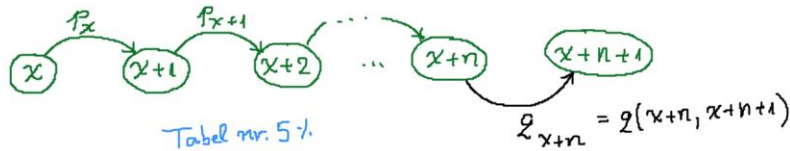


Seminar 8: Funcții biometrice

c) Arboreșcența viageră și de deces

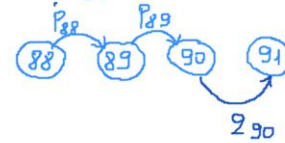
- ilustrează grafic fenomenele de viață și de deces
- este un graf orientat format din:
 - vârfuri (noduri) în care se notează vârsta persoanei
 - arce superioare pe care se trec probabilitățile de viață
 - un arc inferior pe care se află probabilitatea de deces



Tabul nr. 5-1

$$p_{89} = p(89, 90) = \frac{L_{90}}{L_{89}} = \frac{3059}{4188} = 0,7304; \quad z_{90} = z(90, 91) = 1 - p(90, 91) = 1 - \frac{L_{91}}{L_{90}} = 1 - \frac{2168}{3059} = 0,2913$$

Ex: Construiți arboreșcența viageră și de deces pentru o persoană în vârstă de 88 ani care ar putea deceda între 90 și 91 de ani.



$$p_{88} = p(88, 89) = \frac{L_{89}}{L_{88}} = \frac{4188}{5575} = 0,7512.$$

Ex 2: Construiți arboreșcența viageră și de deces pentru o persoană în vârstă de 65 de ani care ar putea deceda peste 5 ani. Procentul de actualizare este de 5%.



$$p_{65} = p(65, 66) = \frac{L_{66}}{L_{65}} = \frac{63412}{65068} = 0,9699$$

$$p_{69} = p(69, 70) = \frac{L_{70}}{L_{69}} = \frac{54051}{56508} = 0,9565$$

$$z_{70} = z(70, 71) = 1 - p(70, 71) = 1 - \frac{L_{71}}{L_{70}} = 1 - \frac{51363}{54051} = 0,04973$$

Care e prob. ca o pers. de 65 ani, să decedeze între 70 și 71 ani?



$$p(65, 70) \cdot z(70, 71) = \frac{L_{70}}{L_{65}} \cdot z_{70} = \frac{L_{66}}{L_{65}} \cdot \frac{L_{67}}{L_{66}} \cdot \frac{L_{68}}{L_{67}} \cdot \frac{L_{69}}{L_{68}} \cdot \frac{L_{70}}{L_{69}} \cdot z_{70} = p_{65} \cdot p_{66} \cdot p_{67} \cdot p_{68} \cdot p_{69} \cdot z_{70}$$

d) Tabele de mortalitate

x	p_x	q_x	L_x	d_x	e_x
vârsta pers.	prob. de viață în următorul an	prob. de decen în următorul an	Funcție de supraviețuire (nr. de pers. care sunt în viață la vârsta de x ani)	Funcția de decen	Viață medie (nr. de pers. care ar putea deceda la x ani)

$p_x + q_x = 1$

$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_x}(L_{x+1} + L_{x+2} + \dots + L_{\text{ultimul } x \text{ din tabel}})$

$d_x = q_x \cdot L_x$

$d_x = L_x - L_{x+1}$

Ex: În studiul duratei de viață a persoanelor asigurate care au depusit vârsta de 80 de ani, s-au constatat următoarele probabilități: $p_{81} = 0,9$; $p_{82} = 0,7$; $p_{83} = 0,5$; $p_{84} = 0,4$; $p_{85} = 0,2$.

Construiți un tabel de mortalitate pentru asigurați cu vârsta cuprinsă între 81 și 85 de ani, știind că la vârsta de 81 de ani se află în viață 10 000 de asigurați.

Rezolvare:

x	p_x	q_x	L_x	d_x	e_x
81	0,9	0,1	10 000	1000	2,47
82	0,7	0,3	9 000	2700	1,69
83	0,5	0,5	6 300	3150	1,2
84	0,4	0,6	3150	1890	0,9
85	0,2	0,8	1260	1008	0,5

$p_x + q_x = 1$

$L_{x+1} = L_x - d_x$

$\hookrightarrow q_x = 1 - p_x$

$e_{81} = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_{81}}(L_{82} + L_{83} + L_{84} + L_{85}) = 2,47$

$e_{82} = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_{82}}(L_{83} + L_{84} + L_{85}) = 1,69$

\vdots

$e_{85} = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_{85}}(\dots) = \frac{1}{2} = 0,5$

Whiteboard - Zoom

You are screen sharing

Stop Share

Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear Save

Ex: Completați tabelul de mortalitate:

x	L_x	d_x	q_x	e_x
0	800	80	0,1	2,23
1	720	216	0,3	1,45
2	504	343	0,68	0,86
3	161	142	0,88	0,62
4	19	19	1	0,5

$d_x = q_x \cdot L_x \Leftrightarrow L_x = \frac{d_x}{q_x} \Leftrightarrow q_x = \frac{d_x}{L_x}$
 $L_{x+1} = L_x - d_x \Leftrightarrow d_x = L_x - L_{x+1}$

$d_3 = q_3 \cdot L_3 = 0,88 \cdot 161 = 142$
 $L_1 = \frac{d_1}{q_1} = \frac{216}{0,3} = 720$
 $d_0 = L_0 - L_1 = 800 - 720 = 80$
 $q_0 = \frac{d_0}{L_0} = \frac{80}{800} = 0,1$
 $L_2 = L_1 - d_1 = 720 - 216 = 504$
 $d_2 = q_2 \cdot L_2 = 0,68 \cdot 504 = 342,72 = 343$
 $L_4 = L_3 - d_3 = 161 - 142 = 19$
 $d_4 = q_4 \cdot L_4 = 1 \cdot 19 = 19$

$e_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_0}(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) = 2,23$
 $e_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_1}(L_2 + L_3 + L_4) = 1,45$
 $e_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_2}(L_3 + L_4) = 0,86$

Windows taskbar: 4:47 PM

Whiteboard - Zoom

You are screen sharing

Stop Share

Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear Save

Ex: Completați tabelul de mortalitate:

x	L_x	d_x	q_x	e_x
0	206	21	0,10	2,39
1	185	50	0,27	1,6
2	135	78	0,58	1,01
3	57	45	0,79	0,71
4	12	12	1	0,5

$d_x = q_x \cdot L_x \Leftrightarrow q_x = \frac{d_x}{L_x}$
 $L_{x+1} = L_x - d_x \Leftrightarrow d_x = L_x - L_{x+1}$

$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_x}(L_{x+1} + L_{x+2} + \dots + L_4) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow e_x - \frac{1}{2} = \frac{L_{x+1} + L_{x+2} + \dots + L_4}{L_x} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow L_x = \frac{L_{x+1} + L_{x+2} + \dots + L_4}{e_x - \frac{1}{2}}$

$d_x = L_x - L_{x+1}$
 $d_0 = L_0 - L_1 = 206 - 185 = 21$
 $d_1 = L_1 - L_2 = 185 - 135 = 50$
 $d_2 = L_2 - L_3 = 135 - 57 = 78$
 $d_3 = L_3 - L_4 = 57 - 12 = 45$

$q_x = \frac{d_x}{L_x}$
 $q_0 = \frac{d_0}{L_0} = \frac{21}{206} = 0,10$
 $q_1 = \frac{d_1}{L_1} = \frac{50}{185} = 0,27$
 $q_2 = \frac{d_2}{L_2} = \frac{78}{135} = 0,58$
 $q_3 = \frac{d_3}{L_3} = \frac{45}{57} = 0,79$

$L_3 = \frac{L_4}{e_3 - 0,5} = \frac{12}{0,71 - 0,5} = 57,14 = 57$
 $L_2 = \frac{L_3 + L_4}{e_2 - 0,5} = \frac{57 + 12}{1,01 - 0,5} = 135$
 $L_1 = \frac{L_2 + L_3 + L_4}{e_1 - 0,5} = \frac{135 + 57 + 12}{1,6 - 0,5} = 185$
 $L_0 = \frac{L_1 + L_2 + L_3 + L_4}{e_0 - 0,5} = \frac{185 + 135 + 57 + 12}{2,39 - 0,5} = 206$

Windows taskbar: 5:04 PM