.1:

Seja  $T$  uma árvore rubro-negra à qual se aplica a conversão B. O valor de  $posto(v)$  é o mesmo, qualquer que seja seu filho  $q$  escolhido na conversão B. E mais,  $posto(v)$  é igual ao número de nós negros no caminho de qualquer filho de  $v$  para seus descendentes externos.

**Prova:**

A prova é feita por indução em  $h(v)$ ,  $v \in T$ . Seja  $T$  uma árvore rubro-negra,  $v$  um vértice de  $T$  e  $NN(v)$  o número de nós negros em qualquer caminho dos filhos de  $v$  para seus descendentes externos. Sejam  $w_1$  e  $w_2$  filhos de  $v$ .

Se  $h(v) = 1$ , então  $w_1$  e  $w_2$  são nós externos, logo negros, por definição. Pela conversão B,  $\text{posto}(w_1) = \text{posto}(w_2) = 0$ . Então,  $\text{posto}(v) = 1$ , independentemente de  $q$  ser escolhido  $w_1$  ou  $w_2$ . Logo,  $NN(v) = 1$  e o lema vale.

Suponha agora a conversão B válida para subárvore de altura  $h - 1$ . Seja  $v$  tal que  $h(v) = h$ . Sabe-se que  $h(w_i) < h$ .

**Caso 1:**  $v$  é rubro

Por (c), conclui-se que  $w_1$  e  $w_2$  são ambos negros. Então,  $NN(v) = NN(w_1) + 1 = NN(w_2) + 1$ . Isto é,  $NN(w_1) = NN(w_2)$ .

Como o lema vale para  $w_1$  e  $w_2$ ,  $\text{posto}(w_1) = NN(w_1)$ ,  $\text{posto}(w_2) = NN(w_2)$ . Tem-se que  $\text{posto}(w_1) = \text{posto}(w_2)$ , sendo indiferente a escolha de  $w_1$  ou  $w_2$ .

Se  $\text{posto}(v)$  é calculado a partir de  $w_1$  ou  $w_2$ , segue-se que  $\text{posto}(v) = \text{posto}(w_1) + 1 = \text{posto}(w_2) + 1$ . Como  $w_1$  e  $w_2$  são ambos negros, conclui-se que  $\text{posto}(v) = NN(v)$ .

**Caso 2:**  $v$  é negro

Se o nó filho  $w_i$  for negro, então, por (b),  $NN(v) = NN(w_i) + 1$ . Assumindo-se, na conversão B, que  $q = w_i$  tem-se  $\text{posto}(v) = \text{posto}(w_i) + 1$ . Como  $NN(w_i) = \text{posto}(w_i)$ , conclui-se que  $\text{posto}(v) = NN(v)$ .

Se o nó  $w_i$  for rubro, então  $NN(v) = NN(w_i)$ . Assumindo-se, na conversão B, que  $q = w_i$  tem-se  $\text{posto}(v) = \text{posto}(w_i)$ . Conclui-se também que  $\text{posto}(v) = NN(v)$ .

Ora, como em ambos os casos  $\text{posto}(v) = NN(v)$ , isto mostra que é indiferente a escolha do vértice  $w_1$  ou do vértice  $w_2$  para a determinação do  $\text{posto}(v)$ . □

**Lema 5.2:**

Seja  $T$  uma árvore graduada à qual se aplica a conversão A. O número de nós negros no caminho de qualquer filho do vértice  $v$  para seus descendentes nós externos é igual a  $\text{posto}(v)$ .

**Prova:**

A atribuição de cores pela conversão A é feita de cima para baixo, a partir da raiz da árvore, à qual é atribuída a cor negra. Por (iii) cada decremento do valor de *posto* de pai para filho é, no máximo, igual a 1. Esse decremento corresponde a um nó ao qual é atribuída a cor negra pela conversão A. Como os valores dos *postos* são decrementados até os nós externos, que possuem todos o valor 0, por (i), o número de nós negros é o mesmo para qualquer caminho a partir de um filho do nó dado e equivale a seu *posto*.  $\square$

**Teorema 5.1:**

Uma árvore é graduada se e somente se for rubro-negra.

**Prova:**

Seja  $T$  uma árvore graduada à qual será aplicada a conversão A. Deve-se mostrar que a árvore resultante é rubro-negra. Sejam  $v$  e  $w$  nós de  $T$ , sendo  $w$  pai de  $v$ . Pela conversão A, sabe-se que  $cor(v) = R$  se  $posto(v) = posto(w)$  e, em caso contrário,  $cor(v) = N$ . Por (i) e (ii), se  $v$  é um nó externo,  $posto(v) \neq posto(w)$ . Então,  $cor(v) = N$  e (a) está satisfeito.

O lema 5.2 demonstra o item (b).

Seja  $v$  rubro e  $w$  pai de  $v$ . Se  $w$  é raiz da árvore,  $cor(w) = N$  por construção e (c) é satisfeito. Se  $w$  não é raiz, seja  $u$  avô de  $v$ . Como  $cor(v) = R$  então  $posto(w) = posto(v)$ . Por (iv),  $posto(u) \neq posto(w)$  e  $cor(w) = N$ . O item (c) é satisfeito. Logo,  $T$  é rubro-negra.

Considere a recíproca e seja agora  $T$  uma árvore rubro-negra à qual foi aplicada a conversão B. Pelo lema 5.1, sabe-se que o valor de  $posto(v)$  é calculado, sem ambigüidade, a partir de qualquer de seus filhos. Tal fato é considerado na demonstração que se segue.

Como  $T$  é rubro-negra, por (a) sabe-se que o nó  $v$ , externo, é negro. Pela conversão B,  $posto(v) = 0$  e, para o nó  $w$ , pai de  $v$ , tem-se  $posto(w) = posto(v) + 1$ ; (i) e (ii) estão satisfeitos.

Seja o nó  $v$ , seu pai  $w$  e seu avô  $u$  (se existir). Se  $cor(v) = R$ , então  $posto(w) = posto(v)$ . Se  $cor(v) = N$ , então  $posto(w) = posto(v) + 1$  e (iii) é satisfeito.

Por (c), ou  $cor(v) = N$ , ou  $cor(w) = N$ , ou ambas. Logo, pela conversão B,  $posto(u) > posto(v)$ , e (iv) é satisfeito. Então,  $T$  é graduada.  $\square$

Um exemplo de correspondência entre árvores graduadas e rubro-negras é dado pelas figuras 5.9(b) e 5.10.

O teorema 5.1 permite tratar uma árvore graduada como rubro-negra e vice-versa, indistintamente. Isto é, pode-se supor que cada um de seus nós possui um posto satisfazendo (i)–(iv) e uma cor satisfazendo (a)–(c).

### 5.4.2 – Balanceamento

Os lemas que se seguem demonstram que árvores graduadas são balanceadas. O primeiro deles estabelece um limite superior para a altura de um nó da árvore.

#### Lema 5.3:

Seja  $T$  uma árvore graduada com  $n$  nós internos e altura  $h$ . Então,

$$h(v) \leq 2 \times \text{posto}(v).$$

#### Prova:

Sejam atribuídos rótulos rubro-negros a  $T$  através da conversão A. O argumento é por indução em  $h$ , altura de  $T$ . Se  $h(v) = 0$ ,  $v$  é um nó externo e  $\text{posto}(v) = 0$ . Vale o lema.

Quando  $h(v) > 0$ , suponha o resultado verdadeiro para todos os nós  $w$  tais que  $h(w) < h(v)$ . Sejam  $w_1, w_2$  os filhos de  $v$ , e  $w_i$  o nó de altura máxima, dentre  $w_1$  e  $w_2$ . Sabe-se que  $h(w_i) < h(v)$ . Então, o lema vale e  $h(w_i) \leq 2 \times \text{posto}(w_i)$ . Dois casos podem ocorrer. Inicialmente, se  $\text{posto}(w_i) = \text{posto}(v) - 1$ , tem-se

$$h(w_i) \leq 2 \times \text{posto}(w_i) < 2 \times \text{posto}(v).$$

Como  $h(v) = h(w_i) + 1$ , segue-se  $h(v) \leq 2 \times \text{posto}(v)$  e vale o lema.

No segundo caso,  $\text{posto}(w_i) = \text{posto}(v)$ . Sabe-se que  $w_i$  é rubro e  $v$  é negro; pelo lema 5.2, tem-se que

$$\text{posto}(w_i) = \text{NN}(w_i).$$

Chamando  $NR(v)$  o maior número de nós rubros existentes em algum caminho de um filho de  $v$  até seus descendentes, tem-se

$$h(w_i) = \text{NN}(w_i) + NR(w_i).$$

Ora,  $NR(w_i) < NN(w_i)$ , uma vez que não existem dois nós rubros consecutivos,  $w_i$  é rubro e não é contado, e o nó externo é obrigatoriamente negro. Então,

$$h(w_i) \leq 2 \times NN(w_i) - 1 = 2 \times posto(w_i) - 1 = 2 \times posto(v) - 1.$$

Como  $h(v) = h(w_i) + 1$ , novamente é válido

$$h(v) \leq 2 \times posto(v).$$

□

O seguinte conceito será agora utilizado. Seja  $T$  uma árvore binária formada de nós internos e externos e  $v$  um nó de  $T$ . A *subárvore interna* de  $T$  com raiz  $v$  é a subárvore de  $T$  obtida a partir de  $T(v)$  pela exclusão de seus nós externos. Utiliza-se o símbolo  $T_I(v)$  para representá-la. Por exemplo, a figura 5.11(b) ilustra a subárvore interna com raiz  $v$  da árvore da figura 5.11(a).

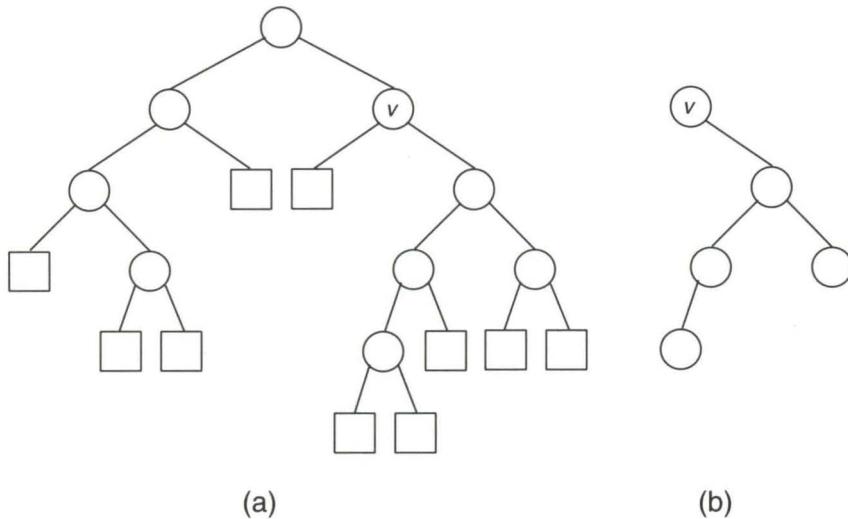


Figura 5.11: Subárvore interna

O próximo lema estabelece um limite inferior para o número de nós de uma subárvore interna de uma árvore graduada.

**Lema 5.4:**

Seja  $T$  uma árvore graduada e  $T_I(v)$  a subárvore interna do nó  $v$ . Então,

$$|T_I(v)| \geq 2^{posto(v)} - 1.$$

**Prova:**

A subárvore  $T_I(v)$  possui cardinalidade mínima exatamente no caso em que  $T$  satisfaz a seguinte condição: todo nó  $w$  de pai  $z$  é tal que  $posto(w) = posto(z) - 1$ . Se isto não ocorre,  $posto(w) = posto(z)$ . Nesse caso, a seguinte providência pode ser tomada: remover a subárvore  $T_I(z)$  e substituí-la por  $T_I(w)$ . A nova árvore assim formada é naturalmente também graduada e  $T_I(v)$  possui menos vértices do que na alternativa anterior. Contudo, se  $posto(w) = posto(z) - 1$  para todo nó  $w$  de pai  $z$ , então  $T$  é uma árvore cheia, com todas as folhas no mesmo nível. Além disso,  $posto(v) = h(v)$  para todo nó  $v$ . Como  $2^{h(v)} = |T_I(v)| + 1$  na árvore de tamanho mínimo, de um modo geral vale  $|T_I(v)| \geq 2^{posto(v)} - 1$ .  $\square$

Finalmente, pode-se enunciar o resultado seguinte:

**Teorema 5.2:**

Seja  $T$  uma árvore graduada com  $n$  nós internos e altura  $h$ . Então,

$$h(T) \leq 2\lfloor \log(n+1) \rfloor.$$

**Prova:**

Seja  $r$  a raiz de  $T$ . Pelo lema anterior,  $|T_I(r)| \geq 2^{posto(r)} - 1$ . Pelo lema 5.3,  $h(r) \leq 2 \cdot posto(r)$ . Mas,  $|T_I(r)| = n$  e  $h(r) = h(T)$ . Então,  $\log(n+1) \geq posto(r)$ . Como  $posto(r)$  é inteiro, vale  $\lfloor \log(n+1) \rfloor \geq posto(r)$ . Logo,

$$h(T) \leq 2\lfloor \log(n+1) \rfloor.$$

$\square$

Conseqüentemente, árvores graduadas são balanceadas.

### 5.4.3 – Inclusão

O problema da inclusão em árvores graduadas é agora abordado. A exemplo das árvores AVL, a inclusão de um novo nó pode desequilibrar a árvore. Se isto ocorrer, há necessidade do emprego de operações de equilíbrio para tornar a árvore novamente graduada. Em seguida, será mostrado que essas operações também podem ser efetuadas em tempo  $O(\log n)$ . Na descrição a seguir utilizar-se-á a árvore rubro-negra correspondente.

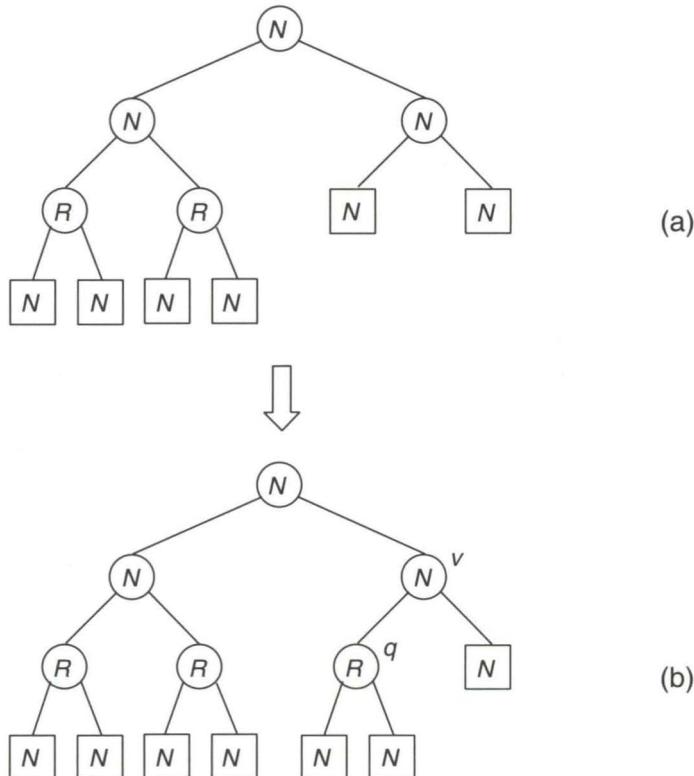


Figura 5.12: Inclusão em árvore rubro-negra

Seja  $T$  uma árvore rubro-negra e  $q$  um nó a ser incluído em  $T$ . Suponha que o valor da chave que  $q$  contém seja diferente das demais chaves de  $T$ .

Nesse caso, o algoritmo de inclusão em árvores binárias substituirá um dos nós externos de  $T$  pelo novo nó interno  $q$ , obtendo uma nova árvore  $T^*$ . Os filhos esquerdo e direito de  $q$  são definidos como nós externos. Sejam  $v$  e  $w$  o pai e o avô de  $q$  em  $T^*$ , respectivamente, se existirem. A questão consiste em verificar se  $T^*$  é também rubro-negra e, em caso contrário, equilibrar seus nós de forma conveniente. Para saber se  $T^*$  é rubro-negra, basta verificar as condições (a)–(c). É imediato que (a) é verdadeiro. Define-se  $q$  como rubro. Então (b) também vale. Resta testar (c). As seguintes possibilidades podem ocorrer.

### Caso 1: $v$ é negro

Então (c) é verdadeiro e  $T^*$  é rubro-negra. Não há necessidade de operações de equilíbrio (figura 5.12).

### Caso 2: $v$ é rubro

Neste caso, o nó incluído  $q$  não satisfaz (c) (figura 5.13(b)). Torna-se então necessário equilibrá-lo. Observe que, se  $v$  não é a raiz da árvore, o seu pai  $w$  é necessariamente negro. Indaga-se, em seguida, a cor do nó  $t$ , irmão de  $v$ . Os seguintes casos podem ocorrer:

#### Caso 2.1: $t$ é rubro

Altera-se a cor de  $v$ ,  $t$  e  $w$ . Os nós  $v$  e  $t$  tornam-se negros e  $w$ , rubro. Naturalmente, (b) e (a) permanecem válidos. Além disso, (c) é válido para qualquer nó das subárvores  $T(v)$  e  $T(t)$ . O nó  $w$ , avô de  $q$ , pode porém ter se tornado desequilibrado, caso o seu pai seja rubro. Isto é, repete-se o processo, com a atribuição  $q := w$ , redefinindo-se  $v$ ,  $w$  e  $t$  como pai, avô e tio de  $q$ , respectivamente. No exemplo, o equilíbrio da árvore da figura 5.13(b) produziu a árvore da figura 5.13(c). Repetindo-se o processo, no exemplo, observa-se que o avô  $w$  da nova chave  $q$  não se tornou desequilibrado com o equilíbrio de  $q$ . Portanto, o processo termina e a árvore é novamente rubro-negra. O pior caso corresponderia a uma árvore em que a propagação do desequilíbrio alcançaria um nó que fosse a raiz ou filho da raiz.

#### Caso 2.2: $t$ é negro

Neste caso, utilizam-se as operações de rotação, conforme definidas na figura 5.6. De fato, basta uma operação de rotação seguida de uma troca de cores conveniente de dois nós para equilibrar  $q$  e transformar  $T^*$  em árvore rubro-negra. Os seguintes casos podem ocorrer:

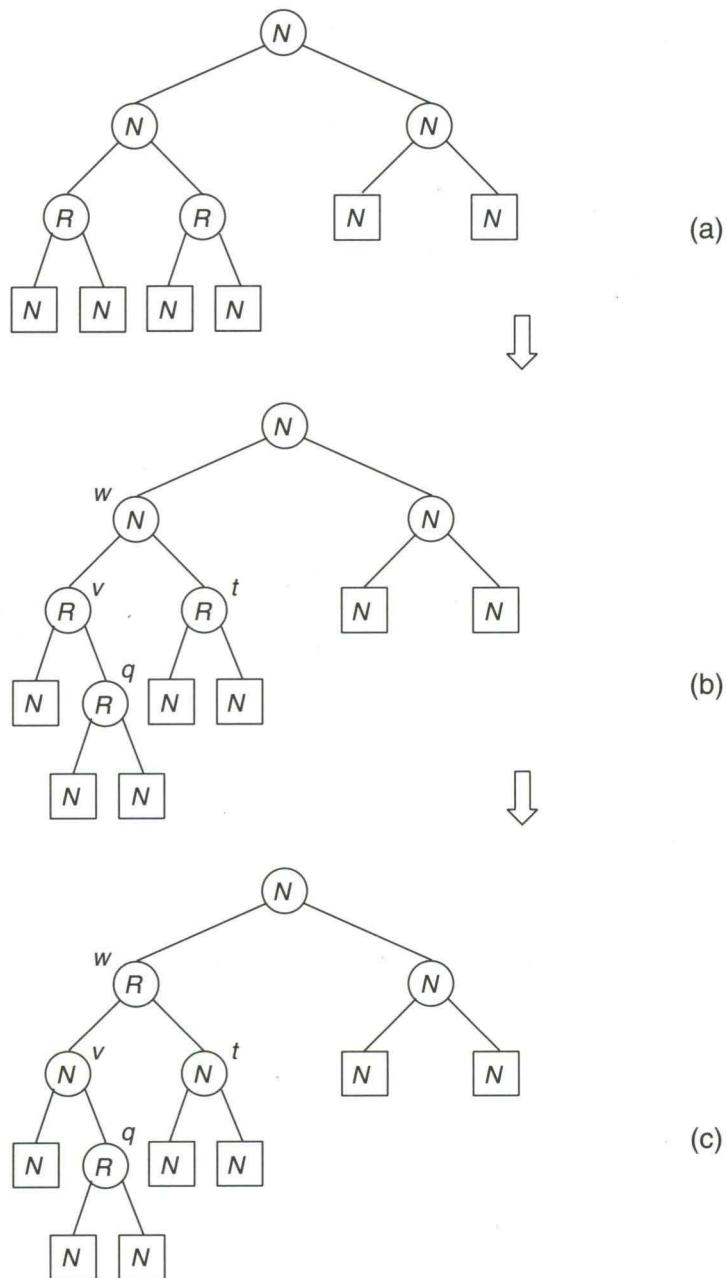


Figura 5.13: Inclusão em árvore rubro-negra com desequilíbrio

**Caso 2.2.1:**  $q$  é filho esquerdo de  $v$  e  $v$  é filho esquerdo de  $w$

Completa-se o equilíbrio efetuando-se uma rotação direita de raiz  $w$ . Em seguida, altera-se a cor de  $v$  para negra e a de  $w$  para rubra (figura 5.14(a)).

**Caso 2.2.2:**  $q$  é filho esquerdo de  $v$  e  $v$  é filho direito de  $w$

Efetua-se uma rotação dupla esquerda de raiz  $w$ . Em seguida, altera-se a cor de  $q$  para negra e a de  $w$  para rubra (figura 5.14(b)).

**Caso 2.2.3:**  $q$  é filho direito de  $v$  e  $v$  é filho direito de  $w$

Rotação esquerda de raiz  $w$ . Alterar  $v$  para negra e  $w$  para rubro (figura 5.14(c)).

**Caso 2.2.4:**  $q$  é filho direito de  $v$ , e  $v$  é filho esquerdo de  $w$

Utiliza-se rotação dupla direita de raiz  $w$ . A troca de cores é a seguinte:  $q$  torna-se negra e  $w$  rubro (figura 5.14(d)).

Ao final do processo, todos os nós se encontram equilibrados e, portanto,  $T^*$  é rubro-negra. Observe que o caso 2.1 pode ocorrer iterativamente tantas vezes quanto a metade do piso do comprimento do caminho do novo nó  $q$  até a raiz, isto é,  $O(\log n)$  vezes, uma vez que o desequilíbrio pode ser propagado de um nó para o seu avô (caso 2.1). Os demais casos somente podem ocorrer, no máximo, uma vez cada.

#### 5.4.4 – Implementação

A implementação segue estritamente a estratégia anteriormente descrita.

O procedimento  $ins-RN(x, ptv, ptw, ptr, a)$  efetua uma busca para localizar a posição na árvore onde o novo nó de chave  $x$  será incluído. Os ponteiros  $ptv$ ,  $ptw$ ,  $ptr$  apontam para o nó corrente da busca, seu pai e seu avô, respectivamente. O equilíbrio é efetuado pelo procedimento  $rota(ptq, ptv, ptw, ptr, a)$ . Os ponteiros  $ptv$ ,  $ptw$ ,  $ptr$  são definidos como anteriormente, enquanto  $ptq$  aponta para o nó filho de  $v$  no processo da busca. Na primeira chamada de  $rota$ ,  $ptq$  aponta o novo nó incluído. O parâmetro  $a$  controla as chamadas do procedimento  $rota$ , que somente será executado se  $a = 1$ . Quando for detectado um caso outro que não o 2.1, ter-se-á  $a = 2$ , o que significa que  $rota$  não mais será executado até o final do processo. No caso 2.1, o valor de  $a$  ao final de  $rota$  será 0. Isto implica que somente será efetuada uma nova chamada de  $rota$  quando o nó corrente for o avô do atual. A variável

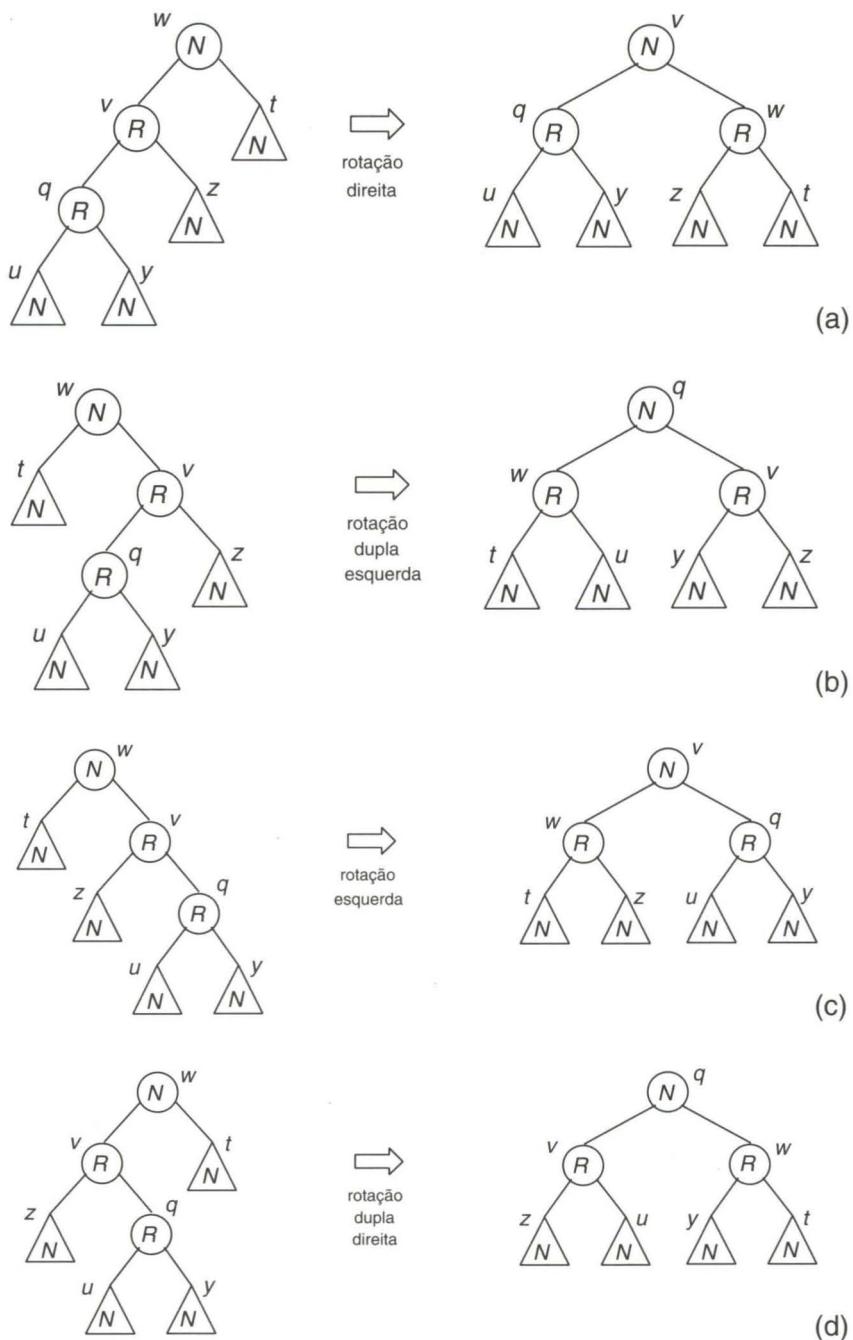


Figura 5.14: Rotações para equilíbrio de árvore rubro-negra

Observe também que o espaço adicional necessário para armazenar uma árvore rubro-negra corresponde apenas a um bit por nó, isto é, aquele utilizado para informar a cor desse nó.

A exclusão em árvores rubro-negras também pode ser efetuada por um método simples e eficiente. Em linhas gerais, a estratégia segue os processos anteriores. Após a operação de exclusão propriamente dita, verifica-se se algum nó tornou-se desequilibrado. Em caso positivo, efetua-se o equilíbrio da árvore. O algoritmo de exclusão e equilíbrio pode ser implementado de forma que o tempo consumido seja de  $O(\log n)$  por cada operação desse tipo. A exemplo do caso devido a inclusões, eventualmente torna-se também necessária a utilização de rotações.

## 5.5 – Árvores B

### 5.5.1 – Conceitos básicos

Em muitas aplicações, a tabela considerada é muito grande, de forma que o armazenamento do conjunto de chaves não pode ser efetuado na memória principal, de uma só vez. Nesse caso, torna-se necessária a manutenção da tabela em memória secundária, o que acarreta um dispêndio de tempo significativo para acesso a um nó da tabela.

Para essas aplicações, é de interesse a criação de uma estrutura que minimize o tempo de acesso para buscas, inserções e remoções nessa tabela.

A árvore B, utilizando o recurso de manter mais de uma chave em cada nó da estrutura, proporciona uma organização de ponteiros tal que as operações mencionadas são executadas rapidamente. Além disso, sua construção assegura que as folhas se encontram todas em um mesmo nível, não importando a ordem de entrada de dados.

As árvores B são largamente utilizadas como forma de armazenamento em memória secundária. Diversos sistemas comerciais de bancos de dados, por exemplo, as empregam.

Seja  $d$  um número natural. Uma *árvore B de ordem d* é uma árvore ordenada que é vazia, ou que satisfaz as seguintes condições:

- i) a raiz é uma folha ou tem no mínimo dois filhos;

- ii) cada nó diferente da raiz e das folhas possui no mínimo  $d + 1$  filhos;
- iii) cada nó tem no máximo  $2d + 1$  filhos;
- iv) todas as folhas estão no mesmo nível.

Um nó de uma árvore B é chamado *página*. Uma página armazena então diversos nós da tabela original. A estrutura apresentada satisfaz ainda as propriedades seguintes.

- a) Seja  $m$  o número de chaves em uma página  $P$  não folha. Então  $P$  tem  $m + 1$  filhos. Conseqüentemente, cada página possui entre  $d$  e  $2d$  chaves, exceto o nó raiz que possui entre 1 e  $2d$  chaves.
- b) Em cada página  $P$ , as chaves estão ordenadas:  $s_1, \dots, s_m$ ,  $d \leq m \leq 2d$ , exceto para a página raiz onde  $1 \leq m \leq 2d$ . E mais,  $P$  contém  $m + 1$  ponteiros  $p_0, p_1, \dots, p_m$  para os filhos de  $P$ . Nas páginas correspondentes às folhas, esses ponteiros indicam  $\lambda$ . A figura 5.15 apresenta a organização de uma página, onde  $I_k$  indica a informação associada à chave  $s_k$ . A tripla  $(s_k, I_k, p_k)$  ou, omitindo-se  $I_k$ , o par  $(s_k, p_k)$  é chamado uma *entrada*,  $k > 0$ . Se  $k = 0$ , por sua vez, o ponteiro  $p_0$  é definido como *entrada*.
- c) Seja uma página  $P$  com  $m$  chaves:
  - para qualquer chave  $y$ , pertencente à página apontada por  $p_0$ ,  $y < s_1$ ;
  - para qualquer chave  $y$ , pertencente à página apontada por  $p_k$ ,  $1 \leq k \leq m - 1$ ,  $s_k < y < s_{k+1}$ ;
  - para qualquer chave  $y$ , pertencente à página apontada por  $p_m$ ,  $y > s_m$ .

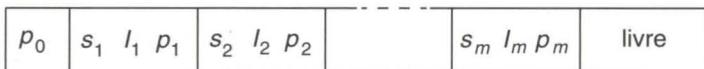


Figura 5.15: Organização de uma página

Uma vez que as árvores B se destinam ao armazenamento de grandes tabelas, é interessante conhecer seus limites quanto ao número de páginas e elementos.

Seja uma árvore B de ordem  $d$  e altura  $h$ . O número mínimo de páginas ocorre quando a árvore possui uma página-raiz seguida do número mínimo de páginas para cada nível que se segue. No nível consecutivo à raiz (nível 2), ter-se-ão então duas páginas (item (i) da definição); cada uma delas aponta para  $d + 1$  novas páginas, perfazendo, para o nível 3, o total de  $2(d + 1)$ . A partir daí, cada página aponta, por sua vez, para  $d + 1$  páginas; isto é, um total de  $2(d + 1)^{h-2}$ . O número máximo de páginas ocorre quando todas as páginas apontam  $2d + 1$  filhos (item (iii) da definição). Chamando-se  $P_{\min}$  e  $P_{\max}$  aos números mínimo e máximo de páginas nessa árvore, tem-se

$$\begin{aligned} P_{\min} &= 1 + 2((d + 1)^0 + (d + 1)^1 + \cdots + (d + 1)^{h-2}) \\ &= 1 + \frac{2}{d}[(d + 1)^{h-1} - 1] \quad h \geq 1 \\ P_{\max} &= \sum_{k=0}^{h-1} (2d + 1)^k = \frac{1}{2d} [(2d + 1)^h - 1] \quad h \geq 1. \end{aligned}$$

O cálculo do número mínimo  $n_{\min}$  e máximo  $n_{\max}$  de elementos da tabela dispostos em uma árvore B de ordem  $d$  e altura  $h$  decorre das expressões anteriores. Tem-se então

$$\begin{aligned} n_{\min} &= 1 + d \left( \frac{2[(d + 1)^{h-1} - 1]}{d} \right) = 2(d + 1)^{h-1} - 1 \\ n_{\max} &= 2d \left[ \frac{(2d + 1)^h - 1}{2d} \right] = (2d + 1)^h - 1 \quad \text{para } h \geq 1. \end{aligned}$$

Desses resultados podem-se deduzir cotas extremas para a altura  $h$ , em termos do número de chaves  $n$ .

$$\log_{2d+1}(n + 1) \leq h \leq 1 + \log_{d+1} \left( \frac{n + 1}{2} \right), \quad \text{para } n \geq 1.$$

### 5.5.2 – Busca, inserção e remoção

O método empregado na busca de uma chave  $x$  numa árvore B é semelhante ao utilizado na busca em uma árvore binária de busca. O mesmo caminhamento é executado na árvore, sendo apenas necessário acrescentar testes relativos às chaves existentes em cada página, que determinam qual o próximo passo do percurso. Observe, na figura 5.16, a busca da chave 10 na árvore B de ordem 2. De início, a chave procurada é comparada com a chave 50, armazenada na raiz. Na próxima página do caminho, deve-se procurar a posição adequada, testando-se o valor 10 com todas as chaves armazenadas no nó até que seja encontrado o ponteiro conveniente para o prosseguimento da busca (ou a chave ser encontrada). O caminho percorrido é representado pela linha pontilhada.

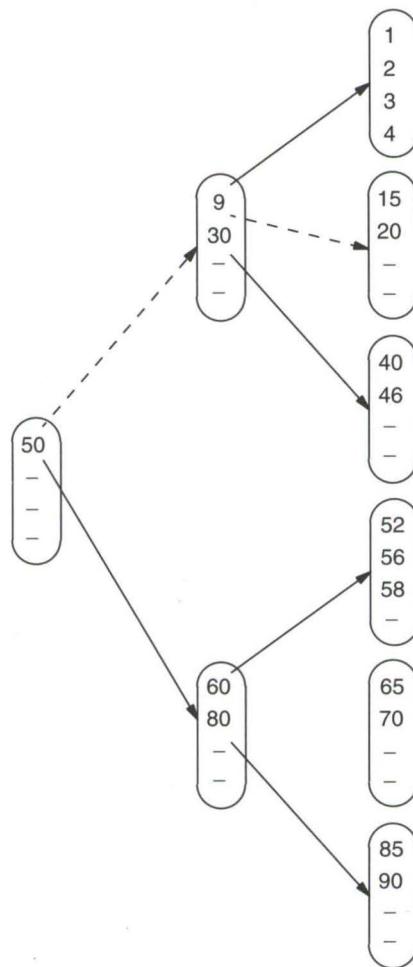
O algoritmo de busca compara a chave  $x$ , a chave procurada, com a chave (ou chaves) do nó-raiz. Sabe-se que, se a chave não se encontra na página em questão, a busca deve prosseguir em um certo filho dessa página, o qual é escolhido observando-se a propriedade (c). Se  $p$  é um ponteiro para uma página que contém  $m$  chaves, estas são localizadas em  $p \uparrow .s[1], \dots, p \uparrow .s[m]$  e os ponteiros para os filhos da página em  $p \uparrow .pont[0], p \uparrow .pont[1], \dots, p \uparrow .pont[m]$ . Os parâmetros  $pt$ ,  $f$  e  $g$  fornecem o resultado da busca. Se a chave se encontra na tabela, então  $f = 1$ . Nesse caso, ela se localiza na  $g$ -ésima posição da página apontada por  $pt$ . Caso a chave não seja encontrada, então  $f = 0$ . Nessa situação,  $pt$  aponta a última página examinada (necessariamente, uma folha) e  $g$  informa a posição, nesta página, onde  $x$  seria incluída. A variável  $ptraiz$  contém um ponteiro para a raiz da árvore.

**algoritmo 5.3:** Busca da chave  $x$  numa árvore B

**procedimento** *buscaB*( $x, pt, f, g$ )

```

 $p := ptraiz; \quad pt := \lambda; \quad f := 0$ 
enquanto  $p \neq \lambda$  faça
     $i := g := 1; \quad pt := p$ 
    enquanto  $i \leq m$  faça
        se  $x > p \uparrow .s[i]$  então  $i := g := i + 1$ 
        senão se  $x = p \uparrow .s[i]$  então
             $p := \lambda$  % chave encontrada
             $f := 1$ 
        senão  $p := p \uparrow .pont[i - 1]$  % mudança de página
             $i := m + 2$ 
        se  $i = m + 1$  então  $p := p \uparrow .pont[m]$ 
```



---

Figura 5.16: Busca de uma chave em uma árvore B

Considere agora o problema de inserir uma nova chave  $x$  em uma árvore B. O primeiro passo consiste em executar o procedimento *buscaB*. Os valores dos parâmetros  $pt$ ,  $f$  e  $g$  são, em seguida, analisados. Se  $f = 1$ , trata-se de uma inserção inválida. Caso contrário,  $x$  deverá ser incluída na  $g$ -ésima posição da folha apontada por  $pt$ . Um problema surge se a folha possuía  $2d$  chaves antes da inserção. Como está sendo inserida uma nova chave, a

página ficaria com  $2d + 1$  chaves, o que é impossível (propriedade (a)). A solução para esse problema é reorganizar as páginas, processo conhecido por *cisão de página*.

Seja a página  $P$ , onde é feita uma inserção, resultando em  $2d + 1$  chaves armazenadas. A disposição das entradas em  $P$  é a seguinte:

$$p_0, (s_1, p_1), (s_2, p_2), \dots, (s_d, p_d), (s_{d+1}, p_{d+1}), \dots, (s_{2d+1}, p_{2d+1})$$

A *cisão da página*, executada em  $P$ , transforma uma página com excesso de chaves em duas. Seja o ponteiro  $pt$  apontando para  $P$ . Em  $P$  permanecem  $d$  entradas. Sobram  $d + 1$  entradas. Para estas, uma nova página  $Q$ , apontada por  $pt1$ , deve ser solicitada. Nesta página, são alocadas também  $d$  entradas. A chave restante, justamente a da posição central da página  $P$ ,  $s_{d+1}$ , forma com o ponteiro  $pt1$  uma nova entrada na página  $W$ , pai de  $P$ . A disposição de entradas em  $P$  após o processo de cisão é:

$$p_0, (s_1, p_1), (s_2, p_2), \dots, (s_d, p_d).$$

O novo nó  $Q$ , apontado por  $pt1$ , apresenta a seguinte disposição de entradas:

$$p_{d+1}, (s_{d+2}, p_{d+2}), \dots, (s_{2d+1}, p_{2d+1}).$$

O nó  $W$ , agora também pai de  $Q$ , possui a nova entrada  $(s_{d+1}, pt1)$ .

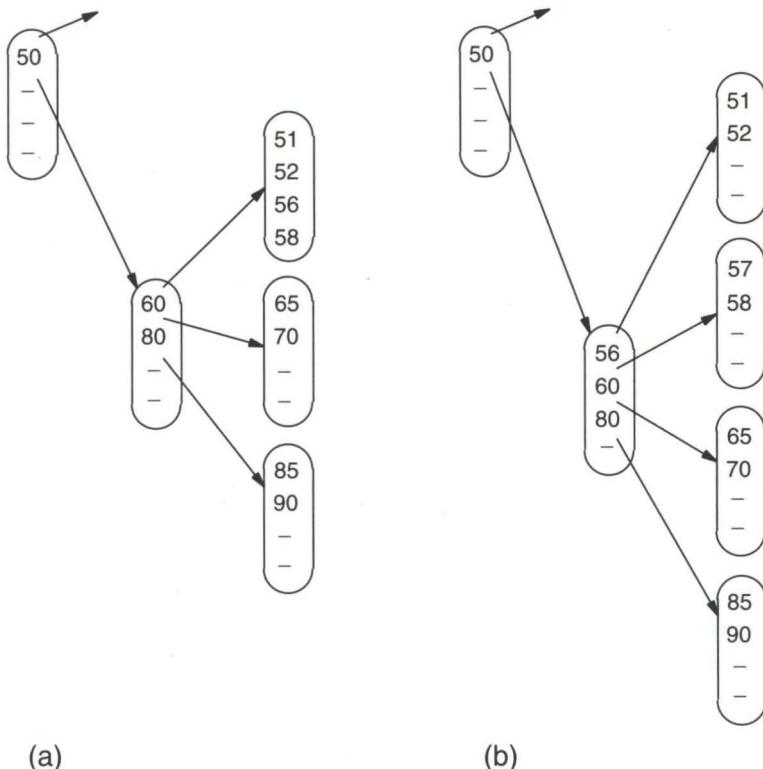
Observe que a nova entrada acrescentada ao nó  $W$  poderia também acarretar a necessidade de uma nova cisão. Por essa razão, diz-se que a cisão de páginas é propagável, podendo atingir até mesmo a raiz da árvore. Assim, uma nova inserção pode implicar a alteração da altura da árvore, que se mantém, entretanto, com suas folhas em um mesmo nível, uma vez que surge uma nova raiz. As figuras 5.17(a) e 5.17(b) mostram a inserção das chaves 51 e 57 na árvore da figura 5.16. Observe a cisão do nó após a inserção da chave 57. Nesse exemplo, não houve propagação.

O algoritmo de inserção segue os passos seguintes.

Passo 1: Aplicar procedimento *buscaB*, verificando a validade da inserção.

Passo 2: Se a inserção é válida, incluir a nova entrada na  $g$ -ésima posição da folha  $F$ , apontada por  $pt$ .

Passo 3: Verificar se a página  $F$  necessita de cisão. Em caso afirmativo, propagar a cisão enquanto necessário.



**Figura 5.17: Inserção de chaves em uma árvore B**

A remoção de uma chave  $x$  também requer atenção especial. De início, dois casos, e suas respectivas soluções, devem ser considerados.

- $x$  se encontra em uma folha: a entrada é simplesmente retirada;
- $x$  não se encontra em uma folha:  $x$  é substituída pela chave  $y$ , imediatamente maior. Observe que  $y$  necessariamente pertence a uma folha. A retirada e substituição das chaves pressupõem que elas sejam acompanhadas de sua informação.

A análise da remoção pode então se restringir ao caso em que esta operação é realizada em uma folha. Quando a chave é retirada, o número de chaves da página pode resultar menor que  $d$ , o que contraria a propriedade (a). Existem dois tratamentos para esse problema, denominados *concatenação* e *redistribuição*.

Duas páginas  $P$  e  $Q$  são chamadas *irmãos adjacentes* se têm o mesmo pai  $W$  e são apontadas por dois ponteiros adjacentes em  $W$ .  $P$  e  $Q$  podem ser concatenadas se são irmãos adjacentes e juntas possuem menos de  $2d$  chaves. A concatenação agrupa as entradas das duas páginas em uma só. Para isto, no nó pai  $W$  deixa de existir uma entrada, justamente a da chave que se encontra entre os ponteiros para os irmãos  $P$  e  $Q$ . Esta chave passa a fazer parte do novo nó concatenado e seu ponteiro desaparece, uma vez que o nó  $Q$  é devolvido. Como a soma do número de chaves de  $P$  e  $Q$  era menor do que  $2d$ , o novo nó tem, no máximo,  $2d$  chaves. Acompanhe, a seguir, a evolução da situação.

Situação antes da concatenação:

Página  $W$ :  $\dots(y_{j-1}, pt), (y_j, pt1), (y_{j+1}, p_{j+1}), \dots$

Página  $P$ :  $p_0, (s_1, p_1), \dots, (s_k, p_k)$

Página  $Q$ :  $p'_0, (s'_1, p'_1), \dots, (s'_m, p'_m)$  onde  $k + m < 2d$

Situação após a concatenação:

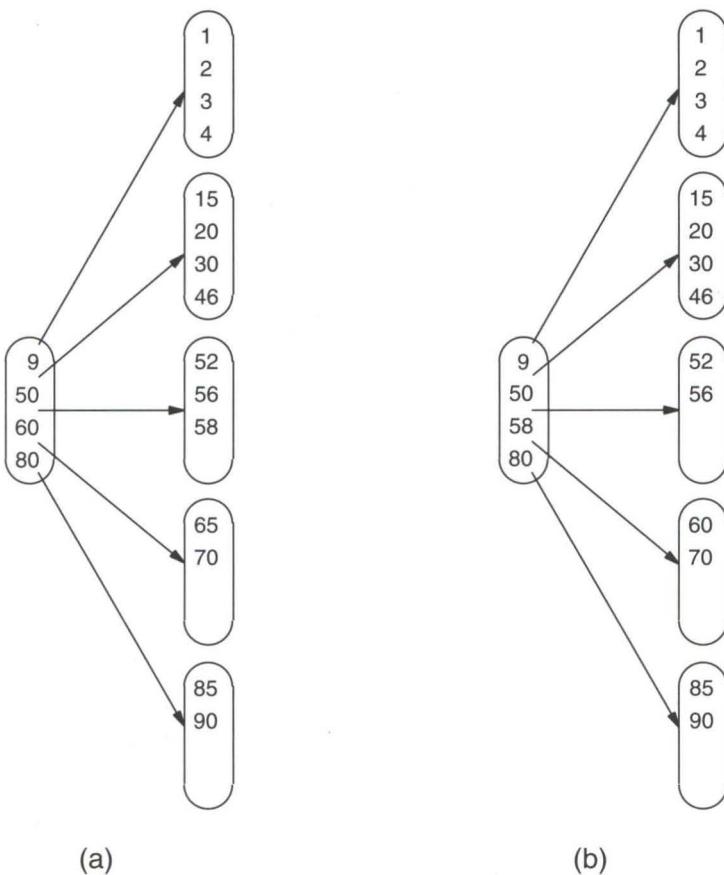
Página  $W$ :  $\dots(y_{j-1}, pt), (y_{j+1}, p_{j+1}), \dots$

Página  $P$ :  $p_0, (s_1, p_1), \dots, (s_k, p_k), (y_j, p'_0), (s'_1, p'_1), \dots, (s'_m, p'_m)$

Como no nó  $W$  foi retirada uma entrada, observa-se que a concatenação é também propagável. Ou seja, na nova situação, caso  $W$  contenha menos que  $d$  chaves, o processo se repete. Eventualmente, a propagação pode atingir a raiz, o que acarreta a diminuição da altura da árvore.

A figura 5.18(a) mostra a árvore B da figura 5.16 após a retirada da chave 40. Como restou somente uma chave na página e a soma das chaves nas duas páginas irmãos adjacentes é menor do que  $2d$ , a concatenação foi feita. Nota-se, neste exemplo, a propagação da concatenação. A chave 9 torna-se a única de sua página, repetindo-se então a concatenação nesse nível.

Se a página  $P$  e seu irmão adjacente  $Q$  possuem em conjunto  $2d$  ou mais chaves, estas podem ser equilibradamente distribuídas: concatena-se  $P$  e  $Q$ , o que obviamente resulta numa página  $P$  grande demais. Imediatamente após, efetua-se uma cisão, considerando-se para isto a página  $Q$  já existente. Essa solução, a *redistribuição*, não é propagável. A página  $W$ , pai de  $P$  e  $Q$ , é modificada, mas seu número de chaves permanece o mesmo.



---

Figura 5.18: Resultados da remoção em uma árvore B

Sejam  $P$  e  $Q$  duas páginas, irmãos adjacentes, contendo, no total, pelo menos  $2d$  chaves. Seja  $W$  a página pai de  $P$  e  $Q$ . Acompanhe, a seguir, a evolução da situação.

Antes da redistribuição:

Página  $W$ :  $\dots, (y_{j-1}, pt), (y_j, pt1), (y_{j+1}, p_{j+1}), \dots$

Página  $P$ :  $p_0, (s_1, p_1), \dots, (s_k, p_k)$

Página  $Q$ :  $p'_0, (s'_1, p'_1), \dots, (s'_m, p'_m)$  onde  $k < d$  e  $k + m \geq 2d$

Situação após a redistribuição:

Seja  $g = \lfloor (k+m)/2 \rfloor$ .

Página  $W$ :  $\dots(y_{j-1}, pt), (s'_{g-k}, pt1), (y_{j+1}, p_{j+1}), \dots$

Página  $P$ :  $p_0, (s_1, p_1), \dots, (s_k, p_k), (y_j, p'_0), (s'_1, p'_1), \dots, (s'_{g-k-1}, p'_{g-k-1})$

Página  $Q$ :  $p'_{g-k}, (s'_{g-k+1}, p'_{g-k+1}), \dots, (s'_m, p'_m)$

A figura 5.18(b) mostra o exemplo da remoção da chave 65 na árvore da figura 5.18(a), em que a operação de redistribuição foi realizada.

O algoritmo de remoção da chave  $x$  segue então os passos seguintes.

Passo 1: Aplicar o procedimento  $buscaB$ , verificando a existência da chave  $x$  na árvore. Seja  $P$  a página onde se encontra chave.

Passo 2: Se  $P$  é uma folha, retirar a entrada correspondente à chave  $x$ . Se não é, buscar a menor chave que se encontre em uma folha e que seja maior que  $x$ . Seja  $z$  essa chave, e  $F$  a página onde  $z$  se encontra. Substitua a chave  $x$  (e a informação correspondente) por  $z$  e  $I_z$ . Fazer  $P = F$ .

Passo 3: Verificar se  $P$  contém  $d$  entradas. Em caso negativo, executar a operação de concatenação ou redistribuição.

### 5.5.3 – Custos de busca, inserção e remoção

Para analisar custos de manutenção de uma tabela, é necessário avaliar quantas páginas são solicitadas e quantas são escritas na memória secundária. Para essa análise, considere a seguinte situação: qualquer página cujo conteúdo é examinado ou modificado durante uma busca, inserção ou remoção é acessada e, posteriormente, devolvida à memória secundária exatamente uma vez.

Seja  $F_{\min}$  ( $F_{\max}$ ) o mínimo (máximo) número de páginas acessadas, e  $E_{\min}$  ( $E_{\max}$ ) o mínimo (máximo) de páginas escritas. Para o algoritmo de busca, o custo da recuperação de uma chave é mínimo quando esta se encontra na própria raiz, e máximo quando se encontra em uma folha. Então,

$$F_{\min} = 1; \quad F_{\max} = h; \quad E_{\min} = E_{\max} = 0.$$

No cálculo do custo da inserção, o mínimo de trabalho ocorre quando nenhuma cisão é requerida. Então,

$$F_{\min} = h; \quad E_{\min} = 1.$$

Ainda na inserção, o máximo de trabalho ocorre no caso em que todas as páginas do caminho seguido na árvore, inclusive a raiz, passam pelo processo de cisão. Neste caso

$$F_{\max} = h; \quad E_{\max} = 2h + 1.$$

No caso da remoção, o trabalho é mínimo quando nem concatenações nem redistribuições são necessárias e, além disso, a chave retirada está numa folha. Isto requer

$$F_{\min} = h; \quad E_{\min} = 1.$$

Se, nas mesmas condições, a chave não se encontra numa folha, então

$$F_{\min} = h; \quad E_{\min} = 2.$$

O pior caso ocorre quando há concatenação em todas as páginas do caminho, exceto nos dois primeiros níveis (a raiz e seus filhos). Além disso, a página filho da raiz resulta com número insuficiente de chaves, de tal forma que acarrete a operação de redistribuição. Portanto, há um total de  $h - 2$  páginas escritas, devido às concatenações, e ainda 3 páginas como resultado da operação de distribuição. Isto requer

$$F_{\max} = 2h - 1; \quad E_{\max} = h + 1.$$

Diversas variações interessantes existem na literatura para árvores B. A primeira, e mais simples, sugere o armazenamento à parte dos campos de informação, mantendo nas entradas da árvore B somente a chave e um ponteiro para a informação correspondente. Tal alternativa permite o armazenamento de uma quantidade de entradas bem maior do que no armazenamento tradicional. Outra variação é a que mantém todas as chaves, e as informações correspondentes, em folhas. A árvore B, chamada nesse caso B<sup>+</sup>, contém duplicatas das chaves distribuídas pelas páginas não folhas, o que permite o acesso aos dados desejados. Estas formam então um índice para as folhas

que contêm informações. As estruturas dessas páginas diferem da estrutura das folhas. Os dados podem ser também manipulados seqüencialmente, em virtude de sua disposição. Algoritmos para esse caso são solicitados no exercício 5.41.

## 5.6 – Exercícios

- 5.1 Provar ou dar contra-exemplo:

Toda árvore estritamente binária é balanceada.

- 5.2 Desenhar a árvore de Fibonacci  $T_5$ .

- 5.3º Determinar a expressão do  $h$ -ésimo termo  $F_h$ , da seqüência de Fibonacci, em função de  $h$ .

- 5.4º Determinar o número total de árvores de Fibonacci distintas que possuem a mesma altura  $h$ .

- 5.5• Calcular o comprimento do caminho externo de uma árvore de Fibonacci para uma dada altura  $h$ .

- 5.6 Mostrar que o valor  $|T_h|$ , número de nós de uma árvore de Fibonacci de altura  $h$ , é igual ao número de chamadas à função  $F$  do seguinte algoritmo recursivo para encontrar o termo  $F_h$  da seqüência de Fibonacci, sendo  $h > 0$ .

função  $F(h)$

$F(h) := \begin{cases} \text{se } h \leq 1 \text{ então } h \\ \text{senão } F(h - 1) + F(h - 2) \end{cases}$

- 5.7 Mostrar que a rotação dupla esquerda (direita) pode ser obtida por uma rotação direita (esquerda) seguida por uma rotação esquerda (direita).

- 5.8 Dê exemplo de uma família de árvores AVL cuja exclusão de nós implica a realização de  $O(\log n)$  operações de rotação para o rebalanceamento.

- 5.9 Detalhar o algoritmo de exclusão de nós em árvores AVL.

- 5.10º Caracterizar a família de árvores AVL minimais, isto é, tais que a exclusão de qualquer nó provoca o seu desbalanceamento.

- 5.11º Caracterizar a família de árvores AVL maximais, isto é, tais que a inclusão de qualquer nó provoca o seu desbalanceamento.

- 5.12 • Determinar o número médio de rotações necessárias para rebalancear uma árvore AVL após uma operação de exclusão, supondo que todos os nós possuem a mesma probabilidade de serem excluídos.
- 5.13 • Determinar a probabilidade de que uma inclusão efetuada em uma árvore AVL provoque o seu desbalanceamento, supondo que a inclusão pode ocorrer, com idêntica probabilidade, em qualquer das subárvores vazias.
- 5.14 • Determinar a probabilidade de que uma exclusão efetuada em uma árvore AVL provoque o seu desbalanceamento, supondo que todos os nós possuem a mesma probabilidade de serem excluídos.
- 5.15 • Determinar a altura média de uma árvore AVL em função do número de nós, supondo que todas as árvores AVL com  $n$  nós possuem a mesma probabilidade de ocorrência.
- 5.16 • Uma árvore é *k*-balanceada quando o módulo da diferença entre as alturas dos filhos esquerdo e direito de qualquer nó é  $\leq k$ . Em especial, as árvores AVL são *k*-balanceadas. Pede-se:
- (i) Verificar se as árvores 2-balanceadas são balanceadas.
  - (ii) Desenvolver um algoritmo eficiente para inclusão de nós em árvores 2-balanceadas.
- 5.17 Desenhar a árvore rubro-negra obtida pela seqüência de inserções das chaves 19, 18, 16, 15, 17, 2, 6, nessa ordem.
- 5.18 Desenhar todas as árvores rubro-negras com 5 nós internos.
- 5.19 Mostre a menor árvore binária que não seja rubro-negra.
- 5.20 Provar ou dar contra-exemplo:  
Seja uma árvore rubro-negra cuja raiz possui a cor rubra. Se esta for alterada para negra, a árvore mantém-se rubro-negra.
- 5.21 Para um dado número de nós, descrever uma árvore rubro-negra que possui o número máximo de nós rubros.
- 5.22 Para um dado número de nós, descrever uma árvore rubro-negra que possui o número máximo de nós negros.
- 5.23 Existe uma árvore rubro-negra cuja rotulação não possa ser obtida através do algoritmo de conversão de árvores graduadas para rubro-negras? Justifique.

- 5.24 Existe uma árvore graduada cuja rotulação não possa ser obtida através do algoritmo de conversão de árvores rubro-negras em graduadas? Justifique.
- 5.25 Uma árvore 2-4 é aquela cujos nós internos possuem 2, 3 ou 4 filhos e todas as folhas possuem a mesma altura. Mostrar que em uma árvore rubro-negra  $T$ , ao se identificar cada nó rubro com seu pai,  $T$  será transformada em árvore 2-4.
- 5.26 Provar ou dar contra-exemplo:
- (i) Toda árvore AVL é rubro-negra.
  - (ii) Toda árvore rubro-negra é AVL.
- 5.27º Uma árvore é *semicompleta* se, para todo nó  $v$ , o comprimento do caminho mais longo de  $v$  até um nó externo é, no máximo, igual ao dobro do comprimento do caminho mais curto de  $v$  até um nó externo. Provar ou dar contra-exemplo:
- (i) Toda árvore semicompleta é rubro-negra.
  - (ii) Toda árvore rubro-negra é semicompleta.
- 5.28 Utilizando a correspondência entre árvores graduadas e rubro-negras, mostrar que se  $v$  é pai de  $w$  em  $T$ , então  $\text{posto}(v) = \text{posto}(w)$  se e somente se  $w$  for rubro.
- 5.29 Mostrar que as operações de rotação e troca de cores indicadas na figura 5.15 de fato transformam a árvore em rubro-negra.
- 5.30º Caracterizar a família de árvores rubro-negras minimais, isto é, as árvores rubro-negras tais que a exclusão de qualquer nó provoca o seu desbalanceamento.
- 5.31º Caracterizar a família de árvores rubro-negras maximais, isto é, as árvores rubro-negras tais que a inclusão de qualquer nó provoca o seu desbalanceamento.
- 5.32• Seja  $k$  um inteiro positivo fixo. Uma árvore é  $(1/k)$ -completa se, para todo nó  $v$ , o comprimento do caminho mais longo de  $v$  até um nó externo é, no máximo, igual a  $k$  vezes o comprimento do caminho mais curto de  $v$  até um nó externo. Verificar se uma árvore  $(1/k)$ -completa é balanceada.
- 5.33 Detalhar o algoritmo de exclusão em árvores rubro-negras.
- 5.34 Desenhar uma árvore B de ordem 3 que contenha as seguintes chaves: 1, 3, 6, 8, 14, 32, 36, 38, 39, 41, 43.

- 5.35 Determinar a expressão da altura máxima de uma árvore B de ordem  $d$ .
- 5.36 Provar ou dar contra-exemplo:  
Para qualquer conjunto de chaves e qualquer valor  $d > 1$ , existe sempre uma árvore B de ordem  $d$  que armazene essas chaves.
- 5.37 Determinar os valores dos números mínimo e máximo de nós que uma árvore B de ordem  $d$  pode armazenar.
- 5.38 Descrever, em linguagem algorítmica, um algoritmo para efetuar a cisão de uma página numa árvore B de ordem  $d$ .
- 5.39 Descrever, em linguagem algorítmica, um algoritmo para efetuar a concatenação de duas páginas numa árvore B de ordem  $d$ .
- 5.40 Descrever, em linguagem algorítmica, um algoritmo para efetuar a redistribuição de duas páginas apontadas por  $pt1$  e  $pt2$  em uma árvore B de ordem  $d$ .
- 5.41 Descrever algoritmos de busca, inserção e remoção em árvores  $B^+$ .

## Notas Bibliográficas

O conceito de balanceamento foi introduzido por Adel'son-Vel'skii e Landis [Ad62], que conceberam também as árvores AVL, iniciais dos nomes dos autores. A descrição detalhada de algoritmos de inserção e remoção pode ser encontrada no livro de Wirth [Wi86] sobre algoritmos e estruturas de dados. As árvores rubro-negras foram introduzidas por Bayer [Ba72], sob a denominação de *árvores B binárias e simétricas*. A denominação *rubro-negra* (do inglês “red-black”) foi utilizada pela primeira vez por Guibas e Sedgewick [Gu78], os quais efetuaram um estudo detalhado dessa estrutura. As propriedades das árvores graduadas encontram-se descritas no livro de Tarjan [Ta83]. O nome então utilizado foi “balanced trees”. As árvores B foram concebidas por Bayer e McCreight [Ba72a]. Um tutorial clássico do estudo das árvores B foi escrito por Comer [Co79].

# Listas de Prioridades

## 6.1 – Introdução

Em muitas aplicações, uma característica importante que distingue os dados em uma certa estrutura é uma prioridade atribuída a cada um deles. Nessas aplicações, em geral, determinar repetidas vezes o dado de maior prioridade é uma operação importante. Por exemplo, suponha que os dados de uma tabela correspondam a tarefas a serem realizadas com uma certa prioridade. Nesse caso, deseja-se que as tarefas sejam realizadas em ordem decrescente de prioridades. Além disso, é razoável supor que as prioridades das tarefas possam variar ao longo do tempo. Finalmente, novas tarefas podem ingressar na tabela a cada instante. Para encontrar a ordem desejada de execução das tarefas, um algoritmo deve, sucessivamente, escolher o dado de maior prioridade e retirá-lo da tabela. Além disso, o algoritmo deve ser capaz de introduzir novos dados, no momento adequado.

Com essa motivação, pode-se definir *lista de prioridades* como uma tabela na qual a cada um de seus dados está associada uma *prioridade*. Esta prioridade é, em geral, definida através de um valor numérico e armazenada em algum de seus campos. As operações básicas a serem efetuadas com os dados da lista de prioridades são as seguintes:

- *seleção* do elemento de maior prioridade;
- *inserção* de um novo elemento;
- *remoção* do elemento de maior prioridade.

Freqüentemente, deseja-se também efetuar a operação de *alteração* de alguns dados da tabela. Mais especificamente, a alteração de maior interesse, no caso, é aquela correspondente a uma mudança na prioridade desse dado.

O objetivo deste capítulo é o estudo de listas de prioridades, sua implementação e algoritmos. Na seção 6.2, são apresentados diferentes métodos de implementação de listas de prioridades. Será verificado que uma delas, aquela que usa uma lista especial chamada *heap*, é a mais eficiente. Na seção 6.3, são examinados algoritmos de alteração da prioridade de algum dado da tabela. Na seção 6.4, são apresentados os algoritmos de inclusão de um novo elemento e de exclusão daquele de maior prioridade. A construção de listas de prioridades é o assunto abordado na seção posterior. A seção 6.6 descreve uma aplicação das listas de prioridades na formulação de um algoritmo para efetuar ordenação. Finalmente, a seção 6.7 apresenta uma generalização das listas de prioridades, denominada *min-max*.

É importante observar que, para maior simplicidade de notação, foi considerado que a prioridade de cada dado seria o seu identificador. Isto é, a prioridade, no escopo deste capítulo, se confunde com a chave de cada elemento da tabela.

## 6.2 – Implementação de Listas de Prioridades

Nesta seção, examina-se a questão da implementação de listas de prioridades, bem como a formulação de algoritmos para a operação de alteração na prioridade de algum dado. Serão abordadas três implementações distintas, a saber: por lista não ordenada, por lista ordenada e por heap. As referências são as operações básicas de seleção, inserção, remoção, alteração e construção da tabela.

### Implementação por lista não ordenada

A inserção e a construção são triviais. O novo nó da tabela pode ser colocado em qualquer posição conveniente, dependendo do tipo de alocação utilizada, seqüencial ou encadeada. A remoção, entretanto, implica percorrer a tabela em busca do elemento de maior prioridade. A alteração de prioridade não afeta a organização da tabela, mas pressupõe a busca do elemento. O mesmo acontece com a operação de seleção do elemento de maior prioridade. Então,

para uma tabela com  $n$  elementos, cada uma dessas operações requer o seguinte número de passos.

- seleção:  $O(n)$
- inserção:  $O(1)$
- remoção:  $O(n)$
- alteração:  $O(n)$
- construção:  $O(n)$

## Implementação por lista ordenada

Neste caso, a situação se inverte. A remoção é imediata porque, estando as prioridades já ordenadas, o primeiro elemento é o que interessa. A inserção, entretanto, obriga a um percurso pela lista para procurar sua posição correta. A alteração de prioridade é semelhante a uma nova inserção. A seleção é também imediata. A construção exige uma ordenação prévia da tabela. Então, cada uma das operações requer o seguinte número de passos.

- seleção:  $O(1)$
- inserção:  $O(n)$
- remoção:  $O(1)$
- alteração:  $O(n)$
- construção:  $O(n \log n)$

## Implementação por “heap”

As duas implementações anteriores apresentam a inconveniência de possuírem operações de atualização de complexidade  $\Omega(n)$ . O objetivo presente é descrever um método mais eficiente. Esse método utiliza uma estrutura especial, chamada “heap”.

Um *heap* é uma lista linear composta de elementos com chaves  $s_1, \dots, s_n$ , satisfazendo a seguinte propriedade:

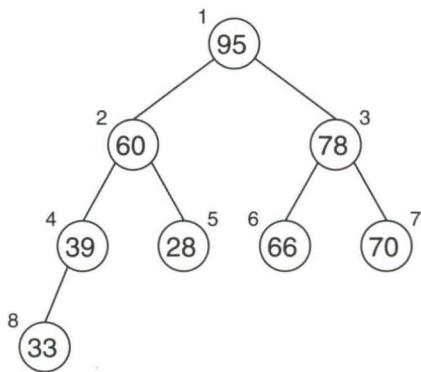
$$s_i \leq s_{\lfloor i/2 \rfloor}, \quad \text{para } 1 < i \leq n. \quad (\text{i})$$

Conforme já mencionado, cada chave corresponde à prioridade do respectivo elemento. Por exemplo, a lista apresentada na figura 6.1 obedece à propriedade descrita.

A visualização dessa propriedade torna-se mais fácil quando se imagina a tabela disposta numa árvore binária completa. Nesse caso, os nós são numerados seqüencialmente da raiz para os níveis mais baixos, da esquerda para a direita. O campo de prioridade aparece como rótulo do nó. Os nós do último nível são preenchidos também da esquerda para a direita. O exemplo anterior é ilustrado na figura 6.2.

95	60	78	39	28	66	70	33
----	----	----	----	----	----	----	----

**Figura 6.1:** Lista de prioridades



**Figura 6.2:** Representação gráfica de um heap

Observe na figura 6.2 que, na árvore binária completa, a propriedade (i) corresponde a dizer que cada nó possui prioridade maior que seus dois filhos, se existirem. A representação na memória não se altera, continuando a ser uma lista linear seqüencial. Isto é, uma árvore binária dessa natureza pode ser representada através de uma lista que satisfaça (i) sem necessidade do uso de ponteiros. Pode-se considerar a árvore binária apenas como uma melhor representação visual ou gráfica.

A condição (i) implica que o elemento de maior prioridade seja sempre o primeiro da ordenação, isto é, a raiz da árvore. Isto significa que a operação de seleção é trivial. Ou seja, o elemento de maior prioridade da tabela pode ser encontrado em tempo  $O(1)$ . As operações de inserção, remoção e alteração podem ser realizadas em tempo  $(\log n)$ , conforme descrito mais adiante. Finalmente, talvez contrariando a intuição, verifica-se que a construção de um heap pode ser realizada em tempo inferior ao da ordenação. De fato, a construção de um heap requer não mais do que tempo  $O(n)$ , segundo a seção 6.5. Então, são os seguintes os parâmetros indicadores de eficiência correspondentes a um heap.

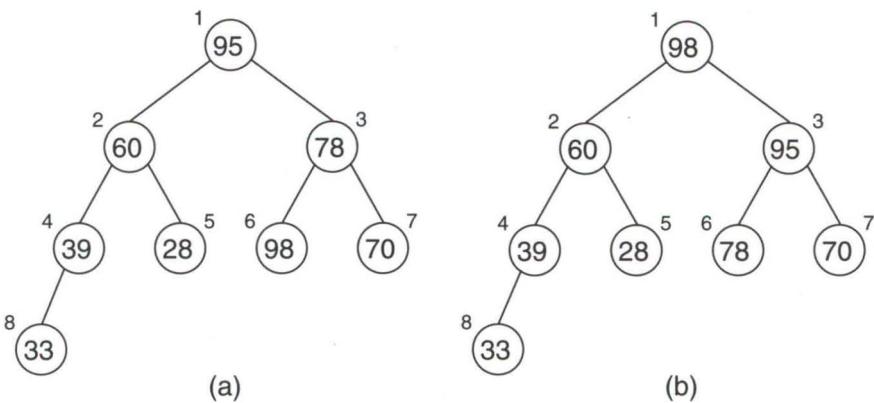
- seleção:  $O(1)$
- inserção:  $O(\log n)$
- remoção:  $O(\log n)$
- alteração:  $O(\log n)$
- construção:  $O(n)$

## 6.3 – Alteração de Prioridades

Nesta seção, são descritos métodos de alteração de prioridades dos nós de um heap. Essa operação pode ser visualizada na representação gráfica ilustrada na figura 6.2. De um modo geral, uma operação que se deseja realizar na tabela estará associada, na representação gráfica, a “subir” ou “descer” num caminho da árvore, uma vez que essas operações correspondem a situar um elemento na posição correta de sua prioridade. Associa-se então a diminuição de prioridade à “descida”, e o aumento à “subida”. Dois exemplos são apresentados a seguir.

Seja a lista de prioridades representada na figura 6.2, onde se deseja alterar a prioridade do nó 6 de 66 para 98, como é visto na figura 6.3(a).

Obviamente a tabela não mais respeita a propriedade (i). Pela figura 6.3(a), entretanto, observa-se que o lado esquerdo da árvore não foi afetado. E mais, o aumento de prioridade do nó 6 também não interfere na posição de seu irmão na árvore, o nó 7. Isto se deve ao fato de a propriedade (i) relacionar um dado elemento a seu pai na árvore. O elemento alterado será então alocado de forma correta simplesmente “subindo-se” pelo caminho que leva



---

Figura 6.3: Aumento da prioridade de um nó

à raiz da árvore através de trocas, até satisfazer a propriedade. No exemplo, o nó de prioridade 98 deve ser trocado sucessivamente com seu pai, o de 78, e novamente, com o nó de prioridade 95, chegando à sua posição correta, como é visto na figura 6.3(b).

Raciocínio análogo pode ser feito para a diminuição de prioridade. Observe na figura 6.4(a) o caso de alteração da prioridade do nó 1 para 37 na tabela original (figura 6.2). A operação necessária nesse caso, a “descida” pela árvore, é um pouco mais complexa, porque obriga, a cada passo, à escolha do caminho correto a ser seguido, esquerda ou direita. Essa escolha é determinada por um teste. Dentre os dois filhos do nó (à esquerda ou à direita), é escolhido o de maior prioridade, a qual é então comparada com a do nó em questão. Se as prioridades estão invertidas, é efetuada uma troca, que corresponde à descida pelo caminho previamente determinado. Esse passo deve ser executado até que a propriedade (i) seja satisfeita. A figura 6.4(b) mostra o resultado da operação na tabela da figura 6.4(a).

Os algoritmos correspondentes a estas operações, e que serão utilizados na inserção e remoção, são vistos a seguir. O parâmetro  $i$  indica a posição do elemento a ser revisto, enquanto  $n$  é o número de elementos da tabela. O campo *chave* armazena a prioridade do nó. A tabela está armazenada na estrutura  $\mathcal{T}$ . A notação  $\mathcal{T}[i] \leftrightarrow \mathcal{T}[j]$  representa a troca das posições entre os nós  $i$  e  $j$ , na tabela.

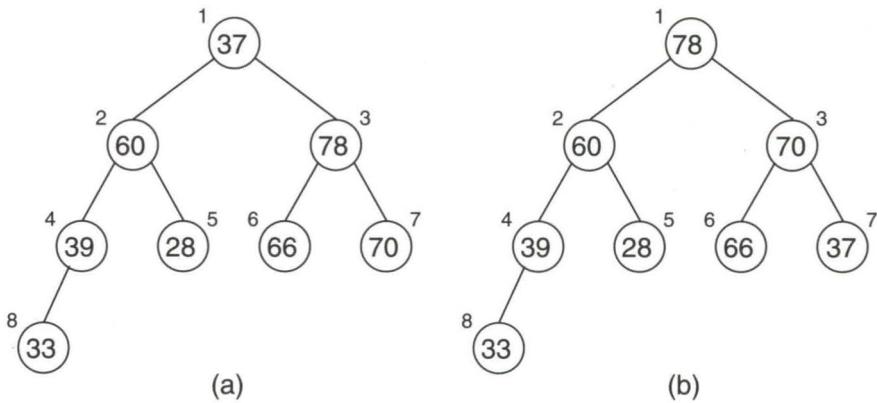


Figura 6.4: Diminuição da prioridade de um nó

algoritmo 6.1: Subir por um caminho da árvore

procedimento *subir*(*i*)

```

j := ⌊i/2⌋
se j ≥ 1 então
    se T[i].chave > T[j].chave então
        T[i] ⇔ T[j]
        subir(j)
    
```

algoritmo 6.2: Descer por um caminho da árvore

procedimento *descer*(*i, n*)

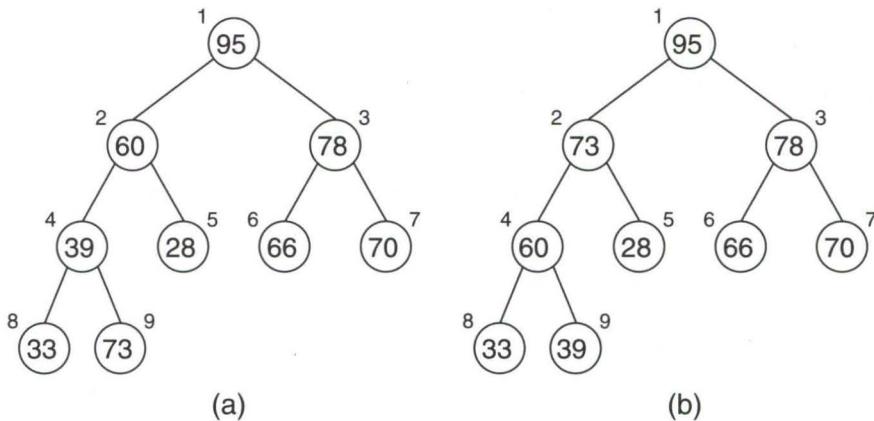
```

j := 2 × i
se j ≤ n então
    se j < n então
        se T[j+1].chave > T[j].chave então
            j := j + 1
        se T[i].chave < T[j].chave então
            T[i] ⇔ T[j]
            descer(j, n)
    
```

As complexidades dos procedimentos *subir* e *descer* são as mesmas de um percurso por um caminho de uma árvore binária completa,  $O(\log n)$ .

## 6.4 – Inserção e Remoção em Listas de Prioridades

Como já foi dito na seção anterior, operações realizadas em listas de prioridades podem resultar, em última análise, em alteração de prioridades. Observe a inserção de um novo elemento através de um exemplo. Seja novamente a lista de prioridades representada na figura 6.2. Suponha a inserção de um novo elemento de prioridade 73. A tabela passará a ter  $n + 1$  elementos. O novo elemento pode então ser alocado na posição  $n + 1$ . A figura 6.5(a) apresenta a tabela resultante.



**Figura 6.5:** Inserção de um elemento

Obviamente a tabela não mais respeita a propriedade (i). Pela figura é fácil observar que o acréscimo de um elemento corresponde simplesmente a assumir a tabela com  $n + 1$  elementos e corrigir a prioridade do último elemento, supondo-a aumentada. A figura 6.5(b) mostra o resultado desse procedimento e o algoritmo 6.3 o descreve. A memória disponível possui  $M$  posições; o nó a ser inserido se encontra na variável *novo*.

**algoritmo 6.3:** Inserção em uma lista de prioridades

**se**  $n < M$  **então**

$T[n + 1] := novo$

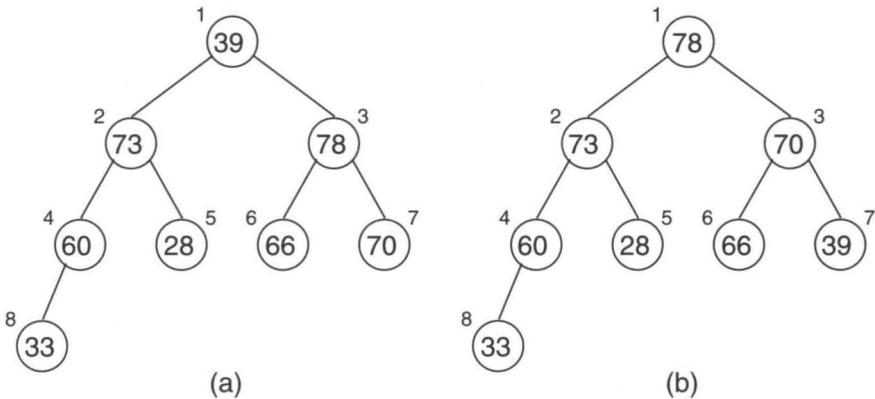
$n := n + 1$

*subir(n)*

**senão** *overflow*

A complexidade desse algoritmo é exatamente a complexidade do procedimento *subir*,  $O(\log n)$ .

A remoção do elemento de maior prioridade, o primeiro na representação utilizada, deixa sua posição vazia na lista, que deve então ser preenchida. Como a lista passa a ter  $n - 1$  elementos, é natural que seja o último elemento o substituto do primeiro. Sua prioridade, entretanto, está completamente deslocada e terá que ser corrigida. Essa substituição corresponde então a uma diminuição de prioridade do novo primeiro elemento. A figura 6.6(a) apresenta a remoção do primeiro elemento da lista apresentada na figura 6.5(b), bem como a substituição pelo último elemento; a figura 6.6(b) mostra a lista já com as prioridades acertadas.



**Figura 6.6:** Remoção de um elemento

O algoritmo 6.4 apresenta a remoção. O procedimento *agir*, chamado no algoritmo, implementa qualquer conjunto de operações que o problema de aplicação necessite realizar.

**algoritmo 6.4:** Remoção de um elemento da lista de prioridades  
se  $n \neq 0$  então

*agir*( $T[1]$ )

$T[1] := T[n]$

$n := n - 1$

*descer*(1,  $n$ )

**senão** *underflow*

Supondo a complexidade de *agir* constante (ou computada na aplicação correspondente), a complexidade do algoritmo de remoção depende do procedimento *descer*, isto é,  $O(\log n)$ . Problemas de aplicação que considerem a remoção de todos os elementos da tabela serão de complexidade  $O(n \log n)$ .

## 6.5 – Construção de uma Lista de Prioridades

Nesta seção, é tratado o problema da construção de um heap.

Uma primeira solução provém da observação de que toda lista ordenada corresponde a um heap. Assim sendo, um heap pode ser construído simplesmente através da ordenação de uma lista. Essa solução, contudo, é de complexidade  $O(n \log n)$ . Um método mais eficiente é descrito a seguir.

Seja  $S$  uma lista dada, para a qual se deseja construir um heap. Para que  $S$  seja um heap, basta corrigir a posição de seus nós, isto é, considerar cada um de seus nós como sendo uma nova inserção. O algoritmo 6.5 descreve a solução.

**algoritmo 6.5:** Construção da lista de prioridades

para  $i := 2, n$  faça

*subir*( $i$ )

Pode-se apresentar, entretanto, uma solução alternativa. Observe que a propriedade (i) é sempre satisfeita quando se trata de um nó sem filhos, isto é, nós alocados a partir da posição  $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ . Por essa razão, na construção da tabela com prioridades, os únicos nós relevantes, do ponto de vista da análise, são os interiores na árvore. Estes devem ter suas prioridades verificadas e acertadas em relação a seus descendentes, a partir dos níveis mais baixos da árvore, o que tornará obrigatória a análise completa da tabela. O algoritmo 6.6 apresenta o procedimento *arranjar*( $n$ ), onde  $n$  é a dimensão original da tabela.

**algoritmo 6.6:** Construção da lista de prioridades

procedimento *arranjar*( $n$ )

para  $i = \lfloor n/2 \rfloor, 1$  faça

*descer*( $i, n$ )

**Lema 6.1:**

O algoritmo 6.6 constrói uma lista de prioridades em tempo linear.

**Prova:**

Seja  $h$  a altura de um nó qualquer da lista de prioridades na árvore binária correspondente. O procedimento recursivo  $descer(i, n)$  estabelece comparações de nós seguindo o caminho na árvore do nó  $i$  até uma folha descendente de  $i$ . Pode-se então dizer que o tempo requerido para a execução de uma chamada de  $descer(i, n)$  é  $T(i) = h - 1$ , sendo  $h$  a altura do nó  $i$ . Ora, para organizar uma lista de prioridades, o algoritmo chama esse procedimento para a metade de seus nós (os nós ignorados são justamente as folhas, de altura 1). O tempo despendido é então da ordem do somatório das alturas dos vértices que são considerados no algoritmo. Observa-se na árvore que, no máximo,  $\lceil n/2^j \rceil$  nós possuem altura  $j$ . O tempo total é então da ordem de

$$\sum_{j=2}^h j \times n/2^j,$$

que é  $O(n)$ .

□

## 6.6 – Aplicação: Ordenação

Uma aplicação conhecida de lista de prioridades é um algoritmo que efetua a ordenação de uma tabela. Seja  $T$  a tabela a ser disposta em ordem não decrescente segundo as suas chaves. Deve-se recordar que a prioridade atribuída a cada nó foi considerada como sendo igual ao valor de sua chave. Sabe-se que o primeiro elemento da lista é o de maior prioridade. Removê-lo sucessivamente, sem alterações na lista que resta, corresponde a dispor a tabela em ordem não decrescente de suas chaves. Para ordenar  $T$ , deve-se então construir a lista de prioridades, considerando a chave de ordenação como uma prioridade, e em seguida aplicar remoções sucessivas, dispondo o primeiro elemento já em sua posição definitiva.

O algoritmo 6.7 apresenta a ordenação em ordem não decrescente. Esse algoritmo, dos mais eficientes dentre os existentes, tem a complexidade  $O(n \log n)$ .

**algoritmo 6.7:** Ordenação de  $T$

*arranjar( $n$ )*

$m := n$

**enquanto**  $m > 1$  **faça**

$T[1] \leftrightarrow T[m]$

$m := m - 1$

*descer(1, m)*

A figura 6.8 apresenta, passo a passo, um exemplo de ordenação de uma tabela. Para cada iteração do algoritmo, o efeito na árvore após a troca de nós e o resultado do procedimento *descer* são ilustrados. A tabela original é apresentada na figura 6.7, após a execução do procedimento *arranjar*. A última árvore da figura apresenta a tabela já ordenada.

---

40    37    95    42    23    51    27

---

**Figura 6.7:** Tabela a ser ordenada

## 6.7 – Máximos e Mínimos

Uma generalização interessante da lista de prioridades permite o acesso, em tempo constante, não só ao maior elemento da tabela como também ao menor. Essa estrutura será aqui chamada *lista de prioridades min-max*. Nesse caso, como na lista de prioridades apresentada nas seções anteriores, a implementação se faz através de uma lista linear com características especiais, denominada *heap min-max*. Seja  $S$  uma lista linear em que cada nó  $i$  corresponde à chave  $s_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Define-se

$$\text{nível}(i) = \lfloor \log i \rfloor + 1.$$

O nó  $i$  está situado num nível denominado *máximo* se seu nível é par, e num nível denominado *mínimo* em caso contrário.

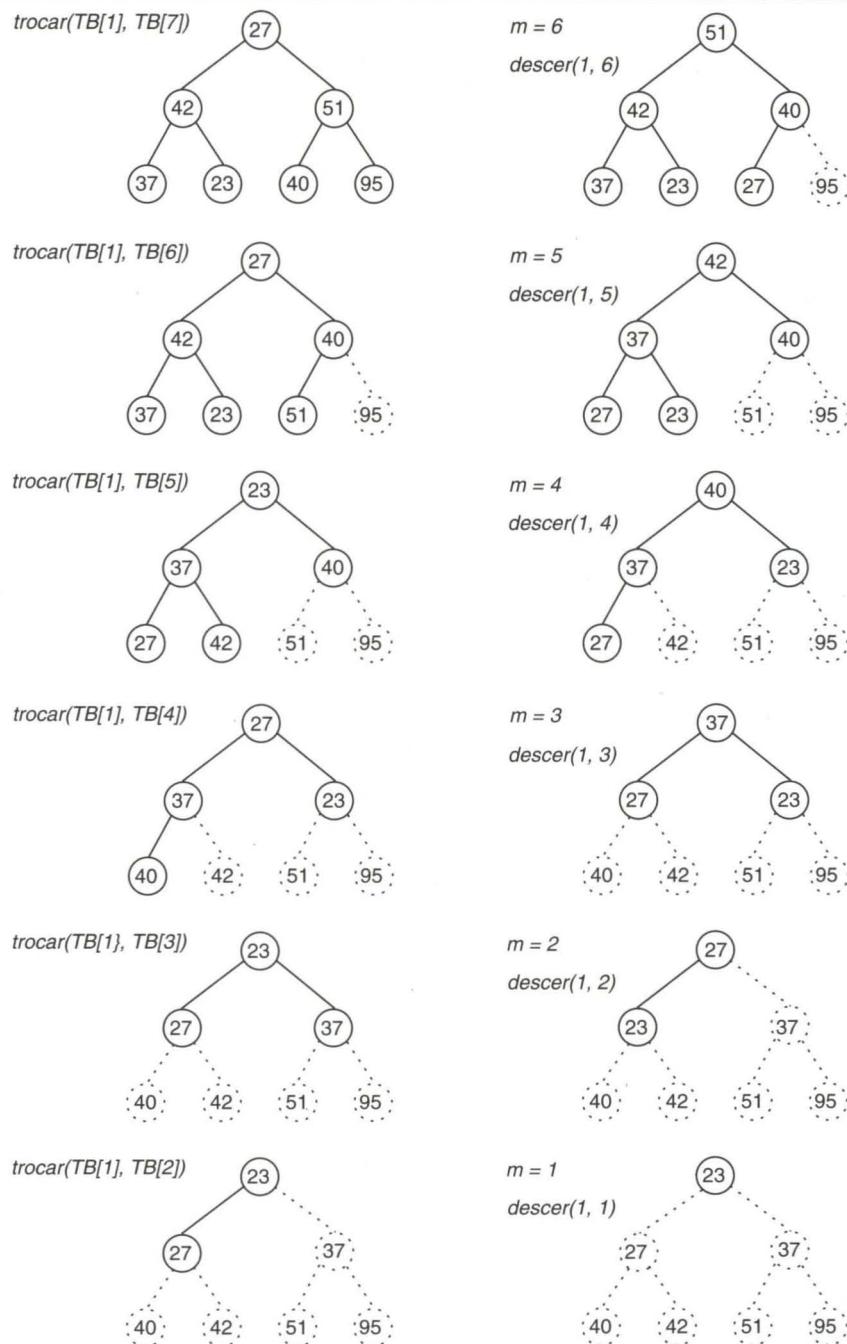


Figura 6.8: Ordenação da tabela

$S$  constitui um *heap min-max* se  $s_1$  é a menor chave e, para todo  $i > 1$ ,

- $i$  está situado num nível mínimo:

$$s_i \leq s_{\lfloor i/2 \rfloor} \quad (\text{ii})$$

$$s_i \geq s_{\lfloor i/4 \rfloor}, \quad i \geq 4 \quad (\text{iii})$$

- $i$  está situado num nível máximo:

$$s_i \geq s_{\lfloor i/2 \rfloor} \quad (\text{iv})$$

$$s_i \leq s_{\lfloor i/4 \rfloor}, \quad i \geq 4 \quad (\text{v})$$

Novamente a visualização das propriedades se faz mais óbvia utilizando-se árvore binária completa. O nível do elemento na lista corresponde a seu nível na árvore; então, o nível da raiz é mínimo, o de seus filhos máximo, e assim alternadamente. As propriedades (ii) e (iii) ((iv) e (v)), aplicadas recursivamente, mostram que a prioridade do nó  $i$ , situado num nível ímpar (par), é menor (maior) que a prioridade de seus descendentes (exercício 6.13). A figura 6.9 ilustra um exemplo de tabela assim construída.

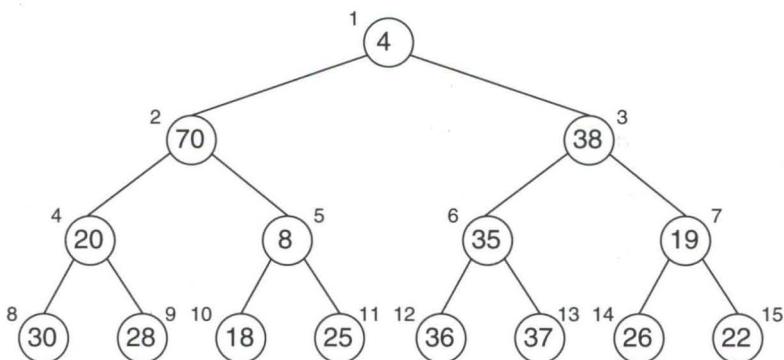
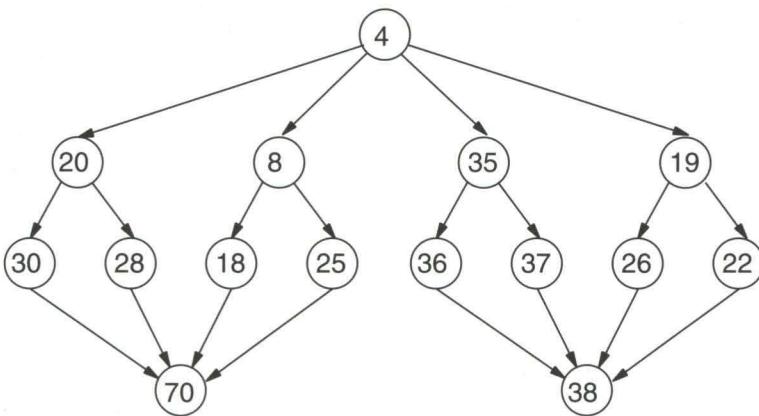


Figura 6.9: Heap min-max



**Figura 6.10:** Relações de ordem

A figura 6.10 mostra as relações de ordem que estão implícitas na árvore do exemplo. Como indicam as setas entre os nós, a relação  $<$  pode ser lida de cima para baixo; a relação  $>$ , de baixo para cima.

Infelizmente, a correspondência entre o aumento e a diminuição de prioridades e o percurso na árvore para cima ou para baixo não mais se verifica para todos os elementos, em virtude da alternância de relações de nível para nível. Em consequência, o problema de alteração de prioridades será restrito aos nós situados no primeiro nível mínimo, no primeiro nível máximo e no último nível da árvore. Estes são exatamente os que nos interessam para realizar as operações de retirar o mínimo, retirar o máximo e inserir um novo elemento, que serão vistas a seguir.

Como já acontecia nas listas de prioridades, para retirar o mínimo ou o máximo, deve-se substituir o elemento desejado pelo último elemento da tabela e depois “descer” na árvore, conforme o procedimento *descer*. Obviamente níveis diversos induzem a tratamentos diversos. Seja, por exemplo, a retirada do elemento de menor prioridade, situado na posição  $i$  ( $i = 1$ , inicialmente), nível mínimo. Após a sua substituição pelo último nó da tabela, a sua prioridade deve ser corrigida. Observa-se, pelas relações (ii) e (iii), que a prioridade do nó  $i$  deve ser menor que a de seus filhos e netos. Seja  $m$  o índice do menor desses elementos. Considere as hipóteses:

–  $s_m$  é filho de  $s_i$  na árvore:

neste caso,  $s_m$  está num nível máximo, e  $s_i$  não tem netos. Se  $s_m < s_i$  é suficiente a troca dos dois nós.

–  $s_m$  é neto de  $s_i$  na árvore:

$s_m$  está também num nível mínimo. A troca entre os dois deve ser feita se  $s_m < s_i$ . Entre os níveis mínimos  $i$  e  $m$  existe um nível máximo que contém o pai  $s_p$  de  $s_m$ . Se  $s_m > s_p$ , as suas posições na lista devem ser trocadas. A nova posição  $m$  do nó pode ainda não ser correta. O procedimento *descer-min* deve ser repetido recursivamente até que isto ocorra.

Para a exclusão do elemento de prioridade máxima, basta observar que ele é o maior dentre os filhos da raiz. Seja  $i$  o seu índice. Nesse caso, basta substituí-lo pelo último nó da lista e executar *descer(i)*. O procedimento *descer-max(i)* é similar ao *descer-min(i)*, exceto pela inversão das relações  $<$  e  $>$ , além da definição de  $m$  como o maior dentre os filhos da raiz. O algoritmo seguinte implementa a idéia. A lista encontra-se armazenada na estrutura  $T$ , sendo  $T[i].chave$  a chave do nó  $i$ .

**algoritmo 6.8:** descer na árvore

**procedimento** *descer(i)*

```
se nivel(i) = min então
    descer-min(i)
senão descer-max(i)
```

**algoritmo 6.9:** descer a partir de um nível mínimo

**procedimento** *descer-min(i)*

```
se  $T[i]$  tem filhos então
     $m :=$  índice do menor de seus filhos e netos
```

```
    se  $T[m]$  é neto de  $T[i]$  então
        se  $T[m].chave < T[i].chave$  então
             $T[m] \leftrightarrow T[i]$ 
             $pai := \lfloor m/2 \rfloor$ 
            se  $T[m].chave > T[pai].chave$  então
                 $T[m] \leftrightarrow T[pai]$ 
                descer-min(m)
        senão se  $T[m].chave < T[i].chave$  então
             $T[i] \leftrightarrow T[m]$ 
```

A inclusão sempre se processa na última posição da tabela. A consequente correção de prioridades implica percorrer-se um caminho de subida na árvore. A prioridade do novo nó deve, de início, ser comparada com a de seu pai. Se o último nível é mínimo, o nó pai está em um nível máximo, e vice-versa. Havendo ou não troca de nós decorrente dessa comparação, o procedimento recursivo de subida deve ser adequado ao nível em que se encontra o novo valor. O procedimento *subir(i)* executa a tarefa. O operador relacional **econd**, que aparece no algoritmo 6.10, comporta-se como o operador **e**, exceto pelo fato de testar a segunda condição da expressão somente se a primeira é verdadeira.

**algoritmo 6.10:** subir na árvore

**procedimento** *subir(i)*

*pai* :=  $\lfloor i/2 \rfloor$

**se** *nivel(i)* = min **então**

**se** *pai*  $\geq 1$  **econd**  $T[i].chave > T[pai].chave$  **então**

$T[i] \Leftrightarrow T[pai]$

*subir-max(pai)*

**senão** *subir-min(i)*

**senão se** *pai*  $\geq 1$  **econd**  $T[i].chave < T[pai].chave$  **então**

$T[i] \Leftrightarrow T[pai]$

*subir-min(pai)*

**senão** *subir-max(i)*

**algoritmo 6.11:** subir a partir de um nível mínimo

**procedimento** *subir-min(i)*

**se**  $T[i]$  tem avô **então**

**se**  $T[i].chave < T[avô].chave$  **então**

$T[i] \Leftrightarrow T[avô]$

*subir-min(i)*

O procedimento *subir-max(i)* é o mesmo, exceto por ter seus operadores relacionais invertidos.

A complexidade dos algoritmos 6.8 a 6.11 é de ordem da altura da árvore, ou seja,  $O(\log n)$ .

## 6.8 – Exercícios

- 6.1 Verificar se estas seqüências correspondem ou não a um heap:

33 32 28 31 26 29 25 30 27

33 32 28 31 29 26 25 30 27

- 6.2 Provar ou dar contra-exemplo:

Seja  $S$  uma seqüência de chaves correspondendo a um heap. Sejam  $s_i$ ,  $s_j$  chaves de  $S$  tais que  $i < j$  e  $s_i < s_j$ . Então a seqüência obtida pela troca de posições de  $s_i$  com  $s_j$  é também um heap.

- 6.3 Repetir o exercício anterior, considerando, agora,  $i < j$  e  $s_i > s_j$ .

- 6.4 Provar ou dar contra-exemplo:

Seja  $S$  um conjunto de chaves e  $T$  uma árvore binária de busca completa para  $S$ , de modo que  $T$  esteja preenchida da esquerda para a direita em seu último nível. Então  $T$  não corresponde a um heap, exceto se  $|T| \leq 2$ .

- 6.5\* Determinar o número de permutações de  $1, \dots, n$  que correspondem à definição de heap.

- 6.6 Seja  $S$  o heap especificado a seguir:

92 85 90 47 91 34 20 40 46

Aplicando o algoritmo da seção 6.3, determinar o heap resultante da alteração de prioridade do seu 5º nó de 91 para

(i) 93

(ii) 19

- 6.7 O procedimento não recursivo *descer*( $i, n$ ) é apresentado abaixo. Implementá-lo e comparar seu tempo de execução com o do procedimento recursivo. Que conclusões podem ser obtidas?

**procedimento** *descer*( $i, n$ )

*extra* :=  $T[i]$ ; *prior* :=  $T[i].chave$ ;  $j := 2 * i$

enquanto  $j \leq n$  faça

se  $j < n$  então

se  $T[j + 1].chave > T[j].chave$  então  $j := j + 1$

se *prior* <  $T[j].chave$  então

$T[i] := T[j]$

$i := j$ ;  $j := 2 \times i$

senão  $j := n + 1$

$T[i] := extra$

6.8 Construir o procedimento  $subir(i)$  sem usar recursividade.

6.9 Seja uma lista dada pelas prioridades a seguir:

18 25 41 34 14 10 52 50 48

Determinar o heap obtido pela aplicação do algoritmo de construção.

6.10 O que acontece se o algoritmo 6.7 for utilizado em uma tabela já ordenada? E se a tabela estiver ordenada, porém invertida?

6.11 Assinalar se certo ou errado:

Se a seqüência a ser ordenada já se encontrar sob a forma de heap, o algoritmo 6.7 requer apenas  $O(n)$  passos para ordenar a seqüência.

6.12 Prove que no máximo  $\lceil n/2j \rceil$  nós têm altura  $j$  numa árvore binária completa.

6.13 Mostrar que, num heap min-max, a prioridade do nó  $i$ , situado em um nível ímpar (par), é menor (maior) do que a de seus descendentes na árvore binária correspondente.

6.14 Provar ou dar contra-exemplo:

Seja uma árvore binária completa em que cada nó  $i$  armazena uma chave  $s_i$  e verifica a seguinte propriedade:

$$nivel(i) = \text{impar} \Rightarrow s_i \leq s_j$$

$$nivel(i) = \text{par} \Rightarrow s_i \geq s_j,$$

onde  $s_j$  é um filho qualquer de  $s_i$ . Então essa árvore constitui um heap min-max.

6.15 Assinalar se certo ou errado:

Todo heap min-max é necessariamente um heap, mas nem todo heap é min-max.

6.16 • Determinar o número de permutações de  $1, \dots, n$  que correspondem a heaps min-max.

6.17 Determinar o heap min-max resultante da alteração de prioridade do nó-raiz da árvore da figura 6.9, de 4 para 41.

6.18 Construir um heap min-max para uma tabela, com as seguintes prioridades:

10 11 2 8 16 3 24 42 68 14 3 1 15 16 71 59 63

- 6.19 Escrever um algoritmo para construir um heap min-max, para um dado conjunto de elementos com prioridades conhecidas. Determinar a sua complexidade.
- 6.20 Implementar os algoritmos de inserção e remoção numa lista de prioridades min-max.
- 6.21• Utilizando listas de prioridades, descrever um algoritmo de alocação de memória de tamanho variável, segundo o modelo descrito na seção 2.8. Formular algoritmos de reserva e liberação que sejam de complexidade  $O(\log n)$ , onde  $n$  é o número de blocos de memória disponível.

## Notas Bibliográficas

É relativamente vasta a literatura do estudo de diferentes implementações para listas de prioridades. Williams [Wi64] foi quem introduziu o *heap*, estrutura simples, cuja eficiência a mantém atual até hoje. A técnica utilizada para a construção de heaps foi, inicialmente, descrita por Floyd [Fl64]. Bentley [Be85] apresenta uma introdução à estrutura heap para ordenação e representação de listas de prioridades. A implementação de listas de prioridades min-max, apresentada na seção 6.5, é devida a Atkinson, Sack, Santoro e Strohtte [At86].

# Estruturas Auto-ajustáveis

## 7.1 – Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo de algumas estruturas que possuem como característica comum o fato de serem *auto-ajustáveis*.

Ao se efetuarem determinadas operações sobre uma estrutura de dados, estas determinam necessariamente uma modificação na sua forma. É o caso, por exemplo, da inserção e da remoção, que causam o seu crescimento ou redução. Uma estrutura *auto-ajustável* pode mudar sua forma também como efeito secundário de operações inócuas, como uma busca. Observe o caso de uma árvore binária de busca, já conhecida. Se uma seqüência de inserções produz uma folha de nível  $O(n)$ , uma seqüência de  $m$  buscas a essa chave apresentará uma complexidade de  $O(mn)$ . Se a estrutura for auto-ajustável, ela poderá reagir, modificando o nível dos nós em função da freqüência com que são buscados. Pode-se dizer que esta é uma nova abordagem para o problema já estudado em árvores平衡adas. Nestas, o rebalanceamento é realizado de tempos em tempos, em decorrência da degradação da forma da estrutura, devido a operações de inserções e remoções. Em contraste, a idéia de uma estrutura auto-ajustável envolve operações de ajuste apenas locais, realizadas, contudo, com grande freqüência. Por exemplo, após cada busca na estrutura.

A avaliação da eficiência de algoritmos se fez até agora através da determinação da complexidade do pior caso, examinando-se individualmente cada

operação executada. Essa análise, entretanto, pode se mostrar muito pessimista, induzindo a erros de avaliação. Uma alternativa é a análise da seqüência completa de operações, onde o tempo despendido com sua realização é analisado como um todo e não como uma sucessão de operações individuais. Tal avaliação é conhecida como *complexidade amortizada*. Sendo assim, antes mesmo da apresentação de algumas estruturas auto-ajustáveis, a seção 7.2 introduz o conceito de complexidade amortizada. A seção 7.3 examina as estruturas auto-ajustáveis mais simples – as listas. O estudo de manipulação de conjuntos é realizado na seção 7.4. Finalmente, uma árvore binária de busca auto-ajustável, denominada *árvore de difusão*, é examinada na seção 7.5.

## 7.2 – Complexidade Amortizada

O objetivo da complexidade ordinária é determinar o tempo despendido por uma operação no seu pior caso, sem preocupação com o efeito da mesma. Em contrapartida, a complexidade amortizada considera as configurações da estrutura antes e após a operação e examina cada uma das operações como parte integrante de uma seqüência. Assim, nesse enfoque cada operação individual não deverá ser considerada, necessariamente, em seu pior caso.

Duas versões diferentes apresentam o conceito de complexidade amortizada: a “visão do banqueiro” e a “visão do físico”. A primeira trata a análise do algoritmo em questão como um sistema de avaliação de créditos e débitos. Suponha que cada operação realizada no algoritmo que se quer avaliar, conhecida como *operação individual*, tenha direito a um certo número de créditos, definido como o *tempo amortizado* da operação. O objetivo é, então, mostrar que a seqüência de operações pode ser executada com o somatório de créditos alocados. Conceitos semelhantes aos de uma operação bancária são observados. Assim, durante o processo, créditos podem ser “tomados emprestados” de operações subsequentes. Entretanto, chegando-se ao fim da seqüência, estes devem ter sido pagos, isto é, devem ter sido economizados por outras operações. O conceito básico é que nem todas as operações despendem os créditos alocados, e algumas despendem mais do que o permitido. O que se deve demonstrar é que, na seqüência de operações, essas sobras e faltas se compensam. Ao fim do processo, pode-se garantir que o tempo real de execução da seqüência de operações tem como limite superior o somatório dos tempos amortizados correspondentes.

Um exemplo simples que ilustra esse sistema é o problema da manipulação de uma pilha. Já são conhecidas as operações primitivas referentes a pilhas:

- operação *insere*: insere um elemento no topo da pilha;
- operação *retira*: retira um elemento do topo da pilha.

Nesse exemplo, uma operação individual é composta por zero ou mais operações *retira*, seguidas, obrigatoriamente, por uma operação *insere*. Utilizando-se a análise de pior caso, de imediato se observa que, para um conjunto de  $n$  elementos, a complexidade de tal operação é  $O(n)$ , em virtude da possibilidade de múltiplas retiradas; no pior caso, a pilha terá  $n$  elementos e a operação despendrá pelo menos  $n + 1$  passos. Ora, ao se considerar uma seqüência de  $m$  operações desse tipo, ter-se-á a complexidade de  $O(m n)$ .

Ainda utilizando-se o conceito de complexidade do pior caso, pode-se tentar melhorar esse resultado. Ao se considerar uma seqüência de  $m$  operações, pode-se observar que a  $i$ -ésima operação só pode retirar, no máximo,  $i - 1$  elementos da pilha, pois só  $i - 1$  elementos poderiam já ter sido colocados. Ter-se-ia então um tempo de  $i$  unidades para cada operação realizada. O tempo total seria de

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{(m+1)m}{2} = O(m^2)$$

e o resultado não apresentaria melhora sensível, mesmo se o número de operações,  $m$ , fosse menor do que a dimensão  $n$  da tabela.

Observe agora como é feita a análise amortizada desta seqüência. Para cada operação individual, são alocados dois créditos. Considera-se que a operação *insere* consome um crédito e a operação *retira*, outro. Uma operação individual com zero *retira* poupará um crédito. Ao acontecer uma operação individual que efetue diversos *retira*, estes corresponderão exatamente aos créditos economizados anteriormente, uma vez que só podem ser retirados elementos que foram previamente colocados na pilha e que não foram desempilhados em operações precedentes.

Assim, em uma operação individual, cada *retira* múltiplo é compensado por créditos economizados. Neste exemplo, não é necessário o empréstimo de créditos. A complexidade amortizada de uma seqüência de  $m$  operações individuais é  $O(2m) = O(m)$ . Obviamente, a análise tradicional não está

errada; ela fornece um limite superior ao número encontrado pela análise amortizada.

A segunda técnica de análise é denominada “visão do físico” que, de certa forma, é uma analogia com o conceito de energia potencial. Para essa abordagem é necessário o conceito da *função potencial*  $\Phi$ , que mapeia qualquer configuração  $E$  da estrutura num número real  $\Phi(E)$ , chamado *potencial* de  $E$ . O potencial de uma certa configuração pode ser utilizado para custear operações a serem realizadas posteriormente. O *tempo amortizado* de uma operação é definido como

$$a = t + \Phi(E') - \Phi(E)$$

onde  $t$  é o tempo real da operação e  $E$  e  $E'$  são as configurações da estrutura antes e depois da operação, respectivamente. Para uma seqüência de  $m$  operações, tem-se:

$$\sum_{i=1}^m t_i = \sum_{i=1}^m (a_i - \Phi_i + \Phi_{i-1}) = \Phi_0 - \Phi_m + \sum_{i=1}^m a_i$$

onde  $a_i$  e  $t_i$  são os tempos amortizado e real da  $i$ -ésima operação, e  $\Phi_0$ ,  $\Phi_m$  são os potenciais antes da primeira operação e após a última, respectivamente. O tempo total real não depende dos potenciais intermediários. Ele representa a soma da complexidade amortizada total com a diferença de potencial da estrutura antes e depois da seqüência de operações. Se o potencial final for maior ou igual ao inicial, então a complexidade amortizada total pode ser utilizada como um limite superior para estimar o tempo total real.

Na realidade, qualquer função potencial pode ser escolhida; o bom resultado da avaliação dependerá de quão astuta for tal escolha. Observe como é feita essa análise no exemplo de manipulação da pilha, já apresentado anteriormente. O potencial da pilha é definido como o número de itens que ela contém. Assim, o potencial inicial é zero e o potencial é sempre não negativo. Suponha agora a execução da  $i$ -ésima operação da seqüência; encontram-se na pilha  $p$  elementos, e a operação individual consta de  $k$  operações *retira* e uma operação *insere*. Pode-se então observar que

- o tempo real da operação é  $t_i = 1 + k$ ;

- o potencial antes da operação corresponde ao número de elementos da pilha, sendo então  $\Phi(E) = p$ ;
- o potencial depois da operação corresponde ao número de elementos anteriormente na pilha, menos os  $k$  elementos retirados mais o elemento inserido pela operação, sendo então  $\Phi(E') = p - k + 1$ .

O tempo amortizado correspondente a uma operação individual é, então, o obtido aplicando-se a expressão anterior. Seu valor é  $(1+k)+(p-k+1)-p = 2$ . Para o cálculo de  $m$  operações, sabe-se que o potencial inicial é zero e o potencial é sempre não negativo. Então,

$$\sum_{i=1}^m t_i = 0 - \Phi_m + \sum_{i=1}^m 2.$$

O tempo total real dessas  $m$  operações será, então, limitado superiormente por  $2m$ .

### 7.3 – Listas

A estrutura mais simples que pode utilizar o conceito de auto-ajuste é a lista linear, em suas duas versões de armazenamento, seqüencial e encadeada. Já foi visto, no capítulo 2, que a maneira mais simples de organizar essa lista é através de uma seqüência dos nós sem ordenação. Uma característica importante pode, entretanto, ser considerada: o fato de que alguns nós são acessados mais freqüentemente que outros. Uma *lista linear auto-ajustável* deve então permitar a ordem de seus nós, tentando colocar em posições mais próximas do início os nós mais procurados de forma a reduzir o tempo de acesso em operações subseqüentes.

Se bem que outras estruturas possam apresentar desempenhos melhores para a busca, o emprego de listas auto-ajustáveis se justifica principalmente quando o tamanho da lista é pequeno (algumas dezenas de nós), uma vez que a simplicidade dos algoritmos a serem programados compensa o fato de não se utilizarem estruturas mais elaboradas. Uma aplicação interessante que se enquadra perfeitamente nesse caso é a utilização de auto-ajuste nas listas encadeadas que resolvem colisões por encadeamento exterior em tabelas de dispersão, assunto que será visto no capítulo 8. Outra aplicação é na área de sistemas operacionais, que utiliza listas auto-ajustáveis na política

de gerência de memória virtual conhecida como LRU (*least recently used*, menos recentemente utilizada).

A implementação de listas auto-ajustáveis pode ser feita por métodos diferentes, alguns dos quais serão estudados a seguir.

### 7.3.1 – Métodos de auto-ajuste para listas

Considere uma seqüência de buscas realizadas em uma lista linear.

#### Mover para a frente (MF)

Neste método, quando a chave desejada é encontrada, o nó é transferido para o início da lista, caso ele ainda não se encontre nessa posição. Se o armazenamento da lista é encadeado, essa operação não apresenta problemas. Entretanto, se é seqüencial, serão movimentados todos os nós que se encontravam antes do nó considerado.

Deve-se observar que, todas as vezes que um nó com baixa probabilidade é acessado e movido para a frente da lista, ele incrementa os custos de futuros acessos a muitos outros nós.

#### Transposição (TR)

Após acessar o nó que possui a chave desejada, este é trocado com o nó que imediatamente o precede. Com esse método, um nó só se aproxima do início da lista se ele é acessado freqüentemente.

Uma vantagem interessante do método é sua aplicação a listas em armazenamento seqüencial.

#### Contador de freqüência (CF)

Cada nó possui um contador, onde é mantido o número de acessos efetuados. Após cada acesso, o contador é incrementado, e esse nó é movido para uma posição da tabela tal que todos os nós com contador menor estejam situados depois dele. Assim, os nós na lista estão sempre dispostos em ordem não crescente pelo valor do contador.

Uma característica importante do método é que, ao fim da seqüência de buscas, a tabela está perfeitamente ordenada pela probabilidade de acesso, o que é a ordem estática ótima para essa lista. Note que, durante a seqüência de acessos, a lista não está necessariamente nesta ordem ótima, mas se aproxima à medida que a seqüência prossegue.

### Mover para a frente $k$ ( $MF-k$ )

Este método tenta estabelecer um compromisso entre os relativos extremos dos métodos  $MF$  e  $TR$ . Após o acesso a um nó, este é movido  $k$  posições para frente, se possível, na tabela. Por essa definição, se  $k'$  é a distância do nó ao início da lista,  $MF$  é equivalente a  $MF-k'$  e  $TR$  é equivalente a  $MF-1$ .

### Métodos híbridos

Algumas tentativas foram feitas para combinar vantagens de dois métodos de auto-ajuste. Assim, pode-se considerar um método onde o algoritmo  $MF$  é aplicado até uma disposição satisfatória da lista e depois trocado para o algoritmo  $TR$ . O problema é, obviamente, definir o momento da troca do primeiro pelo segundo algoritmo utilizado.

A composição dos algoritmos  $TR$  e  $CF$  também foi considerada. Uma vez que  $CF$  pode efetuar operações de reajuste inadequadas no início da seqüência de operações, a idéia é usar  $TR$  nesse período até que a tabela de contadores se encontre razoavelmente estável.

$a_8 \quad b_5 \quad c_5 \quad w_4 \quad y_3 \quad z_3 \quad t_3 \quad x_3 \quad \dots$	(a)
---	-----

$MF \quad x \quad a \quad b \quad c \quad w \quad y \quad z \quad t \quad \dots$	(b)
--	-----

$TR \quad a \quad b \quad c \quad w \quad y \quad z \quad x \quad t \quad \dots$	(c)
--	-----

$CF \quad a \quad b \quad c \quad w \quad x \quad y \quad z \quad t \quad \dots$	(d)
--	-----

Figura 7.1: Auto-ajuste em listas

A figura 7.1(a) mostra uma tabela e o contador de freqüência de suas chaves. A aplicação dos métodos  $MF$ ,  $TR$  e  $CF$ , após o acesso à chave  $x$ , aparece nas figuras 7.1(b), 7.1(c) e 7.1(d), respectivamente.

### 7.3.2 – Análise do método mover para a frente

Nesta seção, serão apresentados alguns resultados referentes ao método *mover para a frente*. A escolha deste método em particular se deve ao fato de que este é o algoritmo de auto-ajuste para listas lineares mais usado e analisado ao longo dos anos. Os resultados obtidos, alguns dos quais aqui apresentados, justificam o interesse pelo método.

Um método de ajuste é chamado *admissível* se ele toma a forma “após o acesso a um nó, movê-lo zero ou mais posições para a frente na tabela”. Como nenhuma restrição é colocada quanto ao movimento realizado, todos os métodos mencionados na seção anterior são admissíveis.

Para um método admissível  $H$  e uma seqüência  $s$  de operações quaisquer, tem-se:

$C_H(s)$  : o tempo total real da seqüência de operações;

$E_H(s)$  : o número total de trocas de posição realizadas.

#### Teorema 7.1:

Para qualquer método admissível  $H$ , e qualquer seqüência  $s$  de dimensão  $m$  composta por operações de busca com sucesso e inserções, a partir da lista vazia, tem-se:

$$C_{MF}(s) \leq 2C_H(s) - E_H(s) - m.$$

Isto é, o tempo total real do método mover para a frente nunca é maior do que duas vezes o tempo de qualquer outro método admissível.

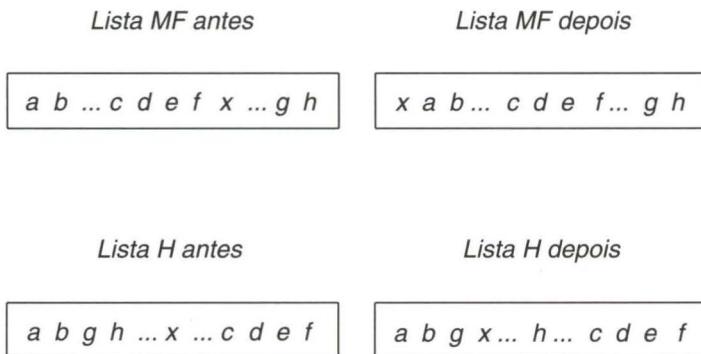
#### Prova:

Nesta demonstração, a visão do físico, apresentada na seção 7.2, é utilizada.

Considere a seqüência  $s$  aplicada segundo os dois métodos, resultando nas listas  $MF$  e  $H$ . Para definir a função potencial, deve-se conceituar primeiramente uma *inversão* de dois elementos. Para duas listas quaisquer contendo os mesmos elementos, uma *inversão* em uma das listas em relação à outra é um par não ordenado  $i, j$  tal que, se  $i$  ocorre antes de  $j$  em uma das listas, ele ocorre depois de  $j$  na outra. A função potencial utilizada é, então, o número total de inversões na lista  $MF$  em relação à lista  $H$ .

Considere, inicialmente, a operação de inserção. Em se tratando de listas lineares, uma premissa aceitável é que todas as inserções sejam feitas no fim da lista. Nesse caso, a operação não altera o número de inversões.

Suponha a operação de acesso a um elemento  $x$ , sendo  $x$  o  $j$ -ésimo elemento na lista  $MF$  e o  $k$ -ésimo na lista  $H$ . Dentre os elementos que precedem  $x$  em  $MF$ , alguns também o precedem em  $H$  (por exemplo, o elemento  $a$  na figura 7.2). Outros, como o elemento  $d$  da mesma figura, precedem  $x$  em  $MF$ , mas o sucedem em  $H$ . Seja  $p$  o número de elementos que se encontram neste segundo caso. Após o acesso ao elemento  $x$ , este deve ser movido para a frente na lista  $MF$ , passando sobre  $j - 1$  nós. Então,  $j - 1 - p$  inversões são criadas e  $p$  inversões são destruídas.



**Figura 7.2:** Teorema 7.1

Com o elemento  $x$  na frente da lista  $MF$ , cada nó que precede  $x$  na lista  $H$  forma agora uma inversão. Então, quando  $x$  é movido  $e_i$  posições para a esquerda na lista  $H$  (o movimento depende do método admissível que esteja sendo utilizado), exatamente  $e_i$  inversões são destruídas. Por outro lado, a movimentação de  $x$  em  $H$  não cria qualquer inversão, pois  $x$  ocupa a primeira posição em  $MF$ .

Já se sabe que o tempo amortizado para a operação considerada é  $a_i = t_i + \Phi(E') - \Phi(E)$ . O tempo real  $t_i$  para o acesso ao elemento  $x$  é  $j$  na lista  $MF$ . A diferença de potencial é o resultado das inversões acrescentadas e

destruídas, que foram vistas anteriormente. Tem-se

$$\begin{aligned} a_i &= j + (j - 1 - p) - p - e_i \\ &= 2(j - 1 - p) - e_i + 1. \end{aligned}$$

Pode-se lembrar que  $j - 1 - p$  é justamente o número de nós que, na configuração inicial da demonstração, precedia  $x$  na lista  $MF$  e também o precedia na lista  $H$ . Como  $x$  se encontrava na posição  $k$  na lista  $H$ , pode-se garantir que  $j - 1 - p \leq k - 1$ . Então,

$$a_i \leq 2(k - 1) - e_i + 1 = 2k - e_i - 1$$

Observe que  $k$  é exatamente o tempo real da operação em  $H$ . Sendo  $\Phi_0 = 0$  e  $\Phi_m \geq 0$ , o somatório do tempo real de todas as operações é

$$\begin{aligned} C_{MF}(s) &= \sum_{i=1}^m t_i \\ &\leq \sum_{i=1}^m a_i \\ &\leq 2C_H(s) - E_H(s) - m. \end{aligned}$$

□

Esse resultado, obtido para o método mover para a frente, não é válido para o método de transposição. Um contra-exemplo é uma tabela onde são inseridos  $n$  itens e depois, repetidamente, se acessa o último elemento  $O(n)$  vezes. O tempo do contra-exemplo é  $O(n^2)$ , enquanto o correspondente ao método mover para a frente é igual a  $O(n)$ , para a mesma situação.

Igualmente, o resultado não vale para o método do contador de freqüência. Um contra-exemplo consiste em uma lista com  $n$  itens. O primeiro deles é acessado  $n$  vezes, o segundo  $n - 1$  vezes, e assim por diante. O método contador de freqüência não rearruma a lista. O seu tempo é  $n + 2(n - 1) + \dots + n \cdot 1 = O(n^3)$ . Enquanto isto, o tempo do método mover para a frente é  $(n - 1 + n - 2 + \dots + 1) + (1 + 2 + \dots + n) = O(n^2)$ .

## 7.4 – Conjuntos

Uma estrutura de dados de larga aplicação é aquela que suporta a execução de operações normalmente realizadas em conjuntos. Por exemplo, unir duas dessas estruturas em uma única e assim por diante. Por isso mesmo, essa estrutura é denominada *conjunto*. Sua implementação pode ser feita através de listas, assunto tratado no capítulo 2.

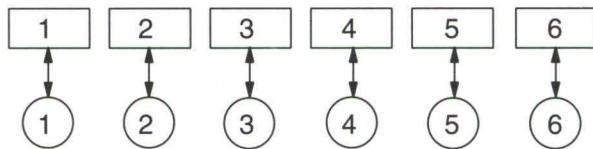
Um caso particular dessa estrutura modela problemas em áreas diversas como construção de compiladores e problemas combinatórios. Trata-se do caso em que se está lidando com uma *coleção de conjuntos disjuntos*. Sobre essa coleção, as seguintes três operações básicas são executadas. Supõe-se que os elementos do conjunto pertencem a um universo de  $n$  elementos.

- *gerar*, que cria um conjunto unitário  $\{x\}$  para cada elemento  $\{x\}$  do universo, sendo  $x$  também o nome do conjunto.
- *buscar*( $x$ ), que determina o nome do conjunto ao qual o elemento  $x$  pertence.
- *fundir*( $a, b$ ), que determina a união dos conjuntos disjuntos, cujos nomes são  $a$  e  $b$ . O resultado da fusão é atribuído ao primeiro desses conjuntos.

Dados  $n$  elementos, uma seqüência de operações consta então de uma operação *gerar* e  $m$  operações *buscar* e *fundir*, intercaladas de qualquer forma. Se a seqüência contiver  $n - 1$  operações *fundir*, a coleção original de conjuntos unitários é transformada em um só conjunto. Ao longo deste processo, a coleção se constitui sempre em uma partição do universo.

É evidente que é possível criar os procedimentos mencionados a partir de operações tradicionais sobre a estrutura de dados conjunto. A eficiência dos resultados, utilizando-se as implementações usuais, deixaria, entretanto, muito a desejar.

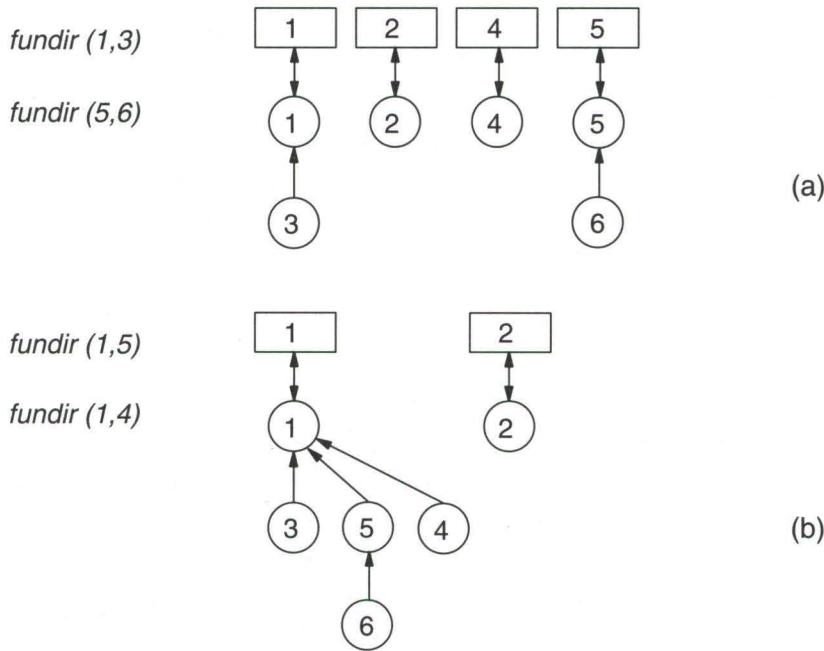
Uma idéia alternativa parte da premissa de que deve ser criado, de início, um conjunto para cada elemento existente no universo do problema e que os conjuntos existentes no decorrer do desenvolvimento são sempre disjuntos. Sugere-se, então, que sua representação na memória defina uma estrutura independente para cada um desses conjuntos, como uma lista ou árvore. Uma solução consiste em representar a estrutura através de um conjunto de árvores, correspondendo cada árvore a um dos conjuntos considerados. As árvores, por sua vez, são constituídas de nós, cada um apontando seu



---

Figura 7.3: Inicialização da estrutura

---



---

Figura 7.4: Operação fundir

---

pai na estrutura. Como são estruturas distintas, é necessário manter a associação entre o nome do conjunto e a árvore que o representa, o que pode ser realizado por um nó-cabeça. A operação *gerar* cria essa estrutura. A figura 7.3 apresenta a floresta criada pela operação *gerar* para o universo  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

A operação  $fundir(a, b)$  simplesmente redireciona o ponteiro do nó-raiz da árvore correspondente ao conjunto  $b$ , fazendo-o apontar para o nó-raiz do

conjunto  $a$ . As figuras 7.4(a) e 7.4(b) ilustram a seqüência de algumas operações *fundir*. Pode-se notar que o nome do conjunto resultante corresponde sempre ao nó-raiz da árvore.

Por fim, a operação  $buscar(x)$  é um simples percurso na árvore a partir do nó  $x$  até a raiz.

Os algoritmos referentes às três operações serão vistos na seção seguinte, onde será então justificada a necessidade do nó-cabeça para cada uma das árvores da floresta.

#### 7.4.1 – Fusão por tamanho

A execução de uma seqüência de operações *fundir* – sendo o primeiro conjunto sempre um conjunto unitário e o segundo conjunto, o resultado da operação anterior – criará uma árvore degenerada, isto é, uma lista encadeada de comprimento de  $O(n)$ . Tal fato torna a complexidade da operação *buscar* também de  $O(n)$ .

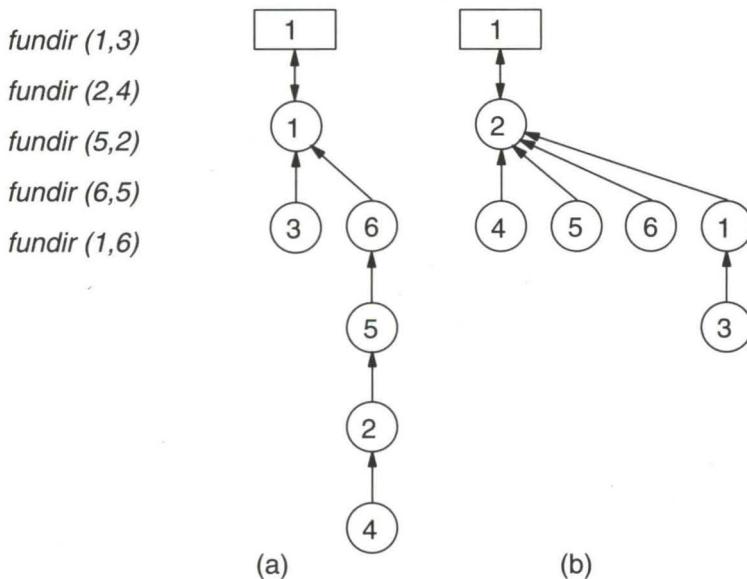


Figura 7.5: Fusão sem e com critério de tamanho

Devem-se então introduzir modificações no procedimento de forma a manter a árvore resultante balanceada, segundo o conceito já apresentado no capítulo 5. Isto pode ser realizado conhecendo-se o número de nós de cada árvore e estabelecendo-se, na operação *fundir*, que a raiz da menor árvore aponta para a raiz da maior, caso sejam de tamanhos distintos. Tal processo é conhecido por *fusão por tamanho*. A figura 7.5(a) mostra o resultado de uma seqüência de operações *fundir* sem a utilização do método, e a figura 7.5(b) a mesma seqüência utilizando a fusão por tamanho. Observa-se que, no segundo caso, o nome da árvore nem sempre corresponde a seu nó-raiz.

O teorema a seguir prova que a árvore obtida por este método é balanceada.

### **Teorema 7.2:**

Considere uma seqüência  $s_0, s_1, \dots, s_m$  de operações. A operação  $s_0$  é *gerar* e  $s_1, \dots, s_m$  são operações *fundir* e *buscar* em conjuntos disjuntos, empregando fusão por tamanho. Seja  $x$  um nó qualquer do universo considerado e  $T_x$  a árvore que armazena  $x$ . Após a operação  $s_m$ ,  $T_x$  é uma árvore balanceada.

### **Prova:**

A prova consiste em mostrar que  $2^{h(T_x)-1} \leq |T_x|$ , onde  $|T_x|$  é o número de elementos da árvore  $T_x$ , e  $h$  sua altura. Nesse caso,  $h(T_x) = O(\log |T_x|)$ , o que implica  $T_x$  balanceada.

A prova dessa desigualdade é feita por indução.

Para  $m = 0$ , o teorema é válido; tem-se construída a floresta de  $n$  árvores, cada uma com um elemento.

Pela hipótese da indução, antes da operação  $s_m$  o teorema está correto para todos os nós  $x$ . É preciso provar que é válido após  $s_m$ .

Se  $s_m$  é *buscar*( $x$ ), não há mudança na estrutura e vale o teorema. Suponha que  $s_m$  é a operação *fundir*( $v, w$ ). Sem perda de generalidade, pode-se assumir que  $|T_v| \leq |T_w|$ . Nesse caso, o conjunto  $v$  será ligado ao conjunto  $w$ , criando uma nova árvore  $T$ , como é visto na figura 7.6.

Claramente  $h_T = \max(1 + h(T_v), h(T_w))$ . Então, como antes da operação  $s_m$  o teorema era válido para os nós  $v$  e  $w$  tem-se

$$\begin{aligned}
 2^{h(T)-1} &= 2^{\max(1+h(T_v), h(T_w))-1} \\
 &= \max(2^{h(T_v)-1+1}, 2^{h(T_w)-1}) \\
 &\leq \max(2|T_v|, |T_w|).
 \end{aligned}$$

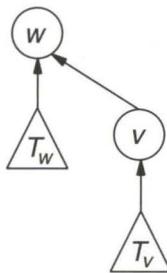
Por outro lado, sabe-se que a operação *fundir* gera a árvore  $T$  tal que  $|T| = |T_v| + |T_w|$ , e considerou-se  $|T_v| \leq |T_w|$ . Pode-se concluir que

$$2|T_v| \leq |T| \quad \text{e} \quad |T_w| \leq |T|.$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned}
 2^{h(T)-1} &\leq \max(|T|, |T|) \\
 2^{h(T)-1} &\leq |T|.
 \end{aligned}$$

□



**Figura 7.6:** Teorema 7.2

Os algoritmos para as operações *gerar*, *buscar* e *fundir* são apresentados a seguir. Para a implementação da floresta que representa a coleção de conjuntos disjuntos são considerados quatro vetores. Primeiramente, os vetores *raiz* e *tam*, referentes aos conjuntos propriamente ditos, isto é, ao nó-cabeça das árvores; *raiz*[*i*] indica o nó-raiz da árvore correspondente ao conjunto de nome *i* e *tam*[*i*], o número de nós do conjunto. O vetor *pai* se refere aos elementos dos conjuntos; logo, aos nós das árvores. Ele indica o pai de cada nó, exceto para a raiz, que possui *pai* = 0. O vetor *nome* indica, para o nó-raiz da árvore, o nome do conjunto correspondente. Supõe-se que

todos os nomes e elementos dos conjuntos considerados sejam pertencentes ao universo  $\{1, \dots, n\}$ .

**algoritmo 7.1:** geração da coleção de conjuntos

**procedimento gerar**

**para**  $i := 1, n$  **faca**

$raiz[i] := i$ ;    $tam[i] := 1$

$pai[i] := 0$ ;    $nome[i] := i$

**algoritmo 7.2:** determinar o nome do conjunto ao qual  $x$  pertence

**função buscar( $x$ )**

$y := x$

**enquanto**  $pai[y] \neq 0$  **faca**

$y := pai[y]$

$buscar := nome[y]$

**algoritmo 7.3:** fusão de conjuntos

**procedimento fundir( $a, b$ )**

$ra := raiz[a]$ ;    $rb := raiz[b]$

**se**  $ra = 0$  **ou**  $rb = 0$  **então**

        “erro:  $a$  ou  $b$  não são válidos”

**pare**

**se**  $ra \neq rb$  **então**

**se**  $tam[a] < tam[b]$  **então**

$temp := ra$ ;    $ra := rb$ ;    $rb := temp$

$pai[rb] := ra$

$nome[ra] := a$

$tam[a] := tam[a] + tam[b]$

$raiz[a] := ra$ ;    $raiz[b] := 0$

## 7.4.2 – Compactação de caminhos

Na seção anterior, foi visto como é possível melhorar o desempenho da operação *fundir*. Agora será visto como a operação *buscar* pode incorporar o conceito de auto-ajuste, de forma a torná-la bem mais eficiente.

A operação *buscar* consiste em um percurso do caminho do nó desejado até a raiz da árvore. A idéia básica para diminuir o tempo de busca é compactar o caminho percorrido, de forma que as próximas buscas percorram um caminho

menor. A compactação é realizada durante o próprio procedimento de busca. Três métodos diferentes podem ser empregados:

**Compressão de caminhos:**

Fazer cada nó do caminho apontar para a raiz da árvore.

**Separação de caminhos:**

Fazer cada nó do caminho, exceto a raiz e seu filho, apontar para seu avô.

**Divisão de caminhos:**

Fazer cada nó de ordem ímpar na busca, exceto a raiz ou seu filho, apontar para o seu avô.

As figuras 7.7(b), (c) e (d), respectivamente, ilustram as aplicações dos métodos descritos, após a busca ao nó  $a$ , da árvore da figura 7.7(a).

Os algoritmos para cada método de compactação são vistos a seguir. A implementação utiliza as mesmas estruturas de armazenamento vistas nos algoritmos anteriores. Somente a operação de busca deve ser modificada.

**algoritmo 7.4:** Compressão de caminhos

**função** *comp-buscar*( $x$ )

```

 $y := x$ 
enquanto  $pai[y] \neq 0$  faça
     $y := pai[y]$ 
enquanto  $pai[x] \neq 0$  faça
     $z := pai[x]$ 
     $pai[x] := y$ 
     $x := z$ 
comp-buscar := nome[ $y$ ]

```

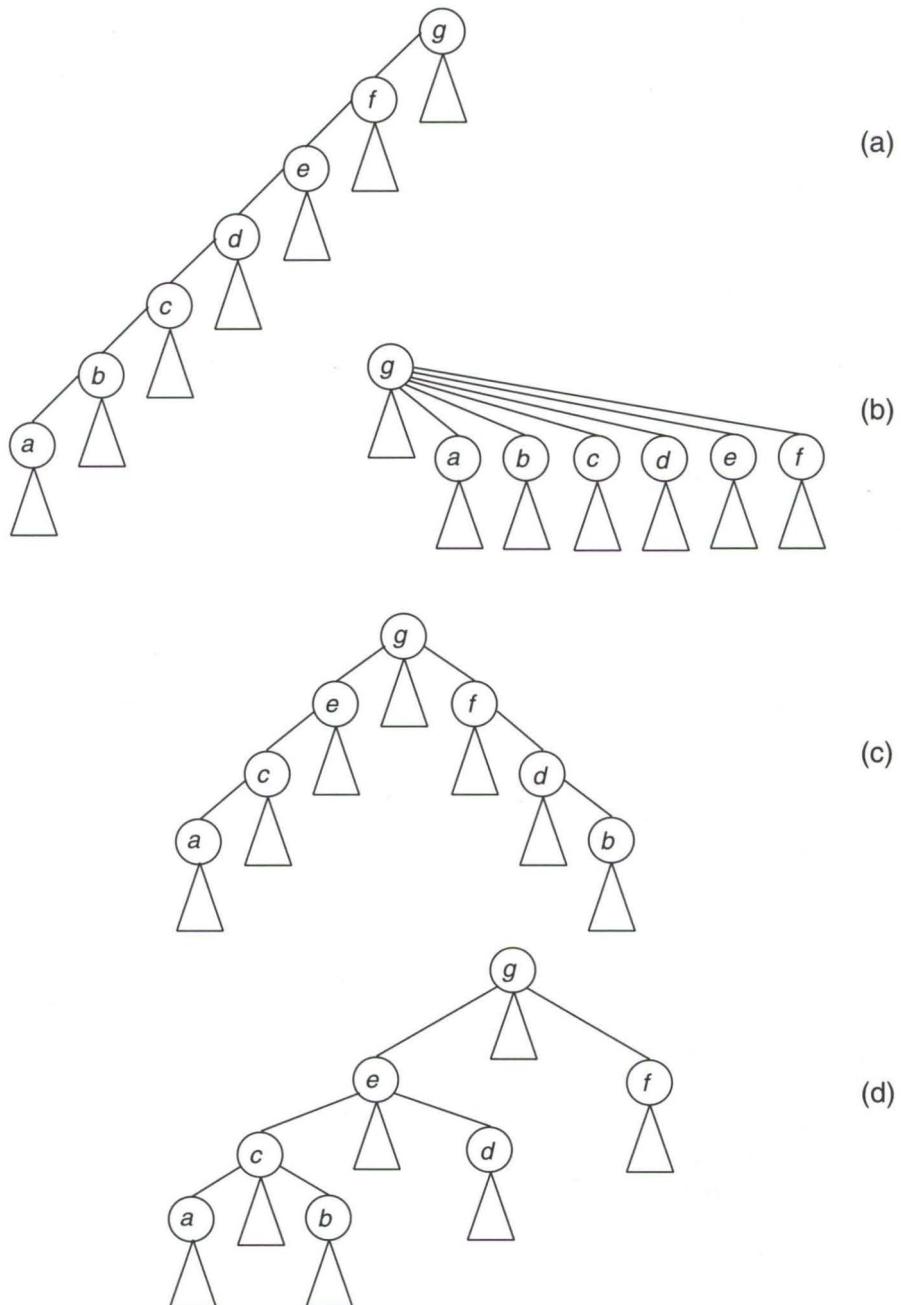
**algoritmo 7.5:** Separação de caminhos

**função** *sep-buscar*( $x$ )

```

 $y := pai[x]$ 
se  $y = 0$  então
    retornar (nome[ $x$ ])
 $z := pai[y]$ 
enquanto  $z \neq 0$  faça
     $pai[x] := z$ 
     $x := y; y := z$ 
     $z := pai[y]$ 
sep-buscar := nome[ $y$ ]

```



---

Figura 7.7: Critérios de compactação de caminhos

**algoritmo 7.6:** Divisão de caminhos

**função** *div-buscar*(*x*)

```

y := pai[x]
se y = 0 então
    retornar (nome[x])
z := pai[y]
enquanto z ≠ 0 faça
    pai[x] := z
    x := z; y := pai[x]
    se y = 0 então
        div-buscar := nome[x]
    z := pai[y]
div-buscar := nome[y]
```

### 7.4.3 – A complexidade das operações

Os algoritmos descritos para fusão por tamanho e compressão de caminhos não apresentam quaisquer dificuldades. Contudo, a sua análise é bem mais difícil e foge ao escopo deste livro. Dir-se-á apenas que, para uma seqüência de  $n - 1$  operações *fundir* e  $m$  operações *buscar* intercaladas, foi provado que a complexidade é  $O(n + m\alpha(m + n, n))$ .

Para compreender esse resultado, é necessário inicialmente conhecer a função Ackerman *A* e seu *inverso*  $\alpha$ . As definições são:

$$A(p, q) = \begin{cases} 2^q & p = 1, q \geq 1 \\ A(p - 1, 2) & p \geq 2, q = 1 \\ A(p - 1, A(p, q - 1)) & p \geq 2, q \geq 2 \end{cases}$$

$$\alpha(m, n) = \min\{p \geq 1 | A(p, \lfloor m/n \rfloor) > \log n\}, m \geq n.$$

É fácil observar que a função *A* tem o crescimento muito rápido. Por exemplo:

$$A(2, 1) = A(1, 2) = 2^2$$

$$A(2, x) = A(1, A(2, x - 1)) = 2^{A(2, x - 1)} = \underbrace{2^2}_{(x+1) \text{ vezes}}^2$$

A função  $\alpha$  satisfaz  $\alpha(m, n) \leq 4$  para todos os efeitos práticos (exercício 7.13). Ou seja, a complexidade  $O(n + m\alpha(m + n, n))$ , embora não seja linear, se comporta como tal para os valores práticos de  $m, n$ . Observe que  $A(4, 1) = A(2, 16)$ , isto é, 17 sucessivas potências de 2. Então, para  $m \cong n$ , na expressão de  $\alpha(m, n)$ , pode-se aproximar o valor de  $p$  para 4, pois  $A(4, 1)$  é maior do que qualquer valor  $\log n$  proveniente de alguma aplicação.

## 7.5 – Árvores de Difusão

Conforme já foi mencionado em capítulos anteriores, o bom funcionamento de uma estrutura de dados em forma de árvore binária depende, essencialmente, da eficiência com que o problema de busca pode ser resolvido. De um modo geral, uma busca é tanto mais eficiente quanto mais próxima da raiz da árvore estiver o nó contendo a chave procurada. Supondo-se que a probabilidade de busca seja idêntica para todas as chaves, uma primeira idéia seria iniciar o processo a partir de uma árvore completa. Isto corresponderia a  $O(\log n)$  passos para alcançar um nó desejado, no pior caso, para uma árvore com  $n$  nós. Contudo, após um certo número de inclusões ou exclusões, a estrutura pode se transformar em uma árvore de formato inefficiente para a busca. Um caso extremo seria a transformação da árvore completa em uma ziguezague, isto é, uma árvore binária em que cada nó, exceto uma folha, possui exatamente um filho. Nesse caso, a busca pode atingir  $O(n)$  passos.

Para resolver essa questão, uma solução já estudada seria a utilização de árvores平衡adas. Nessas, a altura permanece limitada por  $O(\log n)$  ao longo de todo o processo.

Para que essa característica seja mantida, utilizam-se operações de restabelecimento toda vez que a árvore se afasta de certos padrões de balanceamento preestabelecidos. Essa perda de padrões seria o efeito da realização de um certo número de inclusões ou exclusões. A manutenção do balanceamento normalmente implica a necessidade de se armazenarem informações adicionais, além daquelas necessárias à representação da árvore e das chaves. Ressalte-se, contudo, que esse acréscimo de espaço utilizado pode não ser muito significativo. Apenas 1 bit por chave, no caso das árvores rubro-negras, por exemplo.

Uma outra alternativa consiste em utilizar árvores binárias auto-ajustáveis. Nessas estruturas, não existem padrões de balanceamento preestabelecidos. A idéia é efetuar operações de ajuste após cada inclusão ou exclusão. Uma precondição natural é que essas operações sejam mais simples do que as de restabelecimento utilizadas nas árvores平衡adas. Caso contrário, não haveria sentido em aplicar árvores auto-ajustáveis. Uma vantagem importante em várias aplicações é que as operações de ajuste dispensam o armazenamento de informações adicionais de balanceamento, pois não há padrões a serem satisfeitos.

A árvore auto-ajustável que será estudada a seguir é a *árvore de difusão*. Essa estrutura não garante, necessariamente, um pior caso de  $O(\log n)$  para acessar algum nó desejado. Contudo, elas asseguram complexidade amortizada de  $O(\log n)$ , no pior caso. Para alcançar este objetivo, empregam operações de ajuste, após cada acesso a algum nó procurado. Essas operações se processam ao longo do caminho da raiz até esse nó.

### 7.5.1 – Operações de Difusão

Uma *árvore de difusão* é uma árvore binária de busca  $T$  que emprega certas operações, denominadas *operações de difusão*, com a finalidade de ajustá-las automaticamente. Essas operações se iniciam em um certo nó  $q$  e se propagam até a raiz  $r$  de  $T$ , através do caminho de  $q$  a  $r$ . A operação relativa a  $q$  denomina-se *difusão* de  $q$  e emprega as rotações das árvores AVL descritas na seção 5.3.2. A difusão do nó  $q$  depende da posição de  $q$  em relação a seu pai e avô e implica a realização de até duas rotações. Os passos para efetuar a difusão do nó  $q$  numa árvore de raiz  $r$  bem como o funcionamento de uma árvore de difusão são detalhados a seguir.

**caso 1:**  $q = r$

Nada a efetuar.

**caso 2:**  $q$  é filho de  $v = r$

**caso 2.1:**  $q$  é filho esquerdo

Efetuar rotação direita em  $v$  (figura 7.8(a)).

**caso 2.2:**  $q$  é filho direito

Efetuar rotação esquerda em  $v$  (figura 7.8(b)).

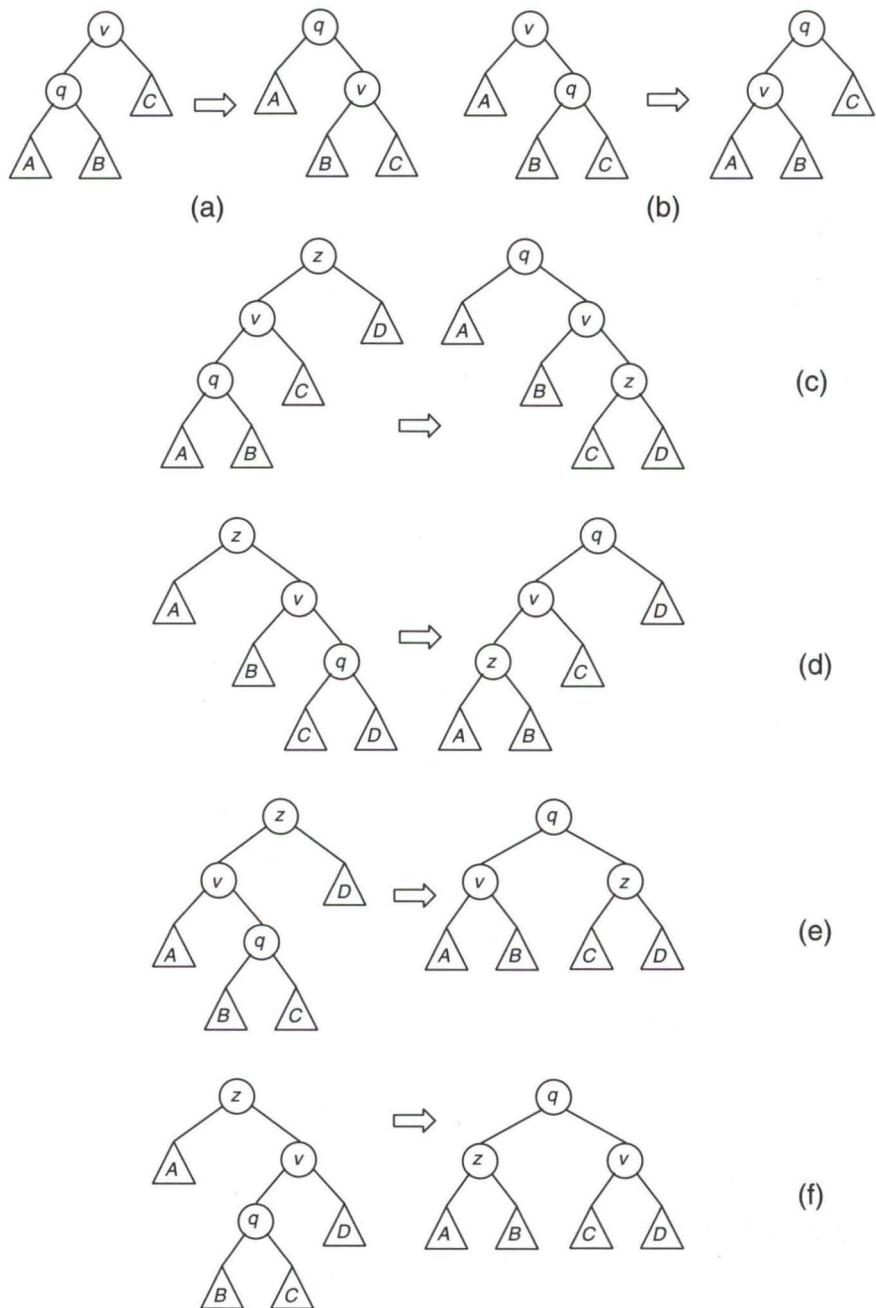


Figura 7.8: Difusão de um nó

**caso 3:**  $q$  é filho de  $v \neq r$  (seja  $z$  o pai de  $v$ )

**caso 3.1:**  $q, v$  são ambos filhos esquerdos

Efetuar rotação direita em  $z$  e, em seguida, em  $v$  (figura 7.8(c)).

**caso 3.2:**  $q, v$  são ambos filhos direitos

Efetuar rotação esquerda em  $z$  e, em seguida, em  $v$  (figura 7.8(d)).

**caso 3.3:**  $q$  é filho direito e  $v$  esquerdo

Efetuar rotação dupla esquerda em  $z$  (figura 7.8(e))

**caso 3.4:**  $q$  é filho esquerdo e  $v$  direito

Efetuar rotação dupla direita em  $z$  (figura 7.8(f))

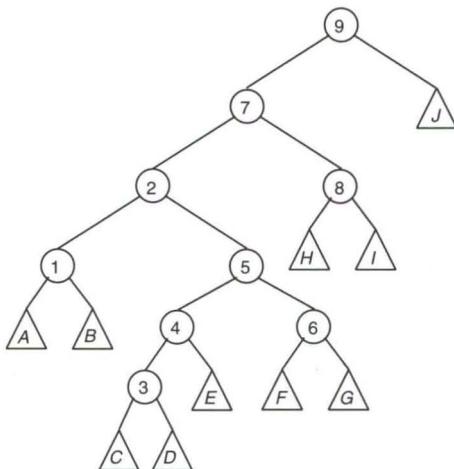
Conforme pode ser observado, um efeito da difusão do nó  $q$  é aproximá-lo da raiz da árvore. De fato, após a difusão, a distância de  $q$  até a raiz se reduziu em duas unidades; caso contrário,  $q$  se tornou ou já era a raiz de  $T$ . No primeiro caso, a idéia seria repetir a difusão de  $q$ , na nova árvore obtida, e assim por diante. Assim sendo, define-se a *difusão completa* de  $q$  como a seguinte operação:

enquanto  $q \neq r$  efetuar  
difusão do nó  $q$

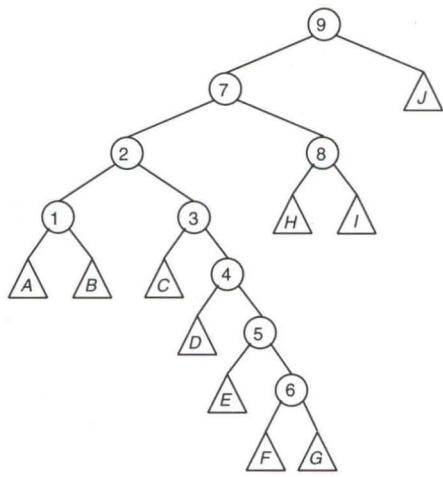
As árvores de difusão empregam essas operações em seu funcionamento da seguinte maneira.

- (i) Após acessar o nó  $q$  solicitado  $\rightarrow$  efetuar difusão completa de  $q$ .
- (ii) Após incluir um novo nó  $q$   $\rightarrow$  efetuar difusão completa de  $q$ .
- (iii) Após excluir o nó  $q$  solicitado  $\rightarrow$  efetuar difusão completa do nó que era o pai de  $q$  (se existir).

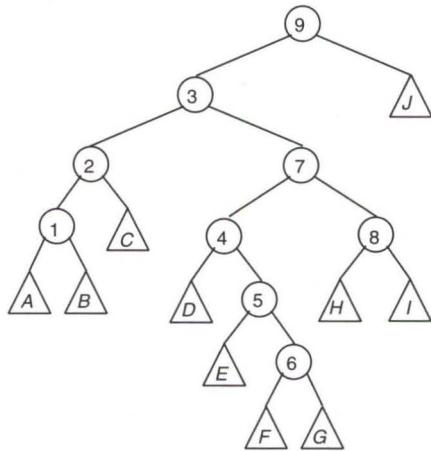
O exemplo da figura 7.9 ilustra a difusão completa do nó 3 da árvore apresentada na figura 7.9(a). Foram necessárias três difusões simples para formar a difusão completa do nó 3, dando origem às árvores das figuras 7.9(b), 7.9(c) e 7.9(d), respectivamente.



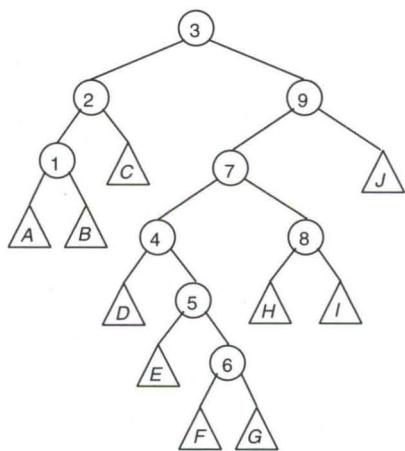
(a)



(b)



(c)



(d)

---

Figura 7.9: Difusão completa de um nó

### 7.5.2 – Complexidade das operações de difusão

Nesta seção será examinada a complexidade amortizada das operações de difusão. O objetivo é determinar o tempo total necessário para efetuar uma seqüência de operações no seu pior caso. Dentre os métodos conhecidos para o estudo da complexidade amortizada, será utilizada a visão do físico, descrita na seção 7.2.

Considere o caso das árvores de difusão. Deve-se, de início, definir a função potencial que será empregada. Associe a cada nó  $v$  da árvore um *peso positivo*  $w(v)$ . O valor desse peso é arbitrário, podendo ser escolhido de acordo com a conveniência. Contudo, ele é fixo, não se alterando após a escolha realizada. Define-se a quantidade  $W(v)$  como a soma dos pesos dos nós na subárvore de raiz  $v$ . Igualmente, o *posto* de  $v$ , representado por  $p(v)$ , é definido como  $p(v) = \log W(v)$ . Finalmente, o potencial da árvore é a soma dos postos de todos os seus nós.

O teorema seguinte fornece um limite superior para o tempo amortizado necessário para efetuar uma operação de difusão completa. Para avaliar o tempo de uma operação de difusão, utiliza-se como medida o número de rotações efetuadas.

#### **Teorema 7.3:**

O tempo amortizado para uma difusão completa de um nó  $q$  em uma árvore de raiz  $r$  é, no máximo,

$$1 + 3 [p(r) - p(q)].$$

#### **Prova:**

Seja a  $i$ -ésima operação da seqüência,  $1 \leq i \leq m$ . Sejam  $\Phi_i$ ,  $W_i$  e  $p_i$ , respectivamente, as funções potencial, soma dos pesos e posto após a realização da  $i$ -ésima operação. Sejam  $v$  o pai de  $q$ , e  $z$  o pai de  $v$ , se existirem. Examinando o detalhamento da operação de difusão, distinguem-se os seguintes casos.

#### **Caso 1: $q = r$**

Nenhuma rotação é efetuada e a complexidade amortizada é nula.

#### **Caso 2: $v = r$**

Exatamente uma rotação é efetuada. Para determinar a expressão dos potenciais da árvore, antes e após a realização da operação, observe que apenas

os postos de  $q$  e  $r$  se alteram. Os postos dos demais vértices permanecem os mesmos. Como o potencial é a soma de todos os postos, conclui-se que  $\Phi_i - \Phi_{i-1} = p_i(r) + p_i(q) - p_{i-1}(r) - p_{i-1}(q)$ . Como a rotação consome uma unidade de tempo, o tempo efetivo da  $i$ -ésima operação é  $t_i = 1$ . Portanto, a complexidade amortizada da operação é

$$a_i = 1 + p_i(v) + p_i(q) - p_{i-1}(v) - p_{i-1}(q).$$

Examinando-se as figuras 7.8(a) e 7.8(b) conclui-se que  $p_{i-1}(v) \geq p_i(v)$ . Logo,

$$a_i \leq 1 + p_i(q) - p_{i-1}(q).$$

Da mesma forma,  $p_i(q) \geq p_{i-1}(q)$ . Portanto,

$$a_i \leq 1 + 3 [p_i(q) - p_{i-1}(q)].$$

**Caso 3:**  $q \neq r$  e  $v \neq r$ , sendo  $q$  e  $v$  ambos filhos esquerdos ou direitos.

São efetuadas duas rotações, correspondentes aos casos 3.1 ou 3.2 da operação de ajuste. Os nós  $q$ ,  $v$  e  $z$  são os únicos cujos postos podem sofrer alteração com a realização da operação. Então,

$$a_i = 2 + p_i(z) + p_i(v) + p_i(q) - p_{i-1}(z) - p_{i-1}(v) - p_{i-1}(q).$$

Observando as figuras 7.8(c) e 7.8(d), conclui-se que  $p_i(q) = p_{i-1}(z)$ . Portanto

$$a_i = 2 + p_i(z) + p_i(v) - p_{i-1}(v) - p_{i-1}(q).$$

Além disso,  $p_i(q) \geq p_i(v)$  e  $p_{i-1}(v) \geq p_{i-1}(q)$ . Logo,

$$a_i \leq 2 + p_i(z) + p_i(q) - 2p_{i-1}(q).$$

Por outro lado, verifica-se que

$$p_{i-1}(q) + p_i(z) - 2p_i(q) = \log \frac{W_{i-1}(q)}{W_i(q)} + \log \frac{W_i(z)}{W_i(q)}.$$

Observe que a função logaritmo tem a seguinte propriedade: se  $a, b > 0$  e  $a + b \leq 1$ , então  $\log a + \log b \leq -2$ , onde o máximo ocorre com  $a = b = 1/2$  (exercício 7.14). Portanto, como todos os pesos são positivos e

$W_{i-1}(q) + W_i(z) \leq W_i(q)$ , conclui-se que  $W_{i-1}(q)/W_i(q) + W_i(z)/W_i(q) \leq 1$ . Isto é, pelo valor máximo da soma dos logaritmos, tem-se que

$$p_{i-1}(q) + p_i(z) - 2p_i(q) \leq -2.$$

Multiplicando-se a última desigualdade por  $-1$  e somando-se àquela de  $a_i$ , conclui-se que

$$a_i \leq 3 [p_i(q) - p_{i-1}(q)].$$

**Caso 4:**  $q \neq v, v \neq r$  e um dentre  $q, v$  é filho esquerdo e outro filho direito.

Esse caso corresponde às situações 3.3 e 3.4 da operação de ajuste. É efetuado uma rotação dupla, o que corresponde a duas simples. Em analogia ao caso anterior, o tempo amortizado é

$$a_i = 2 + p_i(z) + p_i(v) + p_i(q) - p_{i-1}(z) - p_{i-1}(v) - p_{i-1}(q).$$

Como  $p_i(q) = p_{i-1}(z)$  e  $p_{i-1}(q) \leq p_{i-1}(v)$ ,

$$a_i \leq 2 + p_i(z) + p_i(v) - 2p_{i-1}(q).$$

Considerando-se a expressão

$$p_i(z) + p_i(v) - 2p_i(q) = \log \frac{W_i(z)}{W_i(q)} + \log \frac{W_i(v)}{W_i(q)},$$

observando-se que  $W_i(v) + W_i(z) \leq W_i(q)$  e aplicando-se técnica similar ao caso anterior, conclui-se que

$$p_i(z) + p_i(v) - 2p_i(q) \leq -2$$

o que implica

$$a_i \leq 2 [p_i(q) - p_{i-1}(q)].$$

O passo seguinte consiste em determinar o valor da complexidade amortizada total. Observando-se que o caso 2 só pode ocorrer uma vez na seqüência de operações de difusão, conclui-se que a complexidade amortizada total é:

$$\sum_{i=1}^m a_i \leq 1 + \sum_{i=1}^m 3 [p_i(q) - p_{i-1}(q)] = 1 + 3 [p_m(q) - p_0(q)]$$

ou  $\sum a_i \leq 1 + 3 [p(r) - p(q)].$

□

Esse teorema é válido quaisquer que sejam os pesos positivos. De fato, a utilização dos pesos é parte da análise e não da implementação, isto é, os algoritmos dispensam o uso desses parâmetros. Contudo, através da escolha apropriada de seus valores, é possível obter resultados diversos relativos à eficiência das árvores de difusão. Por exemplo, o teorema 7.4 assegura que o tempo amortizado (médio) para efetuar uma busca, inclusão ou exclusão em uma árvore de difusão é  $O(\log n)$ .

#### **Teorema 7.4:**

O tempo total necessário para se efetuar uma seqüência de  $m$  operações de busca, inclusão ou exclusão em uma árvore de difusão, inicialmente vazia, é  $O(m \log n)$ , onde  $n$  é o número de inclusões realizadas.

#### **Prova:**

O teorema 7.3 será utilizado na demonstração. Escolhem-se os pesos individuais de cada nó da seguinte maneira. Cada nó  $v$  da árvore possui peso  $w(v) = 1$ . Assim,  $0 \leq p(v) \leq \lceil \log n \rceil$ . O teorema 7.3 assegura que o tempo amortizado para cada operação de difusão é limitado por  $1 + 3 \lceil \log n \rceil$ . Observe que a difusão completa de um nó implica percorrer o caminho desse nó até a raiz. O tempo associado a cada operação de busca, inserção e remoção é proporcional ao comprimento desse caminho. Logo, o tempo total consumido por todas as operações de busca, inserção e remoção não pode ser maior do que o tempo total amortizado correspondente às operações de difusão. Este último é  $O(m \log n)$ .  $\square$

Através da escolha conveniente de valores para os pesos, é possível ainda provar que as árvores de difusão são tão eficientes quanto as árvores ótimas de busca no sentido estático, isto é, quando apenas acessos são efetuados (exercício 7.22). Esse último resultado é válido para seqüências de acessos suficientemente longas e desprezando-se constantes aditivas ou multiplicações na determinação do tempo total de acesso. Além disso, há uma conjectura, segundo a qual as árvores de difusão seriam tão eficientes quanto qualquer outra forma de árvores binárias de busca, dinamicamente atualizadas, para uma seqüência suficientemente longa de acessos.

Finalmente, deve-se ressaltar uma característica importante das árvores de difusão no seu aspecto prático: a estrutura de dados correspondente a essas árvores coincide, exatamente, com a das árvores binárias de busca. A técnica de armazenamento é a mesma nos dois casos, e as árvores de difusão

dispensam a utilização de qualquer informação adicional. A diferença reside tão-somente na manipulação das estruturas.

## 7.6 – Exercícios

### 7.1 Responder se é certo ou errado:

Suponha um algoritmo que executa uma seqüência de operações idênticas. Seja  $O(f)$  a complexidade de pior caso de uma operação. Suponha que a complexidade amortizada, ao longo das operações, seja também igual a  $O(f)$ . Então o algoritmo é ótimo.

### 7.2 Seja $C$ um contador binário composto de $n$ bits, todos inicialmente iguais a 0. $C$ será incrementado do valor 1 um total de $m$ vezes. Supondo-se que a complexidade do algoritmo de incremento unitário seja igual ao número de bits de $C$ que foram alterados pela operação, pede-se:

- Determinar a complexidade de pior caso da operação de incremento.
- Determinar a complexidade amortizada ao longo da seqüência de  $m$  incrementos.

### 7.3 Repetir o exercício anterior supondo que o valor inicial do contador seja um número binário composto por $k$ bits, onde $m = \Omega(k)$ .

### 7.4 Seja uma lista linear composta dos elementos $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$ . Suponha a seguinte seqüência de acesso à lista: $g\ f\ d\ f\ b\ f\ f\ d\ c$ . Determinar a configuração final da lista, segundo a utilização dos seguintes métodos de ajuste.

- Mover para a frente.
- Transposição.
- Contador de freqüência.
- Mover para a frente  $\lfloor d/2 \rfloor$ , onde  $d$  é a distância de cada nó ao início da lista.

### 7.5 Responder se é certo ou errado:

O tempo total consumido por  $m$  acessos a uma lista realizados segundo qualquer método admissível é sempre menor ou igual ao correspondente a um método não admissível.

7.6 Responder se é certo ou errado:

O teorema 7.1 leva à conclusão de que o método mover para a frente é o melhor método de auto-ajuste para listas lineares.

7.7 Suponha uma floresta criada pela operação *gerar*, para o conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Determinar a floresta obtida após a realização das seguintes operações: *fundir*(1,3), *fundir*(2,5), *fundir*(3,4), supondo que a operação *fundir* seja realizada

- (i) sem critério de tamanho.
- (ii) com critério de tamanho.

7.8 • A operação de *fusão por tamanho de altura* é uma operação de fusão em que a raiz da árvore de altura menor passa a apontar para a raiz da maior, caso as alturas sejam desiguais. Estudar o método de fusão por tamanho de altura. Comparar o seu desempenho com a fusão realizada sem critério de tamanho e com critério de tamanho da árvore (número de nós).

7.9 Suponha uma árvore binária com nós  $a_1, \dots, a_6$ , sendo  $a_i$  pai de  $a_{i+1}$ ,  $1 \leq i < 6$ . Seja uma busca realizada à folha  $a_6$ . Determinar a árvore resultante da aplicação da compactação de caminhos, supondo o método realizado através das seguintes técnicas:

- (i) Compressão de caminhos.
- (ii) Separação de caminhos.
- (iii) Divisão de caminhos.

7.10 Provar ou dar contra-exemplo:

Seja  $T$  uma árvore representando um conjunto pertencente a uma coleção de conjuntos disjuntos,  $T'$  e  $T''$  as árvores obtidas de  $T$  mediante a aplicação dos métodos de compressão e separação de caminhos, respectivamente, após uma seqüência de buscas a nós de  $T$ . Então, a altura de  $T'$  é necessariamente menor do que a de  $T''$ .

7.11º Responder se é certo ou errado:

A função  $\alpha(m, n)$  é o inverso funcional da função de Ackerman, no sentido matemático.

7.12 Mostrar que, para  $n$  fixo e  $m$  crescente, o inverso da função de Ackerman é monotonicamente decrescente.

7.13 Detalhar os argumentos para justificar por que  $\alpha(m, n) \leq 4$  para valores práticos de  $m, n$ .

- 7.14 Demonstrar a seguinte propriedade de logaritmos, utilizada na prova do teorema 7.3:  
 “Se  $a, b > 0$  e  $a + b \leq 1$ , então  $\log a + \log b \leq -2$ .”  
 Além disso, o máximo dessa função ocorre quando  $a = b = 1/2$ .
- 7.15 Construir a árvore binária resultante da difusão completa do nó 6 da árvore da figura 7.9(d).
- 7.16 Seja  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $n > 2$ , um conjunto de chaves, sendo o valor de  $s_i$  menor do que o de  $s_{i+1}$ ,  $i < n$ . Seja  $T$  uma árvore binária de busca completa para  $S$ . Determinar uma seqüência de inclusões e remoções de chaves de  $S$  que, a partir de  $T$ , a transforme em uma árvore ziguezague.
- 7.17º Repetir o exercício anterior supondo que a árvore binária seja auto-ajustável. Justificar a possibilidade ou não.
- 7.18º Seja  $k > 0$  um inteiro e  $T_1, T_2$  duas árvores binárias de busca construídas sobre um mesmo conjunto de chaves  $S$ ,  $|S| > 2$ . Suponha que  $T_1$  seja uma árvore completa e  $T_2$  ziguezague. Determinar uma seqüência de inserções e remoções de chaves de  $S$  tal que transforme  $T_1$  em  $T_2$  com a restrição de que, a cada instante, a árvore de busca possua, pelo menos,  $k$  chaves.
- 7.19º Seja  $k > 0$  um inteiro e  $T_1, T_2$  duas árvores binárias de busca construídas sobre um mesmo conjunto de chaves  $S$ ,  $|S| > 2$ . Suponha que  $T_1$  seja uma árvore ziguezague e  $T_2$  balanceada. Determinar uma seqüência de inserções e remoções de chaves de  $S$  empregando o auto-ajuste das árvores de difusão, com a restrição de que, a cada instante, a árvore de busca possua, pelo menos,  $k$  chaves.
- 7.20º Uma árvore de rotação simples é aquela em que, após cada acesso a um nó  $q$ , efetua-se uma rotação, esquerda ou direita, do pai de  $q$  (se  $q$  não for a raiz), conforme  $q$  seja filho direito ou esquerdo, respectivamente. Mostrar que a complexidade amortizada para o acesso a uma seqüência de  $n$  nós, em uma árvore desse tipo, é  $O(n)$  por acesso, no pior caso.
- 7.21º Uma árvore de rotação completa é aquela em que, após cada acesso a um nó  $q$ , efetua-se uma rotação do pai de  $q$ , conforme o exercício anterior, repetindo-se a operação até que  $q$  se torne a raiz da árvore. Mostrar que, nesse caso, a complexidade amortizada para o acesso a uma seqüência de  $n$  nós também é  $O(n)$ , no pior caso.

- 7.22 • Mostrar que as árvores de difusão são tão eficientes, dentro de fatores constantes, quanto árvores binárias de busca ótimas, considerando somente operações de acesso em número suficientemente grande (sem inclusões nem exclusões).

## Notas Bibliográficas

O método de análise amortizada já foi utilizado no livro de Aho, Hopcroft e Ullman [Ah74]. Dentre os trabalhos fundamentais, no tema, diversos são devidos a Tarjan. Por exemplo, o livro [Ta83], o artigo [Ta75] sobre união de conjuntos e o trabalho [Sl85] sobre árvores de difusão, em co-autoria com Sleator. [Ta85] é um trabalho abrangente sobre complexidade amortizada. Análises de métodos de auto-ajuste para listas foram realizadas por Sleator e Tarjan [Sl85a], e Bentley e McGeoch [Be85a]. O trabalho pioneiro sobre união de conjuntos é [Ta75]. Entretanto, Galler e Fischer, em 1964, já haviam projetado uma estrutura e algoritmos eficientes para a manipulação de conjuntos disjuntos. Um importante caso particular desse problema, o qual admite um algoritmo linear, foi tratado por Gabow e Tarjan [Ga85]. O artigo fundamental sobre árvores de difusão é o de Sleator e Tarjan [Sl85]. Allen e Munro [Al78] é uma referência para os exercícios 7.19 e 7.20.

---

# Tabelas de Dispersão

## 8.1 – Introdução

Neste capítulo será estudada uma solução bem diferente das vistas até agora para resolver os problemas de busca, inserção e remoção em uma tabela: a *tabela de dispersão*.

Em lugar de organizar a tabela segundo o valor relativo de cada chave em relação às demais, a tabela de dispersão leva em conta somente o seu valor absoluto, interpretado como um valor numérico. Através da aplicação de uma função conveniente, a chave é transformada em um endereço de uma tabela. A intenção é atingir diretamente, se possível, o local onde a chave se encontra. Na realidade, o método aproveita a possibilidade de acesso randômico à memória para alcançar uma complexidade média por operação de  $O(1)$ , sendo o pior caso, entretanto,  $O(n)$ .

Observe que este talvez seja o método mais intuitivo de todos os usados em computação para o problema de acesso e manipulação de tabelas. Seja, por exemplo, a distribuição de correspondência entre os funcionários de uma empresa em escaninhos rotulados com a primeira letra de seus sobrenomes. Em cada escaninho, não há ordem para a colocação das cartas. Nesse caso, o nome corresponde à chave, e a inicial do sobrenome ao endereço para armazenamento. Outros exemplos surgem no dia-a-dia. Vários métodos utilizados informalmente para guardar documentos, catalogar fotografias etc. poderiam gerar tabelas de dispersão.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. A seção 8.2 descreve o princípio geral do funcionamento de uma tabela de dispersão. As técnicas de transformação do valor da chave em endereços de armazenamento são tratadas na seção 8.3. A aplicação dessas técnicas, contudo, pode conduzir ao indesejável efeito de atribuição de um mesmo endereço a duas chaves distintas. As duas seções seguintes, 8.4 e 8.5, são dedicadas ao estudo de como contornar essa situação. Finalmente, a seção 8.6 apresenta tabelas de dispersão dinâmicas.

## 8.2 – Princípio de Funcionamento

Suponha que existam  $n$  chaves a serem armazenadas em uma tabela  $T$ , seqüencial e de dimensão  $m$ . As posições da tabela se situam no intervalo  $[0, m - 1]$ . Isto é, a tabela é particionada em  $m$  *compartimentos*, cada um correspondendo a um endereço e podendo armazenar  $r$  nós distintos. Quando a tabela se encontra na memória, é comum que cada compartimento armazene apenas um nó. Compartimentos com diversos nós são usados geralmente por tabelas de dispersão armazenadas em unidades de disco, quando o número de acessos é mais importante do que o uso eficiente de memória. Nesse caso, cada compartimento ocupa, tipicamente, um bloco do disco. O objetivo é armazenar cada chave no bloco referente a seu endereço. A busca, assim, requer somente um acesso a um bloco do disco.

No estudo que se segue, considera-se o armazenamento de um único nó por compartimento.

O desenvolvimento das técnicas de tabelas de dispersão foi motivado por um caso bastante simples, porém importante. Suponha que o número de chaves  $n$  seja igual ao número de compartimentos  $m$ . Além disso, que os valores das chaves sejam, respectivamente,  $0, 1, \dots, m - 1$ . Pode-se utilizar então, diretamente, o valor de cada chave como seu índice na tabela. Isto é, cada chave  $x$  é armazenada no compartimento  $x$ . Esta é uma técnica largamente empregada em programação comercial, conhecida pela denominação de *acesso direto*. A figura 8.1(a) ilustra um exemplo de acesso direto. Na figura, os nós são considerados como compostos apenas por seu campo chave. As setas indicam os índices das chaves.

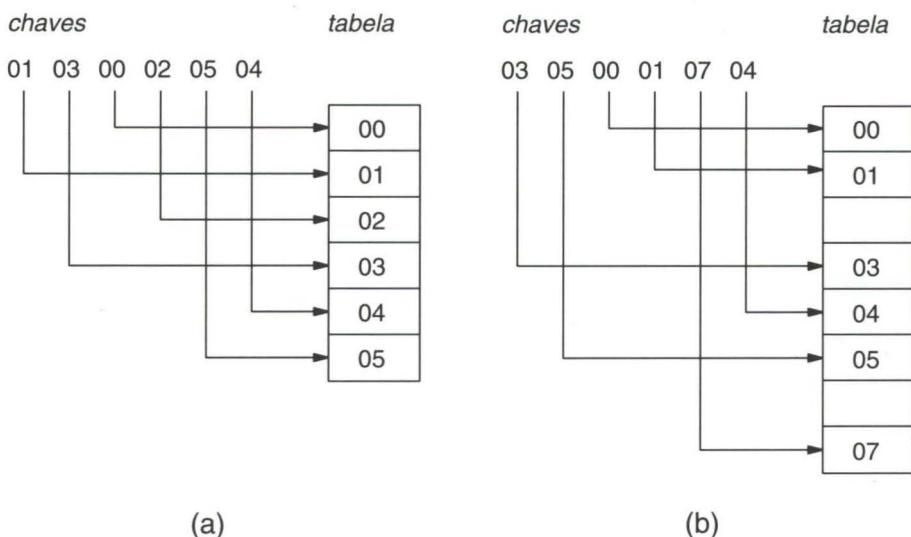
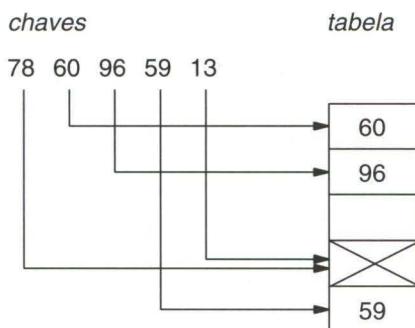


Figura 8.1: Acesso direto

O acesso direto pode ainda ser utilizado no caso em que  $n < m$ , porém  $m - n$  é pequeno. Isto é, as chaves se distribuiriam entre valores de  $0, 1, \dots, m - 1$ , algum destes, porém, sem correspondentes no conjunto de chaves. A tabela de armazenamento conteria, no final,  $m - n$  compartimentos vazios, ou *espacos*. A figura 8.1(b) ilustra essa técnica.

Para o tratamento do caso geral, um obstáculo aparente é o fato de que as chaves nem sempre são valores numéricos. Por exemplo, as chaves podem consistir em nomes de pessoas. Na realidade, essa questão pode ser facilmente contornável, pois a todo dado não numérico corresponde uma representação numérica no computador. Assim sendo, sem perda de generalidade, consideram-se, neste capítulo, todas as chaves como numéricas.

Se as chaves constituem sempre valores numéricos, por que não utilizar a técnica de acesso direto mesmo com espaços vazios? A resposta é simples. A quantidade de espaços vazios pode ser proibitiva. Como exemplo extremo, seja um conjunto de duas chaves apenas, de valores 0 e 999.999, respectivamente. A aplicação da técnica de acesso direto conduziria a uma tabela com 1.000.000 compartimentos, dos quais apenas dois ocupados.



---

Figura 8.2: Exemplo de colisão

Como resolver essa questão? Uma idéia é transformar cada chave  $x$  em um valor no intervalo  $[0, m - 1]$  através da aplicação de uma *função de dispersão*  $h$ . Dada a chave  $x$ , determina-se o valor  $h(x)$ , denominado *endereço-base* de  $x$ . Se o compartimento  $h(x)$  estiver desocupado, poderá ser utilizado para armazenar a chave  $x$ . Infelizmente, a função de dispersão pode não garantir injetividade, pois é possível a existência de outra chave  $y \neq x$ , tal que  $h(y) = h(x)$ . O compartimento  $h(x)$  já poderia então estar ocupado pela chave  $y$ . Esse fenômeno é denominado *colisão*, e as chaves  $x$  e  $y$  são *sinônimas em relação a  $h$* . Na ocorrência desse fato, utiliza-se um procedimento especial para o armazenamento de  $x$ , denominado *tratamento de colisões*. Este determinará um local alternativo para o armazenamento de  $x$ , exceto se a tabela estiver completa. Um exemplo aparece na figura 8.2, onde foi empregada a função  $h = x \bmod 5$ . Cada chave seria armazenada no compartimento correspondente ao número obtido tomando-se o resto da divisão do valor da chave por 5. Nesse caso, as chaves 78 e 13 produzem uma colisão, pois sua divisão por 5 produz o resto 3 em ambos os casos.

### 8.3 – Funções de Dispersão

Uma função de dispersão  $h$  transforma uma chave  $x$  em um endereço-base  $h(x)$  da tabela de dispersão. Idealmente, uma função de dispersão deve satisfazer as seguintes condições:

- produzir um número baixo de colisões;
- ser facilmente computável;
- ser uniforme.

A primeira dessas condições indica que uma boa função de dispersão não deve produzir um número elevado de colisões. Uma situação em que esse fato pode ocorrer é quando as chaves se adaptam de alguma forma a um padrão conhecido. Por exemplo, as chaves de registros referentes a compras de uma empresa podem ser compostas pela concatenação de algumas informações, como o mês e ano do pedido, o que acarreta elementos comuns em muitas dessas chaves. Claramente, esses elementos não devem ser realçados pela função escolhida. Por outro lado, se a tabela tratada é a tabela de símbolos de um compilador, esse padrão é mais difícil de ser detectado, porque não é possível conhecer *a priori* quais identificadores serão utilizados.

O segundo aspecto importante é o tempo consumido para calcular  $h(x)$ . Se a tabela é armazenada em disco, o tempo de cálculo não é crítico, devendo-se procurar funções que minimizem o número de acessos. Para tabelas armazenadas em memória, esse fato é fundamental.

Finalmente, a última condição significa que, idealmente, a função  $h$  deve ser tal que todos os comportamentos possuam a mesma probabilidade de serem escolhidos. Isto é, a probabilidade de que  $h(x)$  seja igual ao endereço-base  $k$  deve ser  $1/m$  para todas as chaves  $x$  e todos os endereços  $k \in [0, m - 1]$ . Uma função que satisfaça essa propriedade é chamada *uniforme*.

Na prática, a condição de uniformidade é difícil de ser testada, pois, em geral, a distribuição é desconhecida. A segunda condição desejada, na maior parte dos casos, é a mais fácil de ser alcançada. Basta restringir o estudo de funções de dispersão àquelas de computação mais simples. Finalmente, o objetivo de obter um pequeno número de colisões muitas vezes não é possível de ser atingido. Por esse motivo, o tratamento de colisões é um procedimento crítico em tabelas de dispersão e deve ser realizado com cuidado.

A seguir são apresentadas as funções de dispersão mais empregadas.

### 8.3.1 – Método da divisão

Este método é particularmente fácil e eficiente, sendo por isto muito empregado. A chave  $x$  é dividida pela dimensão da tabela  $m$  e o resto da divisão

é usado como endereço-base. Isto é,

$$h(x) = x \bmod m,$$

resultando em endereços no intervalo  $[0, m - 1]$ .

Nesse caso, alguns valores de  $m$  são melhores que outros. Por exemplo, se  $m$  é um número par,  $h(x)$  será par quando  $x$  for par e ímpar quando  $x$  for ímpar, o que certamente não satisfaz. A situação é ainda pior se  $m$  for potência de 2, caso em que  $h(x)$  dependerá apenas de alguns dígitos de  $x$ . Suponha  $m = 2^j$  e a chave armazenada numa palavra de memória de 16 bits. Se  $j = 5$ , a função  $h(x)$  produzirá endereços que resultam dos últimos cinco bits da chave, isto é,  $h(x)$  não levará nunca em consideração os dígitos mais significativos de  $x$ . Para chaves geradas a partir da concatenação de informações, esse divisor é pouco adequado.

Diversos resultados teóricos são conhecidos sobre o assunto. Entretanto, estas análises baseiam-se no conhecimento prévio de algumas características das chaves. Existem alguns critérios que têm sido aplicados com bons resultados práticos, como escolher  $m$  de modo que seja um número primo não próximo a uma potência de 2. Ou então, escolher  $m$  tal que não possua divisores primos menores que 20. A figura 8.3 apresenta um exemplo de armazenamento de algumas chaves em uma tabela de dispersão de dimensão 23. A figura 8.3(a) mostra o resultado do mapeamento utilizando o método da divisão:  $44 \bmod 23 = 21$ ,  $46 \bmod 23 = 0$  e assim sucessivamente.

### 8.3.2 – Método da dobraria

Suponha a chave como uma seqüência de dígitos escritos num pedaço de papel. O método em questão consiste basicamente em “dobrar” esse papel, de maneira que os dígitos se superponham, como é visto na figura 8.4. Estes devem então ser somados, sem levar em consideração o “vai um”. Suponha que os dígitos decimais da chave sejam  $d_1, \dots, d_k$  e que uma dobraria seja realizada após o  $j$ -ésimo dígito à esquerda. Isto implica transformar a chave em  $d'_1, \dots, d'_j, d_{2j+1}, \dots, d_k$ , onde  $d'_i$  é o dígito menos significativo da soma  $d_i + d_{2j-i+1}$ ,  $1 \leq i \leq j$ . O processo é repetido mediante a realização de novas dobrarias, cada qual operando sobre o resultado da transformação anterior. O número total de dobrarias e a posição  $j$  de cada uma devem ser definidos de tal forma que o resultado final contenha o número de dígitos desejado para formar o endereço-base.

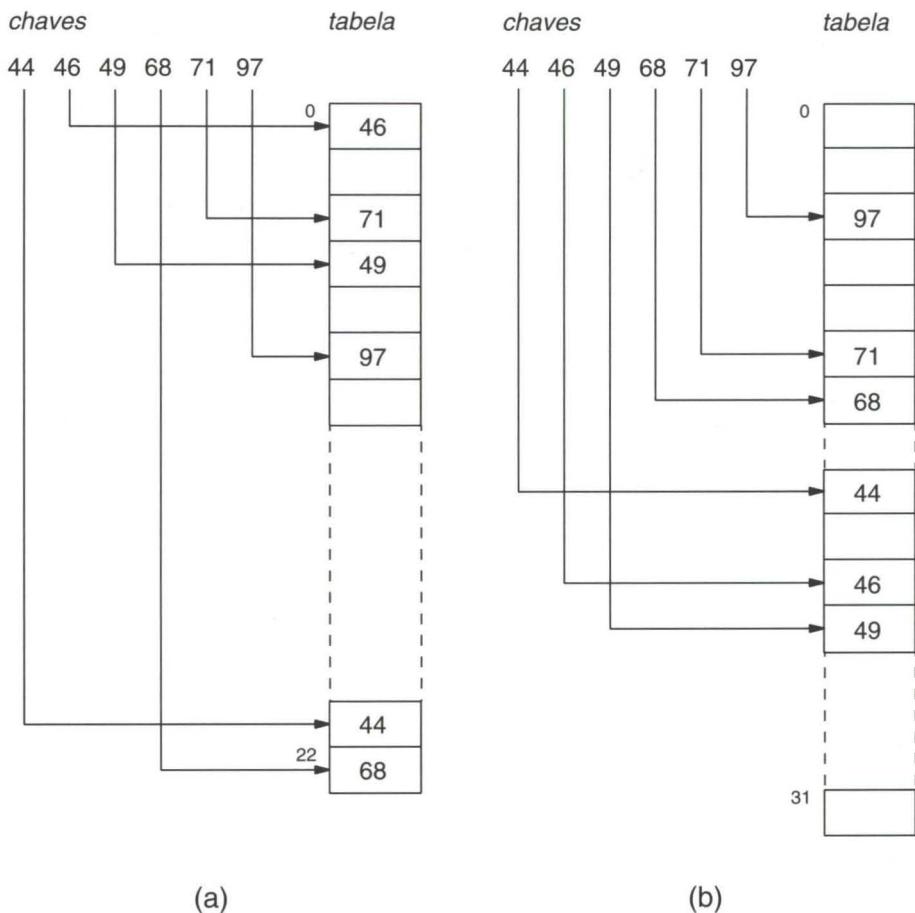


Figura 8.3: Funções de dispersão

Baseada nesse conceito, outra maneira de obter um endereço-base de  $k$  bits para uma chave qualquer é separar a chave em diversos campos de  $k$  bits e operá-los logicamente com uma operação binária conveniente. Em geral, a operação de **ou exclusivo** produz resultados melhores do que as operações **e** ou **ou**. Isto porque o **e** de dois operandos produz um número binário sempre menor do que ambos, e o **ou** sempre maior. Esses dois operadores, portanto, tendem a produzir endereços-base concentrados no final ou no início da tabela, respectivamente. A dimensão da tabela pode ser  $2^k$ , para que todos os endereços-base possíveis estejam disponíveis.

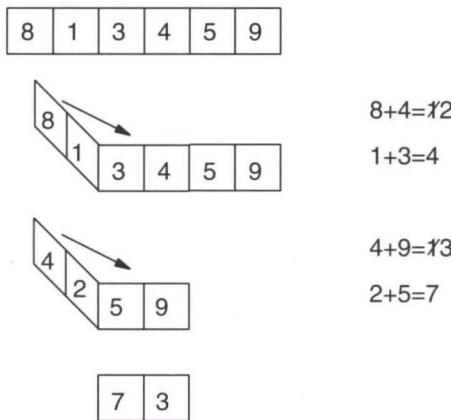
Para as mesmas chaves da figura 8.3, considere agora a dimensão da tabela igual a 32 ( $2^5$ ). Supondo-se que cada chave ocupa 10 bits, deve-se transformar esse valor em um endereço ocupando 5 bits. Utilizando-se a operação ou exclusivo, ou ouex, tem-se:

$$71 = 00010\ 00111 \quad \text{endereço-base: } (00010) \text{ ouex } (00111) = 00101 = 5$$

$$46 = 00001\ 01110 \quad \text{endereço-base: } (00001) \text{ ouex } (01110) = 01111 = 15$$

e assim sucessivamente. A tabela resultante é vista na figura 8.3(b).

---




---

**Figura 8.4: Método da dobraria**

### 8.3.3 – Método da multiplicação

Esse método apresenta algumas variações, sendo a mais conhecida o método do “meio do quadrado”. A chave é multiplicada por ela mesma (ou, uma alternativa, por uma constante), e o resultado é armazenado numa palavra de memória de  $b$  bits. O número de bits necessário para formar o endereço-base de uma chave é então retirado dos  $b$  bits, descartando-se os bits excessivos da extrema direita e da extrema esquerda da palavra. Assim, a dimensão possível para uma tabela de dispersão, quando o resultado da multiplicação se encontra em uma palavra de memória da qual se separam 10 bits, será de 1.024 endereços-base.

### 8.3.4 – Método da análise dos dígitos

De todos os métodos apresentados até agora, este é o único que leva em consideração o conhecimento prévio do tipo de chave que se busca. Ele é usado em geral para chaves decimais. A função de dispersão consiste em selecionar, de forma conveniente, alguns dos dígitos decimais que formam a chave para compor o seu endereço-base. Suponha que os valores das chaves sejam uniformemente distribuídos. Inicialmente, observa-se o primeiro dígito de cada chave. Se existem  $n$  chaves diferentes, então, em média,  $n/10$  devem ter primeiro dígito zero,  $n/10$  devem ter primeiro dígito 1 e assim sucessivamente. Suponha que existem, na verdade,  $n_i$  chaves com primeiro dígito  $i$ ,  $0 \leq i \leq 9$ . Somatórios tais como

$$\sum_{i=0}^9 (n_i - n/10)^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^9 |n_i - n/10|$$

representam o *desvio* da distribuição do primeiro dígito. Repita a análise para cada dígito e encontre os  $k$  melhores, isto é, aqueles que possuem o menor desvio, usando um dos somatórios. O endereço-base de uma chave qualquer é obtido eliminando-se todos os dígitos da chave, exceto os escolhidos entre os  $k$  melhores.

Por exemplo, observe as chaves da figura 8.3 (44, 46, 49, 68, 71, 97). Utilizando-se o segundo somatório, encontra-se para o dígito das dezenas,  $d_1$ , um desvio de 7.2, enquanto, para o dígito das unidades,  $d_2$ , o desvio vale 4.8. Realmente, considerando-se a função  $h(x) = d_2$  não haveria colisões, enquanto para a função  $h(x) = d_1$  haveria.

Para uma dada dimensão de tabela desejada  $m$ , é simples determinar o valor do número de dígitos escolhidos  $k$ , de modo a ajustar os endereços-base ao tamanho da tabela (exercício 8.4).

A grande desvantagem desse método é que a computação da função de dispersão exige uma manipulação prévia de todas as chaves. Isto implica a restrição da obrigatoriedade de se conhecerem todas as chaves de antemão. Além disso, há um fator  $O(n)$  a ser adicionado à complexidade de determinação dos endereços-base. Por esse motivo, tal método é restrito a aplicações especiais.

## 8.4 – Tratamento de Colisões por Encadeamento

Já foi observado que o mesmo endereço-base pode ser encontrado para chaves diferentes, como resultado da função de dispersão, o que é chamado uma *colisão*. Define-se como *fator de carga* de uma tabela de dispersão o valor  $\alpha = n/m$ , onde  $n$  é o número de chaves armazenadas. Um método para diminuir colisões é então reduzir o fator de carga; à medida que este cresce, a possibilidade de ocorrerem colisões também cresce. Essa precaução deve ser tomada, uma vez que o número de colisões cresce rapidamente quando o fator de carga aumenta, mas não resolve o problema. Uma nova chave sempre pode encontrar o seu endereço-base já ocupado. Por esse motivo, o emprego de tabelas de dispersão implica, necessariamente, a previsão de algum método de tratamento de colisões.

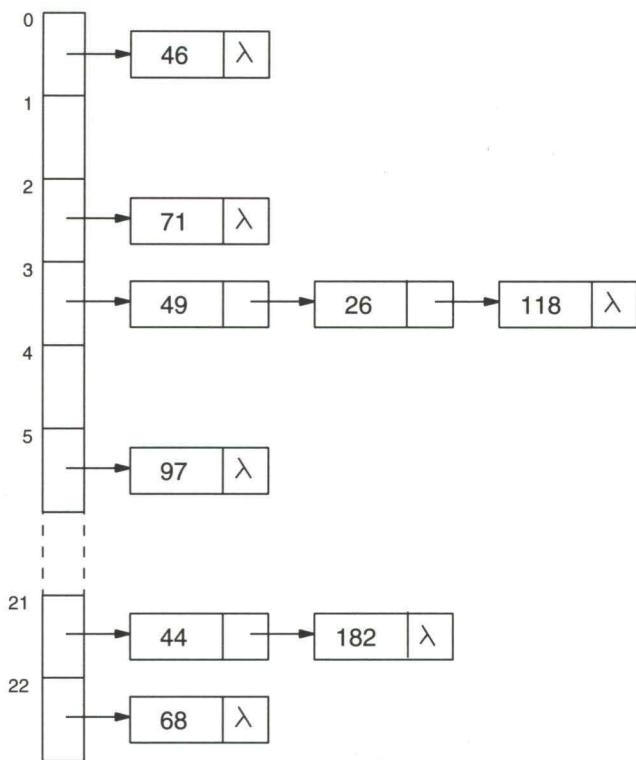
Uma idéia natural para tratar colisões consiste em armazenar as chaves sinônimas em listas encadeadas. Há duas alternativas. As listas podem se encontrar no exterior da tabela ou compartilhar o mesmo espaço da tabela. Os dois casos são considerados a seguir.

### 8.4.1 – Encadeamento exterior

Esta é uma solução muito usada para o problema, e consiste em manter  $m$  listas encadeadas, uma para cada possível endereço-base. Um campo para o encadeamento deve ser acrescentado a cada nó. Os nós correspondentes aos endereços-base serão apenas nós-cabeça para essas listas. Tal método é denominado *encadeamento exterior*. A figura 8.5 apresenta essa solução para o mesmo exemplo visto na figura 8.3, ao qual foram acrescentadas as chaves 26, 118 e 182. A função de dispersão é a mesma da figura 8.3(a).

A implementação desse método é simples aplicação dos conceitos de listas encadeadas vistos no capítulo 2. Por essa razão, os algoritmos de busca, inserção e remoção são deixados ao leitor (exercício 8.5). É usual efetuar-se a inclusão de uma nova chave  $x$  no final da lista encadeada correspondente ao endereço  $h(x)$ . A idéia de incluir  $x$  no final decorre do fato de que a lista terá que ser percorrida de qualquer maneira, para assegurar que  $x$  não pertence à mesma, independentemente da posição de inclusão de  $x$ .

A análise da eficiência desse método para o problema da busca será realizada a seguir. A complexidade do pior caso é simples. Como o comprimento de



**Figura 8.5:** Tratamento de colisões por encadeamento exterior

uma lista encadeada pode ser  $O(n)$ , esta será a complexidade do pior caso, visto que pode ser necessário percorrer a lista até o final.

Para a complexidade média, a idéia é determinar o número médio de comparações entre valores de chaves efetuadas em uma busca. Esse número é igual ao número de nós percorridos na lista encadeada. Consideram-se os dois casos, busca sem e com sucesso, separadamente. O teorema seguinte indica o resultado para o primeiro desses casos.

#### Teorema 8.1:

Numa tabela de dispersão que utiliza função de dispersão uniforme e na qual as colisões são tratadas por encadeamento exterior, o número médio de comparações efetuadas numa busca sem sucesso é igual a  $\alpha$ .

**Prova:**

Seja  $CM(T)$  o número médio de comparações efetuadas em uma busca sem sucesso, numa tabela de dispersão  $T$ . Como a função de dispersão é uniforme, existe a mesma probabilidade  $1/m$  de a busca ser efetuada em qualquer uma das  $m$  listas encadeadas. Seja  $L_i$  a lista onde a busca se efetua e  $|L_i|$  o seu comprimento. Então,

$$CM(T) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |L_i|.$$

Como existe um total de  $n$  elementos,  $\sum_{i=1}^m |L_i| = n$ . Logo,

$$CM(T) = \frac{n}{m} = \alpha.$$

□

O segundo caso, a análise da complexidade média da busca com sucesso, é apresentado no teorema 8.2.

**Teorema 8.2:**

Numa tabela de dispersão que utiliza função de dispersão uniforme e na qual as colisões são tratadas por encadeamento exterior, o número médio de comparações efetuadas numa busca com sucesso é igual a  $1 + \alpha/2 - 1/2m$ .

**Prova:**

Seja  $T$  uma tabela de dispersão e  $CM(T)$  o número médio de comparações efetuadas em uma busca com sucesso. Sabe-se que a inclusão de cada chave nas listas encadeadas é realizada sempre no final da lista. Supondo a ausência de exclusões nas listas, a posição de cada chave em relação à cabeça da lista se mantém constante. Logo, o número médio de comparações para localizar uma chave  $x$ , com sucesso, localizada em uma certa lista  $L_i$ , é igual ao comprimento médio de  $L_i$  na ocasião em que essa chave foi incluída em  $L_i$ , adicionado de uma unidade (correspondente à comparação final com a própria chave  $x$ ). Supondo que  $x$  tenha sido a  $(j+1)$ -ésima chave a ser incluída, o comprimento médio de  $L_i$  é  $j/m$ . Logo,

$$CM(T) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(1 + \frac{j}{m}\right) = 1 + \frac{n(n-1)}{2nm} = 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2m}.$$

□

Para interpretar os resultados do teorema 8.2, observe que, se o tamanho  $m$  da tabela  $T$  for, pelo menos, proporcional ao número de chaves  $n$ , tem-se  $n = O(m)$ . Isto é,  $\alpha = n/m = O(1)$ , ou seja, tanto a complexidade média da busca sem sucesso quanto a da busca com sucesso são constantes!

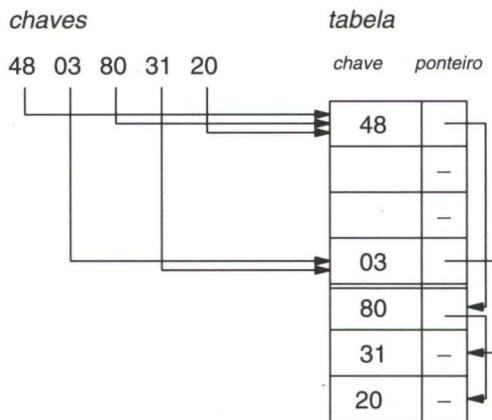
### 8.4.2 – Encadeamento interior

Em algumas aplicações, não é desejável a manutenção de uma estrutura exterior à tabela de dispersão, como o caso analisado no item anterior, onde o tratamento das colisões foi realizado mediante a adição de uma estrutura de  $m$  listas, externa à tabela. Nessa situação, ainda é possível resolver o problema de colisões mediante o emprego de listas encadeadas, desde que estas compartilhem o mesmo espaço de memória que a tabela de dispersão. Esse método é denominado *encadeamento interior*.

O encadeamento interior prevê a divisão da tabela  $T$  em duas zonas, uma de endereços-base, de tamanho  $p$ , e outra reservada aos sinônimos, de tamanho  $s$ . Naturalmente,  $p + s = m$ . Os valores  $p$  e  $s$  são fixos. Assim sendo, a função de dispersão deve obter endereços-base na faixa  $[0, p - 1]$  apenas. Nesse caso,  $\alpha = n/m \leq 1$ . A estrutura da tabela é a mesma que no caso do encadeamento exterior. Dois campos têm presença obrigatória em cada nó. O primeiro é reservado ao armazenamento da chave, enquanto o segundo contém um ponteiro que indica o próximo elemento da lista de sinônimos correspondentes ao endereço-base em questão.

A figura 8.6 ilustra um caso de tabela de dispersão com tratamento de colisões por encadeamento interior. Há um total de  $n = 5$  chaves, com uma tabela de tamanho  $m = 7$ , sendo  $p = 4$  e  $s = 3$ . A função de dispersão utilizada é  $h(x) = x \bmod 4$ . As setas, na figura, indicam o endereço-base das chaves. Observe que a zona reservada às colisões da tabela se encontra completa, o que implica que uma nova inclusão com endereços-base iguais a 0 ou 3 provocará a condição de overflow, apesar de a zona de endereços-base ainda apresentar vazios. Aumentando-se o tamanho da zona de colisões pela correspondente diminuição da zona de endereços-base, diminui a possibilidade de ocorrência de falso overflow. Contudo, a eficiência da tabela de dispersão diminui também. No caso limite em que  $p = 1$  e  $s = m - 1$ , a tabela de dispersão se reduz a uma lista encadeada, cujo tempo médio de busca é  $O(n)$ .

Uma outra técnica que pode ser utilizada consiste em não diferenciar as



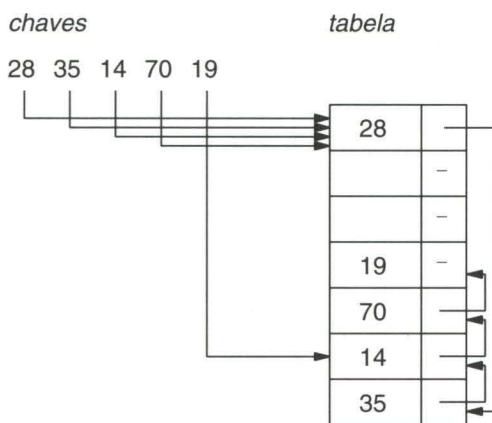
---

Figura 8.6: Tratamento de colisões por encadeamento interior

duas zonas da tabela. Ou seja, qualquer endereço da tabela pode ser de base ou de colisão. Essa técnica, entretanto, produz o efeito indesejado de provocar *colisões secundárias*, isto é, aquelas provenientes da coincidência de endereços para chaves que não são sinônimas. Quando ocorre alguma colisão, a nova chave  $x$  é inserida no primeiro espaço vazio  $d$  a partir, por exemplo, do compartimento onde ocorreu a colisão ou do final da tabela. Se for agora incluída uma outra chave  $y$  tal que  $h(y) = d$ , haverá colisão entre  $x$  e  $y$ . Esse fato provoca a fusão das listas que contêm as chaves possuindo endereços-base  $h(x)$  e  $h(y)$ , o que implica uma diminuição de eficiência.

A figura 8.7 ilustra um caso de colisões secundárias. Supõe-se que as chaves sejam incluídas na ordem 28, 35, 14, 70, 19, através da função de dispersão  $x \bmod 7$ . A colisão secundária se verifica quando da inclusão da chave 19, cujo endereço-base é 5. Contudo, o compartimento 5 já se encontra ocupado pela chave 14, com endereço-base diferente de 5, o que provoca a colisão.

Não há qualquer dificuldade em detalhar o algoritmo de busca e inserção para o caso de encadeamento interior (exercício 8.7), se não se considerar a hipótese de remoções. Contudo, o caso da remoção de nós exige mais cuidados. Em princípio, não se pode, simplesmente, remover uma chave  $x$  de uma lista encadeada, sem reorganizar a tabela, o que está fora de cogitação. Suponha que  $x$  esteja no compartimento  $d$  e que pertença à lista encadeada  $L$ , sendo  $y$  a chave seguinte a  $x$  em  $L$ . Caso o endereço-base de  $y$  seja igual a  $d$ , a remoção da chave  $x$  de  $L$  e a correspondente sinalização de que o com-



**Figura 8.7:** Colisões secundárias

partimento  $d$  se encontra vazio provocarão funcionamento errôneo da tabela. Isto é, uma busca de  $y$  teria como resposta, erradamente, *sem sucesso*. Para contornar esse problema, considera-se que cada compartimento da tabela pode estar em um dos três estados: *vazio*, *ocupado* ou *liberado*. No primeiro caso, ele jamais foi utilizado para armazenar qualquer chave. O segundo indica que ele contém uma chave armazenada. Finalmente, um compartimento torna-se liberado quando está ocupado por alguma chave  $x$  cuja remoção é solicitada. Nesse caso, o nó que contém  $x$  não deve ser removido da lista. Contudo, posteriormente,  $x$  pode ser substituída nesse nó por alguma outra chave. Nessa ocasião, o compartimento torna-se, novamente, ocupado.

O algoritmo 8.1 implementa o procedimento de busca de uma chave  $x$  em uma tabela de dispersão  $T$ , onde as colisões são tratadas por encadeamento interior. Cada compartimento  $i$  de  $T$  possui três campos: *chave*, *estado* e *pont*.  $T[i].estado$  pode assumir os valores *ocupado* e *não ocupado*. Se  $T[i].estado = \text{ocupado}$ , então existe uma chave armazenada em  $i$ , no campo  $T[i].chave$ . Caso contrário,  $i$  encontra-se livre ou liberado. Cada compartimento  $i$  pertence a uma lista encadeada que contém as possíveis colisões da chave armazenada em  $i$ . Além disso, essa lista pode conter também nós não ocupados. Todas as listas são circulares.  $T[i].pont$  indica o nó seguinte a  $i$ , na lista que contém  $i$ . No procedimento  $\text{busca}(x, end, a)$ , o resultado é obtido através dos parâmetros  $end$  e  $a$ . Se  $a = 1$ , então a chave  $x$  foi localizada no compartimento  $end$ . Se  $a = 2$ , a chave não foi encontrada na tabela.

Nesse caso, o parâmetro  $end$  indica uma dentre as duas seguintes alternativas. Se existir algum compartimento não ocupado  $j$  na lista encadeada que contém  $h(x)$ , então  $end = j$ . Caso contrário,  $end = \lambda$ . O algoritmo supõe que a tabela tenha sido inicializada da seguinte maneira:  $T[i].estado = \text{não ocupado}$  e  $T[i].pont = i$ , para  $0 \leq i < m$ .

**algoritmo 8.1:** Busca por encadeamento interior  
**procedimento**  $busca(x, end, a)$

```

 $a := 0; \quad end := h(x); \quad j := \lambda$ 
enquanto  $a = 0$  faça
    se  $T[end].estado = \text{não ocupado}$  então  $j := end$ 
    se  $T[end].chave = x$  e  $T[end].estado = \text{ocupado}$  então
         $a := 1$                                 % chave encontrada
    senão  $end := T[end].pont$ 
    se  $end = h(x)$  então
         $a := 2; \quad end := j$                 % chave não encontrada

```

O algoritmo 8.2 descreve a inserção da chave  $x$  em  $T$ . A variável  $j$  indica o compartimento onde será efetuada a inserção. Para efeitos da escolha de  $j$ , a tabela foi considerada como circular, isto é, o compartimento 0 é seguinte ao  $m - 1$ .

**algoritmo 8.2:** Inserção por encadeamento interior

$busca(x, end, a)$

se  $a \neq 1$  então

```

    se  $end \neq \lambda$  então  $j := end$ 
    senão  $i := 1; \quad j := h(x)$ 
        enquanto  $i \leq m$  faça
            se  $T[j].estado = \text{ocupado}$  então
                 $j := (j + 1) \bmod m$ 
                 $i := i + 1$ 
            senão  $i := m + 2$  % compartimento não ocupado
            se  $i = m + 1$  então “inserção inválida: overflow”; pare
             $temp := T[j].pont$                       % fusão de listas
             $T[j].pont := T[h(x)].pont$ 
             $T[h(x)].pont := temp$ 
             $T[j].chave := x$                          % inserção de  $x$ 
             $T[j].estado := \text{ocupado}$ 
senão “inserção inválida: chave já existente”
```

Finalmente, o algoritmo 8.3 realiza a operação de remoção da chave  $x$ .

**algoritmo 8.3:** Remoção por encadeamento anterior

*busca( $x, end, a$ )*

*se  $a = 1$  então  $T[end].estado := não ocupado$*

*senão “exclusão inválida: chave não existente”*

É imediato verificar que esses três algoritmos possuem pior caso igual a  $O(n)$ .

## 8.5 – Tratamento de Colisões por Endereçamento Aberto

O tratamento de colisões por encadeamento utiliza listas encadeadas para armazenar chaves sinônimas. Essas listas utilizam ponteiros, o que consome espaço. Com o intuito de melhor aproveitá-lo, foi desenvolvido o método descrito a seguir, denominado *endereçamento aberto*. A idéia básica é armazenar as chaves sinônimas também na tabela. Contudo, ao contrário do método de encadeamento interior, não há ponteiros. As chaves são armazenadas na tabela, sem qualquer informação adicional. Quando houver alguma colisão, determina-se, também por cálculo, qual o próximo compartimento a ser examinado. Se ocorrer nova colisão com alguma outra chave armazenada nesse último, um novo compartimento é escolhido mediante cálculo, e assim por diante. A busca com sucesso se encerra quando um compartimento for encontrado contendo a chave procurada. O indicativo de busca sem sucesso seria a computação de um compartimento vazio, ou a exaustão da tabela.

Para que o processo possa operar, para cada chave é necessário que todos os compartimentos possam ser examinados. Isto é, a função de dispersão, para cada chave  $x$ , em vez de fornecer um único endereço-base  $h(x)$ , deve ser capaz de fornecer até  $m$  endereços-base. Com isso, a função torna-se da forma  $h(x, k)$ , onde  $k = 0, \dots, m - 1$ . Para encontrar a chave  $x$ , deve-se tentar o endereço-base  $h(x, 0)$ . Caso esteja ocupado por alguma outra chave, calcula-se o endereço  $h(x, 1)$ , posteriormente, se necessário,  $h(x, 2)$ , e assim por diante. Por esse motivo, a seqüência de endereços-base  $h(x, k)$ ,  $k = 0, \dots, m - 1$  é denominada *seqüência de tentativas*. Observe que a seqüência de tentativas  $h(x, 0), h(x, 1), \dots, h(x, m-1)$  é uma permutação do

conjunto  $\{0, \dots, m - 1\}$ . Portanto, para cada chave  $x$ , a função de dispersão deve ser capaz de fornecer uma permutação de endereços-base. Isto significa que o cálculo da função de dispersão, apresentado na seção 8.3, deve ser modificado de modo a torná-lo capaz de fornecer essa permutação. Esse cálculo será examinado mais adiante, nesta seção.

Analogamente ao caso anterior, uma função de dispersão  $h$  é dita de *seqüência uniforme* quando qualquer permutação, dentre as  $m!$  possíveis dos endereços-base, tiver igual probabilidade de ser produzida por  $h$ . Isto é uma generalização do conceito de função de dispersão uniforme, examinado na seção 8.3, onde  $h$  fornecia um único endereço-base. As funções de dispersão utilizadas na prática não satisfazem a condição de seqüência uniforme.

O algoritmo de busca de uma nova chave  $x$ , numa tabela de dispersão  $T$ , decorre da explicação anterior. Supõe-se que existe uma função de dispersão  $h$ , a qual forneça um endereço-base  $h(x, k)$ , distinto, para cada  $k = 0, \dots, m - 1$ . A tabela de dispersão  $T$  está armazenada em alocação seqüencial; os endereços fornecidos pela função de dispersão são índices da tabela, variando no intervalo  $[0, m - 1]$ . O algoritmo utiliza o procedimento *busca-aberto* $(x, end, a)$ . Os parâmetros  $a$  e  $end$  indicam o resultado da busca. Se  $a = 1$ , então a chave  $x$  foi localizada no compartimento  $end$ . Se  $a = 2$  ou  $3$ , então  $x$  não se encontra na tabela. No primeiro caso,  $end$  indica um compartimento livre, enquanto no segundo a tabela está completa. O algoritmo supõe uma tabela de dispersão sem a ocorrência de remoções. Adota-se a seguinte inicialização da tabela:  $T[i].chave := \lambda$ , para  $0 \leq i < m$ .

**algoritmo 8.4:** busca por endereçamento aberto

**procedimento** *busca-aberto* $(x, end, a)$

$a := 3; k := 0$

**enquanto**  $k < m$  **faça**

$end := h(x, k)$

**se**  $T[h(x, k)].chave = x$  **então**

$a := 1$

% chave encontrada

$k := m$

**senão** **se**  $T[h(x, k)].chave = \lambda$  **então**

$a := 2$

% posição livre

$k := m$

**senão**  $k := k + 1$

O algoritmo de inserção é bastante simples, utilizando-se o resultado da busca anterior (exercício 8.9). É imediato verificar que esses dois algoritmos possuem pior caso igual a  $O(n)$ . Entretanto, o número de tentativas (iterações) efetuadas é, em média, apenas igual a  $1/(1 - \alpha)$ , no caso de busca sem sucesso, para uma função de dispersão de seqüência uniforme (exercício 8.12), e  $\alpha = n/m < 1$ . A determinação do número de tentativas correspondente à busca com sucesso é mais trabalhosa. O seu valor é igual a  $\frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha}$ , assumindo que  $0 < \alpha < 1$ , que a função de dispersão é de seqüência uniforme e que as chaves da tabela possuem probabilidades idênticas de serem buscadas.

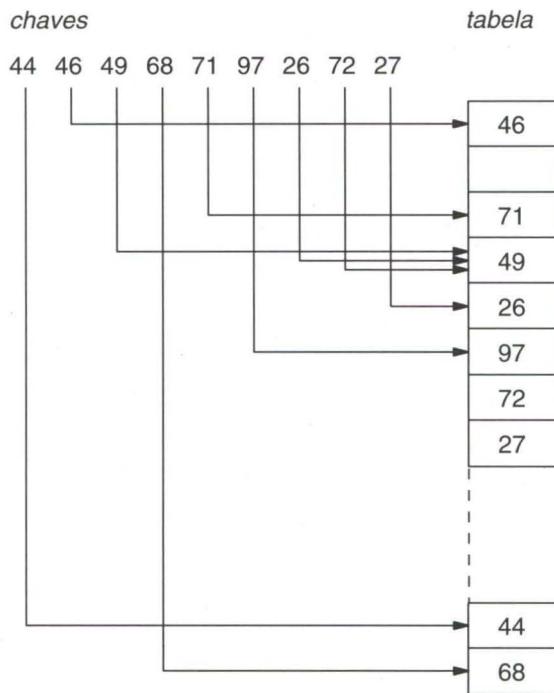
A remoção de chaves da tabela exige cuidados especiais. No método do endereçamento aberto, a remoção apresenta um problema semelhante àquele do método do encadeamento interior. Uma chave não pode ser removida, de fato, da tabela, pois faria romper a seqüência de tentativas. A solução é semelhante à empregada no método anterior. Cada compartimento da tabela possui um dos três estados: *vazio*, *ocupado* ou *livre*. No primeiro caso, nunca foi utilizado; no segundo, ele armazena uma chave e, no terceiro, ele armazenava uma chave cuja remoção foi solicitada. A remoção da chave não precisa ser realizada. Contudo, a chave que estava armazenada no compartimento livre pode ser substituída por uma outra em uma possível posição inclusão, transformando o compartimento em ocupado (exercício 8.10). A adoção dessa técnica exige modificações nos algoritmos de busca e inserção (exercício 8.11).

Segue-se a descrição de alguns métodos para a determinação da seqüência de tentativas  $h(x, k)$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ , para uma dada chave  $x$ . O símbolo  $h'$  denota um endereço-base obtido pela aplicação de alguma função de dispersão descrita na seção 8.3.

### 8.5.1 – Tentativa linear

Este método é de implementação simples. Suponha que o endereço-base da chave  $x$  é  $h'(x)$ . Agora suponha outra chave,  $x'$ , ocupando o mesmo compartimento  $h'(x)$ . A idéia consiste em tentar armazenar o novo nó, de chave  $x$ , no endereço consecutivo  $h'(x) + 1$ . Se este já está ocupado, tenta-se  $h'(x) + 2, \dots$  etc. até uma posição vazia, considerando-se a tabela circular. Então, a função de dispersão é

$$h(x, k) = (h'(x) + k) \bmod m, \quad 0 \leq k \leq m - 1.$$



---

**Figura 8.8:** Tentativa linear

Voltando ao exemplo da figura 8.3(a), ao se acrescentar a chave 26, esta não poderá ser armazenada em seu endereço-base 3, passando a ocupar a primeira posição livre, a posição 4. No mesmo exemplo, a chave 72, que também tem endereço-base 3, seria armazenada somente na posição 6, a primeira posição livre. Ainda na inserção, deve-se levar em conta também o fato de que duas chaves, mesmo possuindo endereços-base diferentes, podem seguir, a partir de determinado ponto, a mesma seqüência de tentativas. É o caso da chave 27 neste exemplo. O endereço-base é 4, porém este endereço já está ocupado pela chave 26. As próximas tentativas falham novamente, e o armazenamento é feito no endereço 7. A tabela resultante é apresentada na figura 8.8.

Esse método apresenta o inconveniente de produzir longos trechos consecutivos de memória ocupados, o que se denomina *agrupamento primário*. A formação desses trechos decorre da maneira como são tratadas as colisões.

Por exemplo, suponha que exista um trecho de  $j$  compartimentos consecutivos ocupados e um compartimento vazio  $\ell$ , imediatamente seguinte a esses. Então, na inserção de uma nova chave  $x$ , a ocorrência de colisão com alguma chave ocupando qualquer desses  $j$  compartimentos que formam o agrupamento primário fará com que  $x$  seja armazenada no compartimento  $\ell$ , aumentando o tamanho do agrupamento primário para  $j + 1$ . De fato, quanto maior for o tamanho de um agrupamento primário, maior a probabilidade de aumentá-lo ainda mais, mediante a inserção de uma nova chave (exercício 8.13).

### 8.5.2 – Tentativa quadrática

No método anterior, as chaves tendem a se concentrar, criando agrupamentos primários, que aumentam muito o tempo de busca. A idéia agora é obter seqüências de endereços diversas para endereços-base próximos, porém diferentes. Para isto, utiliza-se como incremento uma função quadrática de  $k$ . A função de dispersão é então

$$h(x, k) = (h'(x) + c_1 k + c_2 k^2) \bmod m,$$

onde  $c_1, c_2$  são constantes,  $c_2 \neq 0$  e  $k = 0, \dots, m - 1$ .

Esse método consegue evitar os agrupamentos primários da tentativa linear. Contudo, se duas chaves possuírem a mesma tentativa inicial, então as duas seqüências de tentativas serão idênticas. Esse fato produz uma outra forma de concentração de chaves na tabela, denominada *agrupamento secundário*. A degradação introduzida pelo agrupamento secundário, contudo, é menor que a do primário.

Para aplicação do método da tentativa quadrática, os valores de  $m$ ,  $c_1$  e  $c_2$  devem ser escolhidos de tal forma que os endereços-base  $h(x, k)$  correspondam a varrer toda a tabela, para  $k = 0, \dots, m - 1$ . As equações recorrentes apresentadas a seguir fornecem uma maneira de calcular, diretamente, esses endereços.

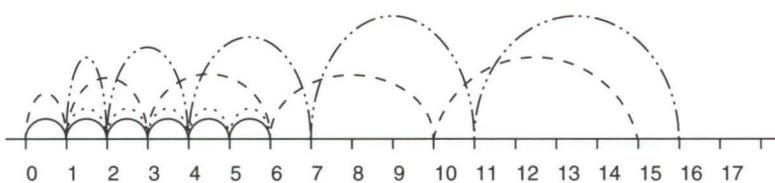
$$h(x, 0) = h'(x)$$

$$h(x, k) = (h(x, k - 1) + k) \bmod m, \quad 0 < k < m.$$

Se  $m$  for potência de 2, então os compartimentos obtidos por essa recorrência correspondem à varredura de toda a tabela (exercício 8.14).

*tentativa linear:*      *endereço-base 0* \_\_\_\_\_  
                                *endereço-base 1* .....

*tentativa quadrática:* *endereço-base 0* - - - - -  
                                *endereço-base 1* - - - - -



---

**Figura 8.9:** Comparação entre tentativas linear e quadrática

Ao se aplicar a tentativa quadrática às chaves da figura 8.8, a tabela resultante coincide com a da figura. Entretanto, observa-se que as chaves 26, 72 e 27, que provocam colisões, são alocadas por tentativa linear após, respectivamente, 2, 4 e 4 tentativas, enquanto, ao serem alocadas por tentativa quadrática, as tentativas são em número de 2, 3 e 3.

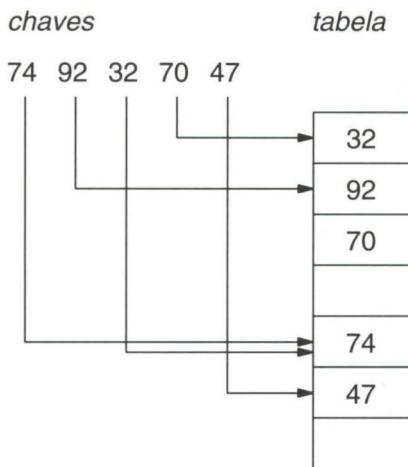
A figura 8.9 ilustra a seqüência de compartimentos examinados para os métodos de tentativa linear e quadrática com chaves de endereços-base 0 e 1. Observe que, no caso da tentativa linear, a seqüência é a mesma, a partir do compartimento 1, enquanto a tentativa quadrática produz seqüências diferentes.

### 8.5.3 – Dispersão dupla

O método de dispersão dupla calcula a seqüência de tentativas de acordo com a seguinte equação:

$$h(x, k) = (h'(x) + k \cdot h''(x)) \bmod m, \quad 0 \leq k < m,$$

onde  $h'$ ,  $h''$  são funções de dispersão (seção 8.3).



**Figura 8.10:** Dispersão dupla

Esse método tende a distribuir as chaves na tabela de forma mais conveniente do que os dois anteriores pela seguinte razão. Se  $x$  e  $y$  são duas chaves distintas tais que  $h'(x) = h'(y)$ , então as seqüências de tentativas obtidas pelos métodos da tentativa linear e quadrática são necessariamente idênticas, o que ocasiona a concentração de chaves em trechos da tabela. No presente método, as seqüências de tentativas somente são idênticas se  $h'(x) = h'(y)$  e  $h''(x) = h''(y)$ . Além disso, o método de dispersão dupla é capaz de gerar um número maior de possíveis seqüências de tentativas distintas do que os anteriores (exercícios 8.15 a 8.18). Sem dúvida, a dispersão dupla é superior às tentativas linear e quadrática.

Para que os endereços-base obtidos da equação anterior correspondam à varredura de toda a tabela, é necessário que  $h''(x)$  e  $m$  sejam primos entre si (exercício 8.19).

Existem diversas maneiras de assegurar essa relação entre  $h''(x)$  e  $m$ . Por exemplo, é comum o projeto de tabelas de dispersão cuja dimensão  $m$  é uma potência de 2. Nesse caso, basta definir a função  $h''$  de forma a produzir números ímpares. Ou então, mais simples ainda, basta definir  $m$  como primo.

A figura 8.10 ilustra um exemplo de dispersão dupla. Foi utilizada a equação

$h(x, k) = (h'(x) + k \cdot h''(x)) \bmod m$ , com  $m = 7$ ,  $h'(x) = x \bmod 7$  e  $h''(x) = 1 + x \bmod 5$ . Observe que a chave 32 foi armazenada no compartimento 0, tendo em vista que  $h'(32) = h'(74) = 4$  e  $h'(32) + 1 \cdot h''(32) = (4 + 1 \cdot 3) \bmod 7 = 0$ . A chave 70, antes de ser armazenada no compartimento 2, colidiu com a 32 no compartimento 0 e com a 92 no 1.

## 8.6 – Tabela de Dimensão Dinâmica

Tratou-se até agora de tabelas de dimensão estática, onde, mesmo admitindo-se inclusões e exclusões de nós, o número de compartimentos da tabela não variava. Essa rigidez pode causar problemas se não for possível avaliar-se, de antemão, o número final de elementos da tabela. Dentre as soluções existentes para variar a dimensão de uma tabela alocada na memória principal, o método de *dispersão linear*, que será aqui apresentado, é bastante eficiente.

Os problemas decorrentes de um aumento na dimensão da tabela são óbvios. De imediato se observa que a própria função de dispersão deve ser modificada, e, por conseguinte, todos os endereços de nós já armazenados. Uma idéia interessante é então alterar apenas parte dos endereços já alocados, como adotado pelo método de dispersão linear.

Considere uma tabela de dispersão consistindo em  $m$  compartimentos  $0, \dots, m - 1$ . O método de dispersão linear aumenta o espaço de endereçamento gradualmente, expandindo inicialmente o compartimento 0, depois o compartimento 1 e assim sucessivamente. Expandir um compartimento  $p$  significa definir um novo compartimento  $q$  no final da tabela, denominado *expansão de p*. O conjunto de chaves sinônimas, originalmente com endereço-base  $p$ , é então distribuído entre os compartimentos  $p$  e  $q$  de forma conveniente. Quando todos os compartimentos tiverem sido expandidos, o tamanho da tabela terá sido dobrado e o processo, se e quando necessário, poderá ser recomeçado. A figura 8.11 apresenta um exemplo para  $m = 5$ . O ponteiro  $p$  indica o próximo compartimento a ser expandido.

Como o endereçamento é mantido ao longo do processo? Observe a figura 8.11. Quando a tabela possui tamanho 5, os endereços-base podem ser encontrados com a função  $h_0(x) = x \bmod 5$ , por exemplo. Quando o tamanho da tabela tiver sido dobrado, as chaves serão endereçadas com a função

$h_1(x) = x \bmod 10$ . Antes que o processo tenha terminado, entretanto, o que acontece? Para pertencer ao compartimento 0, segundo a função  $h_0$ , o último dígito da chave deve ser 0 ou 5. Segundo a função  $h_1(x)$ , as chaves com último dígito zero continuarão pertencendo ao compartimento 0, enquanto aquelas com último dígito 5 irão para o novo compartimento. Nenhum dos registros que seriam alocados nos compartimentos 1, 2, 3 ou 4 sofre alterações. Então, dada uma chave  $x$ , computa-se  $h_0(x)$ . Seja  $p$  o menor compartimento ainda não expandido. Se  $h_0(x) < p$ , o compartimento correspondente já foi expandido; o endereço correto é então recalculado com a função  $h_1(x)$ . Note-se que, quando toda a tabela tiver sido expandida, todos os endereços serão calculados por  $h_1(x)$ . De maneira geral, é necessário conhecer  $\ell$ , o número de vezes que a tabela foi duplicada. A função de dispersão é então fornecida por  $h_\ell = x \bmod (m \times 2^\ell)$ .

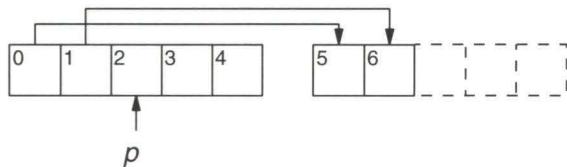


Figura 8.11: Tabela de dimensão dinâmica

O procedimento *mapear*, visto a seguir, calcula o endereço-base da chave  $x$  na tabela de dispersão. Duas variáveis são importantes no processo:  $p$ , que aponta o próximo compartimento a ser expandido, e  $\ell$ , que indica o número de vezes que a tabela foi expandida a partir de seu tamanho mínimo  $m$ . Inicialmente,  $\ell = 0$  e  $p = 0$ .

**algoritmo 8.5:** calcular o endereço da chave  $x$

**procedimento** *mapear*( $x, ender, p, \ell$ )

```

ender :=  $h_\ell(x)$ 
se  $ender < p$  então
    ender :=  $h_{\ell+1}(x)$ 

```

O tratamento de colisões no método de dispersão linear, comumente utilizado, é por encadeamento exterior. Desta forma, ao se expandir um com-

partimento, é necessário somente o reajuste de ponteiros da lista de nós. O tamanho médio das listas encadeadas cresce com o fator de carga da tabela. Como o percurso de listas encadeadas muito grandes torna a busca pouco eficiente, é justificável o emprego do método da dispersão linear toda vez que o fator de carga atingir um limite determinado. Quando este fato ocorrer, o comportamento apontado por  $p$  será expandido. Com isto, o fator de carga retornará ao limite aceitável. Assim, o processo de duplicação da tabela é executado lentamente, sem reestruturar toda a tabela de uma só vez.

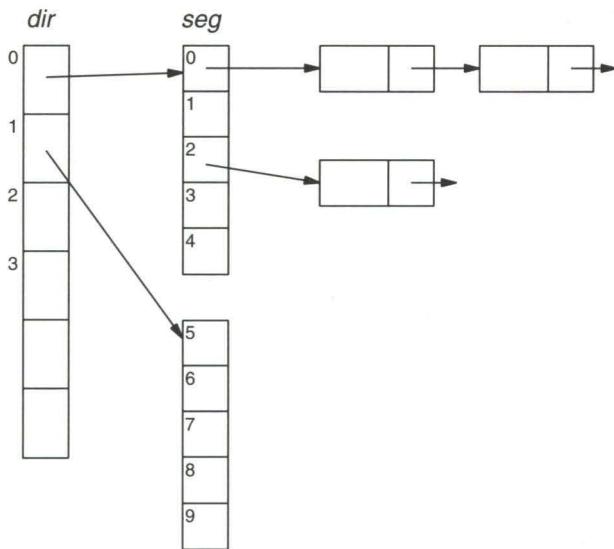
Observe que esse método não seria eficiente caso as colisões fossem tratadas por encadeamento interior ou endereçamento aberto. Nestes, as listas de chaves com o mesmo endereço-base não estão claramente definidas, o que implicaria acréscimo de testes. Além disso, como as chaves estão armazenadas na própria tabela, o movimento de nós se faz por cópia e não por alteração de ponteiros, outro fator de possível redução de eficiência.

A implementação de tal processo requer um vetor de ponteiros que possa ser expandido e contraído. Algumas linguagens de programação oferecem esse recurso. Outra solução é utilizar uma estrutura de armazenamento em dois níveis, conforme descrito a seguir.

A tabela corresponde a uma estrutura denominada *seg*, composta por segmentos de tamanho fixo  $m$ . Um diretório *dir* controla os segmentos em uso. O diretório é alocado estaticamente, enquanto a alocação dos segmentos é dinâmica durante o processo de expansão. Cada segmento utilizado é associado a um elemento do diretório, o qual aponta este segmento.

Cada posição de um segmento aponta um compartimento da tabela. Essa posição é, na realidade, um ponteiro para a lista encadeada de sinônimos, relativos ao compartimento em questão, visto que se utiliza o encadeamento exterior. Observe a figura 8.12. O segmento apontado por *dir*[0] contém um vetor de ponteiros para as listas das chaves com endereço-base no intervalo  $[0, m - 1]$ . De um modo geral, *dir*[ $k$ ] indica o segmento onde se localizam as chaves com endereços-base em  $[km, (k + 1)m - 1]$ . Isto significa que a numeração dos compartimentos segue seqüencialmente, inclusive nos pontos de mudança de segmentos.

Para localizar a lista que contém as chaves de um certo compartimento  $p$ , deve-se proceder da seguinte maneira. Determinar, inicialmente, o elemento no diretório que aponta o segmento contendo  $p$ . Esse elemento corresponde



**Figura 8.12:** A estrutura em dois níveis

ao índice  $id = \lfloor p/m \rfloor$  no diretório. Calcular, em seguida, o índice no segmento correspondente a  $p$ . Este valor é  $is = p \bmod m$ . Finalmente, o ponteiro para a lista desejada é  $dir[id] \uparrow . seg[is]$ .

O procedimento *expandir* efetua a expansão do compartimento  $p$ . Ele contém chamadas a três outros procedimentos: *reservar*, *lista-encadeada* e *atual*. O primeiro destes aloca uma área de tamanho  $m$  no endereço apontado por  $pt$ . Essa operação corresponde ao algoritmo 2.28 da seção 2.8. O procedimento *lista-encadeada* constrói a lista contendo as chaves alocadas ao compartimento expansão de  $p$ . Os endereços-base das chaves  $x$  localizadas na lista de  $p$  são recalculados, mediante a função  $h_{\ell+1}(x)$ . Se esse endereço manteve-se inalterado, a chave  $x$  não sofre movimentação. Caso contrário,  $x$  será transferida para a nova lista encadeada relativa à expansão de  $p$ . O procedimento *atual* determina o próximo compartimento a ser expandido após  $p$ . Este será igual a  $p + 1$ , exceto nos pontos de duplicação da tabela, quando o processo é reiniciado com  $p = 0$ . As variáveis  $id$  e  $id1$  representam os índices no diretório para a localização de  $p$  e sua expansão, respectivamente. Por outro lado, o índice de  $p$  no segmento coincide com o de sua

expansão, sendo seu valor denotado por  $is$ . Então  $0 \leq id, id1 < tamdir$  e  $0 \leq is < m$ , onde  $tamdir$  é o tamanho do diretório. Finalmente, seja  $pt$  um ponteiro para o nó que contém a chave  $x$  nas listas encadeadas. Então,  $pt \uparrow .chave = x$  e  $pt \uparrow .prox$  indica o próximo nó da lista de sinônimos de  $x$ . A chamada externa é  $expandir(p, \ell)$ , a qual deve ser realizada toda vez que se desejar expandir um compartimento. O valor inicial é  $p = \ell = 0$ .

**algoritmo 8.6:** Expansão do compartimento  $p$

**procedimento**  $expandir(p, \ell)$

$id1 := \lfloor p/m \rfloor + 2^\ell; \quad is := p \bmod m$

**se**  $id1 < tamdir$  **então**

**se**  $is = 0$  **então**

*reservar(m, pt)*

% construído novo segmento

$dir[id1] := pt$

% ponteiro para novo segmento

*lista-encadeada(p, \ell)*

*atual(p, \ell)*

**senão** “diretório esgotado”

**procedimento** *lista-encadeada(p, \ell)*

$id := \lfloor p/m \rfloor; \quad id1 := id + 2^\ell$

$is := p \bmod m$

$pt := dir[id] \uparrow .seg[is]$

% ponteiro lista  $p$

$dir[id1] \uparrow .seg[is] := \lambda$

% ponteiro lista expansão

**enquanto**  $pt \neq \lambda$  **faça**

**se**  $h_{\ell+1}(pt \uparrow .chave) \neq is$  **então** % transferir nó

**se**  $pt = dir[id] \uparrow .seg[is]$  **então**

$dir[id] \uparrow .seg[is] := pt \uparrow .prox$

**senão**  $ant \uparrow .prox := pt \uparrow .prox$  % remoção da lista

$pt \uparrow .prox := dir[id1] \uparrow .seg[is]$

$dir[id1] \uparrow .seg[is] := pt$  % inclusão na lista expansão

$ant := pt$

$pt := pt \uparrow .prox$

**procedimento** *atual(p, \ell)*

$p := p + 1$

**se**  $p = m \cdot 2^\ell$  **então**

% tabela duplicada

$\ell := \ell + 1$

$p := 0$

A complexidade do algoritmo de expansão é linear no número de nós da lista encadeada do compartimento  $p$ .

A contração de compartimentos é a operação inversa da expansão. Inicialmente, os parâmetros  $p$  e  $\ell$  são ajustados. Posteriormente, o último compartimento é eliminado através da transferência de suas chaves para o compartimento indicado por  $p$ .

## 8.7 – Exercícios

- 8.1** Suponha um conjunto de  $n$  chaves  $x$  formado pelos  $n$  primeiros múltiplos do número 7. Quantas colisões seriam obtidas mediante a aplicação das funções de dispersão seguintes.
- $x \bmod 7$ .
  - $x \bmod 14$ .
  - $x \bmod 5$ .

- 8.2** Responder se é certo ou errado:

O fator de carga de qualquer tabela de dispersão é no máximo 1.

- 8.3°** Seja  $X$  um conjunto de  $n$  chaves e  $h : X \rightarrow [0, m]$  uma função de dispersão uniforme. Mostrar que a probabilidade de que  $h$  não produza colisões é igual a

$$\frac{1}{m^n} \cdot m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot (m - n + 1).$$

- 8.4** Suponha um conjunto de chaves decimais para as quais se deseja aplicar uma função de dispersão utilizando o método da análise de dígitos. Supondo que a tabela seja de dimensão  $m$ , com endereços no intervalo  $[0, m - 1]$ , determinar o valor  $k$  de dígitos a serem escolhidos pela função.
- 8.5** Descrever algoritmos de busca, inserção e remoção em uma tabela de dispersão com tratamento de colisões pelo método de encadeamento exterior.
- 8.6** Responder se é certo ou errado:

Numa tabela de dispersão que resolve colisões por encadeamento exterior, a complexidade média de uma busca sem sucesso é igual à complexidade média de inclusão de uma nova chave.

- 8.7 Descrever algoritmos de busca e inserção em uma tabela de dispersão com tratamento de colisões por encadeamento interior, supondo a não-existência de exclusões.
- 8.8 O algoritmo 8.2, de inserção por encadeamento interno, efetua a fusão das listas circulares encadeadas que contêm, respectivamente, o nó  $h(x)$  e o nó  $j$  onde será realizada a inserção. Contudo, o algoritmo somente efetua a fusão se as listas não coincidirem. Responder:
- Como o algoritmo efetua a verificação de coincidência entre as listas ?
  - O que aconteceria se a fusão fosse realizada entre duas listas coincidentes ?
- 8.9 Descrever um algoritmo de inserção em uma tabela de dispersão por encadeamento aberto, supondo a não-existência de remoções.
- 8.10 Descrever um algoritmo de remoção em uma tabela de dispersão por endereçamento aberto, supondo que cada compartimento possa estar nos estados vazio, ocupado ou liberado.
- 8.11 Descrever algoritmos de busca e inserção em uma tabela de dispersão por endereçamento aberto, supondo as condições do exercício anterior.
- 8.12• Mostrar que, numa tabela de dispersão onde as colisões são tratadas por endereçamento aberto, a função de dispersão é de seqüência uniforme e  $\alpha < 1$ , o número de tentativas efetuadas é, em média, igual a  $1/(1 - \alpha)$ .
- 8.13 Suponha a aplicação do método de endereçamento aberto por tentativa linear, o qual utiliza uma função de dispersão uniforme. Seja um agrupamento primário de tamanho  $j$ , isto é, composto por  $j$  compartimentos consecutivos ocupados. Mostrar que a probabilidade de o tamanho do agrupamento aumentar para  $j + 1$ , em uma inserção, é igual a  $(j + 1)/2$ .
- 8.14• Considere as seguintes equações recorrentes para a determinação de  $h(x, k)$ :

$$h(x, 0) = h'(x)$$

$$h(x, k) = (h(x, k - 1) + k) \bmod m, \quad 0 < k < m,$$

onde  $h'(x)$  é um valor entre 0 e  $m - 1$ , e  $m$  é potência de 2.

Pede-se:

- (i) Mostrar que essas equações satisfazem os valores de endereços obtidos pela tentativa quadrática. Isto é, mostrar que existem constantes  $c_1, c_2$  tais que o valor  $h(x, k)$  anterior satisfaz

$$h(x, k) = (h'(x) + c_1 k + c_2 k^2) \text{ mod } m.$$

- (ii) Mostrar que os valores  $h(x, k)$ , obtidos pela recorrência, correspondem à varredura de toda a tabela, isto é, todos os  $m$  valores  $h(x, k)$  são distintos,  $0 \leq k < m$ .

8.15º Mostrar que o método da tentativa linear gera não mais do que  $m$  seqüências de tentativas, para uma dada chave  $x$ .

8.16º Mostrar que o método da tentativa quadrática gera não mais do que  $m$  seqüências de tentativas, para uma dada chave  $x$ .

8.17• Mostrar que o método da dispersão dupla gera não mais do que  $m^2$  seqüências de tentativas, para uma dada chave  $x$ .

8.18 Que conclusões podem ser obtidas dos três exercícios anteriores, relativas à possibilidade de obtenção de funções de dispersão de seqüência uniforme, mediante a utilização dos métodos correspondentes?

8.19• Mostrar que, se  $m$  e  $h''(x)$  admitem um divisor comum  $d$ , então a seqüência de tentativas obtidas mediante os endereços-base  $h(x, k) = (h'(x) + k \cdot h''(x) \text{ mod } m)$ ,  $0 \leq k < m$ , examinará apenas uma fração igual a  $1/d$  da tabela de dispersão.

8.20• Suponha uma busca sem sucesso efetuada em uma tabela de dispersão, com tratamento de colisões por dispersão dupla utilizando uma função de seqüência uniforme. Mostrar que o número médio de tentativas efetuadas é  $1/(1 - \alpha)$ ,  $\alpha < 1$ .

8.21• Suponha uma busca com sucesso efetuada em uma tabela de dispersão, com tratamento de colisões por dispersão dupla, utilizando uma função de seqüência uniforme. Mostrar que o número médio de tentativas efetuadas é  $\frac{1}{\alpha} \log \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

8.22 Dado o valor  $m = 3$ , a função de dispersão  $h_\ell = x \text{ mod } (m \cdot 2^\ell)$  e as chaves  $x$  de valores 23, 4, 55, 12, 5, 8, 90, 34, 54, 2, 45 e 67, construir a tabela de dispersão correspondente a todas as expansões para  $0 \leq \ell \leq 2$ .

- 8.23 Escrever um algoritmo para efetuar a contração de um compartimento de uma tabela de dispersão dinâmica utilizando a estrutura de dados detalhada na seção 8.6.

## Notas Bibliográficas

Quem primeiro concebeu a técnica de tabelas de dispersão foi H.P.Luhn, em 1953, segundo Knuth. Já em 1975, Maurer e Lewis [Ma75] descreveram os principais conceitos e indicaram as referências fundamentais. Lewis e Cook [Le88] atualizaram estes conceitos, discutindo também novas técnicas. As tabelas de dimensão dinâmica alocadas em memória principal, apresentadas na seção 8.6, foram introduzidas por Larson [La88].

Knuth [Kn73], Gonnet e Baeza-Yates [Go91] e Reingold e Hansen [Re83] são textos indicados para o estudo de tabelas de dispersão.

---

# Busca Digital

## 9.1 – Introdução

No problema geral de busca, é suposto que existe um conjunto de chaves  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  e um valor  $x$  correspondente a uma chave que se deseja localizar em  $S$ . Os métodos até agora examinados neste texto consistiam em estruturar  $S$  de alguma forma conveniente e, através de comparações de  $x$  com chaves  $s_i$  de  $S$ , tentar localizar  $x$  em  $S$ . Nesses métodos, cada chave  $s_i$ , bem como a chave desejada  $x$ , é tratada como um único elemento indivisível. Desta forma, quando se fazia uma referência à comparação do valor de  $x$  com o de  $s_i$ , assumia-se que o valor global de  $x$  era comparado com o de  $s_i$ . Assumia-se também, implicitamente, que o tamanho de cada chave permitia o seu armazenamento em memória do computador (primária ou secundária) de forma eficiente. Isto é, o tamanho de cada chave não excedia o da palavra, ou unidade correspondente, do computador considerado, de modo a possibilitar a manipulação eficiente das chaves. Finalmente, as estruturas empregadas na busca, descritas nos capítulos anteriores, possuíam como restrição que as chaves fossem todas de mesmo tamanho. Se esse fato não ocorresse, o tamanho da maior chave seria tomado como padrão, completando-se as demais com caracteres extras até que o tamanho padrão fosse atingido.

Nem sempre, entretanto, essas premissas se verificam. Em alguns casos práticos, as chaves podem possuir tamanhos diferentes e, além disso, os tamanhos podem não permitir um armazenamento de cada chave em uma

palavra de computador. Como exemplo, suponha que se deseje armazenar um texto literário em computador para, em seguida, tentar localizar frases nesse texto. Neste caso, o conjunto  $S$  das chaves corresponderia às frases armazenadas, cada  $s_i$  uma frase passível de ser buscada. Naturalmente, as chaves podem assumir tamanho bastante diverso e, de um modo geral, não seria possível armazenar cada chave em uma palavra de computador.

A casos como este, as técnicas até o momento examinadas não se aplicam. Um outro tipo de busca, denominada *busca digital*, é mais apropriado. Este capítulo é dedicado ao estudo dessa técnica. Na próxima seção, examina-se a estrutura básica na qual uma busca digital é efetuada, a árvore digital. Em seguida, na seção 9.3, é descrita a árvore digital binária, possivelmente o caso mais importante da árvore digital. Finalmente, a seção 9.4 é dedicada ao estudo da árvore Patrícia, que é uma implementação eficiente da árvore digital binária.

## 9.2 – A Árvore Digital

A diferença básica entre a busca digital e aquela examinada nos capítulos anteriores é que a chave, na busca digital, não é tratada como um elemento único, indivisível. Isto é, assume-se que cada chave é constituída de um conjunto de caracteres ou dígitos definidos em um alfabeto apropriado. Em vez de se comparar a chave procurada com as chaves do conjunto armazenado, a comparação é efetuada, individualmente, entre os dígitos que compõem as chaves, dígito a dígito. No exemplo do texto literário, mencionado na seção anterior, em que as chaves eram formadas por frases do texto, um desmembramento natural dessas chaves é decompô-las nas letras que as formam e efetuar a busca de cada frase, letra a letra. Será examinada aqui uma estrutura que permite a busca de qualquer chave em um número de passos igual ao tamanho da chave.

Seja  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  um conjunto de  $n$  chaves em que cada  $s_i$  é formada por uma seqüência de elementos  $d_j$  denominados *dígitos*. Supõe-se que existe, em  $S$ , o total de  $m$  dígitos distintos, cujo conjunto forma o *alfabeto* de  $S$ . Os dígitos do alfabeto admitem a ordenação  $d_1 < \dots < d_m$ . Os  $p$  primeiros dígitos de uma chave formam o *prefixo de tamanho p* da chave. No exemplo do texto literário,  $S$  é o conjunto de frases do texto,  $s_i$  é cada frase (passível

de ser buscada) e  $n$  é o número de frases. Se as frases forem decompostas em letras, cada uma dessas corresponde a um dígito do alfabeto. O valor de  $m$  é 26, supondo-se que todas as letras sejam utilizadas. A ordenação dos dígitos corresponderia à ordenação alfabética.

Uma árvore digital para  $S$  é uma árvore  $m$ -ária  $T$ , não vazia, tal que:

- (i) Se um nó  $v$  é o  $j$ -ésimo filho de seu pai, então  $v$  corresponde ao dígito  $d_j$  do alfabeto  $S$ ,  $1 \leq j \leq m$ .
- (ii) Para cada nó  $v$ , a seqüência de dígitos definida pelo caminho desde a raiz de  $T$  até  $v$  corresponde a um prefixo de alguma chave de  $S$ .

Decorre dessa definição que a raiz de uma árvore digital sempre existe e não corresponde a qualquer dígito do alfabeto.

Uma forma natural de decompor chaves constituídas de palavras é através das letras que as compõem. Observe o exemplo da figura 9.1. O alfabeto é  $\{e, r, s\}$ . Portanto,  $m = 3$  e a ordenação alfabética indica  $e < r < s$ . A figura ilustra um conjunto de chaves e uma árvore digital para essas chaves. É uma árvore ternária. O dígito correspondente a cada nó encontra-se representado na aresta entre o nó e seu pai. É simples verificar que a condição (i) é satisfeita, pois os dígitos  $e$ ,  $r$  e  $s$  aparecem, respectivamente, em nós correspondentes ao primeiro, segundo e terceiro filhos de seus pais. Além disso, o caminho desde a raiz até qualquer nó corresponde a um prefixo de algumas das chaves do conjunto. Reciprocamente, todo prefixo corresponde a um desses caminhos. Então (ii) também é satisfeita.

A condição (i) da definição da árvore digital implica que o  $j$ -ésimo filho de um nó qualquer da árvore, se existir, corresponde exatamente ao dígito  $d_j$ . Conhecendo este fato, podem-se simplesmente eliminar as informações dos nós, pois são implícitos pelo formato da árvore.

Em toda árvore digital, existe um nó diferente que corresponde a cada chave do conjunto. Na figura 9.1, por exemplo, o nó assinalado com (\*) corresponde à chave *serre*. Em uma implementação da árvore digital, esse nó poderia conter um ponteiro para localizar a informação cuja chave é igual a *serre*. A árvore digital se constituiria, pois, em uma árvore de ponteiros. Nós que não correspondessem ao último dígito de uma chave válida conteriam um ponteiro nulo.

Uma vez construída a árvore, o processamento da busca é simples. Suponha

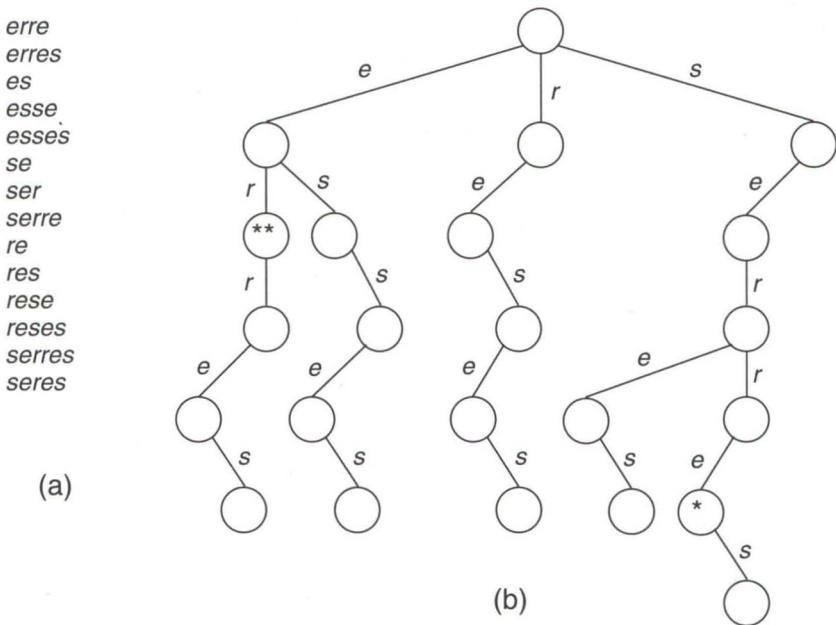


Figura 9.1: Árvore digital

que a chave procurada seja  $x = seres$ . Inicia-se pela raiz. O primeiro dígito da chave é  $s$ , o que leva ao terceiro filho da raiz. O próximo é o dígito  $e$ , o que indica o caminho da esquerda. O seguinte é  $r$ , correspondente ao filho do centro. Na seqüência de  $x$ , encontra-se o dígito  $e$ , por isso, a busca prossegue para a esquerda. Finalmente, o último dígito  $s$  conduz ao filho direito. A seqüência de dígitos, desde a raiz até esse último nó, é igual a  $seres$ ; a chave, portanto, foi localizada. Se a chave a ser localizada fosse  $sr$ , a busca terminaria sem sucesso, pois o nó-filho da raiz correspondente ao dígito  $s$  não possui filho direito.

Observe que a busca descrita localiza também prefixos de chaves válidas, que por si só não são chaves válidas. Por exemplo, se  $x = er$ , a busca terminaria com sucesso no nó assinalado com (\*\*). Assim, se se admitir a busca de chaves não válidas, será necessário também examinar o conteúdo do nó  $v$  correspondente ao último dígito de  $x$ . Se  $v$  não for terminal de alguma chave do conjunto, então  $x$  é inválida.

O exemplo anterior indica como proceder para escrever o algoritmo de busca. No algoritmo, supõe-se que a árvore digital  $m$ -ária  $T$  se encontra armazenada da seguinte maneira. Cada nó  $v$ , apontado por  $pt$ ,  $pt \neq \lambda$ , possui  $m$  filhos ordenados, apontados por  $pt \uparrow .pont[1], \dots, pt \uparrow .pont[m]$ , respectivamente. Se algum  $i$ -ésimo filho deste nó está ausente, então  $pt \uparrow .pont[i] = \lambda$ . Se  $v$  for nó terminal de alguma chave, então  $pt \uparrow .info = terminal$ . Caso contrário,  $pt \uparrow .info = não\ terminal$ . A chave  $x$  a ser procurada possui  $k$  dígitos, denotados por  $d[1], \dots, d[k]$ . O parâmetro  $pt$  indica o nó corrente da árvore, em exame, enquanto  $\ell$  e  $a$  indicam o resultado da busca. O valor retornado por  $\ell$  é o tamanho do maior prefixo de  $x$  que coincide com um prefixo de alguma chave. Esse prefixo é obtido percorrendo-se a árvore desde a sua raiz até o nó  $w$  apontado por  $pt$ , ao final do processo. Se  $a = 1$ , a chave foi encontrada no nó  $w$ . Caso contrário,  $a = 0$ . A variável  $ptraiz$  armazena um ponteiro para a raiz. A chamada externa é  $buscadig(x, pt, \ell, a)$ , com  $pt = ptraiz$ ,  $\ell = a = 0$ .

**algoritmo 9.1:** Busca digital

**procedimento**  $buscadig(x, pt, \ell, a)$

**se**  $\ell < k$  **então**

**seja**  $j$  a posição de  $d(\ell + 1)$  na ordenação do alfabeto

**se**  $pt \uparrow .pont[j] \neq \lambda$  **então**

$pt := pt \uparrow .pont[j]; \quad \ell := \ell + 1$

$buscadig(x, pt, \ell, a)$

**senão** **se**  $pt \uparrow .info = terminal$  **então**  $a := 1$

Para incluir uma nova chave  $x = d(1), \dots, d(k)$  numa árvore digital  $m$ -ária, utiliza-se o algoritmo 9.1 de busca. Se  $x$  foi localizado na árvore, então a inclusão é inválida. Caso contrário, a busca determina o nó  $w$  da árvore, apontado por  $pt$ , tal que o caminho da raiz até  $w$  corresponde ao maior prefixo de chave que coincide com  $x$ . O tamanho  $\ell$  desse prefixo também é conhecido. Seja  $j$  a posição de  $d(\ell + 1)$  na ordenação de dígitos. Então, um novo nó é incluído na árvore, de modo a se constituir o  $j$ -ésimo filho de  $w$ . O processo se repete até que todos os dígitos da chave tenham sido esgotados.

**algoritmo 9.2:** Inclusão em árvore digital .

$pt := ptraiz;$   $\ell := a := 0$

$buscadig(x, pt, \ell, a)$

**se**  $a = 0$  **então**

**para**  $h = \ell + 1, \dots, k$  **faz**

seja  $j$  a posição de  $d(h)$  na ordenação do alfabeto

*ocupar(ptz)*

**para**  $i = 1, \dots, m$  **faz**  $ptz \uparrow . pont[i] := \lambda$

$pt \uparrow . pont[j] := ptz;$   $ptz \uparrow . info := \text{não terminal}$

$pt := ptz$

$pt \uparrow . info := \text{terminal}$

**senão** “inclusão inválida”

Para construir uma árvore digital, pode-se utilizar o algoritmo 9.2 de inclusão. Iniciando-se por uma árvore contendo unicamente a raiz, o processo consiste em incluir suas chaves uma a uma.

É simples determinar a complexidade do processo de busca. O número de iterações efetuadas é igual ao tamanho  $k$  da chave, no máximo. Em cada iteração, todas as operações podem ser efetuadas em tempo constante, exceto determinar o valor  $j$  correspondente à posição do dígito corrente na ordenação do alfabeto. Esse valor pode ser determinado, sem dificuldade, em tempo  $O(\log m)$  por iteração, através de uma busca binária. Se  $m = 1$ , o algoritmo efetua  $k$  passos. A complexidade do algoritmo é então  $O(k(\log m + 1))$ . Contudo, na maioria dos casos práticos, o valor de  $m$  é pequeno. Nessa situação, a representação binária de cada dígito pode ser utilizada para determinar, diretamente, a sua posição na ordenação do alfabeto. Com essa premissa, a complexidade do algoritmo cai para  $O(k)$ .

Para determinar a complexidade da inclusão, decompõe-se o tamanho  $k$  da chave  $x$ , a ser incluída, em duas partes  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 + k_2 = k$ ). O inteiro  $k_1$  corresponde ao tamanho do maior prefixo comum a  $x$  e a alguma outra chave da árvore. O valor  $k_2$  fornece, então, o número de nós a serem incluídos na árvore resultante da inclusão da chave  $x$ . Cada nó incluído requer  $O(m)$  operações. O algoritmo de inclusão produz  $k_1$  iterações do procedimento *buscadig*. Logo, a complexidade total é  $O(k_1 \log m + k_2 m)$ .

Observa-se da expressão anterior que a complexidade da busca independe do número total de chaves (e do tamanho do arquivo). Deve-se recordar que os métodos clássicos de busca não possuem essa propriedade. Na busca digital,

a complexidade depende tão-somente dos tamanhos da chave e do alfabeto. Essa característica torna o presente método de busca uma base importante para o tratamento de grandes arquivos.

Uma outra vantagem desse método é que as chaves podem possuir tamanho arbitrário e variável. A complexidade da busca reflete apenas o tamanho da chave procurada.

Uma propriedade interessante dessa busca é que, ao localizar um certo prefixo  $x$ , terão sido localizadas todas as chaves do arquivo cujo prefixo é igual a  $x$ . Estas encontram-se na subárvore de raiz  $x$ . Tal propriedade pode ser útil em aplicações na área de lingüística, onde os prefixos podem representar fonemas, palavras ou sentenças.

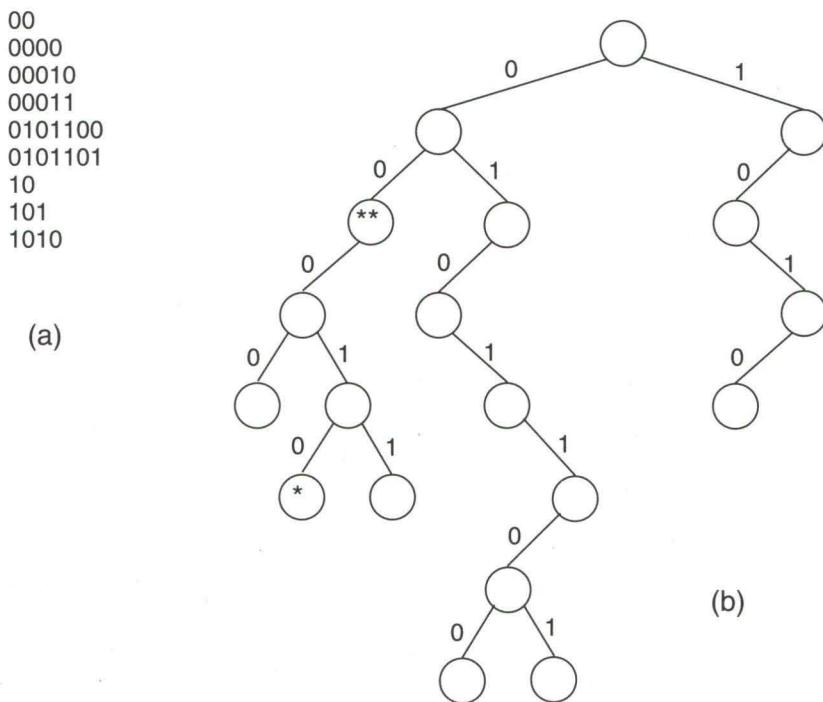
Contudo, apesar das vantagens mencionadas, uma aplicação direta da árvore digital é, por vezes, inviável. O problema é a excessiva quantidade de memória utilizada. Por exemplo, se houver  $n$  chaves de tamanho (máximo)  $t$  com prefixos distintos, então uma árvore digital  $m$ -ária necessitaria de espaço  $O(n m t)$ . Para atenuar o problema do espaço consumido, uma alternativa é realizar uma implementação um pouco mais elaborada. Por exemplo, os ponteiros que contêm  $\lambda$ , correspondentes a subárvores vazias, podem ser eliminados se cada conjunto de nós-irmãos da árvore for agrupado em uma lista circular. Nesse caso, haveria um tempo adicional para localizar o nó desejado nessa lista. Para que o esquema possa operar, será necessário, também, armazenar as informações correspondentes aos dígitos na árvore. Note-se que essa informação poderia ser suprimida na implementação direta. Nas próximas seções, serão examinadas variações da árvore digital mais eficientes em relação ao espaço consumido.

Intuitivamente, a técnica da árvore digital é tão mais eficiente quanto maior for a quantidade de chaves com prefixos comuns. Uma árvore digital que possua muitos ziguezagues quase sempre é ineficiente. (Um ziguezague de uma árvore  $T$  é uma subárvore parcial cujos nós possuem um único filho em  $T$ .) A árvore da figura 9.1 contém vários ziguezagues; por exemplo, o caminho que corresponde à chave *reses*.

### 9.3 – Árvore Digital Binária

Uma árvore digital binária é, simplesmente, o caso binário da árvore digital, ou seja, uma árvore digital  $m$ -ária com  $m = 2$ . Nesse caso, representa-se o

alfabeto por  $\{0, 1\}$ . Assim sendo, uma árvore digital é uma árvore binária e cada chave é uma seqüência binária. A seleção do filho esquerdo de um nó é interpretada como o dígito 0 e o direito como 1. A figura 9.2 mostra um exemplo. O nó assinalado com (\*) na figura corresponde à chave 00010.



**Figura 9.2:** Árvore digital binária

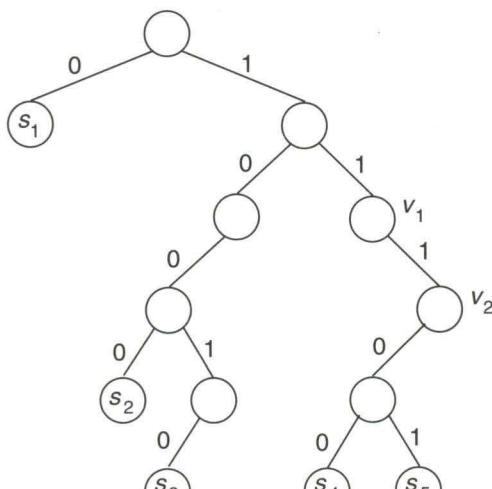
A maior utilização das árvores digitais dá-se, possivelmente, nesse caso binário. Chaves ou códigos binários são os mais empregados na computação. Além disso, o número de ponteiros vazios é menor no caso binário (exercício 9.3). Contudo, a possível formação dos indesejáveis ziguezagues ainda permanece. Por exemplo, para atingir as chaves 0101100 ou 0101101, percorre-se o ziguezague correspondente ao trecho do terceiro ao sexto nó, na busca. Na seção seguinte, será examinada uma variação da árvore digital binária que elimina a formação de ziguezagues.

Observando-se a figura 9.2, nota-se que existem chaves binárias que são prefixos de outras da coleção. Por exemplo, a chave 00 é prefixo da chave 00010. Isto é equivalente a dizer, na árvore digital, que o caminho da raiz até o nó (\*\*\*) correspondente à chave 00 é parte daquele até o nó (\*), que, por sua vez, corresponde a 00010. Freqüentemente, para melhor manipular a estrutura, deseja-se que tal situação não aconteça. Define-se, então, uma *árvore binária de prefixo* como sendo uma árvore digital binária tal que nenhum código seja prefixo de outro. A árvore da figura 9.2 não é de prefixo, mas a da figura 9.3 é.

Uma propriedade interessante da árvore binária de prefixo é que há uma correspondência entre o conjunto das chaves e o das folhas da árvore. Isto é, cada chave é unicamente representada por uma folha e a codificação binária dessa chave corresponde ao caminho da raiz até essa folha. As árvores de prefixo são utilizadas também em aplicações de codificação com o objetivo de definir códigos apropriados para um dado conjunto de símbolos.

$s_1$  - 0  
 $s_2$  - 1000  
 $s_3$  - 10010  
 $s_4$  - 11100  
 $s_5$  - 11101

(a)



(b)

Figura 9.3: Árvore binária de prefixo

## 9.4 – Árvore Patrícia

A árvore Patrícia é construída a partir da árvore binária de prefixo. Seja um conjunto de chaves  $\{s_1, \dots, s_n\}$  de valores binários tais que nenhuma chave seja prefixo de outra. Considere a árvore binária de prefixo correspondente a essas chaves, como a da figura 9.3. As chaves válidas se encontram nas folhas da árvore. Admita, inicialmente, que a chave procurada  $x$  seja sempre válida. Suponha, agora, que se deseja buscar a chave  $x = s_4$  na árvore. A partir do valor binário de  $x$ , o algoritmo percorrerá o caminho 11100 na árvore, iniciando pela raiz. Observe que esse caminho contém o ziguezague formado pelos vértices  $v_1, v_2$  assinalados. Se  $x$  é uma chave válida, após se assegurar que os dois primeiros dígitos de  $x$  são 11, não há alternativa para os dois seguintes, pois correspondem a nós com um único filho. Assim sendo, a busca poderia eliminar o terceiro e o quarto teste de dígitos, pois, forçosamente, produzirão 10. Ou seja, do segundo dígito da chave poderia se prosseguir diretamente para o quinto. A idéia, pois, seria colocar uma informação (rótulo) no nó correspondente ao segundo dígito da chave 11100 para que a busca prosseguisse para o quinto dígito. Isso corresponde a eliminar o ziguezague. A árvore Patrícia é obtida dessa forma.

Uma árvore Patrícia  $T$  é aquela em que cada vértice  $v$  possui um rótulo  $r(v)$ , sendo obtida a partir de uma árvore binária de prefixo  $H$  com mais de um nó, pela realização da seguinte operação para cada ziguezague  $v_1, \dots, v_k$  de  $H$ . Se  $v_k$  é uma folha, relativa à chave  $s_i$ , deve-se então compactar  $v_1, \dots, v_k$  em  $v_1$  e definir  $r(v_1) = s_i$ . Caso contrário,  $v_k$  possui o filho  $w$ , deve-se compactar  $v_1, \dots, v_k, w$  em  $v_1$  e definir  $r(v_1) = nível_H(v_1) + k$ . Se algum vértice  $v$  de  $T$  permaneceu sem rótulo, definir  $r(v) = nível_H(v)$ . Se  $H$  consistir em um único nó, então  $T$  é vazia.

A figura 9.4 ilustra a árvore Patrícia obtida da árvore binária de prefixo da figura 9.3. Por exemplo, os nós  $v_1, v_2$  constituem um ziguezague,  $nível(v_1) = 3$  e  $v_2$  possui o filho  $w$ . Então  $v_1, v_2, w$  são compactados em  $v_1$ , o qual recebe rótulo 5.

Observe que a árvore Patrícia é estritamente binária, pois não possui zigzagues.

Os rótulos da árvore Patrícia  $T$  foram definidos de modo a satisfazer a seguinte propriedade. Em uma busca da chave  $x$ , o rótulo de um nó  $v$ , não folha, é o índice do dígito de  $x$  relativo a  $v$ . Assim sendo, se  $v$  é pai do

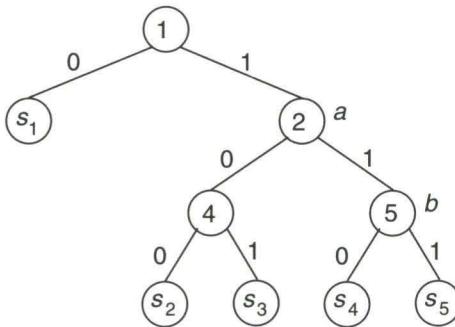


Figura 9.4: Árvore Patrícia

nó interno  $w$ , a diferença  $r(w) - r(v)$  indica o número de comparações de dígitos que podem ser eliminadas devido à existência, na árvore de prefixo correspondente, de um ziguezague com  $r(w) - r(v) - 1$  vértices. Por exemplo, na figura 9.4, o nó de rótulo 2 possui filho direito com rótulo 5. Logo, se a chave procurada  $x$  iniciar-se com 11, pode-se prosseguir diretamente para o quinto dígito de  $x$ , pois o terceiro e o quarto formam um ziguezague.

Essa observação é a base do algoritmo de busca em uma árvore Patrícia  $T$ . Seja  $x$  a seqüência binária  $d(1), \dots, d(k)$  que se deseja buscar. Iniciando pela raiz de  $T$ , supõe-se que o nó  $v$  de  $T$  tenha sido atingido em algum momento. Se  $v$  é uma folha, então a busca está encerrada. Se  $x = r(v)$ , a chave foi localizada; caso contrário,  $x$  é inválida. Se  $v$  não é folha, deve-se testar o  $r(v)$ -ésimo dígito de  $x$ , alcançando o filho esquerdo ou direito de  $v$ , se o mesmo for 0 ou 1, respectivamente. Se não existir tal dígito,  $k < r(v)$ . Nesse caso,  $x$  não corresponde a uma chave, pois a busca se encerrou em um nó interno. Se  $x$  for um prefixo válido, a subárvore de raiz  $v$  corresponde ao conjunto de chaves que possuem  $x$  como prefixo.

O algoritmo é, pois, bastante simples. A notação utilizada é a usual, sendo criado um campo para implementar o rótulo  $r$ . O ponteiro  $ptraiz$  indica a raiz de  $T$ . Os parâmetros  $a$  e  $pt$  indicam o resultado da busca. O nó  $w$ , onde a busca se encerrou, é apontado por  $pt$ . Se  $a = 1$  então  $w$  é uma folha. Nesse caso,  $x$  é uma chave válida se  $x = r(w)$ , e inválida caso contrário. Se  $a = 2$ , então  $w$  não é folha e, conseqüentemente,  $x$  não é uma chave de  $T$ . A chamada externa é  $buscapat(x, pt, a)$ , sendo  $pt = ptraiz$ .

**algoritmo 9.3:** Busca em árvore Patrícia

**procedimento** *buscapat*(*x, pt, a*)

```

    se pt↑.esq = λ então a := 1
    senão se k < pt↑.r então a := 2
    senão se d[pt↑.r] = 0 então
        pt := pt↑.esq
        buscapat(x, pt, a)
    senão pt := pt↑.dir
        buscapat(x, pt, a)
    
```

Como exemplo do algoritmo 9.3, considere a busca da chave 11100 na árvore Patrícia da figura 9.4. O rótulo da raiz é 1, e  $d(1) = 1$  significa que o nó *a* foi atingido. O seu rótulo é 2 e  $d(2) = 1$  dirige a busca para o nó *b* de rótulo 5. Finalmente,  $d(5) = 0$  e o processo termina com a informação de que *x* foi localizado em *s*<sub>4</sub>. Se o exemplo *x* fosse 111000, 111001, ou qualquer seqüência que possua 11100 como prefixo, ter-se-ia o mesmo resultado. Contudo, como *s*<sub>4</sub> é uma folha, sabe-se que só há uma chave válida cujo prefixo corresponde ao caminho seguido na árvore pela busca. Logo, o valor de *x* deve ser *s*<sub>4</sub>; caso contrário, *x* é uma chave inválida. Observe também que *x* e *s*<sub>4</sub> poderiam diferir em algum dígito não testado pelo algoritmo sem que tal fato fosse acusado. Por exemplo, o terceiro dígito de *x* ser igual a 0. Nesse caso, *x* seria também uma chave inválida. A comparação entre *x* e *s*<sub>4</sub> forneceria o resultado final da busca.

Caso a chave procurada *x* seja sempre válida, o algoritmo pode ser simplificado (exercício 9.6). Nesse caso, o número de iterações de *buscapat* é exatamente o mesmo. Mas a comparação *x* = *r*(*w*) torna-se desnecessária. A complexidade do algoritmo é igual à altura da árvore, que é limitada pelo tamanho da maior chave. A eliminação dos ziguezagues pode, contudo, diminuir consideravelmente o tempo de busca. No algoritmo 9.3 este não é proporcional à altura da árvore Patrícia, mas sim ao tamanho da maior chave, devido à comparação *x* = *r*(*w*). O ganho da árvore Patrícia em relação à árvore digital binária fica restrito à memória.

Deve-se mencionar, ainda, que a chave *x* poderia representar, na realidade, um conjunto de chaves que possuíssem *x* como prefixo. Neste esquema, a árvore Patrícia localizaria, simultaneamente, todas as chaves com prefixos iguais a *x*. Esta constitui uma característica importante da árvore Patrícia.

Consideremos, agora, o problema de incluir, numa árvore Patrícia  $T$ , uma nova chave  $x$  composta de  $k$  dígitos binários  $d(1), \dots, d(k)$ . A técnica a ser utilizada é similar às das demais árvores de busca. Efetua-se, inicialmente, uma busca da chave  $x$  em  $T$ . A busca termina em algum nó  $y$  em  $T$ , interno ou folha. Seja  $s_i$  a chave correspondente a alguma folha  $y'$  descendente de  $y$  em  $T$ . Observe que, se  $y$  é uma folha, então  $y' = y$  e  $s_i$  é a chave localizada em  $y$ . Caso contrário,  $s_i$  é qualquer uma das descendentes de  $y$ . Seja  $c$  o tamanho (comprimento) da chave  $s_i$ . Efetua-se a comparação entre os dígitos de  $x$  e  $s_i$ . Seja  $\ell$  o tamanho do maior prefixo comum a  $x$  e  $s_i$ . Isto é,  $x$  e  $s_i$  coincidem exatamente até o  $\ell$ -ésimo dígito. Se  $\ell = k$  ou  $\ell = c$ , trata-se de uma inclusão inválida. Na primeira hipótese,  $x$  é prefixo de  $s_i$  e, na segunda,  $s_i$  é prefixo de  $x$ , o que contradiz  $T$  como árvore de prefixo. Resta determinar o nó  $z$  de  $T$ , onde será realizada a inclusão. Se  $y'$  é o único nó de  $T$  então  $z = y'$ . Caso contrário, seja  $z'$  o pai de  $y'$  e  $A$  o caminho entre a raiz de  $T$  e  $z'$ . Se  $r(z') \leq \ell + 1$  então  $z = y'$ . Quando  $r(z') > \ell + 1$ ,  $z$  será o nó de  $A$  mais próximo à raiz de  $T$ , tal que  $r(z) > \ell + 1$ . A figura 9.5 representa uma das situações da inclusão. Criam-se dois novos nós,  $v$  e  $w$ , com rótulos  $r(v) = \ell + 1$  e  $r(w) = x$ . O pai de  $v$  será definido como o (antigo) pai de  $z$ , e denotado por  $q$ . Os filhos de  $v$  serão  $w$  e  $z$ , sendo  $w$  o filho esquerdo se  $d(\ell + 1) = 0$ , ou o direito quando  $d(\ell + 1) = 1$ . Se  $z$  era a raiz de  $T$ , a nova raiz passa a ser  $v$ . A inclusão está completa.

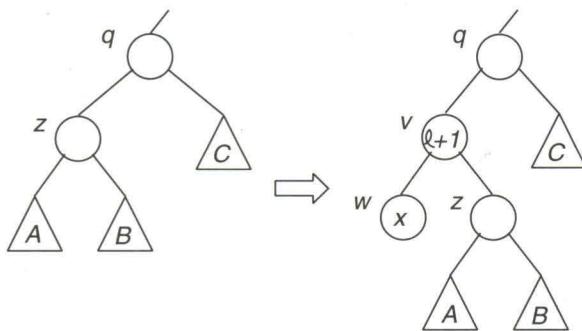


Figura 9.5: Passo principal da inserção em árvore Patrícia.

O algoritmo 9.4 descreve o processo. No algoritmo,  $d[1] \dots, d[k]$  representam os dígitos da chave  $x$ , e  $d'[1], \dots, d'[c]$ , os dígitos da chave  $s_i$ , apontada por  $pty'$ . A complexidade do algoritmo é da ordem do comprimento da maior chave.

**algoritmo 9.4:** Inclusão em árvore Patrícia

**se**  $ptraiz = \lambda$  **então** % árvore vazia

*ocupar(pt)*

$pt \uparrow . r := x; pt \uparrow . esq := pt \uparrow . dir := \lambda$

$ptraiz := pt$

**senão**  $pty' := ptraiz$  % localização de  $y'$

*buscapat(x, pty', a)*

**enquanto**  $pty' \uparrow . esq \neq \lambda$  **faça**  $pty' := pty' \uparrow . esq$

$\ell := 0$

**enquanto**  $\ell < \min\{k, c\}$  e  $d[\ell + 1] = d'[\ell + 1]$  **faça**

$\ell := \ell + 1$  %  $\ell$  calculado

**se**  $\ell \neq \min\{k, c\}$  **então**

*ocupar(ptv); ocupar(ptw)* % criação de  $v$  e  $w$

$ptv \uparrow . r := \ell + 1; ptw \uparrow . r := x$

$ptw \uparrow . esq := ptw \uparrow . dir := \lambda$

$ptz := ptraiz; descer := V$  % localização de  $z$  e  $q$

**enquanto**  $ptz \uparrow . esq \neq \lambda$  e  $descer$  **faça**

**se**  $ptz \uparrow . r \leq \ell + 1$  **então**

$ptq := ptz$

**se**  $d[ptz \uparrow . r] = 0$  **então**

$ptz := ptz \uparrow . esq; esquierdo := V$

**senão**  $ptz := ptz \uparrow . dir; esquierdo := F$

**senão**  $descer := F$

%  $z$  e  $q$  localizados

**se**  $d[\ell + 1] = 0$  **então**

$ptv \uparrow . esq := ptw$

$ptv \uparrow . dir := ptz$

**senão**  $ptv \uparrow . esq := ptz$

$ptv \uparrow . dir := ptw$

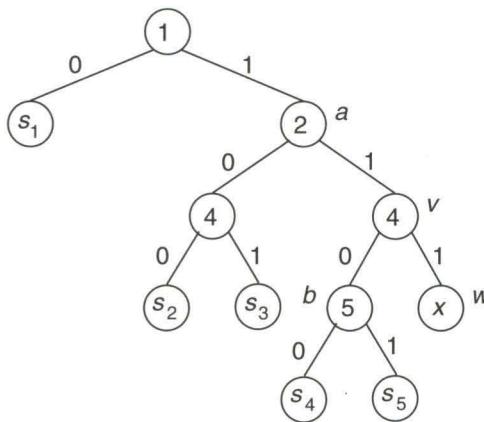
**se**  $ptz = ptraiz$  **então**  $ptraiz := ptv$

**senão se** *esquierdo* **então**

$ptq \uparrow . esq := ptv$

**senão**  $ptq \uparrow . dir := ptv$

**senão** “inclusão inválida”



**Figura 9.6:** Inclusão de um nó

Como exemplo, a árvore da figura 9.6 é o resultado da inclusão da chave 111101 na árvore da figura 9.4. Pode-se observar que a busca efetuada no algoritmo de inclusão termina na folha contendo a chave  $s_4$ , pois  $d(1) = 1$ ,  $d(2) = 1$  e  $d(5) = 0$ . Observa-se que  $\ell = 3$ , pois  $x$  e  $s_4$  diferem no quarto dígito e são idênticos do primeiro ao terceiro. Os nós  $v$  e  $w$  são incluídos com  $r(v) = 4$  e  $r(w) = x$ . O filho direito de  $v$  é  $w$ , pois  $d(4) = 1$ , enquanto o esquerdo é  $b$ , porque  $b$  ( $= z$ ) é o nó mais próximo à raiz, satisfazendo  $r(b) > 4$ . Finalmente, o pai de  $v$  é o nó  $a$  ( $= q$ ), pois o de  $b$  também o era na árvore original.

Para construir uma árvore Patrícia, o algoritmo de inclusão é utilizado uma vez para cada chave.

Por fim, deve ser mencionada uma importante propriedade da árvore Patrícia. Percorrendo-se as folhas da esquerda para a direita, obtém-se as chaves em ordem lexicográfica crescente (exercício 9.5). Esse fato pode ser utilizado em diversas aplicações, quando se deseja listar, em ordem, todas as chaves de uma tabela mantida randomicamente. Nesse caso, será conveniente manter as folhas da árvore em uma lista encadeada.

## 9.5 – Exercícios

9.1 Desenhar a árvore digital correspondente ao conjunto de chaves abaixo.

<i>AR</i>	<i>ASA</i>	<i>RAS</i>
<i>ARA</i>	<i>ASAS</i>	<i>RASA</i>
<i>ARAR</i>	<i>ASSA</i>	<i>RASAS</i>
<i>ARARA</i>	<i>ASSAS</i>	<i>SA</i>
<i>ARAS</i>	<i>ASSAR</i>	<i>SAARA</i>
<i>ARRASA</i>	<i>ASSARA</i>	<i>SARA</i>
<i>ARRASAR</i>	<i>RA</i>	<i>SARAR</i>
<i>ARRASARA</i>	<i>RARA</i>	<i>SARARAS</i>
<i>AS</i>	<i>RARAS</i>	<i>SARAS</i>

9.2 Provar ou dar contra-exemplo:

Ao contrário das árvores binárias de busca, a árvore digital correspondente a um dado conjunto é única, independentemente da ordem em que as chaves foram incluídas na árvore.

- 9.3 Determinar o número de ponteiros vazios existentes em uma árvore digital  $m$ -ária obtida pela construção do algoritmo 9.2.
- 9.4 Escrever um algoritmo para efetuar a operação de remoção de uma chave em uma árvore digital. Determinar a sua complexidade.
- 9.5 Mostrar que, percorrendo-se as folhas de uma árvore Patrícia da esquerda para a direita, obtém-se as chaves correspondentes em ordem lexicográfica crescente.
- 9.6 Modificar o algoritmo de busca em árvores Patrícia de modo que a ocorrência de chaves inválidas não seja considerada.
- 9.7º Descrever um algoritmo para efetuar a operação de remoção de chaves em uma árvore Patrícia.
- 9.8º Utilizando a representação que associa cada árvore binária a uma seqüência de dígitos binários, elaborar uma árvore digital binária que seja capaz de reconhecer se uma dada árvore binária é subárvore de outra. Qual é a complexidade do processo?
- 9.9º Repetir o exercício anterior, substituindo a árvore digital binária por uma árvore Patrícia.
- 9.10 Sejam  $T_1$  e  $T_2$  duas árvores digitais binárias, correspondentes aos conjuntos de chaves  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente. Sabendo que não há chave

comum a  $S_1$  e  $S_2$ , elaborar um algoritmo para construir a árvore correspondente a  $S_1 \cup S_2$ . Qual a complexidade do processo?

- 9.11 Repetir o exercício anterior, substituindo a árvore digital binária por árvore Patrícia.
- 9.12 Seja  $S$  um conjunto de  $n$  chaves binárias e  $k$  o tamanho máximo das chaves. Quais são os tamanhos mínimo e máximo que uma árvore digital binária correspondente a  $S$  pode ter?
- 9.13 Repetir o exercício anterior, substituindo a árvore digital binária por árvore Patrícia.
- 9.14º Estender a noção de árvore Patrícia para o caso de árvores digitais  $m$ -árias. A idéia seria compactar ziguezagues da mesma forma como foi realizado no caso binário. Desenhar a árvore ternária correspondente a esta extensão, que seria obtida pelas chaves do exercício 9.1.

## Notas Bibliográficas

Em inglês, utiliza-se o termo *trie* para designar uma árvore digital, enquanto o termo *digital tree*, em geral, corresponde à árvore digital binária. As árvores digitais foram introduzidas por de la Briandais [Br59], mas foi Fredkin [Fr60] quem sugeriu o nome *trie*, de *information reTRIEval*, devido à sua aplicação em recuperação de informação. Uma variação da árvore digital binária foi proposta por Coffman e Eve [Co70]. As árvores Patrícia foram introduzidas por Morrison [Mo68]. O nome corresponde às iniciais de *Practical Algorithm to Retrieve Information Coded in Alphanumeric*. A busca digital foi tratada, em detalhes, por Knuth [Kn73] e Gonnet e Baeza-Yates [Go91]. Algoritmos para a manipulação de árvores Patrícia podem ser encontrados em [Zi93]. A utilização de árvores Patrícia para elaborar algoritmos para expressões regulares aparece em Baeza-Yates [BY89].

# Processamento de Cadeias

## 10.1 – Introdução

Entende-se por *cadeia* uma seqüência qualquer de elementos, denominados *caracteres*. Os caracteres, por sua vez, são elementos escolhidos de um conjunto denominado *alfabeto*. Por exemplo, 0110010 é uma cadeia com alfabeto {0,1}. Os caracteres não possuem relações estruturais entre si, a não ser a sua ordem seqüencial. As cadeias aparecem, em computação, no processamento de textos, palavras, mensagens, códigos etc. com aplicações tão diversas quanto o tratamento computacional de dicionários, mensagens de correio eletrônico, seqüenciamento de DNA's em biologia computacional, criptografia de textos confidenciais e muitos outros. De fato, a importância do processamento de cadeias na computação vem crescendo consideravelmente, até mesmo para computadores de uso pessoal, nos quais a edição de textos tem sido a principal aplicação.

Neste capítulo, são abordados dois problemas básicos no processamento de cadeias. O primeiro deles, tratado nas seções 10.2 a 10.4, é o de *casamento de cadeias*. Dadas duas cadeias de caracteres, o problema consiste em verificar se a primeira delas contém a segunda, isto é, se os caracteres que compõem a segunda cadeia aparecem seqüencialmente também na primeira. O segundo problema, considerado nas seções de 10.5 a 10.7, é o da *codificação de mensagens*. Dada uma cadeia de caracteres, denominada *mensagem*, o problema consiste em codificá-la através da atribuição de códigos a seus caracteres, de modo a minimizar o comprimento total da mensagem codificada. O primeiro

problema aparece, por exemplo, na edição de textos, enquanto o segundo, na transmissão de mensagens em uma rede.

Deve-se observar que o que caracteriza o processamento de cadeias não é o tipo de problema tratado, mas sim a forma de armazenamento dos dados. Isto é, o problema do casamento de cadeias, por exemplo, pode ser resolvido através de métodos como a busca digital (seção 9.2). Nesse caso, a segunda cadeia – aquela cujo padrão se deseja localizar na primeira – seria considerada como chave de busca. Para tal, contudo, seria necessário que a primeira cadeia estivesse armazenada segundo uma estrutura apropriada, no caso a árvore digital. Em contrapartida, nos outros problemas considerados, supõe-se que os caracteres estejam dispostos seqüencialmente em uma lista, sem outra forma de estrutura.

## 10.2 - O Problema do Casamento de Cadeias

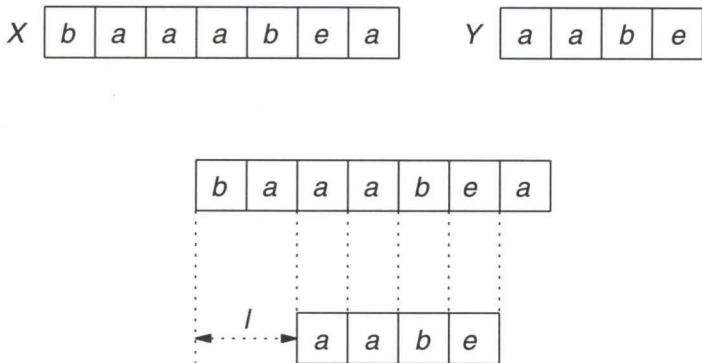
Já foi mencionado que uma cadeia é uma seqüência de caracteres escolhidos de um conjunto chamado alfabeto. O número de caracteres da cadeia é o seu *comprimento*.

Sejam  $X, Y$  duas cadeias de caracteres com comprimentos  $n, m$ , respectivamente,  $n \geq m$ . Supõe-se que  $X$  e  $Y$  sejam representadas por vetores com elementos  $x_i$  e  $y_j$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq m$ .  $Y$  é uma *subcadeia* de  $X$  quando  $Y$  for uma subseqüência de elementos consecutivos de  $X$ , isto é, quando existir algum inteiro  $\ell \leq n - m$ , tal que  $x_{\ell+j} = y_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Se  $\ell = 0$ ,  $Y$  é chamado *prefixo* de  $X$  e, se  $\ell = n - m$ ,  $Y$  é *sufixo*. Em adição, quando  $m \neq n$  o prefixo (sufixo) é *próprio*. Para  $k \leq n - m + 1$ , o símbolo  $X_k$  representa a subcadeia de  $X$ , com elementos  $x_i$  e comprimento  $m$ ,  $k \leq i < k + m - 1$ .

O *problema do casamento de cadeias* consiste em verificar se  $Y$  é subcadeia de  $X$ . Em caso positivo, localizar  $Y$  em  $X$ . Diz-se, então, que houve um *casamento* de  $Y$  com  $X$  na posição  $\ell + 1$ .

Por exemplo, se  $X$  é a cadeia *baaabea* e  $Y$  é *aabe*, então  $Y$  é subcadeia de  $X$  e a solução do problema do casamento de cadeias deve indicar que  $Y$  aparece em  $X$  a partir do terceiro caractere, como indica a figura 10.1. Por outro lado, se  $Y$  é formada pela seqüência *aeb*, então não é subcadeia de  $X$ .

Duas soluções diferentes serão estudadas para o problema do casamento de cadeias. A primeira delas, descrita na seção seguinte, é um método de força

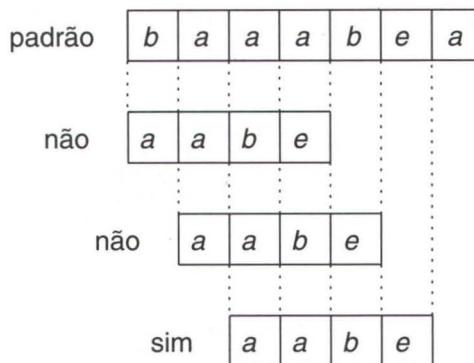


**Figura 10.1:** O problema do casamento de cadeias

bruta, simples, porém, por vezes, pouco eficiente para o tipo de problema. A complexidade desse método é  $O(nm)$ . A seção 10.4 contém a segunda solução apresentada, o algoritmo de Knuth, Morris e Pratt. Trata-se de um processo bastante mais elaborado e cuja complexidade é  $O(n)$ , linear no tamanho das cadeias.

### 10.3 – O Algoritmo da Força Bruta

Sejam  $X$  e  $Y$  cadeias com caracteres  $x_i$  e  $y_j$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq m$ ,  $m \leq n$ , respectivamente. Deseja-se verificar se  $Y$  é subcadeia de  $X$  e, em caso positivo, localizar  $Y$  em  $X$ . Um método bastante simples consiste em examinar todas as possíveis situações. Se  $Y$  for subcadeia de  $X$ , então  $Y$  se encontra em  $X$ , deslocado de  $\ell$  posições à esquerda. A idéia consiste em comparar  $Y$  com a subcadeia de tamanho  $m$  de  $X$ , que se inicia no caractere  $x_{\ell+1}$ , para todos os valores possíveis de  $\ell$ . Ou seja,  $\ell = 0, 1, \dots, n - m$ . A figura 10.2 ilustra a aplicação do algoritmo de força bruta para as mesmas cadeias  $X$  e  $Y$  da figura 10.1. O algoritmo, de início, compararia a subcadeia  $X_1 = baaa$ , iniciada em  $x_1$ , com  $Y$ ; em seguida, a subcadeia  $X_2 = aaab$ , iniciada em  $x_2$ , com  $Y$ . Nessas duas situações, o teste seria negativo. Na iteração seguinte, em que a subcadeia  $X_3 = aabe$  é considerada, verifica-se o casamento.



---

Figura 10.2: O algoritmo da força bruta

O algoritmo 10.1, apresentado a seguir, descreve o processo. A variável  $\ell$  indica o número de caracteres, na cadeia  $X$ , que antecedem cada subcadeia considerada. A variável lógica  $teste$  é utilizada para informar a ocorrência ou não de casamento. Para tornar o método mais eficiente, utilizou-se o princípio de abandonar a verificação de uma subcadeia no meio do processo, se for detectado que um casamento não é possível. Por exemplo, se o  $i$ -ésimo caractere da subcadeia considerada não coincide com o  $i$ -ésimo caractere de  $Y$ , não há necessidade de comparar os caracteres de ordem  $i+1, i+2, \dots, m$ .

**algoritmo 10.1:** Casamento de cadeias

```
para  $\ell := 0, \dots, n - m$  faça
     $i := 1$ 
     $teste := V$ 
    enquanto  $i \leq m$  e  $teste$  faça
        se  $x[\ell + i] = y[i]$  então
             $i := i + 1$ 
        senão  $teste := F$ 
    se  $teste$  então
        “casamento na posição  $\ell + 1$ ”
    pare
“não há casamento”
```

É simples analisar um pior caso deste algoritmo. Ele ocorre quando, em cada

cadeia  $X_{\ell+1}$  de tamanho  $m$ ,  $X_{\ell+1}$  coincide com  $Y$  em todas as posições, exceto a última. Nesse caso, não há casamento. Ou, então, quando essa condição se repete para todas as subcadeias analisadas, exceto a última, em cujo exame um casamento é detectado. Em qualquer desses casos, o número de subcadeias examinadas (iteração externa) é  $n - m + 1$  e, em cada uma dessas, são realizadas  $m$  comparação de caracteres. O número de comparações efetuadas é, pois, no pior caso, igual a  $(n - m + 1)(m)$ . Ou seja, a complexidade é  $O(m n)$ .

## 10.4 – O Algoritmo de Knuth, Morris e Pratt

Para descrever o algoritmo de Knuth, Morris e Pratt para o problema de casamento de cadeias, deve-se, inicialmente, revisar o algoritmo de força bruta da seção anterior. São dadas as cadeias  $X$  e  $Y$ , com caracteres  $x_i$  e  $y_j$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $1 \leq j \leq m$ ,  $m \leq n$ , respectivamente. O algoritmo, para cada  $\ell = 0, 1, \dots, n - m$ , verifica se a subcadeia  $X_{\ell+1}$  de  $X$ , de comprimento  $m$  e iniciada em  $x_{\ell+1}$ , é idêntica a  $Y$ . Se for idêntica, há casamento na posição  $\ell + 1$ . Observa-se no entanto que, em muitos casos, é desnecessário testar a identidade de  $X_{\ell+1}$  com  $Y$  para certos valores de  $\ell$ , visto que o resultado é certamente negativo. O algoritmo de Knuth, Morris e Pratt explora essa propriedade.

No exemplo da figura 10.3, deseja-se verificar se a cadeia *abaeabaeaae* é subcadeia de *bababaeabaeabaeabaeaaeba*. O algoritmo de força bruta efetuaria os testes correspondentes a  $\ell = 0, 1, \dots, 16$  e encontraria um casamento para  $\ell = 16$ . Em cada valor de  $\ell < 16$ , encontra-se indicada com um círculo, na figura, a (primeira) discordância detectada. Seja  $y_k$  o caractere de  $Y$  onde ocorre a discordância. No exemplo, para  $\ell = 0$  obteve-se  $k = 1$ , para  $\ell = 1$  o valor é  $k = 4$ , e assim por diante. A discordância, para  $\ell = 1$ , ocorreu ao se verificar que  $x_5 \neq y_4$ . O teste da subcadeia correspondente a  $\ell = 2$  é também negativo, pois  $x_{2+1} = b \neq a = y_1$ . Será que esse fato poderia ser previsto e, assim, evitar-se o teste para  $\ell = 2$ ? A resposta será dada em seguida. Por ora, é interessante observar que o valor  $y_1 = a$  já foi examinado na iteração correspondente a  $\ell = 1$ . Da mesma forma, na iteração  $\ell = 3$ , obteve-se  $k = 10$ , proveniente da desigualdade  $y_{10} \neq x_{3+10}$ . Observe que o prefixo  $y_1, \dots, y_9$  de  $Y$  aparece nas posições  $x_{3+1}, \dots, x_{3+9}$ . Através da análise dos prefixos da cadeia  $Y$  será possível determinar, por exemplo,

que não é necessário examinar as subcadeias  $X_3$ ,  $X_5$ ,  $X_6$  nem outras mais. De antemão, sabe-se não existir casamento para elas. Além disso, quando a cadeia  $X_8$  for examinada, não será necessário percorrê-la toda. Pode-se ignorar o prefixo formado pelos seus 5 caracteres iniciais, pois, certamente, há concordância entre esse prefixo e os caracteres correspondentes de  $Y$ . O método é descrito a seguir.

De um modo geral, suponha o exame da subcadeia  $X_{\ell+1}$  para um certo valor  $\ell$ . Suponha que uma discordância tenha ocorrido no índice  $k > 1$ , isto é,  $x_{\ell+i} = y_i$ ,  $1 \leq i < k$  e  $x_{\ell+k} \neq y_k$ . A pergunta é se deve ou não examinar a subcadeia seguinte  $X_{\ell+2}$ . Para responder a essa questão, observe que os  $k - 1$  caracteres iniciais de  $X_{\ell+1}$  formam um prefixo de  $Y$  e  $k - 2$  deles fazem parte de  $X_{\ell+2}$ . Se  $X_{\ell+2} = Y$ , então, em particular, os seus  $k - 2$  caracteres iniciais devem, respectivamente, coincidir, isto é,  $x_{\ell+1+i} = y_i$ ,  $1 \leq i < k - 1$ . Se essa condição parcial não for verdadeira, então  $X_{\ell+2}$  pode ser desconsiderada para o casamento sem exame. Mas como saber se essa igualdade parcial ocorre, sem examinar  $X_{\ell+2}$ ? Do exame de  $X_{\ell+1}$ , sabe-se que  $x_{\ell+i} = y_i$ ,  $i < k$ . Então, para que  $X_{\ell+2}$  tenha chance de ser idêntica a  $Y$ , é necessário que  $y_i = y_{i+1}$ ,  $1 \leq i < k - 1$ . Isto é, que o prefixo  $y_1, \dots, y_{k-2}$ , com  $k - 2$  caracteres, de  $y_1, \dots, y_{k-1}$  coincida com o sufixo  $y_2, \dots, y_{k-1}$ , com  $k - 2$  caracteres, de  $y_1, \dots, y_{k-1}$ . Observe que esse fato independe da cadeia  $X$ !

Generalizando, suponha a ocorrência de uma discordância no caractere  $y_k$  durante o exame de  $X_{\ell+1}$ . Então, uma subcadeia  $X_{\ell+1+h}$ ,  $h < k - 1$ , pode conduzir a um casamento com  $Y$  somente se  $y_i = y_{i+h}$ ,  $1 \leq i < k - h$ . E apenas nesses casos deverá ser examinada. Ou seja, a próxima subcadeia a ser examinada após  $X_{\ell+1}$ , é  $X_{\ell+1+h}$ , sendo  $h$  o menor valor para o qual  $y_i = y_{i+h}$ ,  $1 \leq i < k - h$ . Observe que o valor de  $h$  depende tão-somente de  $Y$  e de  $k$ . Ou seja, independe da cadeia  $X$ . A determinação do valor (mínimo) de  $h$  será indireta. Calcular-se-á o valor de  $d(k - 1)$  definido como o comprimento do maior prefixo próprio de  $y_1, \dots, y_{k-1}$  tal que este prefixo coincida com o sufixo de mesmo tamanho de  $y_1, \dots, y_{k-1}$ . Se não houver coincidência entre nenhum dos pares prefixo-sufixo, então  $d(k - 1) = 0$ . Além disso,  $d(1) = 0$ . O valor mínimo de  $h$  será então  $h = k - 1 - d(k - 1)$  e a próxima subcadeia de  $X$  a ser examinada é  $X_{\ell+k-d(k-1)}$ .

Há outras comparações que podem ser eliminadas. Por exemplo, nem sempre é necessário examinar todos os caracteres da cadeia  $X_{\ell+1+h}$ , seguinte a  $X_{\ell+1}$ . Das igualdades  $x_{\ell+i} = y_i$ ,  $1 \leq i < k$  e  $y_i = y_{i+h}$ ,  $1 \leq i < k - h$ , sabe-se que

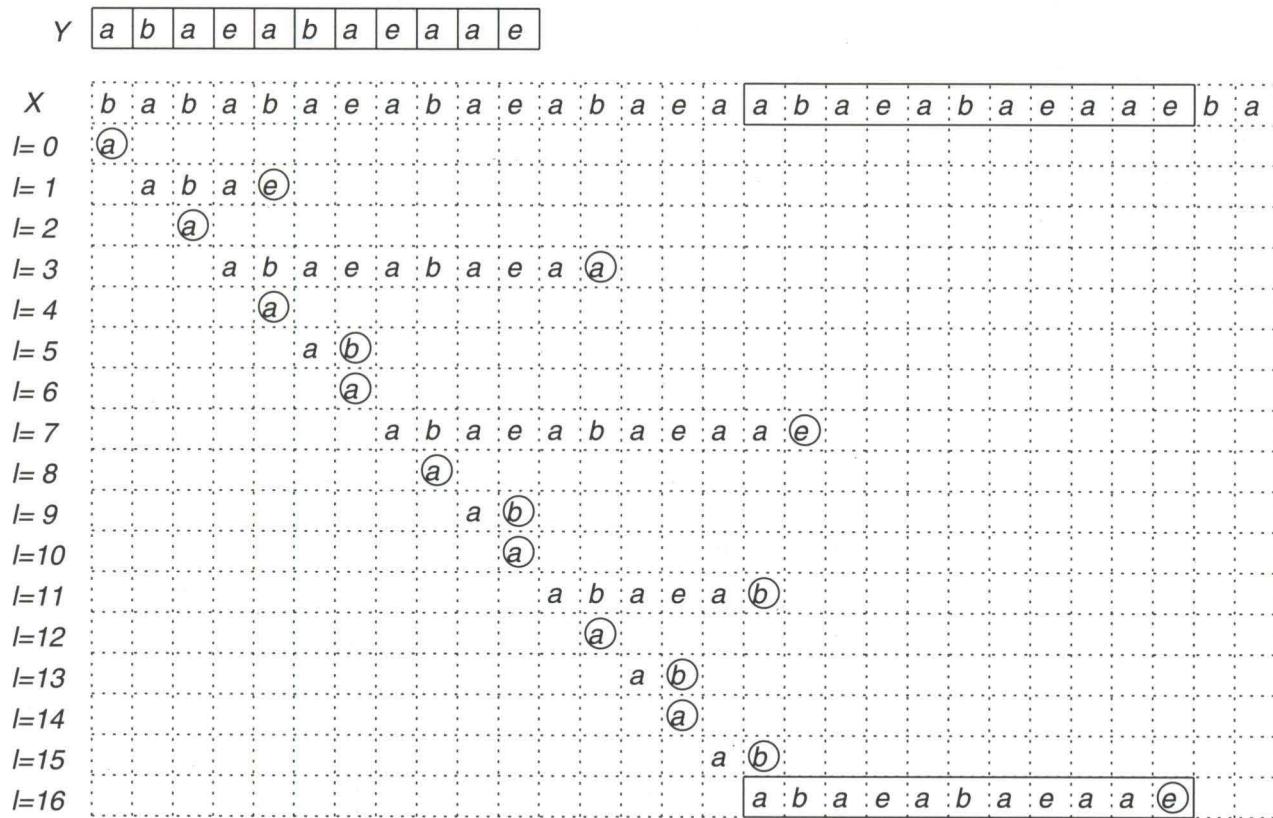


Figura 10.3: Comparações efetuadas pelo algoritmo da força bruta

os  $d(k - 1)$  caracteres iniciais de  $X_{\ell+1+h}$  coincidem, respectivamente, com  $y_1, \dots, y_{d(k-1)}$ . Então, a próxima comparação entre caracteres é verificar a igualdade entre  $x_{\ell+k}$  e  $y_{d(k-1)+1}$ . Por outro lado, se  $k = 1$ , ou seja, a discordância entre  $X_{\ell+1}$  e  $Y$  ocorreu no primeiro caractere, então a cadeia  $X_{\ell+2}$  deve ser examinada, pois não há qualquer informação acerca de seu conteúdo. Nesse caso, a próxima comparação é verificar a igualdade entre  $x_{\ell+k+1} = x_{\ell+2}$  e  $y_1$ . Em ambas as situações, não houve necessidade de retroceder o índice da cadeia  $X$ . O algoritmo caminha em  $X$  da esquerda para a direita, sem jamais retroceder!

Suponha o exame da subcadeia  $X_4$ , correspondente a  $\ell = 3$ , do exemplo mencionado anteriormente. Da figura 10.3, verifica-se que a discordância ocorre em  $k = 10$ , pois  $x_{3+i} = y_i$ ,  $1 \leq i \leq 9$  e  $x_{3+10} = b \neq a = y_{10}$ . Segundo a discussão anterior, a próxima cadeia a ser examinada é  $X_{4+h}$ , onde  $h = 9 - d(9)$ . Mas, quem será o valor  $d(9)$ ? Também conforme já exposto,  $d(9)$  corresponde ao comprimento do maior prefixo próprio  $p$  de  $y_1, \dots, y_9$  que coincide com um sufixo de  $y_1, \dots, y_9$ . A figura 10.4 ilustra a idéia. O maior valor possível para  $d(9)$  seria 8. Mas  $d(9) \neq 8$  pois  $y_2, \dots, y_9 = baeabaea$  não coincide com  $y_1, \dots, y_8 = abaeabae$ . Por motivos análogos,  $d(9) \neq 7, 6$ . Finalmente obtém-se  $d(9) = 5$ , visto que  $y_5, \dots, y_9$  coincide com  $y_1, \dots, y_5$ . Aplicando-se o valor  $d(9) = 5$  no caso do exame da subcadeia  $X_4$ , da figura 10.3, conclui-se que, após a comparação discordante  $x_{3+10} \neq y_{10}$ , o algoritmo pode passar diretamente ao exame da subcadeia  $X_{\ell+k-d(k-1)} = X_8$ . As subcadeias  $X_5$ ,  $X_6$  e  $X_7$  podem ser ignoradas, pois, de antemão, sabe-se que não conduzem a casamento. Além disso, no exame de  $X_8$  não é necessário comparar os valores  $y_1, \dots, y_{d(k-1)} = y_5$ , respectivamente, com  $x_8, \dots, x_{8+h}$ , pois sabe-se que há coincidência. A nova comparação a ser efetuada seria, então, entre  $y_6$  e  $x_{8+5}$ .

Com essa estratégia, necessita-se computar os valores  $d(k)$  para executar-se o algoritmo. Como fazê-lo de forma eficiente? A resposta será dada mais adiante. Por ora, suponha que os comprimentos  $d(k)$  sejam fornecidos ao algoritmo que verifica o casamento entre cadeias. Isto é,  $d(k)$  é obtido em uma fase de pré-processamento. A figura 10.5 fornece cada valor  $d(k)$  para a cadeia  $Y$  do exemplo, *abaeabaeaae*.

A formulação a seguir descreve o algoritmo, dadas as cadeias  $X$ ,  $Y$  e o vetor de valores  $d$ . As variáveis  $i$  e  $j$  representam os índices para as cadeias  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

$Y \quad \boxed{a} \boxed{b} \boxed{a} \boxed{e} \boxed{a} \boxed{b} \boxed{a} \boxed{e} \boxed{a} \boxed{a} \boxed{e}$

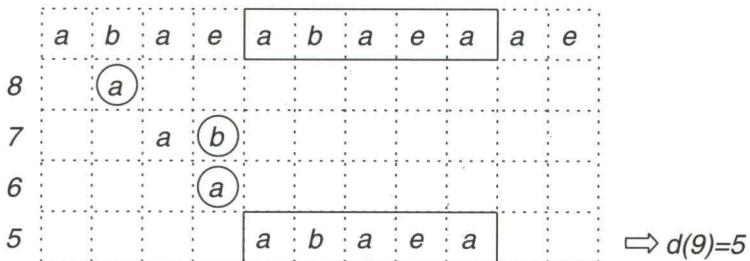


Figura 10.4: O valor  $d(9)$

algoritmo 10.2: Casamento de cadeias

$i := j := 0$

enquanto  $i - j \leq n - m$  faça

    teste :=  $V$

    enquanto  $j < m$  e teste faça

        se  $X[i + 1] = Y[j + 1]$  então

$i := i + 1$

$j := j + 1$

        senão teste :=  $F$

    se teste então

        “casamento na posição  $i - m + 1$ ”

        pare

    se  $j = 0$  então  $i := i + 1$

    senão  $j := d[j]$

“não há casamento”

Resta o problema de como determinar o vetor  $d$ , que informa qual seria a nova subcadeia a ser considerada, após a detecção de alguma divergência entre  $Y$  e a subcadeia corrente em exame. Deve-se lembrar que a determinação de  $d$  deve ser realizada antes da execução do algoritmo 10.2, visto que este pressupõe o vetor  $d$  já calculado.

$Y$	$a$	$b$	$a$	$e$	$a$	$b$	$a$	$e$	$a$	$a$	$e$
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$Y$	$a$	$b$	$a$	$e$	$a$	$b$	$a$	$e$	$a$	$a$	$e$
-											
-	-										
-	-	-	$a$								
-	-	-	-	$a$							
-	-	-	-	-	$a$	$b$					
-	-	-	-	-	$a$	$b$	$a$				
-	-	-	-	-	$a$	$b$	$a$	$e$			
-	-	-	-	-	$a$	$b$	$a$	$e$	$a$		
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$a$	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	

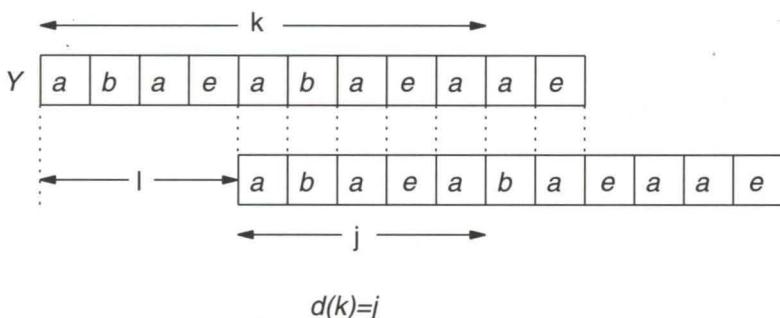
$\Rightarrow d(1)=0$   
 $\Rightarrow d(2)=0$   
 $\Rightarrow d(3)=1$   
 $\Rightarrow d(4)=0$   
 $\Rightarrow d(5)=1$   
 $\Rightarrow d(6)=2$   
 $\Rightarrow d(7)=3$   
 $\Rightarrow d(8)=4$   
 $\Rightarrow d(9)=5$   
 $\Rightarrow d(10)=1$   
 $\Rightarrow d(11)=0$

**Figura 10.5:** Os valores  $d(k)$ 

Para resolver o problema, uma variação do próprio método do algoritmo de casamento de cadeias será empregada. A idéia consiste em procurar em  $Y$  um prefixo próprio dele mesmo. Ou seja, o método procura efetuar o casamento de  $Y$  com o próprio  $Y$  deslocado de um número conveniente  $\ell > 0$  de caracteres. Suponha que haja um casamento entre o prefixo de  $Y$  com  $j$  caracteres, deslocado de  $\ell$  caracteres, e o próprio  $Y$ . Nesse caso, esse prefixo de  $Y$  coincide com o sufixo de  $j$  caracteres, do prefixo de  $Y$  com  $k = \ell + j$  caracteres. Além disso, se esse for o menor valor de  $\ell > 0$  para o qual esse casamento se verifica, então pode-se assegurar que  $j$  é máximo e, portanto,  $d(k) = j$ . A figura 10.6 ilustra esta questão. O padrão  $Y$  é representado pela cadeia  $abaeabaeaae$ . Para  $k = 9$  e  $\ell = 4$ , verifica-se que há um casamento entre o prefixo de  $Y$  com  $j = 5$  caracteres,  $abaea$ ,

e o sufixo, com cinco caracteres, da cadeia formada pelos nove caracteres iniciais de  $Y$ . Além disso, este é o menor deslocamento  $\ell > 0$  para o qual esse casamento acontece. Logo,  $d(9) = 5$ . Para completar o cálculo de  $d(k)$ , no caso geral, basta apenas encontrar um método de verificar se o valor de  $\ell$  que produziu o mencionado casamento é, de fato, mínimo. Mas essa condição decorre do próprio algoritmo de casamento de cadeias. Se houvesse algum valor de deslocamento inferior ao corrente que produzisse o casamento para este mesmo valor de  $k$ , então o valor corrente de  $k$  já seria maior do que o mencionado. O algoritmo assegura esse fato. Pois o parâmetro  $k$ , ponteiro para a posição do caractere em consideração na cadeia, é incrementado toda vez que há concordância entre caracteres e jamais é decrementado no processo.

---



**Figura 10.6:** Determinação do vetor  $d$

A questão central é como efetuar o cálculo dos valores  $d$  de maneira eficiente. Por exemplo, o método sugerido pela figura 10.4 consiste em experimentar todos os valores possíveis do deslocamento  $\ell > 0$ , para valores crescentes de  $\ell$ , até detectar um casamento. Este processo, se bem que correto, será descartado. Ele produziria um algoritmo de complexidade  $O(n^2)$  para o cálculo do vetor  $d$ . O objetivo é obter um algoritmo linear.

A estratégia consiste em calcular  $d(k)$  para valores crescentes de  $k = 1, \dots, m$ . No passo inicial, define-se  $d(1) = 0$ . De um modo geral, para calcular  $d(k)$ ,  $k > 1$ , utiliza-se algum valor já calculado  $d(j)$ ,  $j < k$ . Considere a computação de um valor  $d(k)$ ,  $k > 1$ , e suponha corretos os valores  $d(j)$ ,  $j < k$ . A questão central é o exame do caractere  $y_k$ . Efetua-se a comparação entre  $y_k$  e  $y_{d(k)+1}$  com as seguintes alternativas possíveis.

**Caso 1:**  $y_k = y_{d(k-1)+1}$

Então o sufixo com  $d(k - 1) + 1$  caracteres de  $y_1, \dots, y_k$  coincide com  $y_1, \dots, y_{d(k-1)+1}$ . Além disso, o comprimento  $d(k - 1) + 1$  é máximo; caso contrário,  $d(k - 1)$  não o seria, constituindo-se uma contradição. Logo,  $d(k) = d(k - 1) + 1$ .

**Caso 2:**  $y_k \neq y_{d(k-1)+1}$

Sejam os seguintes subcasos.

**Caso 2.1:**  $d(k - 1) = 0$

Então não há casamento entre qualquer sufixo de  $y_1, \dots, y_k$  com um prefixo próprio dele. Isto é,  $d(k) = 0$ .

**Caso 2.2:**  $d(k - 1) \neq 0$

Nesse caso,  $d(k) \leq d(k - 1)$ . Examinar todos os possíveis valores de  $d(k)$  corresponde a aumentar o deslocamento de  $\ell$  na figura 10.6. Contudo, é desnecessário examinar todos os incrementos possíveis de  $\ell$ . De fato, o deslocamento seguinte a ser considerado corresponde a incrementar  $\ell$  de  $d(k - 1) - d(d(k - 1))$  unidades. De acordo com a definição de  $d(k - 1)$ , não há casamentos para valores de  $\ell$  inferiores a este. O exame do deslocamento seguinte é equivalente a efetuar esta análise com  $d(k)$  substituído por  $d(d(k - 1))$ .

A formulação seguinte descreve essa estratégia. A variável  $j$  representa o comprimento do prefixo e sufixo coincidentes que se procura. A cadeia  $Y$  é dada.

**algoritmo 10.3:** Determinação do vetor  $d$

$j := d[1] := 0$

$k := 1$

**enquanto**  $k < m$  **faça**

**se**  $Y[k + 1] = Y[j + 1]$  **então**

$k := k + 1$

$j := j + 1$

$d[k] := j$

**senão se**  $j = 0$  **então**

$k := k + 1$

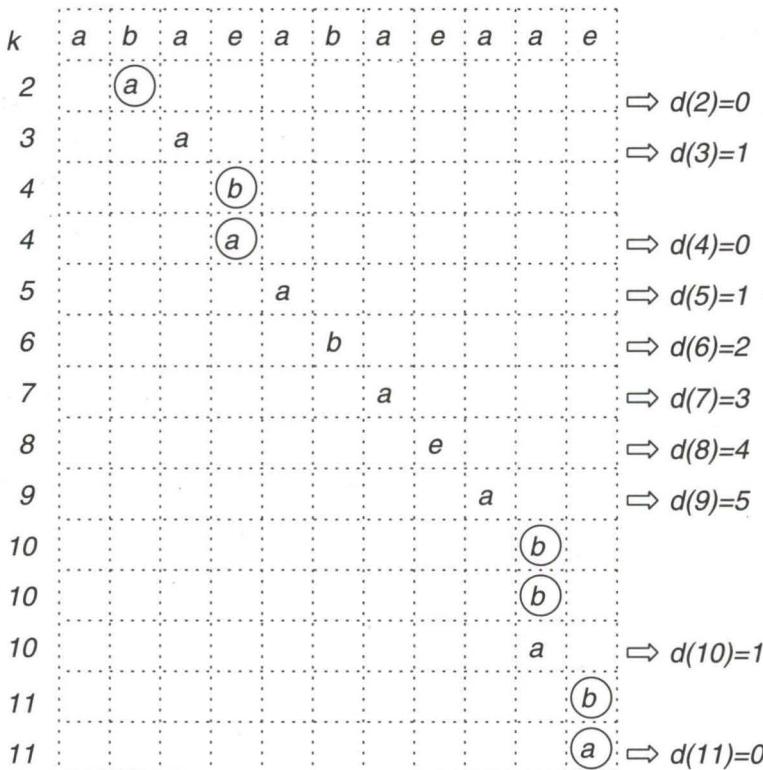
$d[k] := 0$

**senão**  $j := d[j]$

A descrição do algoritmo de Knuth, Morris e Pratt está completa. Dadas as cadeias  $X$  e  $Y$ , executa-se o algoritmo 10.3 para computar o vetor  $d$ . Em seguida, o algoritmo 10.2. Como exemplo, seja o cálculo de  $d$  para o padrão  $Y$  dado por  $abaeababaae$ . A figura 10.7 ilustra os passos (comparações entre elementos) efetuadas pelo algoritmo 10.3. Ao todo, são 14 comparações.

---

$Y \quad \boxed{a \ b \ a \ e \ a \ b \ a \ e \ a \ a \ e}$




---

Figura 10.7: Comparações efetuadas pelo algoritmo 10.3

Considere agora a computação do algoritmo 10.2 para a seguinte cadeia  $X$ :

*bababaeabaeabaеaabaeabaaeaba*

e para o padrão  $Y$  anterior. A figura 10.8 ilustra as comparações efetuadas, num total de 30. Observe que, até encontrar o casamento na subcadeia  $X_{17}$ , foram consideradas apenas 5 subcadeias, em vez de 18 como no algoritmo de força bruta. O número total de comparações efetuadas foi 44. No algoritmo da força bruta (figura 10.3), esse número é igual a 58. Além disso, a complexidade desse último é quadrática, conforme verificado na seção anterior, enquanto no algoritmo de Knuth, Morris e Pratt é linear. Este é o objeto do teorema 10.1. A prova se baseia em um argumento semelhante ao utilizado no estudo da complexidade amortizada.

### **Teorema 10.1:**

Sejam  $X, Y$  duas cadeias de comprimento  $n, m$ , respectivamente  $n \geq m$ . O algoritmo de Knuth, Morris e Pratt para verificar se  $Y$  é subcadeia de  $X$  termina em  $O(n)$  passos.

### **Prova:**

O algoritmo de Knuth, Morris e Pratt consiste na execução dos algoritmos 10.2 e 10.3. O primeiro deles é, inicialmente, considerado. Sejam  $i$  e  $j$ , respectivamente, os índices para os caracteres de  $X$  e  $Y$ , considerados num certo instante da execução do algoritmo. O índice  $i$  possui valor inicial 0 e valor máximo  $n - m$  (uma condição de término do algoritmo) e nunca é decrementado. O índice  $j$  também possui valor inicial 0, mas pode ser decrementado pela atribuição  $j := d[j]$ . Além disso, quando  $j$  é incrementado,  $i$  também o é. O número de passos do algoritmo é igual ao número de vezes em que  $i$  é incrementado mais o número de vezes em que  $j$  é decrementado. O primeiro desses valores é, no máximo,  $n$ . Como  $j$  não assume valores negativos, o número de decrementos de  $j$  também não pode ultrapassar  $n$ , pois o número de decrementos não pode ultrapassar o de incrementos. Logo, o algoritmo 10.2 termina em  $O(n)$  passos. Analogamente, o algoritmo 10.3 efetua  $O(m)$  passos. □

$Y$	a   b   a   e   a   b   a   e   a   a   e
$X$	b   a   b   a   b   a   e   a   b   a   e   a   b   a   b   a   e   a   b   a   e   a   a   e   b   a
$l=0$	a
$l=1$	a   b   a   e
$l=3$	b   a   e   a   b   a   e   a   a
$l=7$	b   a   e   a   a   e
$l=16$	b   a   e   a   b   a   e   a   a   e

Figura 10.8: Comparações efetuadas pelo algoritmo 10.2

## 10.5 – Compactação de Dados

Suponha que se deseje armazenar um arquivo de grande porte em algum tipo de memória, primária ou secundária. Para melhor utilizar os recursos disponíveis, deseja-se também minimizar, de alguma forma e na medida do possível, o espaço de memória utilizado. Uma forma de tentar resolver esse problema consiste em codificar o conteúdo do arquivo de maneira apropriada. Se o arquivo codificado for menor do que o original, pode-se armazenar a versão codificada em vez do arquivo propriamente dito. Isto representaria um ganho de memória. Naturalmente, uma tabela de códigos seria também armazenada, para permitir a decodificação do arquivo. Essa tabela seria utilizada pelos *algoritmos de codificação e decodificação*, os quais cumpririam a tarefa de realizar tais operações de forma automática.

O problema descrito é conhecido como *compactação de dados*. A sua importância era considerável nos primeiros anos de computação. Naquela época, a questão de economia de memória era crítica, devido ao seu elevado custo. Com o passar do tempo, a memória foi se tornando cada vez mais abundante, com o relativo decréscimo de custo. Entretanto, alguns programas de aplicação atualmente utilizados requerem muita memória. Entre esses, por exemplo, encontram-se programas que oferecem recursos visuais aos seus usuários. Assim, o problema de economia de memória permanece atual. O advento e a larga utilização de redes de computadores também contribuem para a importância da compactação de dados. Agora, além da economia de memória, procura-se também diminuir o custo da transmissão dos arquivos na rede. Ou seja, uma maior compactação dos dados de um arquivo corresponderia a um número menor de dados a transmitir, o que implicaria um custo de transmissão menor. A hipótese concreta, nesse caso, é que o custo de transmissão é proporcional à quantidade de dados a transmitir.

As duas seções seguintes serão dedicadas a esse problema. Na próxima seção, será abordado um método simples de compactação que produz bons resultados quando o texto a ser compactado apresenta uma grande quantidade de símbolos consecutivos idênticos. Finalmente, a última seção deste capítulo é dedicada ao estudo da árvore de Huffman, um método de codificação que permite a utilização de códigos de tamanho variável.

## 10.6 – O Algoritmo de Freqüência de Caracteres

Seja o caso em que o arquivo a ser compactado consiste em um texto alfabético, como o exemplo seguinte:

*BBBEAAAAAFFHHHHHCBMMALLCDDDBBBBBBCC*

Para compactar esse texto, pode-se empregar uma idéia bastante simples. Determina-se a quantidade de símbolos idênticos consecutivos existentes no texto. Cada uma das subsequências máximas de símbolos idênticos do texto é substituída por um número indicando a freqüência do símbolo em questão. O texto do exemplo acima seria compactado como:

*3B1E4A2F5H1C1B2M1A3L1C2D7B2C*

Naturalmente, pode-se adotar como regra de compactação que a ausência do número representativo da freqüência de um símbolo significa freqüência igual a um. Com essa convenção, o texto resultaria em:

*3BE4A2F5HCB2MA3LC2D7B2C*

Esse método exige que o texto a ser compactado não contenha caracteres numéricos. Caso contrário, a compactação poderia resultar num código ambíguo, uma vez que o número representativo da freqüência de um símbolo pode ser confundido com o próprio símbolo. Para contornar esse problema, poder-se-ia empregar algum símbolo especial, por exemplo @, para anunciar que o número imediatamente após representa um símbolo e não uma freqüência. Nesse caso, deve-se supor que o símbolo @ não faz parte do texto. Se essa possibilidade existir, o método deve ser modificado de modo a acomodar a situação.

Por exemplo, o texto

*AAA33333BA6666888DDDDDD999999999999AABB*

pode ser compactado como

*3A5@3BA4@63@87D11@92A3B*

## 10.7 – O Algoritmo de Huffman

Nesta seção descreve-se um método para codificar um texto de forma a obter-se uma compactação que seja ótima dentro de certos critérios. Supõe-se que o texto seja constituído de um conjunto de símbolos (ou caracteres)  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $n > 1$ . É conhecida a freqüência  $f_i$  de cada símbolo  $s_i$  no texto. Isto é,  $s_i$  aparece  $f_i$  vezes ao longo do texto,  $1 \leq i \leq n$ . Deseja-se atribuir um código a cada símbolo, de modo a compactar o texto todo. A restrição que se coloca é que nenhum código seja prefixo de algum outro. Ou seja, os códigos procurados são aqueles dados por uma árvore binária de prefixo (seção 9.3). Recorde que esta última é como uma árvore estritamente binária, com arestas rotuladas. Para cada nó interno  $v$ , a aresta que conduz ao filho esquerdo de  $v$  é rotulada com *zero*, enquanto o rótulo daquela que conduz ao direito é igual a *um*. Cada símbolo  $s_i$  está associado a uma folha da árvore. Os códigos dos símbolos são seqüências binárias. O código de  $s_i$  é igual à seqüência dos rótulos das arestas, do caminho desde a raiz da árvore até a folha correspondente a  $s_i$ . A figura 10.9 ilustra um exemplo de códigos de prefixo. O código do símbolo  $s_4$  é 011, pois a seqüência dos rótulos das arestas, desde a raiz até  $s_4$ , é 011.

Uma vantagem da utilização de códigos de prefixo é a facilidade existente para executar as tarefas de codificação e decodificação. Por exemplo, suponha os códigos dados pela árvore da figura 10.9. Suponha o texto seguinte:

$s_4 \ s_3 \ s_3 \ s_1 \ s_3 \ s_1 \ s_4 \ s_5 \ s_1 \ s_3 \ s_3 \ s_3 \ s_3 \ s_2 \ s_3 \ s_5 \ s_2 \ s_2 \ s_2 \ s_4$

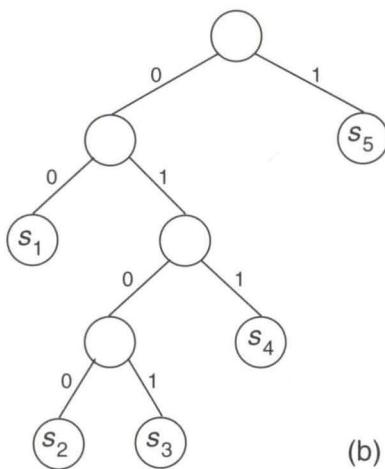
Utilizando-se a tabela dada pela figura 10.9(a), obtém-se a seguinte codificação:

0110101010001010001110001010101010101010001011010001000100011

Para decodificar o texto, basta percorrê-lo da esquerda para a direita, ao mesmo tempo em que a árvore é percorrida, repetidamente, da raiz para as folhas. Nesse percurso, toma-se o caminho para a esquerda ou direita, na árvore, de acordo com o dígito correspondente encontrado no texto, 0 ou 1, respectivamente. Toda vez que uma folha é atingida, um símbolo decodificado foi encontrado. Nesse caso, retoma-se o processo reiniciando-se o percurso na árvore a partir da raiz, para decodificar o próximo símbolo.

símbolo	código
$s_1$	00
$s_2$	0100
$s_3$	0101
$s_4$	011
$s_5$	1

(a)



(b)

**Figura 10.9:** Códigos de prefixo

No exemplo, o texto codificado é iniciado por 0. Significa que se deve tomar o caminho da esquerda da raiz. O dígito seguinte é 1, o que conduz para a direita desse último nó. Como o terceiro dígito é 1, a folha correspondente ao símbolo  $s_4$  é alcançada. O texto decodificado inicia-se, pois, por  $s_4$ . Retoma-se, então, a raiz da árvore. O próximo dígito na codificação é 0. O caminho a seguir é o do filho esquerdo da raiz. Em seguida, 1, após 0 e após 1. Com isso, atinge-se a folha correspondente a  $s_3$ . Assim sendo, detectou-se que o símbolo seguinte a  $s_4$  no texto é  $s_3$ . A nova subseqüência 0101 conduziria, novamente, ao símbolo  $s_3$ . O texto decodificado inicia-se, então, por  $s_4s_3s_3$ . E assim por diante, até esgotar a seqüência binária.

É imediato verificar que, uma vez conhecida a árvore de prefixo correspondente, o processo de codificação ou decodificação pode ser realizado em um número de passos linear no tamanho da seqüência binária codificada.

Uma questão central é, pois, o comprimento do texto codificado, isto é, o número de dígitos binários da codificação. O comprimento da seqüência binária produzida por uma árvore binária de prefixo  $T$  é denominado *custo* de  $T$  e denotado por  $c(T)$ . No exemplo anterior, o custo da árvore da figura 10.9(b) é igual a 69, pois a seqüência binária obtida possui 69 dígitos. O objetivo consiste, então, em minimizar  $c(T)$ , ou seja, construir  $T$  de modo

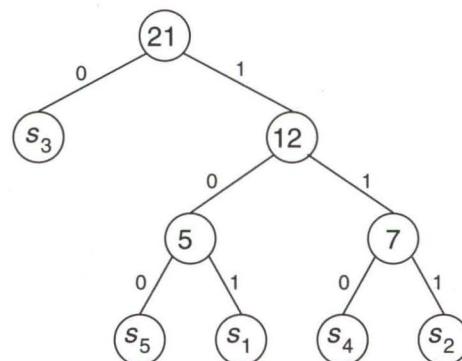
que  $c(T)$  seja mínimo. Uma árvore de prefixo que satisfaça esta condição é denominada *mínima* ou *árvore de Huffman*. Codificando-se o texto do exemplo com a árvore da figura 10.10(b), obtém-se a seqüência

110001010101110100101000001110100111111111110

que possui 45 dígitos. Logo, o custo da árvore da figura 10.10(b) é igual a 45. Uma melhoria considerável em relação à árvore da figura 10.9(b). Ter-se-á oportunidade de verificar que essa árvore é mínima.

símbolo	freqüência	código
$s_1$	3	101
$s_2$	4	111
$s_3$	9	1
$s_4$	3	110
$s_5$	2	100

(a)



(b)

Figura 10.10: Árvore de Huffman

Seja  $T$  uma árvore de prefixo correspondente a um dado texto, onde cada símbolo  $s_i$  ocorre  $f_i$  vezes. Seja  $\ell_i$  o comprimento do código binário do símbolo  $s_i$ . É imediato verificar que cada símbolo  $s_i$  contribui com  $f_i \ell_i$  unidades no custo  $c(T)$ . Logo  $c(T) = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i \ell_i$ . Este valor corresponde ao conhecido *comprimento de caminho externo ponderado* de  $T$  (seção 4.2.2). Se todas as freqüências são idênticas, então  $T$  é uma árvore binária completa e  $c(T)$  é o comprimento de caminho externo de  $T$  (seção 4.2.1).

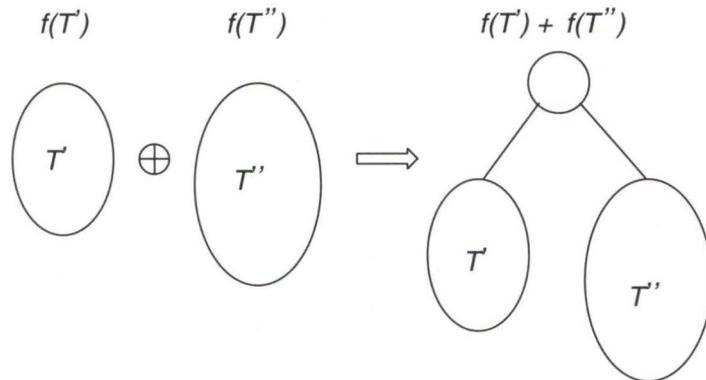
Em seguida, apresenta-se o algoritmo para construir a árvore de Huffman para um dado conjunto de  $n > 1$  símbolos  $s_i$  de freqüências  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . O processo utiliza a técnica conhecida como *algoritmo guloso*. Este consiste

na construção da árvore mínima de forma iterativa. A árvore é construída das folhas para a raiz, ou seja, os códigos são determinados de trás para a frente. De um modo geral, o processo corresponde a obter subcódigos para subconjuntos de símbolos. Cada um desses subcódigos corresponde a uma subárvore. O passo geral iterativo produz a fusão de duas dessas subárvores, em uma única. O processo se encerra quando o número de subárvores se reduz a um.

Seja  $T'$  uma subárvore binária de prefixo. Isto é, as folhas de  $T'$  são símbolos selecionados dentre  $\{s_1, \dots, s_n\}$ . Define-se  $f(T')$ , a freqüência de  $T'$ , como sendo a soma das freqüências dos símbolos  $s_i$  presentes nas folhas de  $T'$ . Por exemplo, os números representados nos nós internos da árvore da figura 10.10(b) correspondem às freqüências das subárvores de raiz nos respectivos nós.

O processo de construção da árvore de Huffman é simples. Para iniciar, definem-se  $n$  subárvores, cada qual consistindo em um único nó contendo o símbolo  $s_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . A freqüência de cada uma dessas  $n$  subárvores é, pois, igual à freqüência do símbolo a ela correspondente. O passo geral, iterativamente, seleciona as duas subárvores  $T'$  e  $T''$ , tais que  $f(T')$  e  $f(T'')$  sejam as duas menores freqüências. Essas duas subárvores de custo mínimo são fundidas em uma única árvore  $T$ , de acordo com a operação  $\oplus$ . Tal operação consiste em criar um novo nó cujos filhos esquerdo e direito são as raízes de  $T'$  e  $T''$ , respectivamente, conforme a figura 10.11. É indiferente a escolha entre  $T'$  e  $T''$  para subárvore esquerda ou direita desse nó. Observe que a freqüência  $f(T' \oplus T'')$  da nova subárvore  $T' \oplus T''$  é igual a  $f(T') + f(T'')$ . O algoritmo termina quando restar apenas uma única subárvore, ou seja, em  $n-1$  execuções da operação  $\oplus$ . A figura 10.12 ilustra a aplicação do algoritmo à construção da árvore ótima para o conjunto de símbolos e freqüências da figura 10.10(a). A árvore obtida pelo algoritmo é exatamente aquela ilustrada na figura 10.10(b).

Para implementar o processo, observe que a cada iteração é necessário determinar as duas subárvores  $T'$  e  $T''$  da coleção de menor freqüência. As subárvores  $T'$  e  $T''$  são então eliminadas e substituídas pela subárvore  $T' \oplus T''$ . Deve-se utilizar, portanto, uma estrutura de dados que suporte as operações básicas de minimização, inclusão e exclusão. Por exemplo, uma lista de prioridades.

**Figura 10.11:** A operação  $\oplus$ 

O processo é conhecido como *algoritmo de Huffman* e é visto a seguir. As freqüências  $f_1, \dots, f_n$ ,  $n > 1$  são consideradas conhecidas, devendo-se construir previamente uma lista de prioridades com elas. Cada elemento desta lista corresponde a uma árvore  $T'$  composta de um único nó, com freqüência  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Os procedimentos utilizados para manipular a lista de prioridades foram descritos no capítulo 6. A única diferença é que, neste caso, a ordem das prioridades está invertida. Então, o procedimento *minimo* (semelhante ao algoritmo 6.4) retira a menor prioridade e rearruma a lista. O procedimento *inserir*( $T, f, F$ ), que inclui o elemento  $T$ , de prioridade  $f$ , na lista  $F$ , é igual ao algoritmo 6.3. Ao final, a árvore de Huffman é a correspondente àquela que restou na lista de prioridades  $F$ .

**algoritmo 10.4:** construção da árvore de Huffman  
para  $i := 1, n - 1$  faça

```

minimo( $T'$ ,  $f$ ,  $F$ );  $minimo( $T''$ ,  $f$ ,  $F$ )
 $T := T' \oplus T''$ 
 $f(T) := f(T') + f(T'')$ 
inserir( $T, f, F$ )$ 
```

É imediato determinar a complexidade do algoritmo. Cada operação de minimização ou inclusão na lista de prioridade pode ser efetuada em  $O(\log n)$  passos. A operação  $\oplus$  requer apenas um número constante de passos. Há um total de  $n - 1$  iterações. Logo, a complexidade é  $O(n \log n)$ .

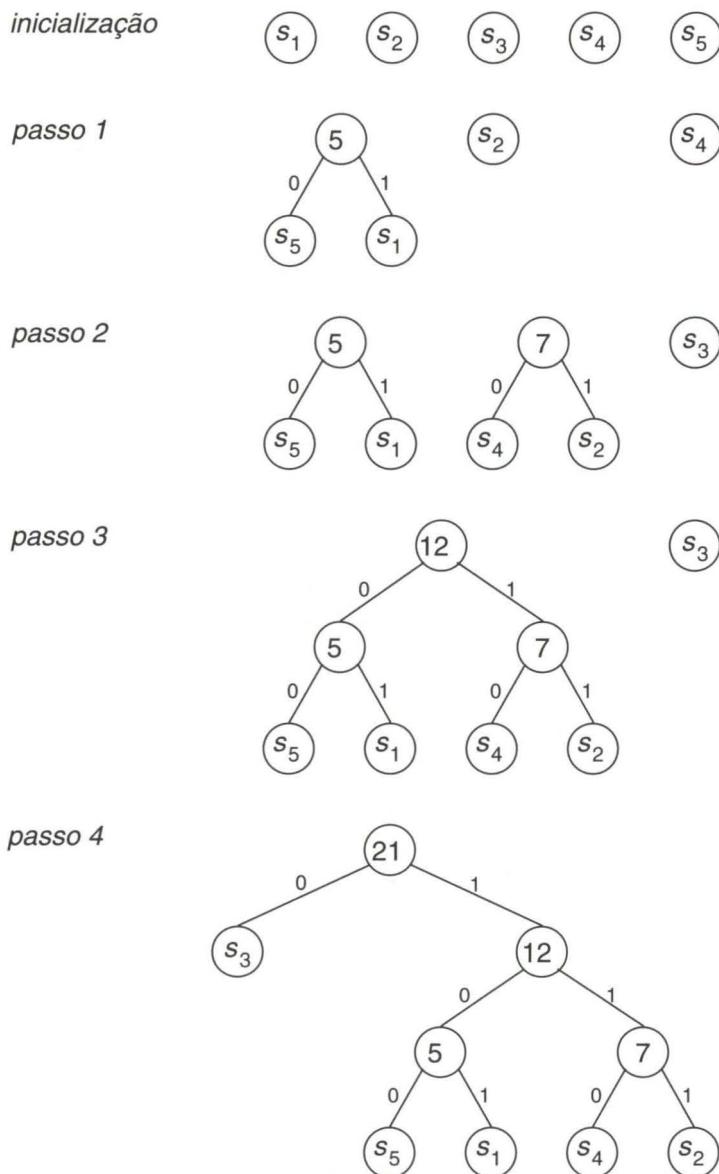


Figura 10.12: Aplicação do algoritmo de Huffman

Resta verificar que o algoritmo, de fato, encontra a árvore de custo mínimo. Para tal, utiliza-se o lema seguinte:

**Lema 10.1:**

Sejam  $s_i$  símbolos com freqüências  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $n > 1$ , tais que  $f_1$  e  $f_2$  são as duas menores freqüências. Então existe uma árvore de Huffman para esses símbolos, em que os nós correspondentes a  $s_1$  e  $s_2$  são irmãos localizados no último nível da árvore.

**Prova:**

Seja  $T$  uma árvore de Huffman para os dados símbolos. Suponha que  $s_1$  não esteja localizado em alguma folha do último nível. Seja  $s_k$ ,  $k \neq 2$ , um símbolo do último nível de  $T$ . Seja  $T'$  a árvore obtida a partir de  $T$ , mediante a troca de posições dos símbolos  $s_1$  e  $s_k$ . Se  $f_1 < f_k$ , então a árvore  $T'$  possui custo menor do que  $T$ , pois a contribuição de cada  $f_i$  no custo total é igual ao produto  $f_i \ell_i$ , onde  $\ell_i$  é o nível de  $s_i$  na árvore. Isto contradiz a minimalidade de  $T$ . Por outro lado,  $f_1 \leq f_k$ , pois  $f_1$  é a menor freqüência. Logo,  $f_1 = f_k$ . Então  $c(T) = c(T')$  e  $T'$  também é árvore de Huffman, mas contém  $s_1$  no último nível. De forma análoga, obtém-se uma árvore de Huffman  $T''$  em que  $s_2$ , além de  $s_1$ , está localizado também no último nível. Seja  $s_j$  o irmão de  $s_1$  em  $T''$ . Se  $j \neq 2$ , então considere a árvore  $T'''$  obtida de  $T''$  pela troca de posições das folhas  $s_2$  e  $s_j$ . Então  $c(T'') = c(T''')$ , pois  $s_2$  e  $s_j$  encontram-se no mesmo nível. Isto completa a prova, pois  $T'''$  é uma árvore de Huffman em que  $s_1$  e  $s_2$  são irmãos, localizados no último nível.  $\square$

O teorema seguinte comprova a correção do algoritmo.

**Teorema 10.2:**

Seja  $T$  a árvore construída pelo algoritmo de Huffman para as freqüências  $f_1, \dots, f_n$ ,  $n > 1$ . Então,  $T$  é mínima.

**Prova:**

Sem perda de generalidade, seja  $f_1 \leq f_2, \dots, \leq f_n$ . Denote por  $T_{\min}$  uma árvore mínima correspondente a essas freqüências. Pelo lema 10.1, pode-se supor que as folhas correspondentes a  $f_1$  e  $f_2$  são nós irmãos do último nível de  $T_{\min}$ . Utiliza-se indução em  $n$ . Se  $n = 2$ , o resultado é trivial. Caso contrário, suponha que o algoritmo de Huffman sempre obtém uma árvore de custo mínimo quando o número de símbolos é menor do que  $n$ . Examine

o funcionamento do algoritmo para as freqüências  $f_1, \dots, f_n$ . No primeiro passo, o algoritmo seleciona as duas menores freqüências  $f_1$  e  $f_2$ , e efetua a operação  $\oplus$  com as suas subárvores correspondentes, cada qual contendo um único nó. Essas subárvores são eliminadas e substituídas por uma outra cuja freqüência é  $f_1 + f_2$ . Ou seja, após o primeiro passo, restam  $n - 1$  freqüências  $f_1 + f_2, f_3, \dots, f_n$ . Seja  $T'$  a árvore construída pelo algoritmo para essas  $n - 1$  freqüências. Pela hipótese de indução,  $T'$  é mínima. Observe, ainda, que

$$c(T) = c(T') + f_1 + f_2. \quad (\text{i})$$

Por outro lado, seja  $T''$  a árvore obtida a partir de  $T_{\min}$ , eliminando-se as folhas (nós irmãos) correspondentes a  $f_1$  e  $f_2$  e associando-se ao pai delas um novo símbolo com freqüência  $f_1 + f_2$ .  $T''$  é uma árvore binária de prefixo correspondente as  $n - 1$  freqüências  $f_1 + f_2, f_3, \dots, f_n$ . Além disso,

$$c(T_{\min}) = c(T'') + f_1 + f_2. \quad (\text{ii})$$

Comparando (i) e (ii), observe que  $c(T') \leq c(T'')$ , pois  $T'$  é mínima. Logo,  $c(T) = c(T_{\min})$  e  $T$  é uma árvore mínima.  $\square$

O método de Huffman é uma ferramenta importante para a compactação de dados. A restrição da utilização de códigos de prefixo é perfeitamente razoável. E, para os códigos de prefixo, a árvore de Huffman é comprovadamente o melhor método. Uma desvantagem, contudo, é que um possível erro de transmissão em apenas um dos dígitos no texto binário codificado pode ocasionar sérios problemas no processo de decodificação.

## 10.8 – Exercícios

- 10.1 Dê exemplos de cadeias  $X$  e  $Y$ , de comprimentos  $n$  e  $m$ , respectivamente, tais que o algoritmo de força bruta para o casamento de cadeias efetue um número máximo de comparações. Determinar esse máximo.
- 10.2 Dê exemplos de cadeias  $X$  e  $Y$ , de comprimentos  $n$  e  $m$ , respectivamente, tais que o algoritmo de força bruta para o casamento de cadeias efetue um número mínimo de comparações. Determinar esse mínimo.

- 10.3 • Sejam  $X$  e  $Y$  duas cadeias, de comprimentos  $n$  e  $m$ , respectivamente, de alfabeto  $\{0,1\}$ . Supondo que todas as cadeias de um mesmo comprimento possuem a mesma probabilidade de ocorrência, determinar o número médio de comparações que efetua o algoritmo de força bruta de casamento de cadeias.
- 10.4 Sejam  $X$  e  $Y$  as cadeias  $abebaebaabeababbe$  e  $beabab$ , respectivamente. Deseja-se determinar se  $Y$  é subcadeia de  $X$ . Determinar o número de passos efetuados
- pelo algoritmo de força bruta.
  - pelo algoritmo de Knuth, Morris e Pratt.
- 10.5 Descrever exemplos de cadeias  $X$  e  $Y$  com 10 e 4 caracteres, respectivamente, tais que o algoritmo de força bruta para determinar se  $Y$  é subcadeia de  $X$  requeira
- um número mínimo de comparações.
  - um número máximo de comparações.
- 10.6 Repetir o exercício anterior considerando, agora, o algoritmo de Knuth, Morris e Pratt.
- 10.7 ° Repetir os dois exercícios anteriores com a condição de que  $X$  e  $Y$  possuam  $n$  e  $m$  caracteres, respectivamente.
- 10.8 • Modificar o algoritmo de Knuth, Morris e Pratt, de tal modo que a quantidade de memória utilizada, em adição àquela necessária para o armazenamento das cadeias  $X$  e  $Y$ , seja  $O(1)$ . A complexidade do algoritmo deve permanecer linear.
- 10.9 • Modificar o algoritmo de Knuth, Morris e Pratt, de modo a procurar diminuir o número de comparações efetuadas. Mais especificamente, redefinir o valor de  $d(j)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , de maneira que  $d(j) \leq j/2$ , e adaptar o algoritmo a essa condição.
- 10.10 • Mostrar que existe um algoritmo satisfazendo o exercício anterior tal que nunca efetue um número de comparações de caracteres superior ao do algoritmo de Knuth, Morris e Pratt.

10.11º Dê exemplos de cadeias  $X$  e  $Y$  tais que

- (i) o algoritmo do exercício 10.9 efetue um número igual de comparações em relação à versão original do algoritmo de Knuth, Morris e Pratt.
- (ii) o algoritmo do exercício 10.9 efetue um número mínimo de comparações em relação à versão original do algoritmo de Knuth, Morris e Pratt.

10.12 Determinar exatamente o número de passos efetuados pelos algoritmos 10.1 e 10.2, no pior caso, em função de  $n$  e  $m$ .

10.13 Escrever o vetor  $d$  para o padrão *araraquara*.

10.14 Dado um texto genérico, existe sempre algum método de compactação tal que o texto compactado é de tamanho menor do que o original? Justificar a resposta.

10.15 Escrever o texto compactado através do método da freqüência de caracteres idênticos correspondente ao texto seguinte:

*BBBBCCCCDEFFFBAAAAAAAAAACDDFFFFFFFCF*

10.16 Provar ou dar contra-exemplo:

Considere uma variação do método de compactação de freqüências de caracteres idênticos em que o símbolo especial @ indica que os algarismos que imediatamente o seguem constituem o valor de uma freqüência e não símbolos. Então, a codificação produzida por esse método não é ambígua.

10.17 Mostrar que o problema de determinação da árvore de Huffman é um caso particular daquele para construir a árvore binária de busca ótima. Isto é, dado um conjunto de símbolos  $s_i$  e freqüências  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , formular um problema de construção de árvore binária de busca ótima tal que a árvore de busca encontrada seja a árvore de Huffman para o dado conjunto de símbolos e freqüências.

10.18 Desenhar a árvore de Huffman para o seguinte conjunto de chaves e freqüências, respectivamente na primeira e segunda linhas da tabela.

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$
1	6	2	1	1	9	2	3

- 10.19º Descrever um algoritmo para determinar a árvore de Huffman relativa a um conjunto de símbolos e freqüências dadas que possua altura mínima.
- 10.20• Dado um conjunto de  $n$  símbolos e freqüências e um número inteiro  $h > 0$ , determinar a árvore binária de prefixo que possui altura  $h$  e custo mínimo para essa altura.
- 10.21 Sejam  $T'$ ,  $T''$  duas árvores binárias de prefixo.  $T'$  e  $T''$  são *similares* quando  $T'$  puder ser obtida a partir de  $T''$ , iterativamente, através da realização de uma seqüência das seguintes operações: “escolher um nó  $v$  da árvore e trocar a sua subárvore esquerda com a direita”. Descrever um exemplo de duas árvores de Huffman não similares, relativas às mesmas freqüências.
- 10.22• Determinar as condições que as freqüências devem satisfazer de modo que as árvores de Huffman correspondentes sejam todas similares entre si.
- 10.23 Provar ou dar contra-exemplo:  
Se as freqüências de um dado conjunto de símbolos forem todas distintas, então quaisquer duas árvores de Huffman são similares.
- 10.24º Determinar as condições que as freqüências devem satisfazer de modo que quaisquer duas árvores de Huffman distintas, relativas a essas freqüências, sejam não similares.
- 10.25• Generalizar o algoritmo de Huffman para o caso em que se deseja uma codificação  $m$ -ária para o texto dado,  $m \geq 2$ .
- 10.26 Provar ou dar contra-exemplo: Sejam  $s_i$ ,  $s_j$  dois símbolos e  $\ell_i$ ,  $\ell_j$  os respectivos níveis das folhas correspondentes a  $s_i$ ,  $s_j$  em uma árvore de Huffman. Então  $f_i < f_j \Rightarrow \ell_i \leq \ell_j$
- 10.27 Dado um conjunto de  $n$  arquivos  $A_1, \dots, A_n$ , ordenados, o problema da intercalação de arquivos consiste em reuni-los em um único arquivo ordenado. Para tal, um programa padrão intercala os arquivos dois a dois. É necessário, portanto, executar o programa de intercalação um total de  $n - 1$  vezes. Sabe-se que cada arquivo  $A_i$  possui  $|A_i|$  chaves e que, para intercalar os arquivos  $A_i$  e  $A_j$ , o programa utiliza  $|A_i| + |A_j|$  comparações entre chaves. Determinar a ordem em que as intercalações devem ser realizadas, de modo a minimizar o número total de comparações efetuadas.

- 10.28 Sejam  $A_1, A_2, A_3$  arquivos ordenados contendo  $|A_1|, |A_2|, |A_3|$  chaves, respectivamente. Elaborar um algoritmo para intercalar os três arquivos, de forma que cada um só seja percorrido uma única vez. Isto é, a cada passo seleciona-se uma chave pertencendo a um dos três arquivos, a qual é transferida para o arquivo intercalado e não mais manuseada. Comparar esse método de intercalação com aquele que utilizaria duas intercalações de dois arquivos cada, para intercalar  $A_1, A_2$  e  $A_3$ , conforme o exercício anterior.
- 10.29 • Utilizando, repetidamente, o método de intercalar arquivos três a três do exercício anterior, descrever um processo ótimo para intercalar as chaves de  $n$  arquivos  $A_1, \dots, A_n$ . Comparar o resultado obtido com o método de intercalar os arquivos dois a dois do exercício 10.27.

## Notas Bibliográficas

O algoritmo de Knuth, Morris e Pratt foi descoberto, de forma independente, por Knuth e Pratt e por Morris. A publicação do resultado, em conjunto, deu-se em 1977 [Kn77]. Ele se constituiu no primeiro algoritmo de complexidade linear para o problema do casamento de cadeias. A literatura fornece outros algoritmos lineares para esse problema, conforme se segue. O algoritmo de Boyer e Moore [Bo77], em geral, produz resultados melhores quando o tamanho dos alfabetos e dos padrões são grandes. O algoritmo de Galil e Seiferas [Ga80] é também linear e dispensa o armazenamento do vetor (exercício 10.8). O algoritmo de Karp e Rabin [Ka87] utiliza técnicas de tabelas de dispersão e possui um pior caso quadrático. Contudo, ele é bastante simples e sua complexidade média é linear. O primeiro resultado acerca da complexidade média desse problema foi obtido por Yao [Ya79]. Baeza-Yates [BY89] efetuou a análise do caso médio dos algoritmos de força bruta e de Boyer e Moore. Algoritmos eficientes para variações do problema de casamento de padrões foram também desenvolvidos em [BY89].

Huffman desenvolveu o método da compactação de dados em 1952 [Hu52]. Um algoritmo de Huffman adaptativo, isto é, em que a árvore de Huffman é localmente modificada com a inclusão de um novo dado, foi elaborado, inicialmente, por Faller [Fa73]. Posteriormente, esse método foi redescoberto por Gallager [Ga78]. Knuth [Kn85] efetuou melhorias nesse algoritmo, de modo que ele é, atualmente, conhecido como algoritmo FGK. Knuth [Kn68] contém um estudo detalhado da árvore de Huffman. A obtenção da árvore de

Huffman de altura mínima (exercício 10.19) foi descrita por Schwartz [Sc64], enquanto a construção de árvores de prefixo ótimas com altura limitada foi considerada por Larmore e Hirschberg [La90]. Outros métodos bastante conhecidos de compactação de dados são de Ziv-Lempel [Zi77] e [Zi78] e o de Bentley, Sleator, Tarjan e Wei [Be86]. O artigo de Lelewer e Hirschberg [Le87] sumariza vários desses métodos. O livro de Bell, Cleary e Witten [Be90] é dedicado à compactação de dados, enquanto o de Hamming [Ha80] é uma referência para o problema de codificação. Em particular, esse último discute a concepção de códigos com detecção ou correção automática de erros, inicialmente apresentada pelo mesmo autor em [Ha50].

## Referências Bibliográficas

- [Ad62] G.M.Adel'son-Vel'skii, E.M.Landis, An Algorithm for the Organization of Information, *Soviet Mathematics Doklady*, **3**(1962), pp. 1259-1263
- [Ah74] A.V.Aho, J.E.Hopcroft, J.D.Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1974
- [Ah83] A.V.Aho, J.E.Hopcroft, J.D.Ullman, *Data Structures and Algorithms*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1983
- [Al78] B.Allen, I.Munro, Self-Organizing Search Trees, *Journal of the ACM*, **25**(1978), pp. 526-535
- [At86] M.D.Atkinson, J.-R.Sack, N.Santoro, T.Strothte, Min-Max Heaps and Generalized Priority Queues, *Communications of the ACM*, **29**(1986), pp. 996-1000
- [Ba72] R.Bayer, Symmetric Binary B-trees: Data Structure and Maintenance Algorithms, *Acta Informatica*, **1**(1972), pp. 290-306
- [Ba72a] R.Bayer, E.M.McCreight, Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes, *Acta Informatica*, **1**(1972), pp. 173-189
- [Ba78] S.Baase, *Computer Algorithms: Introduction to Design and Analysis*, Addison Wesley, Readings, Mass., 1978
- [Be85] J.Bentley, Programming Pearls: Thanks, Heaps, *Communications of the ACM*, **28**(1985), pp. 245-250
- [Be85a] J.L.Bentley, C.C.McGeoch, Amortized Analyses of Self-Organizing Sequential Search Heuristics, *Communications of the ACM*, **28**(1985), pp. 404-411

- [Be86] J.L.Bentley, D.D.Sleator, R.E.Tarjan, V.K.Wei, A Locally Adaptive Data Compression Scheme, *Communications of the ACM*, **29**(1986), pp. 320-330
- [Be90] T.C.Bell, J.G.Cleary, I.H.Witten, *Text Compression*, Englewood Cliffs, N.J., 1990
- [Bo77] R.S.Boyer, J.S.Moore, A Fast String Searching Algorithm, *Communications of the ACM*, **20**(1977), pp. 762-772
- [Br59] R. de la Briandais, File Searching Using Variable Length Keys, *AFIPS Western Joint Computer Conference*, **15**, pp. 295-298, San Francisco, CA, 1959
- [BY89] R.A.Baeza-Yates, *Efficient Text Searching*, Ph.D. Thesis, Department of Computer Sciences, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, 1989
- [Co70] E.G.Coffman, J.Eve, File Structures Using Hashing Functions, *Communications of the ACM*, **13**(1970), pp. 427-436
- [Co79] D.Comer, The Ubiquitous B-tree, *ACM Computing Surveys*, **11**(1979), pp. 121-137
- [Co80] D.Comer, A Note on Median Split Trees, *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, **2**(1980), pp. 129-133
- [Co90] T.H.Cormen, C.E.Leiserson, R.L.Rivest, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, Mass. e McGraw-Hill, New York, N.Y., 1990
- [Fa73] N.Faller, An Adaptative Method for Data Compression, *Record of the 7th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers*, Naval Postgraduate School, Monterey, Ca., pp. 593-597, 1973
- [Fl64] R.W.Floyd, Algorithm 245: Treesort3, *Communications of the ACM*, **7**(1964), pp. 701
- [Fr60] E.Fredkin, Trie Memory, *Communications of the ACM*, **3**(1960), pp. 490-499
- [Fr90] C.Froidevaux, M.-C.Gaudel, M.Soria, *Types de Donnés et Algorithmes*, McGraw-Hill, Paris, 1990
- [Ga74] M.R.Garey, Optimal Binary Search Trees with Restricted Maximal Depth, *SIAM Journal on Computing* **2**(1974), pp. 101-110

- [Ga78] R.G.Gallager, Variations on a Theme by Huffman, *IEEE Transactions on Information Theory*, **24**(1978), pp. 668-674
- [Ga80] Z.Galil, J.Seiferas, Saving Space in Fast String-Matching, *SIAM Journal on Computing*, **9**(1980), pp. 417-438
- [Ga85] H.N.Gabow, R.E.Tarjan, A Linear Time Algorithm for a Special Case of Disjoint Set Union, *Journal of Computer and System Sciences*, **30**(1985), pp. 209-221
- [Gi59] E.N.Gilbert, E.F.Moore, Variable-Length Binary Encoding, *Bell System Tech. J.*, **38**(1959), pp. 933-968
- [Go81] L.Gotlieb, Optimal Multiway Search Trees, *SIAM Journal on Computing*, **10**(1981), pp. 422-433
- [Go81a] L.Gotlieb, D.Wood, The Construction of Optimal Multiway Search Trees and the Monotonicity Principle, *Intern. J. Comput. Math.*, Sc.A9(1981), pp. 17-24
- [Go91] G.H.Gonnet, R.Baeza-Yates, *Handbook of Algorithms and Data Structures*, Addison Wesley, Reading, Mass. 1991
- [Gr82] D.H.Greene, D.E.Knuth, *Mathematics for the Analysis of Algorithms*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1982
- [Gr89] R.L.Graham, D.E.Knuth, O.Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1989
- [Gu78] L.J.Guibas, R.Sedgewick, A Dichromatic Framework for Balanced Trees, *Proceedings of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society, pp. 8-21, 1978
- [Ha50] R.W.Hamming, Error-Detecting and Error-Correcting Codes, *Bell System Tech. J.*, **29**(1950), pp. 147-160
- [Ha80] R.W.Hamming, *Coding and Information Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980
- [He86] J.H.Hester, D.S.Hirschberg, S.-H.S.Huang, C.K.Wong, Faster Construction of Optimal Binary Split Trees, *Journal of Algorithms*, **7**(1986), pp. 412-424

- [Hi62] T.Hibbard, Some Combinatorial Properties of Certain Trees with Applications to Searching and Sorting, *Journal of the ACM*, **9**(1962), pp. 13-28
- [Ho87] M.Hofri, *Probabilistic Analysis of Algorithms*, Springer-Verlag, New York, N.Y., 1987
- [Hu52] D.A.Huffman, A Method for the Construction of Minimum Redundancy Codes, *Proc. of the IRE*, **40**(1952), pp. 1098-1101
- [Hu84] S.-H.S.Huang, C.K.Wong, Optimal Binary Split Trees, *Journal of Algorithms*, **5**(1984), pp. 69-79
- [Hu84a] S.-H.S.Huang, C.K.Wong, Generalized Binary Split Trees, *Acta Informatica*, **21**(1984), pp. 113-123
- [Hu87] S.-H.S.Huang, Optimal Multiway Split Trees, *Journal of Algorithms*, **8**(1987), pp. 146-156
- [It76] A.Itai, Optimal Alphabetic Trees, *SIAM Journal on Computing*, **5**(1976), pp. 9-18
- [Ka87] R.M.Karp, M.O.Rabin, Efficient Radomized Pattern-Matching Algorithms, *IBM J. Research and Dev.*, **31**(1987), pp. 249-260
- [Ke84] R.Kemp, *Fundamentals of the Average Case Analysis of Particular Algorithms*, John Wiley, New York, N.Y., e B.G.Teubner, Stuttgart, 1984
- [Kn68] D.E.Knuth, *The Art of Computer Programming 1: Fundamental Algorithms*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1968
- [Kn69] D.E.Knuth, *The Art of Computer Programming 2: Seminumerical Algorithms*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1969
- [Kn71] D.E.Knuth, Optimum Binary Search Trees, *Acta Informatica*, **1**(1971), pp. 14-25
- [Kn73] D.E.Knuth, *The Art of Computer Programming 3: Sorting and Searching*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1973
- [Kn74] D.E.Knuth, J.L.Szwarcfiter, A Structured Program to Generate All Topological Sorting Arrangements, *Information Processing Letters*, **2**(1974), pp. 153-157
- [Kn77] D.E.Knuth, J.H.Morris, V.R.Pratt, Fast Pattern Matching in Strings, *SIAM Journal on Computing*, **6**(1977), pp. 323-350

- [Kn85] D.E.Knuth, Dynamic Huffman Coding, *Journal of Algorithms*, **6**(1985), pp. 163-180
- [Ko92] D.C.Kozen, *The Design And Analysys of Algorithms*, Springer-Verlag, New York, N.Y., 1992
- [La88] P.Larson, Dynamic Hash Tables, *Communications of the ACM*, **31**(1988), pp. 446-457
- [La90] L.L.Larmore, D.S.Hirschberg, A Fast Algorithm for Optimal Length-Limited Huffman Codes, *Journal of the ACM*, **37**(1990), pp. 464-473
- [Le87] D.A.Lelewer, D.S.Hirschberg, Data Compression, *ACM Computing Surveys*, **19**(1987), pp. 261-296
- [Le88] T.G.Lewis, C.R.Cook, Hashing for Dynamic and Static Internal Tables, *IEEE Computer*, **21**(1988), pp. 45-56
- [Li91] L.T.Liu, G.-H.Chen, Y.-L.Wang, A Note on Optimal Multiway Split Trees, *Bit*, **31**(1991), pp. 220-229
- [Ma75] W.D.Maurer, T.G.Lewis, Hash Table Methods, *ACM Computing Surveys*, **7**(1975), pp. 5-19
- [Ma92] H.M.Mahmoud, *Evolution of Random Search Trees*, John Wiley & Sons, New York, NY, 1992
- [Mc77] E.M.McCreight, Pagination of B\*-Trees with Variable-Length Records, *Communications of the ACM*, **20**(1977), pp. 670-674
- [Mo68] D.R. Morrison, PATRICIA: Practical Algorithmic to Retrieve Information Coded in Alphanumeric, *Journal of the ACM*, **15**(1968), pp. 514-534
- [Pe84] Y.Perl, Optimum Split Trees, *Journal of Algorithms*, **5**(1984), pp. 367-374
- [Pr91] G.Pruesse, F.Ruskey, *Generating Linear Extensions Fast*, preprint, Dept. of Computer Science, University of Victoria, Victoria, Canada, 1991
- [Re85] E.M.Reingold, W.J.Hansen, *Data Structures*, Little Brown & Co., Boston, Mass., 1983

- [Sc64] E.S.Schwartz, An Optimum Encoding with Minimal Longest Code and Total Number of Digits, *Information and Control*, **7**(1964), pp. 37-44
- [Sh78] B.A.Sheil, Median Split Trees: A Fast Lookup Technique for Frequently Occurring Keys, *Communications of the ACM*, **21**(1978), pp. 947-958
- [Sl85] D.D.Sleator, R.E.Tarjan, Self-Adjusting Binary Search Trees, *Journal of the ACM*, **32**(1985), pp. 652-686
- [Sl85a] D.D.Sleator, R.E.Tarjan, Amortized Efficiency of List Update and Paging Rules, *Communications of the ACM*, **28**(1985), pp. 202-208
- [Sz78] J.L.Szwarcfiter, L.B.Wilson, Some Properties of Ternary Trees, *The Computer J.*, **21**(1978), pp. 66-72
- [Sz84] J.L.Szwarcfiter, Optimal Multiway Search Trees for Variable Size Keys, *Acta Informatica*, **21**(1984), pp. 47-60
- [Ta75] R.E.Tarjan, Efficiency of a Good but not Linear Set Union Algorithm, *Journal of the ACM*, **22**(1975), pp. 215-225
- [Ta83] R.E.Tarjan, *Data Structures and Network Algorithms*, SIAM Publications, Philadelphia, Pa., 1983
- [Ta85] R.E.Tarjan, Amortized Computational Complexity, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, **6**(1985), pp. 306-318
- [Te91] R.Terada, *Desenvolvimento de Algoritmos e Estruturas de Dados*, McGraw-Hill e Makron do Brasil, São Paulo, SP, 1991
- [Va80] V.K.Vaishnavi, H.P.Kriegel, D.Wood, Optimum Multiway Search Trees, *Acta Informatica*, **14**(1980), pp. 119-133
- [Ve83] P.Veloso, C.Santos, P.Azeredo, A.Furtado, *Estruturas de Dados*, Campus, Rio de Janeiro, RJ, 1983
- [Ya79] A.C.Yao, The Complexity of Pattern Matching for a Random String, *SIAM Journal on Computing*, **8**(1979), pp. 368-387
- [Wi64] J.W.J.Williams, Algorithm 232: Heapsort, *Communications of the ACM*, **7**(1964), pp. 347-348

- [Wi86] N.Wirth, *Algorithms and Data Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986
- [Zi77] J.Ziv, A.Lempel, A Universal Algorithm for Sequencial Data Compression, *IEEE Transactions on Information Theory*, **23**(1977), pp. 337-343
- [Zi78] J.Ziv, A.Lempel, Compression of Individual Sequences via Variable-Rate Coding, *IEEE Transactions on Information Theory*, **24** (1978), pp. 530-536
- [Zi93] N.Ziviani, *Projeto de Algoritmos com Implementação em Pascal*, Livraria Pioneira Editora (Pioneira Informática), São Paulo, SP, 1993

# Índice Analítico

- acesso direto 228  
Adel'son-Vel'skii, G. M. 174  
agrupamento 246, 256  
Aho, A. V. 17, 226  
alcance 110-111  
alfabeto 260-261, 277-278, 302  
algoritmo 1  
algoritmo  
    de Huffman 294-301  
    de Huffman adaptativo 305  
    guloso 296  
    ótimo 13-14  
    recursivo 4-7  
Allen, B. 226  
alocação  
    de espaço tamanho variável 52-55  
    dinâmica 34  
    encadeada 34-55  
    estática 21  
    sequencial 20-31  
altura 66, 78  
ancestral 66  
ancestral próprio 66  
árvore 61-67  
árvore  
    2-4 173  
     $(1/k)$ -completa 173  
    AVL 130-144, 171-174, 215  
    auto-ajustável 214-223, 225-226  
    B 160-171, 173-174  
    B<sup>+</sup> 170  
    B binária simétrica 174  
    balanceada 127-174, 208-214, 225  
    binária 67-89, 224-225, 265-275  
    binária cheia 69-70  
    binária completa 69-71, 86, 94, 128-130, 178, 192-193, 215, 225  
    binária de busca 91-126, 134, 195, 274  
    binária de busca ótima 99-106, 123-125, 222, 226, 303  
    binária vazia 67  
    c/ costura 83-85, 89  
    de difusão 214-223, 225-226  
    de Fibonacci 133, 171  
    de Huffman 296-301, 303-305  
    de partilha 107-119, 124-125  
    de partilha generalizada 126  
    de partilha mediana 126  
    de partilha ótima 109-119, 124-125  
    de partilha ponderada 126  
    de prefixo 267-268, 294, 304  
    de rotação completa 225  
    de rotação simples 225  
    digital 260-275, 278  
    digital binária 265-267, 274-275  
    equilibrada 144-160  
    enraizada 62  
    estritamente binária 69-70, 89, 171, 268, 294  
    estritamente m-ária 72  
    graduada 144-160, 172-174  
    isomorfa 66-67, 89  
    k-balanceada 172  
    m-ária 72-73, 86, 261-265, 275  
    m-ária cheia 72  
    m-ária completa 72, 86  
    múltipla de busca 123, 125

- múltipla de partilha 125-126
- ordenada 67, 86, 89
- ótima 100
- Patrícia 268-275
- regulada 130, 134-144
- rubronegra 144-160, 172-174
- semicompleta 173
- t-ária alfabetica 123, 126
- ternária 72-73, 126, 261, 275
- vazia 62
- ziguezague 69, 95, 121, 214, 225, 265, 268-270, 275
- Atkinson, M. D. 194
- avô 66
- Azeredo, P. 17
- Baase, S. 17
- Baeza-Yates, R. 17, 258, 275, 305
- balanceamento 128-134, 150-152
- Bayer, R. 174
- Bell, T. C 306
- Bentley, J. L. 194, 226, 306
- bloco 52-55, 59, 194
- Boyer, R. 305
- busca
  - binária 26, 96
  - c/ chaves de comprimento variável 123, 126
  - digital 259-275, 278
  - em árvore B 163, 169-170
  - em árvore B<sup>+</sup> 174
  - em árvore binária de busca 92-95, 99-106
  - em árvore binária de partilha 107-119
  - em árvore de difusão 214-223, 225-226
  - em árvore Patrícia 269-270, 274
  - em conjuntos 205-210
  - em lista circular encadeada 44
  - em lista duplamente encadeada 45
  - em lista encadeada 38
  - linear 22-25, 55-56, 227-258
- cadeia 277-306
- caminho 66
- campo 3
- caractere 277-291
- casamento de cadeias 277-291, 301-303, 305
- chamada 4
- chamada
  - externa 4
  - recursiva 4
- chave 21
- chave de partilha 108
- chave real 108
- Chen, G.-H. 126
- cisão 165-167, 174
- classificadora de cartões 43
- Cleary, J. G. 306
- codificação 267, 277, 294-306
- código de prefixo 294-306
- Coffman, E. G. 275
- colisão 230, 236-257
- colisão secundária 240-243
- Comer, D. 126, 174
- compactação
  - de caminhos 210-213, 224
  - de dados 292-306
- compartimento 228-255
- complexidade 7-14
- complexidade
  - amortizada 196-199
  - de caso médio 9-14
  - de espaço 9
  - de melhor caso 9-14
  - de pior caso 9-14
- compressão de caminhos 211, 224
- comprimento
  - de caminho externo 98, 122, 171

- de caminho externo ponderado
  - 100, 121, 296
- de caminho interno 96, 121
- de caminho interno ponderado
  - 100, 121
- de um caminho 66
- concatenação 166-167, 174
- conjuntos 205-214, 224
- contador de freqüência 200-201, 204, 223
- contração 258
- Cook, C. R. 258
- Cormen, T. H. 17
- custo 100-106, 109-119, 121, 295-301
- deque 20, 56, 59
- descendente 66
- descendente próprio 66
- diagrama
  - de barras 63, 85-86
  - de inclusão 62, 86
- difusão de nós 215-222
- dispersão
  - dupla 248-250, 257
  - linear 250-255
- divisão de caminhos 211-213, 224
- encadeamento
  - exterior 236-239, 251, 255
  - interior 239-243, 252, 256
- endereçamento aberto 243-250, 252, 256
- endereço base 230-258
- entrada 161
- estruturas auto-ajustáveis 195-226
- Eve, J. 275
- expansão 250-255
- Faller, N. 305
- fator de carga 236-239, 245, 252, 256-257
- fatorial 4-5, 12, 15
- fila 30-31, 58, 88
- filho 66
- filho
  - direito 67
  - esquerdo 67
- Fischer M. J. 226
- floresta 79-83, 224
- Floyd, R. W. 194
- folha 66
- fragmentação 53
- Fredkin, E. 275
- Froidevaux, C. 17
- função 3
- função
  - de Ackerman 213, 224
  - de dispersão 230-258
  - de seqüência uniforme 244, 257
  - potencial 198-199, 202-204, 219-22
  - uniforme 231, 237-238
- Furtado, A. L. 17
- fusão de conjuntos 205-209, 213, 224
- Gabow, H. 226
- Gallager, R. G. 305
- Galler, B. 226
- Garey, M. R. 126
- Galil, Z. 305
- Gaudel, M.-C. 17
- Gilbert, E. N. 125
- Gonnet, G. H. 17, 258
- Gotlieb, L. 126
- Graham, R. L. 17
- grau de saída 66
- Greene, D. H. 17
- Guibas, L. J. 174
- Hamming, R. W. 306
- Hansen, W. J. 258
- heap 177-179, 192-193
- heap min-max 188-191, 193-194
- Hester, J. H. 126
- Hibbard, T. 125
- Hirschberg, D. S. 126, 306
- Hofri, M. 17

- Hopcroft, J. E. 17, 226  
Huang, S.-H. 126  
Huffman, D. A. 294-301, 303-306  
indução matemática 4-5  
inserção  
    em árvore AVL 134-144, 171-172  
    em árvore B 164-165, 169-170  
    em árvore B<sup>+</sup> 174  
    em árvore binária de busca 94-95,  
        225  
    em árvore digital 263-264  
    em deque 56  
    em fila 30  
    em fila c/ alocação encadeada 41  
    em lista circular encadeada 56  
    em lista de prioridades 175-179,  
        182-183  
    em lista de prioridades min-max  
        189, 194  
    em lista duplamente encadeada 46  
    em lista encadeada 39  
    em lista linear 27, 202-204  
    em lista linear ordenada 55  
    em pilha 28  
        em pilha c/ alocação encadeada 40  
intercalação de arquivos 304-305  
inversão 120, 202-203  
irmão 66  
irmão adjacente 167  
Itai, A. 126  
Karp, R. 305  
Kemp, R. 17  
Knuth, D. E. 17, 59, 90, 125, 258, 279,  
    281, 289-290, 305  
Kozen, D. C. 17  
Kriegel, H. P. 126  
Landis, E. M. 174  
Larson, P. 258  
Larmore, L. L. 306  
Leiserson, C. E. 17  
Lellewer, D. A. 306  
Lempel, A. 306  
Lewis, T. G. 258  
lista  
    circular 43-44  
    circular duplamente encadeada 45  
    circular encadeada 43-44, 241-243  
    de espaço disponível 35-36, 38  
    de prioridades 176-194, 297  
    de prioridades min-max 186-191,  
        193-194  
    duplamente encadeada 45-47  
    encadeada 37-57, 236-243, 252-255,  
        273  
    linear 19, 21, 55-56, 176-177  
    linear auto-ajustável 199-204  
    ordenada 21, 55-57, 173  
Liu, L. T. 126  
Luhn, H. P. 258  
Mahmoud, H. M. 125  
matriz 3, 8-12, 57-58  
Maurer, W. D. 258  
McCreight, E. M. 126, 174  
McGeoch, C. C. 226  
memória 35-36, 52-55, 265  
mensagem 277  
método  
    admissível 202-204  
    analítico 7  
    da análise de dígitos 235  
    da divisão 231-232  
    da dobra 232-234  
    da melhor escolha 59  
    da multiplicação 234  
    da primeira escolha 53, 59  
Moore, E. F. 125  
Moore, S. 305  
Morris, J. 279, 281, 289-290, 305  
Morrison, D. R. 275  
mover para frente 200-204, 223-224

- Munro, J. 226  
 nível 66, 78, 88  
 nível  
     máximo 186-191, 193  
     mínimo 186-191, 193  
 nó 19  
 nó  
     cabeça 37, 56, 82, 206  
     equilibrado 145-160  
     externo 97-99, 123, 126, 144-160  
     interior 66  
     interno 97-99, 123, 128  
     regulado 130, 134-144  
 notação  
      $O$  10-14  
      $\Omega$  13-14  
      $\Theta$  12  
     polonesa 32-33, 57, 87  
 operação dominante 8  
 ordem 160  
 ordem parcial 47-48  
 ordenação  
     alfabética 260-261  
     lexicográfica 273- 274  
     por distribuição 41-43  
     por heap 185-187  
     topológica 48-51, 57  
 overflow 27, 36  
 página 160-171, 174  
 pai 66  
 palavra 52  
 palíndromo 57  
 Pascal 2  
 passo 8  
 Patshnik, O. 17  
 percurso  
     em altura 78  
     em nível 78, 88-89  
     em ordem simétrica 76-77, 87-89  
     em pós-ordem 77, 87-89  
     em pré-ordem 75-76, 79, 87-89  
 Perl, Y. 126  
 permutação  
     admissível 58  
     semelhante 120  
 pilha 28-29, 40, 58, 87, 197-199  
 piso 4  
 ponteiro 3  
 posto 144-152, 219-221  
 Pratt, V. 279, 281, 189-290, 305  
 prefixo 260-267, 270-273, 278, 281-288  
 princípio da monotonicidade 104, 123,  
     126  
 procedimento 3  
 procedimento recursivo 4-7, 11-12, 15  
 programação dinâmica 100-106, 110-  
     119  
 Pruesse, G. 59  
 Rabin, M. 305  
 raiz 62-63  
 recuperação de informação 275  
 redistribuição 166-170, 174  
 registro 3  
 Reingold, E. M. 258  
 remoção  
     em árvore AVL 142-144, 171-172  
     em árvore B 166-170  
     em árvore B<sup>+</sup> 174  
     em árvore binária de busca 121, 225  
     em árvore Patrícia 274  
     em árvore rubronegra 160, 173  
     em deque 56  
     em fila 30  
     em fila c/ alocação encadeada 41  
     em lista circular encadeada 56  
     em lista de prioridades 176-179, 183  
     em lista de prioridades min-max  
         190, 194  
     em lista duplamente encadeada 46-  
         47

- em lista encadeada 39
- em lista linear 26-27
- em lista linear ordenada 55
- em pilha 28, 56
- em pilha c/ alocação encadeada 40
- representação de árvores
  - em computador 72-74
  - gráfica 61-64
  - hierárquica 63, 85
  - por parênteses aninhados 63, 86
- Rivest, R. L. 17
- rotação 134-144, 154-160, 171-173, 215-221, 225
- rótulo 63-65
- Ruskey, F. 59
- Sack, J.-R. 194
- Santoro, N. 194
- Santos, C. S. 17
- Schwartz, E. S. 306
- Sedgewick, R. 174
- Seiferas, J. 305
- separação de caminhos 211, 224
- sequência
  - aninhada 63
  - de Fibonacci 16-17, 133, 171
  - de tentativas 243-250
- Sheil, B. A. 126
- sinônimos 230, 236-255
- Sleator, D. D. 226, 306
- Soria, M. 17
- Strothte, T. 194
- subárvore 62-65
- subárvore
  - direita 67-69
  - esquerda 67-69
  - interna 151-152
  - parcial 61
  - vazia 72, 86
- subcadeia 278-290
- Szwarcfiter, J. L. 59, 126
- tabela 19
- tabela
  - de dispersão 227-258
  - de dispersão dinâmica 250-255
- Tarjan, R. E. 174, 226, 306
- tempo
  - amortizado 196-199
  - de execução 7
- tentativa
  - linear 245-248, 256-257
  - quadrática 247-248, 257
- Terada, R. 17
- teto 4
- tio 66
- tipos abstratos de dados 1
- Torre de Hanói 5, 12, 16
- transposição 200, 204, 223
- tratamento de colisões 230, 236-250
- underflow 27
- Ullman, J. D. 17, 226
- Vaishnavi, V. K. 126
- variável simples 3
- Veloso, P. A. 17
- vértice 62
- vetor 3
- visão
  - do banqueiro 196-198
  - do físico 196-199
- visita 74-79, 86
- Yao, A. C. 305
- Wang, Y.-L. 126
- Wei, V. K. 306
- Williams, J. W. J. 194
- Wilson, L. B. 126
- Wirth, N. 174
- Witten, I. H. 306
- Wong, C. K. 126
- Wood, D. 126
- Ziv, J. 306
- Ziviani, N. 17, 275

Serviços de impressão e acabamento  
executados, a partir de filmes fornecidos,  
nas oficinas gráficas da EDITORA SANTUÁRIO  
Fone: (0XX12) 565-2140 - Fax (0XX12) 565-2141  
<http://www.redemptor.com.br> - Aparecida-SP

# ESTRUTURAS DE DADOS E SEUS ALGORITMOS

*Jayme Luiz Szwarcfiter  
Lilian Markenzon*

Estruturas de dados e seus algoritmos são temas fundamentais em computação, utilizados em praticamente todas as suas áreas. Este livro aborda, de forma aprofundada, as estruturas de dados mais difundidas atualmente.

A principal preocupação dos autores foi destacar os conceitos básicos referentes a cada estrutura, bem como apresentar resultados recentes na análise e desenvolvimento de algoritmos para essas estruturas. Todos os capítulos contêm notas bibliográficas e numerosos exercícios.

O livro é dirigido a estudantes de graduação e pós-graduação, podendo também servir de referência para o profissional de programação e análise de sistemas.

Os autores, Jayme Luiz Szwarcfiter e Lilian Markenzon, são doutores em Ciência da Computação e professores da Universidade Federal do Rio de Janeiro, com experiência de mais de vinte anos de ensino e pesquisa na área.

MAIS UM LANÇAMENTO DA



ISBN 85-216-1014-9



9 788521 610144