4 Görbementi integrálok

Matematika G3 – Többváltozós analízis

Utoljára frissítve: 2023. október 15.

Ebben a fejezetben megismerkedünk a vonalmenti integrálok fogalmával, és azzal, hogy hogyan számíthatjuk ki őket.

4.1. Elméleti áttekintő

Definíció 4.1. [Reguláris görbe]

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nem feltétlenül korlátos intervallum. Ekkor az $\boldsymbol{r} : I \to \mathbb{R}^3$ immerziót reguláris görbének nevezzük.

Definíció 4.2. [Pályasebesség, Ívhossz]

A $v : I \to \mathbb{R}, t \mapsto ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||$ függvényt pályasebességnek hívjuk.

A pályasebesség I feletti integrálját a görbe ívhosszának nevezzük:

$$L(\boldsymbol{r}) = \int_I ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||\, \mathrm{d}t.$$

Definíció 4.3. [Irányított görbe]

Egy $\boldsymbol{r} : [a; b] \to \mathbb{R}^3$ görbe irányított, ha adott egy rendezés ($\leq$) a paraméterértékeken. Ekkor $t_1 < t_2$ esetén $\boldsymbol{r}(t_1)$ a görbe korábbi pontja, $\boldsymbol{r}(t_2)$-höz képest. Ha $\boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}(b)$, akkor a görbe zárt.

Definíció 4.4. [Skalármező görbe menti skalárértékű integrálja]

Legyen $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ leképezés, $\boldsymbol{r} : [a; b] \to \gamma \subset U, t \mapsto \boldsymbol{r}(t)$ pedig a γ görbe parametrizált egyenlete. Ekkor az φ skalármező γ görbe menti skalárértékű integrálja:

$$\int_\gamma \varphi(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}s = \int_a^b \varphi(\boldsymbol{r}(t))\, ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||\, \mathrm{d}t.$$

Definíció 4.5. [Vektormező görbe menti skalár- és vektorértékű integrálja]

Legyen $\boldsymbol{v} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező, $\boldsymbol{r} : [a; b] \to \gamma \subset U, t \mapsto \boldsymbol{r}(t)$ pedig a γ görbe parametrizált egyenlete. Ekkor az $\boldsymbol{v}$ vektormező γ görbe menti

- skalárértékű integrálja: $\displaystyle\int_\gamma < \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) ; \mathrm{d}\boldsymbol{r} >= \int_a^b < \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(t)) ; \dot{\boldsymbol{r}}(t) > \mathrm{d}t,$
- vektorértékű integrálja: $\displaystyle\int_\gamma \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(t)) \times \dot{\boldsymbol{r}}(t)\, \mathrm{d}t.$

4.2. Feladatok

#4.1. Számítsuk ki a megadott görbék ívhosszát az adott intervallumon!

a) $\boldsymbol{r}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sqrt{6}t^2/2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;2]$

b) $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}, \quad t \in [0;1]$

c) $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (e^t\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (e^t)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;2\pi]$

d) $\boldsymbol{r}(t) = (t-\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (1-\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}, \quad t \in [0;2\pi]$

---

a) $\boldsymbol{r}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sqrt{6}t^2/2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0,2]$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^2 ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \sqrt{1^2 + (\sqrt{6}t)^2 + (3t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \sqrt{1+6t^2+9t^4}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 1+3t^2\,\mathrm{d}t = \left[t+t^3\right]_0^2 = 10
\end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}, \quad t \in [0;1]$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^1 ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \cosh u\sqrt{1+\sinh^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \cosh^2 u\,\mathrm{d}u = \int_{u_1}^{u_2} \frac{1+\cosh 2u}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u}{2} + \frac{\sinh 2u}{4}\right]_{u_1}^{u_2} = \left[\frac{\operatorname{arsinh} t}{2} + \frac{t\sqrt{t^2+1}}{2}\right]_0^1 = \frac{\operatorname{arsinh} 1 + \sqrt{2}}{2} \approx 1{,}1478
\end{aligned}$$

c) $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (e^t\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (e^t)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;2\pi]$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t) + e^{2t}(\sin t + \cos t) + e^{4t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{3}e^t\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{3}e^t\right]_0^{2\pi} = \sqrt{3}(e^{2\pi}-1) \approx 925{,}7667
\end{aligned}$$

d) $\boldsymbol{r}(t) = (t-\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (1-\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}, \quad t \in [0;2\pi]$

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8
\end{aligned}$$

#4.2. Integráljuk a saklármezőket a megadott görbék mentén!

a) $f(\boldsymbol{r}) = \sqrt{1+4x^2+16yz}, \quad \boldsymbol{r}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^4)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;1]$

b) $g(\boldsymbol{r}) = 2x$, a $(3;0)$ és $(0;4)$ pontokat összekötő szakasz mentén

c) $h(\boldsymbol{r}) = x^2+y^2$, első síknegyedbeli egységköríven, óramutató járásával ellentétesen

d) $i(\boldsymbol{r}) = x^2+y^2$, $r = 2$ sugarú, origó középpontú, pozitív irányítású körön

---

a) $f(\boldsymbol{r}) = \sqrt{1+4x^2+16yz}, \quad \boldsymbol{r}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^4)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;1]$

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_0^1 f(\boldsymbol{r}(t))\,||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2+16t^6}\sqrt{1^2+(2t)^2+(4t^3)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 1+4t^2+16t^6\,\mathrm{d}t = \left[t+\frac{4}{3}t^3+\frac{16}{7}t^7\right]_0^1 = 1+\frac{4}{3}+\frac{16}{7} = \frac{97}{21}$$

b) $g(\boldsymbol{r}) = 2x$, a $(3;0)$ és $(0;4)$ pontokat összekötő szakasz mentén

A szakasz paraméteres egyenlete és annak deriváltja:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0-3\\4-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-3t\\4t\end{bmatrix}, \quad t\in[0{,}1], \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}, \quad ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)|| = 5.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_\gamma g(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_0^1 g(\boldsymbol{r}(t))\,||\boldsymbol{r}||\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2(3-3t)\cdot 5\,\mathrm{d}t = 30\left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 15.$$

c) $h(\boldsymbol{r}) = x^2+y^2$, első síknegyedbeli egységköríven, óramutató járásával ellentétesen

A görbe paraméteres egyenlete és annak deriváltja:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix}\cos t\\ sint\end{bmatrix}, \quad t\in[0,\pi/2], \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}, \quad ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)|| = 1.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_\gamma h(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi/2} h(\boldsymbol{r}(t))\,||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

d) $i(\boldsymbol{r}) = x^2+y^2$, $r = 2$ sugarú, origó középpontú, pozitív irányítású körön

A görbe paraméteres egyenlete és annak deriváltja:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix}2\cos t\\ 2sint\end{bmatrix}, \quad t\in[0,2\pi], \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{bmatrix}-2\sin t\\ 2\cos t\end{bmatrix}, \quad ||\dot{\boldsymbol{r}}(t)|| = 2.$$

Végezzük el az integrálást:

$$\int_\gamma i(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} h(\boldsymbol{r}(t))\,||\dot{\boldsymbol{r}}(t)||\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (4\cos^2 t + 4\sin^2 t)\cdot 2\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 8\,\mathrm{d}t = 16\pi.$$

#4.3. Számítsuk ki az alábbi vektormezők skalárértékű integrálját az adott görbék mentén!

a) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (y+z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x+z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x+y)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{r}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;1]$

b) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (-yz)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (xz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2+y^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (2t)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;2]$

c) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = (y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}},$ az $(1;0)$ pontból a $(0;2)$ pontba

- Egyenes szakasz mentén
- Origó középpontú ellipszis mentén

---

a) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = (y+z)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x+z)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x+y)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{r}(t) = (t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (t^2)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (t^3)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;1]$

$$\begin{aligned}\int_\gamma <\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\,;\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}> &= \int_0^1 <\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}(t))\,;\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)>\mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{bmatrix} t^2+t^3 \\ t+t^3 \\ t+t^2 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{bmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t^2+t^3+2t^2+2t^4+3t^3+3t^4)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (3t^2+4t^3+5t^4)\,\mathrm{d}t = \left[t^3+t^4+t^5\right]_0^1 = 3\end{aligned}$$

b) $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = (-yz)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (xz)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (x^2+y^2)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\sin t)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (2t)\,\hat{\boldsymbol{k}}, \quad t \in [0;2]$

$$\begin{aligned}\int_\gamma <\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,;\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}> &= \int_0^2 <\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(t))\,;\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)>\mathrm{d}t = \int_0^2 \begin{bmatrix} -2t\sin t \\ 2t\cos t \\ \cos^2 t+\sin^2 t \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 2t(\sin^2 t+\cos^2 t)+2(\cos^2 t+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 2t+2\,\mathrm{d}t = \left[t^2+2t\right]_0^2 = 8\end{aligned}$$

c) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = (y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (x)\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

i) Az egyenes szakasz mentén:

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0-1 \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 2t \end{bmatrix}, \quad t \in [0;1], \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 2t \\ 1-t \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 (-2t+2-2t)\mathrm{d}t = \int_0^1 2-4t\,\mathrm{d}t = \left[2t-2t^2\right]_0^1 = 0$$

i) Az ellipszis mentén:

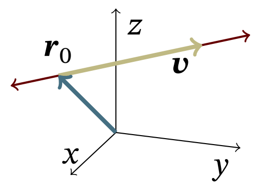
$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0;\pi/2], \quad \dot{\boldsymbol{r}}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix}$$

$$\int_0^{\pi/2} \begin{bmatrix} 2\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}^\mathsf{T} \begin{bmatrix} -\sin t \\ 2\cos t \end{bmatrix} \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2t\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi/2} = 0$$

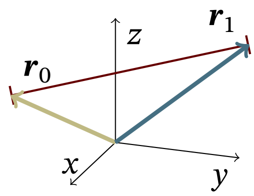
4.3. Segédlet

4.3.1. Görbék paraméterezése

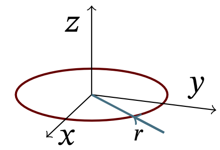
- **Egyenes:** $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{v}$ $\quad t \in \mathbb{R}$



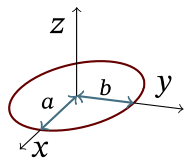
- **Szakasz:** $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_0 + t(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)$ $\quad t \in [0;1]$



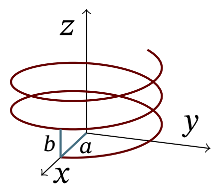
- **Körvonal:** $\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad t \in [0;2\pi]$



- **Ellipszis:** $\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad t \in [0;2\pi]$

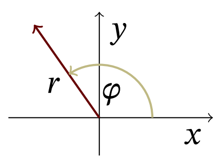


- **Spirál:** $\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{bmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

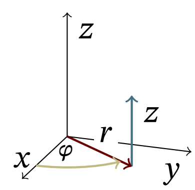


4.3.2. Koordináta-transzformációk

- **Polár:** $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\quad r \in [0;R]$, $\varphi \in [0;2\pi)$ $\quad \det \mathbf{J} = r$



- **Henger:** $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ $\quad r \in [0;R]$, $\varphi \in [0;2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$ $\quad \det \mathbf{J} = r$



- **Gömb:** $x = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $y = r\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = r\cos\varphi$ $\quad r \in [0;R]$, $\varphi \in [0;\pi]$, $\vartheta \in [0;2\pi]$ $\quad \det \mathbf{J} = r^2\sin\varphi$