Számításelmélet
4. gyakorlat

Cél: Predikátum logika nyelvének megismerése. Mondatok formalizálása.

Fogalmak: univerzum (alaphalmaz, individuum halmaz), individuum konstansok, - változók, függvények, term, predikátum, atomi formula, kvantorok, predikátum formula, prímformula, közvetlen részformula, prímkomponens, zárt és nyílt formulák, interpretáció, változókiértékelés, formula kiértékelés, elsőrendű értéktábla, formalizálás

---

Feladat: Válasszuk ki, hogy melyik formula nyílt, illetve melyik zárt! Jelölje, hogy melyik kvantor melyik változót köti! Karikázza be a szabad változókat!

1. $\forall y \exists x (Q(x,y) \rightarrow \exists x \forall y \exists z \forall v(R(x,y,z,v) \wedge \neg \forall x Q(x,y)))$ — **zárt** / nyílt
2. $\exists x \forall y Q(x,y) \rightarrow \exists x \neg \exists z \forall v R(x,y,z,v)$ — zárt / **nyílt**
3. $\neg \exists z \forall y Q(x,y) \rightarrow \exists x(\forall y \exists z \forall v R(x,y,z,v) \wedge P(x))$ — zárt / **nyílt**
4. $\exists x \forall y \neg (Q(x,y) \rightarrow \exists x \neg \exists z \forall v R(x,y,z,v))$ — **zárt** / nyílt
5. $\neg \exists x \forall y Q(x,y) \rightarrow \exists x \exists z(\forall v R(x,y,z,v) \wedge P(v))$ — zárt / **nyílt**

Feladat: Adott az alábbi formula egy L(P;f,a) formalizált nyelven, melynek (2;2,0) a típusa(szignatúrája).

$$\exists x \forall y(\neg P(y,x) \vee P(f(x,y),a))$$

a)Hány lehetséges interpretációja lehet ennek a nyelvnek az **{1,2} individuum** halmazon? (512)

b)Az alábbi lehetséges interpretációban számítsuk ki a formula értékét!
P : < (kisebb reláció) , f : minimum függvény, a = 1

$$\exists x \forall y((y \geq x) \vee (\min(x,y)<1))$$

x=1 estén $\forall y(y \geq 1)$ igaz, így ebben az interpretációban a formula igaz.

Feladat: $L(P_1,P_2,P_3;f,a)$ egy elsőrendű nyelv. A típusa (2,1,2;1,0). Egy interpretációja pedig a következő:

D = {1,2} az alaphalmaz;
P_1 predikátumnak az *egyenlőség*,
P_2 predikátumnak a következő definíció:
$P_2(1) = h$ és $P_2(2) = i$
P_3 predikátum pedig a < reláció;
az *f* függvény legyen az *identitás* függvény, az *a* konstans legyen 1.

Írjuk fel az alábbi formulákat a fenti interpretációban, és értékeljük ki őket szabad változóik összes lehetséges behelyettesítésével. A kiértékeléseket táblázatba is foglalhatjuk.

a) $P_2(f(f(x))$

x	$P_2(f(f(x))$
1	$P_2(f(f(1)) = P_2(1)$, ami hamis
2	$P_2(f(f(2)) = P_2(2)$, ami igaz

b) $P_1(x,a) \rightarrow P_3(f(x),y) \wedge P_2(a)$ (gyakorlás)

c) $\forall x P_2(x) \rightarrow P_3(a,y)$

y	$\forall x P_2(x) \rightarrow P_3(a,y)$
1	$\forall x P_2(x) \rightarrow 1<1$, ami igaz
2	$\forall x P_2(x) \rightarrow 1< 2$, ami igaz

Elsőrendű logikai törvények:

(a) ha x nem szabad változója A-nak
$\forall xA \sim A$ és $\exists xA \sim A$,

(b) $\forall x \forall yA \sim \forall y \forall xA$ és $\exists x \exists yA \sim \exists y \exists xA$,

(c) $\neg \exists xA \sim \forall x \neg A$ és $\neg \forall xA \sim \exists x \neg A$,

(d) ha x nem szabad változója A-nak
$A \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B)$ és $A \wedge \exists xB \sim \exists x(A \wedge B)$,
$A \vee \forall xB \sim \forall x(A \vee B)$ és $A \wedge \exists xB \sim \exists x(A \vee B)$,
$A \rightarrow \forall xB \sim \forall x(A \rightarrow B)$ és $A \rightarrow \exists xB \sim \exists x(A \rightarrow B)$,
$\forall xB \rightarrow A \sim \exists x(B \rightarrow A)$ és $\exists xB \rightarrow A \sim \forall x(B \rightarrow A)$,

(e) $\forall xA \wedge \forall xB \sim \forall x(A \wedge B)$ és $\exists xA \vee \exists xB \sim \exists x(A \vee B)$.

Feladat: Okoskodással lássuk be, hogy a bal oldalon felsorolt formulák érvényesek, míg jobb oldali párjaik pedig nem érvényesek!

érvényes formula	nem érvényes formula
a) $\forall x(P(x) \rightarrow P(x))$	$\forall x(P(x) \rightarrow P(a))$
b) $\forall xP(x) \rightarrow P(a)$	$P(a) \rightarrow \forall xP(x)$
c) $P(a) \rightarrow \exists xP(x)$	$\exists xP(x) \rightarrow P(a)$
d) $\forall xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$	$\exists xP(x) \rightarrow \forall xP(x)$
e) $\exists y \forall xR(x,y) \rightarrow \forall x \exists yR(x,y)$	$\forall x \exists yR(x,y) \rightarrow \exists y \forall xR(x,y)$

Formalizálás

Feladat: Formalizálja predikátum kalkulusban az alábbi szöveget!

Minden egyetemista becsületes.
János nem becsületes.
Tehát János nem egyetemista.

Alaphalmaz: emberek
Predikátumok:
B(x) : igaz, ha x becsületes ember.
E(x): igaz, ha x egyetemista.
Konstans: Jánost jelöljük a-val.
Feltételek formalizálása:
F_1: $\forall x\ (E(x) \rightarrow B(x))$
F_2: $\neg B(a)$
Állítás: G: $\neg E(a)$

Bizonyítás okoskodással:
A1-ből következik, hogy $E(a)\rightarrow B(a)$. Ha az utófeltétel hamis és az implikáció igaz, akkor az előfeltételnek hamisnak kell lenni, azaz $\neg E(a)$ igaz.

Rezolúcióval:
$F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G$ ***Skolem normálformájá***hoz tartozó klózok segítségével.
A feldat Skolem normálformája:

$$\forall x\ ((E(x) \rightarrow B(x)) \wedge \neg B(a) \wedge E(a))$$

Klózhalmaz = $\{ \neg E(x) \vee B(x), \neg B(a), E(a) \}$
Levezetés:

1. $\neg E(x) \vee B(x)$
2. $E(a)$
3. $B(a)$ rez(1,2) ***x/a helyettesítéssel***
4. $\neg B(a)$
5. □ rez(3,4)

Alaprezolúció
Előállítjuk az első rendű klózok magjainak összes alappéldányát és az alapklózok halmazán *ítéletlogikai* rezolúcióval levezetjük az üres klózt.

Példa: Lássuk be, hogy a következő elsőrendű formulahalmaz kielégíthetetlen!

$$\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x,f(y))), \quad \forall z \forall v (\neg P(g(z)) \vee \neg P(v)), \quad \forall u Q(g(u),u)$$

Az elsőrendű klózhalmaz formulák magja. Az alapkózók a konkrét behelyettesített példányok.
Herbrand univerzum: a, f(a), g(a), f(f(a)), f(g(a)), g(f(a)), g(g(a)), …
Néhány alapklóz:

x	y	z	v	u	$P(x)\vee\neg Q(x,f(y))$	$\neg P(g(z))\vee\neg P(v)$	$Q(g(u),u)$
a	a	a	a	a	$P(a)\vee\neg Q(a,f(a))$	$\neg P(g(a))\vee\neg P(a)$	$Q(g(a),a)$
g(a)	a	a	g(a)	a	$P(g(a))\vee\neg Q(g(a),f(a))$	$\neg P(g(a)) \vee\neg P(g(a))$ */= $\neg P(g(a))$ /*	$Q(g(a),a)$
g(a)	a	a	g(a)	f(a)	$P(g(a))\vee\neg Q(g(a),f(a))$	$\neg P(g(a))$	$Q(g(f(a)), f(a))$
g(f(a))	a	f(a)	g(f(a))	f(a)	$\mathbf{P(g(f(a)))\vee\neg Q(g(f(a)),f(a))}$	$\mathbf{\neg P(g(f(a)))}$	$\mathbf{Q(g(f(a)), f(a))}$

alaprezolúció

1. $\underline{Q(g(f(a)), f(a))}$	u/f(a)
2. $P(g(f(a)))\vee\underline{\neg Q(g(f(a)),f(a))}$	x/g(f(a)), y/a
3. $P(g(f(a)))$	**rez(1,2)**
4. $\neg P(g(f(a)))$	z/f(a), v/g(f(a))
5. □	**rez(3,4)**