ACULTATEA DE ȘTIINȚE ECONOMICE ȘI GESTIUNEA AFACERILOR

Rezerva Matematică

Purcel Tiberiu Claudiu

IE IDFR – AN1 Grupa1

Rezerva Matematică poate fii definită ca fiind ***diferența dintre valoarea actuală a obligațiilor financiare ale obligațiilor asiguratorului si valoarea actuală a obligațiilor financiare ale asiguratului de onorat la un moment dat, servind la acoperirea obligațiilor viitoare ale asiguratorului***.

O societate de asigurare pentru a-și putea derula în bune condiții activitatea trebuie sa cunoască în permanență mărimea rezervei matematice, iar suma respectivă să se fructifice cu dobândă compusă, deoarece venitul aferent acesteia a fost luat în calculul primei nete. Această necesitate rezidă în faptul că, la asigurarea de viață, frecvența riscului crește de la un an la altul, ceea ce are drept urmare perceperea unei prime de asigurare neuniforme, crescătoare de la asigurat. O asemenea soluție este însă inconvenientă pentru asigurat, care preferă să plătească o primă anuală constantă pe toată perioada asigurării.

Mărimea rezervei matematice se poate determina cu ajutorul mai multor metode, și anume:
1) metoda prospectivă;
2) metoda retrospectivă;
3) metoda de recurență;
4) metoda valorilor auxiliare;

Metode de calcul

Instituţia de asigurare constituie un fond bănesc, numit rezervă matematică, care va fi utilizat pentru efectuarea plăţilor către persoanele asigurate. Pentru a evalua valoarea acestui fond se fixează un moment de evaluare şi se stabileşte cât reprezintă rezerva aferentă fiecărui asigurat la momentul respectiv. Rezerva totală se obţine prin însumarea tuturor acestor rezerve actualizate la momentul de evaluare stabilit. În principal, există două metode fundamentale de determinare a rezervei matematice: metoda prospectivă şi cea retrospectivă. În vederea prezentării celor două metode vom introduce următoarele notaţii relaţii:

t − momentul de evaluare, la care se calculează rezerva matematică,
D'_0 − datoria instituţiei de asigurare, actualizată la momentul zero,
D''_0 − datoria asiguratului, actualizată la momentul zero,
D_t − datoria instituţiei de asigurare, actualizată la momentul t,
D''_t − datoria asiguratului, actualizată la momentul t,
R_t − cuantumul rezervei matematice la momentul t,
${}_{/t}D'_0$ − valoarea actuală a obligaţiilor asiguratorului până la momentul t, evaluată la momentul zero,
${}_{/t}D''_0$− valoarea actuală a obligaţiilor asiguratului până la momentul t, evaluată la momentul zero,
${}_{t/}D'_0$ − valoarea actuală a obligaţiilor asiguratorului ulterioare momentului t, evaluată la momentul zero,
${}_{t/}D''_0$ − valoarea actuală a obligaţiilor asiguratului ulterioare momentului t, evaluată la momentul zero.

Rezerva matematică calculată prin metoda prospectivă este dată de:

$$R_t = D'_t - D''_t,$$

iar prin cea retrospectivă:

$$R_t = \frac{{}_{/t}D_0'' - {}_{/t}D_0'}{{}_tE_0}$$

Indiferent de metoda folosită, rezerva matematică are aceeaşi valoare. Pe de o parte, obligaţiile anterioare şi posterioare datei de evaluare a rezervei actualizate, în total dau valoarea actuală a întregii obligaţii:

$$\begin{gathered} {}_{/t}D_0' + {}_{t/}D_0' = D_0', \\ {}_{/t}D_0'' + {}_{t/}D_0'' = D_0'', \end{gathered}$$

iar pe de altă parte, obligaţiile actualizate ale celor două părţi sunt egale:

$$D_0' = D_0''$$

Deoarece

$${}_{t/}D_0' = D_t' \cdot {}_tE_0 \text{ şi } {}_{t/}D_0'' = D_t'' \cdot {}_tE_0,$$

rezultă:

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{{}_{/t}D_0'' - {}_{/t}D_0'}{{}_tE_0} = \frac{\left(D_0'' - {}_{t/}D_0''\right) - \left(D_0' - {}_{t/}D_0'\right)}{{}_tE_0} \\ &= \frac{{}_{t/}D_0' - {}_{t/}D_0''}{{}_tE_0} = \frac{D_t' \cdot {}_tE_0 - D_t'' \cdot {}_tE_0}{{}_tE_0} = D_t' - D_t'' \end{aligned}$$

Exemplul 1. Să se calculeze rezerva matematică în cazul unei asigurări de viaţă în următoarele condiţii:

- asiguratul are vârsta de x ani,

- plata primelor P se va face anual anticipat, timp de n ani, din momentul încheierii contractului de asigurare,

- suma asigurată de S u.m. se va încasa peste n ani, de către asigurat, dacă acesta va fi în viaţă atunci.

Rezolvare.

Fiind vorba de o asigurare de viaţă în condiţiile din enunţ, avem:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = S \cdot {}_n E_x$$

$$\Rightarrow P = S \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

```
————–+—————–+——————–+—————>
     0          t           n     moment de timp (ani)
     x         x+t         x+n    vârsta asiguratului
```

Considerăm că momentul de evaluare $t \in [0, n]$.

Folosind metoda prospectivă datoriile celor două părţi evaluate la momentul t sunt:

$$D_t^{'} = S \cdot {}_{n-t} E_{x+t}, \qquad D_t^{''} = P \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} R_t &= S \cdot {}_{n-t} E_{x+t} - P \cdot {}_{/n-t} \ddot{a}_{x+t} \\ &= S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - S \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}} \\ &= S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \left(1 - \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right) = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}} \end{aligned}$$

În cazul metodei retrospective

$${}_{/t}D_0^{''} = P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t|}}, \qquad {}_{/t}D_0^{'} = 0$$

deci

$${}_{/t}D_0^{''} = R_t \cdot {}_t E_x$$

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{P \cdot {}_{/t} \ddot{a}_x}{{}_t E_x} = S \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} \cdot \frac{1}{\frac{D_{x+t}}{D_x}} = \\ &= S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}} \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Exemplul 2. Să se calculeze rezerva matematică în cazul unei asigurări de deces în următoarele condiţii:

- asiguratul are vârsta de x ani,
- plata primelor P se va face anual anticipat, pe tot timpul vieţii asiguratului, din momentul încheierii contractului de asigurare,
- suma asigurată de S u.m. se va încasa de către o persoană desemnată de către asigurat, după decesul asiguratului.

Rezolvare. In acest caz avem

$$P \cdot \ddot{a}_x = S \cdot A_x$$

Folosind numerele de comutaţie

$$P \cdot \frac{N_x}{D_x} = S \cdot \frac{M_x}{D_x}$$

deci

$$P = S \cdot \frac{M_x}{N_x}$$

Calculând apoi rezerva matematică prin metoda prospectivă vom obţine

$$R_t = S \cdot A_{x+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t} = S \cdot \left(\frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} \right) \blacklozenge$$

Exemplul 3. Să se calculeze rezerva matematică în cazul unei asigurări de pensii în următoarele condiţii:

- asiguratul are vârsta de x ani,
- plata primelor P se va face anual anticipat, timp de n ani, din momentul încheierii contractului de asigurare,
- pensia anuală de S u.m. se va încasa de către asigurat, peste n ani, pe tot parcursul vieţii sale.

Rezolvare. Prima netă anuală o vom exprima cu ajutorul relaţiei

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n|}} = S \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$\Rightarrow P = S \cdot \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Folosind metoda retrospectivă în calcularea rezervei matematice, vom avea

$$R_t = \frac{P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t|}}}{{}_tE_x} = S \cdot \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \ \blacklozenge$$