Matematika G2 Első Zárthelyi Konzultáció

Sándor Tibor

Mechatronika szakosztály

2023. április 4.

A konzultáció felépítése

1. Vektorterek
2. Mátrixok
3. Lineáris egyenletrendszerek
4. Lineáris leképezések

Vektorterek

Definíció

Legyen V nem üreshalmaz, és $+;\lambda$ két művelet, valamint T test. $(V;+;\lambda)$ a T test feletti vektortér, ha az alábbiak teljesülnek:

- $(V;+)$ Abel csoport:
  - asszociatív: $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,
  - kommutatív: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,
  - létezik zérus elem: $\exists\boldsymbol{0}\in V$, melyre $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$,
  - létezik inverz: $\forall\boldsymbol{a}$-re $\exists-\boldsymbol{a}$, hogy $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$.
- $(V;\lambda)$-ra pedig igaz:
  - asszociatív: $(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=\alpha(\beta\boldsymbol{a})$.
  - egységelem: $1\in T$-re $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,
  - disztributivitás: $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$,
    $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$.

Vektorterek

Vektorteres feladat

#1 Döntsük el, hogy vektorteret alkotnak-e az alábbi számhármasok $\mathbb{R}^3$-ban?

a) $Q_1 = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

b) $Q_2 = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = \pi \right\}$

c) $Q_3 = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = x_2 = x_3 \right\}$

d) $Q_3 = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = (x_2)^2 \right\}$

Vektorterek

További definíció

Altér

Legyen $(V;+;\lambda)$ a T test feletti vektortér, és $\emptyset \neq L \subset V$. L-t altérnek nevezzük V-ben, ha $(L;+;\lambda)$ ugyancsak vektortér.

Generátorrendszer

Legyen $\emptyset \neq G \subset V$. Ekkor G által generált altérnek nevezzük azt a legszűkebb alteret, amely tartalmazza G-t. Ha ez az altér maga V, akkor G generátorrendszere V-nek. $(\mathcal{L}(G) = V)$

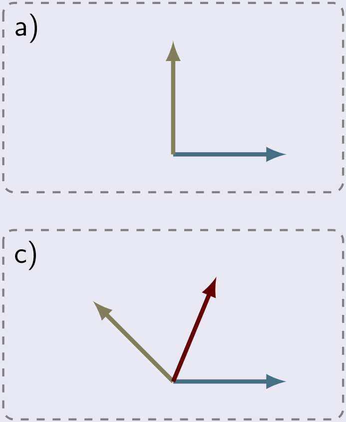
Bázis

A V vektortér egy lineárisan független generátorrendszerét a V bázisának hívjuk.

Vektorterek

Generátoros feladat

#2 Alkotnak-e generátorrendszert vagy bázist az alábbi vektorok $\mathbb{R}^2$-ban



Mátrixok

Alapfogalmak

Mátrix

Az m sorba és n oszlopba rendezett rendezett számokat mátrixoknak nevezzük.

Transzponált

Egy mátrix transzponáltja a főátlóra való tükörképe. Jele: A^{T}.

Szimmetrikus mátrix

Ha $A = A^{\mathsf{T}}$, akkor a mátrix szimmetrikus.

Antiszimmetrikus mátrix

Ha $A = -A^{\mathsf{T}}$, akkor a mátrix antiszimmetrikus.

Mátrixok

Elemi mátrixműveletek

Összeadás

Ha $\mathbf{A}; \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, akkor az összegükön a megfelelő elempárok összeadásával keletkező mátrixot értjük.

Skalárral való szorzás

Egy mátrix és egy skalár szorzata olyan mátrix, melynek minden eleme skalárszorosa az eredeti mátrix elemeinek.

Mátrixok

Elemi mátrixműveletek

Mátrix szorzás – asszociatív, disztributív, de nem kommutatív!

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}\end{array}\right\} \rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sum a_{1i}b_{i1} & \dots & \sum a_{1i}b_{ip} \\ \sum a_{2i}b_{i1} & \dots & \sum a_{2i}b_{ip} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sum a_{mi}b_{i1} & \dots & \sum a_{mi}b_{ip} \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrixok

Determináns

Kifejtési tétel – előjelszabály!

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - eg)$$

Sarrus-szabály – csak (3×3)-as mátrixoknál!

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ \underline{g} & \underline{h} & \underline{i} \end{matrix}\right| & & & \begin{matrix} a \\ d \\ g \end{matrix} & \begin{matrix} b \\ e \\ h \end{matrix} \end{array}$$

$$\det \mathbf{A} = +aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Mátrixok

Rang

Mátrix rangja

A mátrix rangjának nevezzük az oszlopvektorai közül a lineárisan függetlenek maximális számát. A mátrix rangja elemi átalakítások során nem változik.

- tetszőleges sorát vagy oszlopát egy 0-tól különböző számmal megszorozzuk,
- tetszőleges sorát vagy oszlopát felcseréljük,
- tetszőleges sorához vagy oszlopához egy másik tetszőleges sorát vagy oszlopát adjuk.

Mátrixok

Mátrixos feladatok

#3 Határozzuk meg az alábbi mátrixok determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & 3 & x \\ -a & -2 & x \\ 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

#4 Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangjait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ 10 & -10 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Mátrixok

Mátrix inverz

Reguláris / Szinguláris mátrix

Egy kvadratikus ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$) mátrixot **reguláris**nak mondunk, ha determinánsa nem 0.

Ha a kvadratikus mátrix determinánsa 0, **szinguláris** mátrixról beszélünk.

Inverz

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reguláris mátrix inverze alatt azt az $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot értjük, melyre $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{E}$ egyenlőség teljesül.

Szinguláris mátrixnak nem létezik az inverze.

Mátrixok

Inverz meghatározása

Adjugált mátrix segítségével

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Mátrixok

Inverz meghatározása

Gauss-Jordan eliminációval

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right]$$

#5 Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszerek

Definíció

Lineáris egyenletrendszer

Véges sok elsőfokú egyenletet és véges sok ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert lineáris egyenletrendszernek nevezünk.

Az m egyenletből és n ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszer általános alakja:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Lineáris egyenletrendszerek

Mátrixos alak

LER mátrixos alakja

Egy lineáris egyenletrendszer felírható $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{b}$ alakban, ahol $\mathbf{A}$ az együttható mátrix, $\boldsymbol{x}$ az ismeretlenek vektora, $\boldsymbol{b}$ pedig a konstans vektor.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

Lineáris egyenletrendszerek

Megoldhatóság

LER megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele

Az $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$, ahol az $(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$ mátrixot kibővített mátrixnak nevezzük.

A feltétel mátrixosan:

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \mathrm{rg}\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right].$$

A feltételből következik, hogy homogén lineáris egyenletrendszer $(\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0})$ mindig megoldható, hiszen az együttható mátrixból és egy nullvektorból képzett kibővített mátrix rangja mindig meg fog egyezni az együttható mátrix rangjával.

Lineáris egyenletrendszerek

Megoldási módszerek I

Mátrix inverziós módszer

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix kvadratikus és reguláris, akkor invertálható:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Cramer-szabály

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix kvadratikus és reguláris, akkor az együtthatók az alábbi módon számíthatóak:

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}},$$

ahol az $\mathbf{A}_i$ mátrixot úgy képezzük, hogy az i-edig sorába $\boldsymbol{b}$ vektort írjuk be.

Lineáris egyenletrendszerek

Megoldási módszerek II

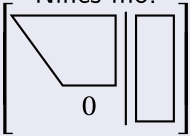
Gauss elimináció

Sorműveletekkel alakítjuk a kibővített mátrixot:

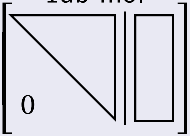
$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \square & \square & \cdots & \square & \square \\ 0 & \square & \cdots & \square & \square \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \circ & \circ \end{array}\right]$$

Megoldások száma $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetben

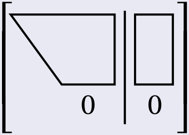
Nincs mo.



1db mo.



∞ mo.



Lineáris egyenletrendszerek

Feladatok

#6 Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 23 \\ & & x_2 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 22 \end{array}$$

#7 Milyen együtthatók esetén nem lesz megoldható az egyenletrendszer Cramer-szabállyal?

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & -2x_2 & + & 1x_3 & = & 1 \\ -4x_1 & + & bx_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -8x_1 & + & 3bx_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$$

Lineáris leképezések

Alapfogalmak I

Lineáris leképezés

Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon T test feletti vektorterek. Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ leképezés, melyet lineáris leképezésnek nevezünk, ha tetszőleges két V_1-beli vektor ($\forall \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b} \in V_1$) és T-beli skalár ($\alpha \in T$) esetén teljesülnek az alábbiak:

- $\varphi(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \varphi(\boldsymbol{a}) + \varphi(\boldsymbol{b})$ $\sim$ összegre tagonként hat,
- $\varphi(\alpha \boldsymbol{a}) = \alpha \varphi(\boldsymbol{a})$ $\sim$ skalár kiemelhető.

Lineáris leképezések

Alapfogalmak II

Magtér

Legyen $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés. A leképezés magtere:

$$\ker \varphi = \left\{ \boldsymbol{v} \,\middle|\, \boldsymbol{v} \in V_1 \;\wedge\; \varphi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \right\}.$$

Defektus

A magtér dimenzióját a leképezés defektusának nevezzük:

$$\dim \ker \varphi = \operatorname{def} \varphi.$$

Lineáris leképezések

Alapfogalmak III

Képtér

Egy $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés rangjának nevezzük a képtér dimenzióját:

$$\operatorname{rg}\varphi = \left\{ \boldsymbol{u} \,\middle|\, \boldsymbol{w} \in V_2 \;\wedge\; \boldsymbol{w} = \varphi(\boldsymbol{v});\; \boldsymbol{v} \in V_1 \right\}.$$

Rang nullitás tétele

Legyen V_1 véges dimenziós vektortér, $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezés, ekkor:

$$\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{def}\varphi = \dim V_1$$