Matematika G2 Első Zárthelyi Konzultáció

Sándor Tibor

2023. április 4.

#1 Döntsük el, hogy vektorteret alkotnak-e az alábbi számhármasok $\mathbb{R}^3$-ban?

a) $Q_1 = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

b) $Q_2 = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = \pi \right\}$

c) $Q_3 = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = x_2 = x_3 \right\}$

d) $Q_3 = \left\{ (x_1; x_2; x_3) \,\middle|\, x_1 = (x_2)^2 \right\}$

---

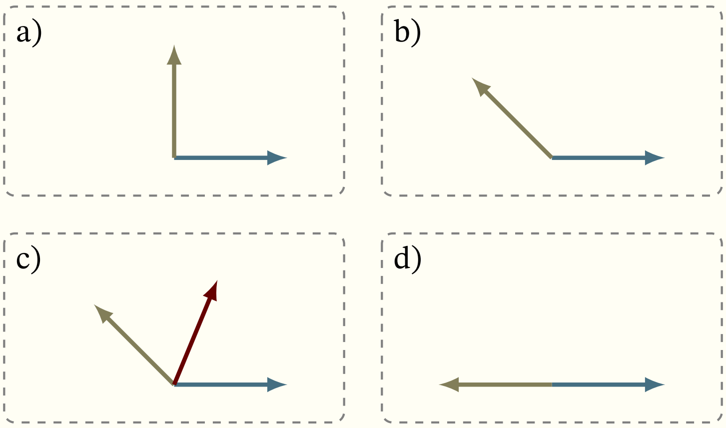
a) Igen, mert a műveletek sosem mutatnak ki a vektortérből, hiszen ha $\alpha(x_{11} + x_{12}) = 0$, akkor $\alpha x_{11} + \alpha x_{12} = 0$.

b) Nem, hiszen $\pi + \pi \neq \pi$.

c) Igen, hiszen a műveletek sosem mutatnak ki a vektortérből.

d) Nem, hiszen $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$.

#2 Alkotnak-e generátorrendszert vagy bázist az alábbi vektorok $\mathbb{R}^2$-ban



a) Bázist és generátorrendszert is alkotnak.

b) Bázist és generátorrendszert is alkotnak.

c) Csak generátorrendszert alkotnak, hiszen nem lineárisan függetlenek.

d) Sem bázist, sem generátorrendszert nem alkotnak.

#3 Határozzuk meg az alábbi mátrixok determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & 3 & x \\ -a & -2 & x \\ 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az **A** mátrix determinánsát úgy, a kifejtési tétel segítségével. Mivel a második sor csak 1 nemzérus elemet tartalmaz, ezért innen fogunk kiindulni:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 8) = -10.$$

A **B** mátrix esetében vegyük észre, hogy a harmadik sor elemei pont az előző két sor megfelelő elemeinek összegei. Ebből következik, hogy a mátrix rangja nem maximális, vagyis $\det \mathbf{B} = 0$.

#4 Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangjait!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ 10 & -10 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Először határozzuk meg az **A** mátrix rangját!

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \mathbf{A} &= \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} (+S_1 - S_2) \\ &= \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-3S_1) \\ &= \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Most pedig határozzuk meg **B** mátrix rangját!

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rg}\mathbf{B} &= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ 10 & -10 & 5 & 2 \end{bmatrix} (-S_1 - 2S_2) \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 4 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (-2S_1) \\
&= \operatorname{rg}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

#5 Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét!

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}
$$

Határozzuk meg **A** inverzét mindkét tanult módszer segítségével:

- Definíció szerint:
  - A mátrix determinánsa:

$$
\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1.
$$

  - A mátrix transzponáltja:

$$
\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.
$$

  - A mátrix adjugáltja:

$$
\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.
$$

  - Az inverz ezek alapján:

$$
\mathbf{A}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{A}}{\det\mathbf{A}} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.
$$

- Gauss-Jordan eliminációval:

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] (/2)
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] (-3S_1)
$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right] (-3S_2)
$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l}\\(\cdot 2)\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

Határozzuk meg **B** inverzét mindkét tanult módszer segítségével:

- Definíció alapján:
  - A mátrix determinánsát már korábban meghatároztuk:

$$\det \mathbf{B} = -10.$$

  - A mátrix transzponáltja:

$$\mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 8 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

  - A mátrix adjugáltja:

$$\operatorname{adj} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -8 \\ 0 & -10 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

  - Az inverz ezek alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{B}}{\det \mathbf{B}} &= \frac{1}{-10} \begin{bmatrix} 6 & 8 & -8 \\ 0 & -10 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6/10 & -8/10 & 8/10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/10 & -4/10 & -1/10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & -1/10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Gauss-Jordan eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\(-2S_1)\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l}(-4S_2)\\ \\(+4S_2)\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (/(-10)) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 8 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/10 & -4/10 & -1/10 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-8S_3) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6/10 & -8/10 & 8/10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/10 & -4/10 & -1/10 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/5 & -4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & -1/10 \end{array}\right]$$

#6 Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & = & 23 \\ & & x_2 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 22 \end{array}$$

Oldjuk meg a feladatot mátrix inverziós módszerrel! Írjuk fel az együttható mátrixot, az ismeretlenek vektorát és a konstans vektort:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 23 \\ 1 \\ 22 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét már korábban meghatároztuk:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & -1/10 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása tehát:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -3/5 & -4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & -1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 23 \\ 1 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \cdot 23 - 4/5 \cdot 1 + 4/5 \cdot 22 \\ 0 \cdot 23 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 22 \\ 1/5 \cdot 23 - 2/5 \cdot 1 - 1/10 \cdot 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Tehát az egyes változók értékei: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, és $x_3 = 2$.

Oldjuk meg Gauss-eliminációval is az egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 22 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (-2S_1) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & -24 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-4S_2) \\ \\ (+4S_2) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -20 \end{array}\right] (/(-10))$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] (-8S_3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

#7 Milyen együtthatók esetén nem lesz megoldható az egyenletrendszer Cramer-szabállyal?

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & -2x_2 & + & 1x_3 & = & 1 \\ -4x_1 & + & bx_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -8x_1 & + & 3bx_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$$

A Cramer-szabály akkor alkalmazható, ha az együttható mátrix reguláris. Írjuk fel a mátrixot, majd vizsgáljuk meg, hogy milyen együtthatók esetén lesz szinguláris, hiszen ilyen esetekben nem használható a Cramer-szabály:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & -2 & 1 \\ -4 & b & 2 \\ -8 & 3b & 4 \end{bmatrix}.$$

Az mátrix az alábbi esetekben lesz szinguláris:

- ha az első és a harmadik oszlop egymás skalárszorosa, vagyis ha $a = -2$,
- ha a második és a harmadik sor egymás skalárszorosa, vagyis ha $b = 0$.

Tehát a Cramer-szabályt akkor nem tudjuk alkalmazni, ha $a = 2$, ha vagy $b = 0$.

#8 Oldjuk meg az alábbi mátrix-egyenleteket!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

1. $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$
2. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$
3. $2(\mathbf{A} + \mathbf{X}) = 3(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{X})$
4. $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^6$

---

1. $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$

   Rendezzük $\mathbf{X}$-re az egyenletet, vagyis szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $\mathbf{A}$ inverzével. Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

   $$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét már korábban meghatároztuk. Az egyenletbe behelyettesítve:

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-6 & -3+4 \\ 15-12 & -9+8 \\ 30-9 & -18+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 21 & -12 \end{bmatrix}.$$

2. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ Ez az egyenlet nem megoldható.

3. $2(\mathbf{A} + \mathbf{X}) = 3(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{X})$

4. $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^6$

#9 Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait! A sajátvektorok hosszai legyenek egységnyiek, valamint az első koordinátájuk legyen pozitív!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeinek meghatározásához írjuk fel a karakterisztikus egyenletet:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{E}) = 0.$$

Számítsuk ki ezen determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 3 \cdot 6 = 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 18 = \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda - 8)(\lambda + 1) = 0.$$

Vagyis a sajátértékek: $\lambda_1 = 8$ és $\lambda_2 = -1$.

A sajátvektorokat az alábbi egyenlet segítségével kereshetjük:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbb{E})\boldsymbol{v}_i = 0.$$

A $\lambda_1 = 8$-hoz tartozó sajátvektor:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{E} = \begin{bmatrix} 2-8 & 3 \\ 6 & 5-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} -6 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array}\right] \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|c} -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ezek alapján a koordináták közötti viszony:

$$-6v_{11} + 3v_{12} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{12} = 2v_{11}.$$

A sajátvektor paraméteresen, majd egységhosszúra normálva:

$$\boldsymbol{v}_1 = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

A $\lambda_2 = -1$-hoz tartozó sajátvektor:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbb{E} = \begin{bmatrix} 2+1 & 3 \\ 6 & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{array}\right] \quad \sim \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ezek alapján a koordináták közötti viszony:

$$v_{21} + v_{22} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{22} = -v_{21}.$$

A sajátvektor paraméteresen, majd egységhosszúra normálva:

$$\boldsymbol{v}_2 = t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A **B** mátrixról ránézésre megállapítható, hogy sajátértékei $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Keressük meg a sajátvektorait:

$$\mathbf{B} - \lambda_{12} \mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Látható, hogy ennek a lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. A sajátvektorok ennek tudatában paraméteresen:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az sajátvektorok egységnyi hosszúra normálva:

$$\hat{\boldsymbol{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$