UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI

UBB FSEGA

Universitatea Babeș-Bolyai | Facultatea de Științe Economice și Gestiunea Afacerilor

CENTRUL DE FORMARE CONTINUĂ, ÎNVĂȚĂMÂNT LA DISTANȚĂ ȘI CU FRECVENȚĂ REDUSĂ

Programul de studii

Suport de curs

Matematici financiare și actuariale

Anul I Semestrul II

UNIVERSITATEA " BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE ŞTIINŢE ECONOMICE ŞI GESTIUNEA AFACERILOR
TRUNCHI COMUN ANUL I ID
SEMESTRUL II

SUPORT DE CURS

Anul I

Semestrul 2

Cluj Napoca, 2022

Cuprins

1 Informaţii generale

Date de contact ale titularilor de curs:

1. Mureşan Anton S., Cabinetul 229, Etajul II, anton.muresan@econ.ubbcluj.ro;
2. Curt Paula, Birou: Cabinetul 229, Etajul II, paula.curt@econ.ubbcluj.ro;
3. Lung Rodica Ioana, Cabinetul 230, Etajul II, rodica.lung@econ.ubbcluj.ro;
4. Roşca Alin, Cabinetul 231, Etajul II, alin.rosca@econ.ubbcluj.ro;
5. Radu Voichiţa, Cabinetul 230, Etajul II, voichita.radu@econ.ubbcluj.ro;
6. Filip Darius, Cabinetul 230, Etajul II, darius.filip@econ.ubbcluj.ro
7. Coconeţ Tiberiu, Cabinetul 231, Etajul II, tiberiu.coconet@econ.ubbcluj.ro
8. Pop Flaviu, Cabinetul 231, Etajul II, flaviu.pop@econ.ubbcluj.ro
9. Pall-Szabo Agnes Orsolya, Cabinetul 231, Etajul II, agnes.pallszabo@econ.ubbcluj.ro

Obiective

- Să familiarizeze studenţii cu tehnicile şi metodele matematice utilizate in economie.
- Formarea capacităţii de a recunoaşte, de a pune în formă matematică şi a rezolva probleme de programare liniară de transport (de repartiţie).
- Deprinderea de a lucra cu noţiunile de bază ale matematicii financiare, cum sunt operaţiunile de dobândă precum şi rambursările de credite şi împrumuturi.
- Fundamentarea unor noţiuni de matematici actuariale care să constituie pentru studenţi instrumente pentru tratarea unor probleme ce privesc diverse tipuri de plăţi viagere şi de deces precum şi asigurări de persoane.

Competenţe profesionale

- Să îşi însuşească conceptele de bază şi să-şi creeze deprinderea de a le utiliza.
- Capacitatea de a culege, analiza şi interpreta date şi informaţii referitoare la problemele economico-financiare.
- Studentul trebuie să fie capabil să aplice în practică noţiunile studiate pentru analiza unor situaţii concrete din economie, cum ar fi: programarea producţiei, transportul cu costul total minim, sisteme de împrumuturi echivalente şi rambursări de credite şi împrumuturi, respectiv principalele tipuri de asigurări de persoane.

Competenţe transversale

- Aplicarea principiilor, normelor şi valorilor eticii profesionale în cadrul propriei strategii de muncă riguroasă, eficientă şi responsabilă.

- Studentul trebuie să fie capabil să aplice în practică noţiunile studiate pentru analiza unor situaţii concrete din economie, cum ar fi de exemplu deschiderea unui cont de economii, rambursarea unui credit sau încheierea diferitelor tipuri de asigurari de persoane.

Locul de desfăşurare a cursului: online.

Programarea în orar a activităţilor (la învăţământul de zi): Săptămânal 1 oră de curs + 2 ore de seminar, conform orarului afişat la sediul facultăţii; (la învăţămâtul ID): 8 ore activităţi tutoriale

Conditionari si cunostinte prerechizite: - Cursul de Matematici aplicate in economie

CERINŢE PENTRU EXAMEN: *Cerinţele pentru examen vor fi afişate pe platforma online.*

Organizarea temelor (partilor) in cadrul cursului: Cursul are două părţi:

1. Matematici financiare
2. Matematici actuariale

Organizarea temelor s-a facut avand in vederea ordinea fireasca si gradul de dificultate sa urmeze o ordine crescatoare. Informatia relevanta referitoare la fiecare tema (parte) se gaseste in lista bibliografica ce va fi prezentata ulterior, iar accesul va fi realizat direct.

Formatul si tipul activitatilor implicate de curs: Formatul va fi unul clasic, permitand studentului de a-si gestiona singur, fara constrangeri, parcurgerea cursului. De sigur o participare la activitatile planificate va usura intelegerea tematicii cursului. Tipurile de activitati ce vor fi abordate in cadrul cursului vor fi atat cele clasice cat si proiecte de grup.

Materiale bibliografice obligatorii: Principala sursă bibliografică pe care o vom utiliza este (accesibilă la biblioteca FSEGA):

1. Colectiv, Elemente de matematici financiare şi actuariale. Teorie şi probleme, Editura Mega 2013.

Bibliografie completa 1. Mureşan A.S., Matematici aplicate in finanţe, asigurare, bănci, burse, Ed. Risoprint, Cluj-Napoca, 2000.

2. Mureşan A.S., şi colectiv, Matematici pentru economişti, vol. 1,2, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 2000.

3. Mureşan A.S., Filip D.A., Ban I.M., Hangan A., Operaţiuni financiare, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2005.

4. Roşca A., şi colectiv, Probleme de matematici financiare şi actuariale, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2011

Materiale si instrumente necesare pentru curs : Vom folosi: suport electronic de curs, materiale multiplicate, calculator, videoproiector.

Calendarul cursului: este prezentat in calendarul disciplinei

Politica de evaluare si notare: Evaluarea si notarea finala se va face prin rezolvarea de probleme, intocmirea unor teme de casa. Toate acestea se vor realiza pe parcursul semestrului. Intrarea in examenul final este conditionata de realizarea sarcinilor ce rezulta din temele de control de la sfarsitul fiecarui modul al suportului de curs. Studentii vor primi feed-back la rezultatele realizate in examenul final prin comunicare directa cu cei care solicita. In cazul cand studentul doreste sa revina la un examen de marire a notei, acest nou examen se va desfasura in aceleasi conditii, cu aceleasi cerinte, ca si examenul initial.

Elemente de deontologie academica: Pentru a evita situatiile care pun in discutie onestitatea studentilor facem de la inceput precizarea ca se interzice categoric **frauda**, iar tentativele de frauda se vor trata conform reglementarilor in vigoare elaborate la nivelul facultatii si universitatii. Este normal ca atunci cand se utilizeaza anumite date, texte, formulari, etc. luate din alte surse, sa se faca citarea, si astfel sa se asume meritele doar pentru munca si contributia proprie. Se va cere studentului sa aiba un comportament academic fata de profesori si fata de colegi.

Studentii cu dizabilitati: Nu vor avea nici o problema in a se incadra in cerintele cursului si a celorlalte activitati, sansele in pregatire si obligatiile lor fiind de aceeasi factura ca si pentru studentii fara dizabilitati.

Strategii de studiu recomandate: Recomandam studentilor sa se pregateasca mai intai din aspectele teoretice, asa incat, mai intai, din curs, sa fie studiate modulele cu teoria si exemplele ilustrative formulate, apoi sa se abordeze problemele rezolvate, iar apoi si problemele formulate spre rezolvare. Pentru tot cursul, apreciem ca fondul de timp necesar insusirii complete este de 56 de ore, din care 40 pentru suportul de curs, 8 pentru activitatile directe cu tutorii, iar 12 pentru sarcinile individuale de studiu al bibliografiei si realizarea temelor de control.

II. Suportul de curs propriu-zis Cursul va fi structurat pe module, iar dorinta este de a se obtine o prezentare gradata a notiunilor si rezultatelor.

2 MODULUL I. MATEMATICI FINANCIARE

Obiective

- Familiarizarea cu tehnicile si metodele utilizate in cadrul matematicilor financiare
- Definirea notiunilor de dobanda, anuitati, credite si imprumuturi

Concepte de baza

- Dobanda simpla, dobanda compusa
- Anuitati
- Imprumuturi-rambursari directe, indirecte

Rezultate asteptate

In urma parcurgerii acestui modul se asteapta ca studentii sa cunoasca si sa opereze cu notiunile introduse, sa fie in stare sa le aplice la problemele concrete: sisteme de imprumuturi echivalente, rambursari de credite si imprumuturi.

Sinteza

2.1 UNITATEA 1. Dobânzi

necesar: 5 ore

2.1.1 Dobânda simplă

Dobânda simplă este una dintre cele mai importante şi des folosite operaţiuni financiare. În general, dobânda este o sumă de bani pe care o plăteşte o persoană fizică sau juridică (numită DEBITOR) unei alte persoane fizice sau juridice (numită CREDITOR) pentru folosirea unei sume de bani împrumutate cu un anumit procent, pe o perioadă de timp. Altfel spus, dobânda este preţul la care se vinde sau se cumpără capitalul împrumutat pe piaţa capitalului.

Formula de bază

De obicei, operaţia de dobândă simplă se foloseşte pentru împrumuturi sau depozite pe termen scurt (mai mici de un an), când suma iniţială **s** rămâne invariabilă pe toată durata împrumutului sau depozitului şi, în final produce o dobândă plătită în totalitate la scadenţă. În continuare, vom folosi următoarele notaţii:

s = suma iniţială exprimată în unităţi monetare (u.m.)
p = procentul anual (%)
t = durata de timp exprimată în ani
z, **l** etc. = durata de timp exprimată în zile, luni etc.
D = dobânda

Definiţie. Dobânda este o funcţie $D : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, $(s,t) \longmapsto D(s,t)$, care satisface cerinţele:

- este strict crescătoare în raport cu fiecare dintre argumentele sale,
- este continuă în raport cu fiecare dintre argumentele sale. ⧫

În definiţie sunt precizate condiţiile naturale (fireşti) din punct de vedere financiar. De asemenea, dacă această funcţie este şi derivabilă, atunci vor fi îndeplinite inegalităţile:

$$\frac{\partial D}{\partial s} > 0,\ \frac{\partial D}{\partial t} > 0$$

Pentru a exprima concret dependenţa dobânzii în raport cu cele două argumente ale sale există mai multe formule, însă cel mai adesea este folosită o relaţie foarte simplă, aproape unanim acceptată.

După cum este firesc, dobânda este direct proporţională cu suma iniţială **s** şi cu durata de timp **t**. Dacă notăm cu **i** factorul de proporţionalitate, obţinem imediat

$$D(s,t) = D = i \cdot s \cdot t$$

Câteva variante ale acestei formule pentru diverse unităţi de măsură ale timpului sunt următoarele:

$$D = \frac{i \cdot s \cdot z}{360},\ D = \frac{i \cdot s \cdot l}{12}$$

care au fost obţinute din formula, având în vedere următoarele:

$$\begin{array}{ccccc} 1 \text{ an} & \cdots & 360 \text{ zile} & \cdots & 12 \text{ luni} \\ t \text{ ani} & \cdots & z \text{ zile} & \cdots & l \text{ luni} \end{array}$$

Observaţia 1. Se constată că $i = D(1,1)$, adică este dobânda produsă de o unitate monetară pe timp de un an şi de aceea se numeşte **dobândă unitară anuală**. ⧫

Observaţia 2. În aplicaţiile practice ale operaţiei de dobândă simplă, cel mai adesea în locul dobânzii unitare anuale i, se foloseşte procentul. Acesta este tot o dobândă pentru 100 u.m. pe timp de 1 an, deci $p = D(100,1)$. Altfel spus, $p = 100 \cdot i$ sau $i = p/100$. ⧫

Exemplu. O persoană fizică a depus în contul său deschis la o bancă suma de 3 000 u.m. în data de 19 februarie 2005 şi suma de 5 000 u.m. în data de 10 martie 2005. Care este dobânda pentru sumele depuse, la data de 25 septembrie 2005, dacă procentul anual este 9%.

Rezolvare. Calculăm duratele celor două plasamente (sume iniţiale):

$s_1 = 3\,000$ u.m., $z_1 = 218$ zile

$s_2 = 5\,000$ u.m., $z_2 = 199$ zile

Dobânda totală este $D = D_1 + D_2$, unde

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{s_1 \cdot i \cdot z_1}{360} = \\ &= \frac{3\,000 \cdot 0,09 \cdot 218}{360} = 163,5 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{s_2 \cdot i \cdot z_2}{360} = \\ &= \frac{5\,000 \cdot 0,09 \cdot 199}{360} = 248,75 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

deci obţinem $D = 412,25$ u.m. ⧫

Dobânzi unitare echivalente în cazul operaţiei de dobândă simplă

Să considerăm, în cele ce urmează, că un an se împarte în m subperioade, unde $m \geq 2$ este un număr natural. Astfel, pentru $m = 2$ obţinem împărţirea anului în 2 semestre, pentru $m = 4$ obţinem împărţirea anului în 4 trimestre, pentru $m = 12$ obţinem împărţirea anului în 12 luni, iar pentru $m = 360$ obţinem împărţirea anului în 360 zile (1an = 360 zile în domeniul financiar-bancar). Până acum am notat cu t durata în ani a împrumutului sau a depunerii. Notăm prin t_m aceeaşi durată de timp, exprimată cu ajutorul subperioadelor şi avem relaţia $t_m = m \cdot t$ (dacă ţinem cont de faptul că 1 an = m subperioade şi atunci t ani = $m \cdot t$ subperioade). De asemenea, notăm cu i_m dobânda unitară corespunzătoare subperioadei.

Definiţie. Dobânzile unitare i şi i_m se numesc **echivalente** dacă pentru aceeaşi sumă iniţială, pe acelaşi interval de timp, conduc la aceeaşi sumă finală (produc aceeaşi dobândă) în regim de dobândă simplă. ♦

Dobânda pentru suma iniţială s depusă pe perioada t se scrie

$$D = i \cdot s \cdot t$$

sau

$$D = i_m \cdot s \cdot t_m = i_m \cdot s \cdot m \cdot t$$

de unde se obţine relaţia de legătură între i şi i_m

$$i_m = \frac{i}{m} \ \blacklozenge$$

Observaţie. Relaţia de mai sus arată faptul că dobânda unitară anuală, i, şi dobânda unitară corespunzătoare subperioadei, i_m, care sunt echivalente sunt şi proporţionale. Aceasta se va dovedi a fi o situatie specifică doar operaţiei de dobândă simplă. ♦

2.1.2 Factor de fructificare. Factor de actualizare

În continuare vom considera că unitatea de măsură a timpului este anul şi introducem notaţia **S** pentru suma finală. Aceasta, din punct de vedere matematic este o funcţie, $S : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, $(s,t) \longmapsto S(s,t)$, obţinută cumulând suma iniţială cu dobânda. Avem următoarele relaţii de calcul:

$$S = s + D \text{ sau } S = s \cdot (1 + i \cdot t)$$

Folosind formula de mai sus, cunoscând suma iniţială, dobânda unitară anuală şi durata de timp putem determina suma finală. Invers, cunoscând suma finală, dobânda unitară anuală şi durata de timp putem determina suma iniţială folosind formula:

$$s = \frac{S}{1 + i \cdot t}$$

Suma iniţială, la rândul ei, este o funcţie: $s : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$, $(S,t) \longmapsto s(S,t)$.

Cazuri particulare importante

1) Dacă $s = 1$ u.m., $t = 1$ an, atunci notăm cu u suma finală corespunzătoare, deci $u = S(1,1)$, de unde obţinem $u = 1+i$, pe care îl numim **factor de fructificare.** Avem următoarea reprezentare intuitivă:

1 u.m.————————————————————> u u.m.

——————+——————————————————+————>
0 1 an

u este valoarea de peste un an a unei unităţi monetare de azi.

2) Dacă $S = 1$ u.m., $t = 1$ an, atunci notăm cu v suma iniţială corespunzătoare, deci $v = s(1,1)$, de unde obţinem $v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{u}$, pe care îl numim **factor de actualizare**. Avem următoarea reprezentare intuitivă:

v u.m.¡————————————— 1 u.m.

——————+——————————————————+————>
0 1 an

v reprezintă valoarea de azi a unei unităţi monetare de peste un an. ⧫

2.1.3 Dobânda compusă

De obicei, pentru această operaţiune se mai foloseşte denumirea de dobândă capitalizată sau ”dobândă la dobândă”. Dobânda compusă apare atunci când suma iniţială s este depusă pe o perioadă de timp mai mare decât 1 an. Pentru a atrage depunătorii, băncile acordă acest tip de dobândă şi pentru fracţiuni de timp mai mici decât un an, cum ar fi depozitele pe 1 lună, 3 luni, 6 luni, 9 luni sau alte variante în funcţie de bancă.

Formula de bază

Să considerăm că suma iniţială s este depusă pe o perioadă de n ani ($n \in \mathbb{N}^*$). Notând cu s_k suma de la sfârşitul anului k, $k = \overline{1,n}$, putem scrie următoarele relaţii de calcul:

$$\begin{aligned}
s_1 &= s + i \cdot s \cdot 1 = s \cdot (1+i) = s \cdot u \\
s_2 &= s_1 + i \cdot s_1 \cdot 1 = s_1 \cdot (1+i) = s_1 \cdot u = s \cdot u^2 \\
&\dots \\
s_n &= s \cdot u^n \ .
\end{aligned}$$

Ultima relaţie este uşor justificabilă prin metoda inducţiei matematice. Dacă depozitul a fost făcut pe n ani, atunci suma finală este dată de relaţia $S = s_n$, deci avem

$$S = s \cdot u^n$$

relaţie care este numită **formula de bază** a operaţiei de dobândă compusă. Prin această formulă este ilustrată fructificarea sumei iniţiale s.

Din formula de bază obţinem imediat exprimarea sumei iniţiale

$$s = S \cdot \frac{1}{u^n} = S \cdot v^n$$

relaţie care ilustrează actualizarea sumei finale.

Se ştie, de asemenea, că $S = s + D$, de unde obţinem, pentru dobânda compusă formula de calcul:

$$D = s \cdot (u^n - 1)$$

Observaţie. Semnificaţia dobânzii unitare anuale i se păstrează şi în cazul operaţiei de dobândă compusă. Într-adevăr, pentru $s = 1$ u.m., $n = 1$ an se obţine $D = u - 1 = i$, deci i este dobânda compusă unitară anuală. ⧫

Dobânzi unitare echivalente în cazul operaţiei de dobândă compusă

Considerăm, în continuare, că anul este împărţit în m subperioade şi notăm prin i_m dobânda unitară corespunzătoare subperioadei.

Definiţie. Dobânzile unitare i şi i_m se numesc **echivalente** dacă pentru aceeaşi sumă iniţială, pe acelaşi interval de timp, conduc la aceeaşi sumă finală (aceeaşi dobândă) în regim de dobândă compusă. ♦

Dacă 1 an = m subperioade, rezultă că n ani = $n \cdot m$ subperioade. Exprimăm egalitatea dintre sumele finale obţinute în cele două moduri şi avem

$$
\begin{aligned}
s \cdot u_m^{n \cdot m} &= s \cdot u^n \Rightarrow \\
u_m^m &= u \Rightarrow \\
i_m &= \sqrt[m]{1+i} - 1
\end{aligned}
$$

Din relaţia obţinută între i_m şi i se observă imediat că dobânzile unitare echivalente nu sunt proporţionale în cazul operaţiei de dobândă compusă.

Observaţie. Folosind procentele echivalente se poate considera durata depunerii t şi când aceasta nu este un număr întreg de ani. În consecinţă, din punct de vedere matematic, $S : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $(s,t) \longmapsto S(s,t)$, unde $S(s,t) = su^t$. De asemenea s va fi privită ca funcţia $s : [0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $(S,t) \longmapsto s(S,t)$, dată prin $s(S,t) = Sv^t$. ♦

2.1.4 Dobânda nominală.

Dobânda nominală se foloseşte pentru împrumuturi sau depozite pentru care **frecvenţa de capitalizare** (compunerea dobânzii) **nu coincide** cu perioada pe care este anunţată **rata dobânzii** (de obicei anul).

Astfel:

- considerăm că anul este împărţit în m subperioade, $m \geq 2$;
- capitalizarea se face la sfârşitul fiecărei subperioade;

Formulele de bază pentru dobânda nominală :

- Rata nominală a dobânzii: $\rho^{(m)} = i_m \cdot m \Longleftrightarrow i_m = \dfrac{\rho^{(m)}}{m}$
- Suma finală: $S = s \cdot u_m^{m \cdot n} = s \cdot (1+i_m)^{m \cdot n} = s \cdot \left(1 + \dfrac{\rho^{(m)}}{m}\right)^{m \cdot n}$

Definiţie : Dobânda efectivă este raportul dintre dobânda obţinută pe perioada de 1 an şi suma investită iniţial.

Formulele de bază pentru dobânda efectivă :

- Dobânda efectivă: $i_{ef} = \dfrac{D_{1an}}{s} = \dfrac{S_{1an} - s}{s}$

- Legătura cu dobânda nominală: $i_{ef} = \left(1 + \dfrac{\rho^{(m)}}{m}\right)^m - 1$

- Suma finală: $S = s \cdot (1 + i_{ef})^n$

Observaţie: La o aceeaşi rată nominală, suma finală (şi dobânda) este cu atât mai mare cu cât nr. de subperioade la sfârşitul cărora se face compunerea dobânzii este mai mare.

Apare firesc următoarea întrebare:

Care este valoarea maximă a sumei acumulate atunci când suma investită, rata nominală a dobânzii şi durata depozitului (plasamentului) rămân constante, iar numărul de subperioade creşte? (cu alte cuvinte, este vorba despre **capitalizare continuă a dobânzii**).

Teoretic, putem face compunerea dobânzii în fiecare lună, săptămână, zi, oră, minut, secundă, deci valoarea maximă (teoretică) a sumei acumulate **continu** este:

$$S_{\max} = s \cdot e^{\rho n}.$$

Definiţie : Dobânda instantanee este dobânda unitară corespunzătoare procesului de compunere continuă

$$\delta = \ln(1 + i_{ef}) \Longleftrightarrow i_{ef} = e^{\delta} - 1$$

Exemplu : Fie 1000 € depuşi pe un an, cu rata anuală a dobânzii de 8%. Cât este suma finală şi dobânda efectivă dacă se face:

a) capitalizare anuală

b) capitalizare semestrială

c) capitalizare lunară

d) capitalizare continuă

Răspuns:

a) capitalizare anuală: $S = 1000 \cdot 1.08^1 = 1080€ \Rightarrow i = 0.08 = 8\%$

b) capitalizare semestrială $m = 2 \Rightarrow \rho^{(2)} = 0.08$

$\Rightarrow S = 1000 \cdot \left(1 + \dfrac{0.08}{2}\right)^{1 \cdot 2} = 1000 \cdot (1.04)^2 = 1081.6€ \Rightarrow i = \left(1 + \dfrac{\rho^{(2)}}{2}\right)^2 - 1 = (1.04)^2 - 1 = 0.0816 = 8.16\%$

c) capitalizare lunară $m = 12 \Rightarrow \rho^{(12)} = 0.08$

$$\Rightarrow S = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{1 \cdot 12} = 1000 \cdot (1.006666)^{12} = 1083€ \Rightarrow i = \left(1 + \frac{\rho^{(12)}}{12}\right)^{12} - 1 = (1.006666)^{12} - 1 = 0.08299 = 8.30\%$$

d) capitalizare continuă (e=2.71828182)

$$S = 1000 \cdot e^{0.08} = 1000 \cdot 1.083287 = 1083.29€$$

$$\Rightarrow i = \frac{(e^{0.08} - 1) \cdot 1000}{1000} = e^{0.08} - 1 = 0.083287 = 8.33\%$$

2.2 UNITATEA 2. Imprumuturi

necesar: 5 ore

2.2.1 Noţiuni introductive

Definiţie. Prin **împrumut** înţelegem un triplet de forma **(s,p,t),** unde **s** reprezintă suma iniţială care se împrumută debitorului de către creditor, cu procentul anual **p**, pe durata de timp **t.**♦

Intuitiv, avem situaţia reprezentată mai jos

$$\text{CREDITOR} \xrightarrow{(s,p,t)} \text{DEBITOR}$$

Debitorul poate rambursa suma împrumutată împreună cu dobânda aferentă în următoarele două moduri:

- o singură dată ⇒ plată unică

- eşalonat, prin plata unor sume de bani la nişte momente dinainte precizate.

Pentru primul caz situaţia este simplă. Se calculează dobânda aferentă, se adaugă la suma iniţială şi se rambursează suma finală la momentul înţelegerii.

În al doilea caz avem nevoie de nişte calcule intermediare, pentru a putea determina care este dobânda pentru suma nerambursată la un moment dat şi a vedea care sunt sumele care se rambursează de fiecare dată, cu alte cuvinte să calculăm ratele. Pentru a uşura înţelegerea modalităţilor de calcul vom introduce şi studia noţiunea de anuitate.

2.2.2 Anuităţi

Definiţie şi clasificări

Să considerăm că se cumpără un bun material, iar plata lui se va face în rate. Astfel, la diverse momente de timp dinainte precizate, se vor face anumite plăţi. Considerăm că se vor plăti n rate r_k, $k = \overline{1,n}$, la momentele de timp t_k, $k = \overline{1,n}$, după cum se poate observa mai jos:

```
      r1     r2     ...     rn   sume de bani
------+------+--------------+---------->
      t1     t2     ...     tn   timp
```

Definiţie. Se numeşte **anuitate** ansamblul format din rate şi momentele de timp la care se plătesc ratele respective.♦

Anuităţile se mai întâlnesc şi sub denumirile de plăţi în rate sau plăţi eşalonate.

Deoarece ratele se plătesc la diverse momente de timp şi, având în vedere că sumele, pe anumite perioade de timp, produc dobânzi, este dificil să facem aprecieri sau calcule dacă nu ne referim la acelaşi moment de timp. Din această cauză, se consideră un moment de timp, notat prin t, şi toate sumele se vor evalua (actualiza) în acest moment. Suma tuturor ratelor actualizate la momentul t se va numi **valoarea anuităţii la momentul** t.

r_1 r_2 ... r_{k-1} V(t) r_k ... r_n sume de bani
——+———+————+———+——+———+———————>
t_1 t_2 t_{k-1} t t_k t_n timp

Raportate la momentul de evaluare t, ratele $r_1, r_2, ..., r_{k-1}$ sunt sume iniţiale şi astfel, la momentul t ele vor deveni $r_j \cdot u^{t-t_j} = r_j \cdot v^{t_j-t}$, $j = \overline{1, k-1}$, în timp ce ratele $r_k, r_{k+1}, ..., r_n$ sunt sume finale şi ele, actualizate la momentul t vor fi $r_j \cdot v^{t_j-t}$, $j = \overline{k, n}$. Atunci, conform definiţiei valorii anuităţii la momentul t, avem

$$V(t) = \sum_{j=1}^{n} r_j \cdot v^{t_j-t}$$

Anuităţile, fiind formate atât din rate cât şi din momentele de plată ale acestor rate, se pot clasifica după mai multe criterii, cum ar fi:

- după rate
  - cu rate constante: $r_1 = r_2 = ... = r_n$
  - cu rate oarecare
- după momentele de plată
  - cu intervale constante: $t_k - t_{k-1} = const$
    - anuitate întreagă, în cazul când $const = 1$ an
    - anuitate fracţionată, în cazul când $const = \frac{1}{m}$ ani = 1 subperioadă (1 an = m subperioade, $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$)
  - cu intervale oarecare
- după numărul plăţilor n
  - anuitate temporară, dacă n are valoare nu prea mare (finit)
  - anuitate perpetuă, dacă n are valoare foarte mare (teoretic $+\infty$)
- după momentul de evaluare t
  - anuitate imediată, dacă $t = t_1$
  - anuitate amânată, dacă $t < t_1$
  - anuitate avansată, dacă $t > t_1$

Anuităţi constante

Definiţie. Anuitatea se numeşte **constantă** dacă atât ratele, cât şi intervalele dintre plăţi sunt constante, adică avem următoarele relaţii:

$$r_1 = r_2 = ... = r_n = r$$

$$t_k - t_{k-1} = const \ \blacklozenge$$

Anuităţi constante întregi posticipate

Definiţie. Anuitatea **constantă** se numeşte **întreagă şi posticipată** dacă $t_k - t_{k-1} = 1$ an şi $t_k = k$. $\blacklozenge$

Cu alte cuvinte intervalul dintre două plăţi consecutive este de 1 an, iar ratele se plătesc la sfârşitul fiecărui an.

	r	r	...	r	r	sume de bani
0	1	2		$n-1$	n	timp

În cele ce urmează dorim să determinăm valoarea la un moment t a anuităţii constante întregi posticipate. În acest scop vom particulariza elementele ce intervin în relaţia referitoare la valoarea anuitatii la momentul t, şi anume $r_k = r$, $t_k = k$, $k = \overline{1,n}$. Atunci obţinem

$$\begin{aligned}
V(t) &= \sum_{k=1}^{n} r \cdot v^{k-t} = \sum_{k=1}^{n} r \cdot v^k \cdot v^{-t} = \\
&= r \cdot v^{-t} \sum_{k=1}^{n} v^k = r \cdot u^t \left(v + v^2 + ... + v^n\right) = \\
&= r \cdot u^t \cdot \frac{v - v^n \cdot v}{1-v} = r \cdot u^t \cdot \frac{v \cdot (1-v^n)}{1-v} = \\
&= r \cdot u^t \cdot \frac{1-v^n}{\frac{1}{v} - 1} = r \cdot u^t \cdot \frac{1-v^n}{u-1} = \\
&= r \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot u^t
\end{aligned}$$

În final putem scrie, pentru valoarea anuităţii constante întregi posticipate, la un moment t, următoarea relaţie de calcul:

$$V(t) = r \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot u^t$$

Particularizând momentul de evaluare t, obţinem câteva cazuri importante, cum ar fi:

- valoarea iniţială a anuităţii constante întregi posticipate, dacă $t = 0 : V(0) = IN = r \cdot \frac{1-v^n}{i}$
- valoarea finală a anuităţii constante întregi posticipate, dacă $t = n : V(n) = FIN = r \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot u^n = r \cdot \frac{u^n - 1}{i}$

Dacă $n \to \infty$, atunci obţinem valoarea anuităţii constante întregi posticipate perpetue, la momentul t, adică $V_\infty(t) = r \cdot \frac{1}{i} \cdot u^t$

Anuităţi constante întregi anticipate

Definiţie. Anuitatea **constantă** se numeşte **întreagă şi anticipată** dacă $t_k - t_{k-1} = 1$ an şi $t_k = k - 1$.♦

Cu alte cuvinte intervalul dintre două plăţi consecutive este de 1 an, iar ratele se plătesc la începutul fiecărui an.

r r r ... r sume de bani
———+——+——+————————+——+————————>
0 1 2 $n-1$ n timp

În cele ce urmează determinăm valoarea la un moment t a anuităţii constante întregi anticipate. Dacă fiecare rată de câte r u.m. (unităţi monetare), care se plăteşte la începutul fiecărui an, se evaluează la sfârşitul fiecărui an, obţinem n rate de câte ru u.m. care se plătesc la sfârşitul fiecărui an, după cum se poate observa în reprezentarea următoare:

ru ru ... ru ru sume de bani
———+——+——+————————+——+————————>
0 1 2 $n-1$ n timp

Aplicăm acum formula referitoare la valoarea anuitatii constante intregi posticipate la momentul t, în care înlocuim rata r cu ru şi obţinem următoarea relaţie de calcul pentru valoarea anuităţii constante întregi anticipate, la un moment t:

$$V(t) = ru \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot u^t$$

$$V(t) = r \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot u^{t+1}$$

Particularizând momentul de evaluare t, obţinem câteva cazuri importante, cum ar fi:

- valoarea iniţială a anuităţii constante întregi anticipate, dacă $t = 0 : V(0) = IN = r \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot u$
- valoarea finală a anuităţii constante întregi anticipate, dacă $t = n : V(n) = FIN = ru \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot u^n = ru \cdot \frac{u^n - 1}{i}$

Dacă $n \to \infty$, atunci obţinem valoarea anuităţii constante, întregi, anticipate perpetue, la momentul t, adică $V_\infty(t) = r \cdot \frac{1}{i} \cdot u^{t+1}$

Anuităţi constante fracţionate posticipate

Definiţie. Anuitatea **constantă** se numeşte **fracţionată şi posticipată** dacă $t_k - t_{k-1} = \frac{1}{m}$ ani şi ratele se plătesc la sfârşitul fiecărei subperioade.♦

Cu alte cuvinte intervalul dintre două plăţi consecutive este de $\frac{1}{m}$ ani = 1 subperioadă, unde anul a fost împărţit în m subperioade, $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$. Se notează cu r_m rata corespunzătoare subperioadei.

r_m r_m ... r_m r_m sume de bani
——+————+————+——————————+————+————————>
0 $\frac{1}{m}$ $\frac{2}{m}$ ... $\frac{m-1}{m}$ 1 timp

Folosind formula referitoare la valoarea anuitatii constante intregi posticipate la momentul t, obtinem valoarea anuităţii constante fracţionate posticipate, la momentul t ca fiind:

$$V_m(t) = r_m \cdot \frac{1 - v_m^{nm}}{i_m} \cdot u_m^{tm}$$

unde n reprezintă numărul anilor, nm numărul subperioadelor, i_m dobânda unitară a subperioadei, $u_m = 1 + i_m$, $v_m = \frac{1}{u_m}$.

Anuităţi constante fracţionate anticipate

Definiţie. Anuitatea **constantă** se numeşte **fracţionată şi anticipată** dacă $t_k - t_{k-1} = \frac{1}{m}$ ani şi ratele se plătesc la începutul fiecărei subperioade.♦

Cu alte cuvinte intervalul dintre două plăţi consecutive este de $\frac{1}{m}$ ani = 1 subperioadă, unde anul a fost împărţit în m subperioade, $m \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$. Se notează cu r_m rata corespunzătoare subperioadei.

$$\begin{array}{ccccccc} r_m & r_m & r_m & \dots & r_m & & \text{sume de bani} \\ \text{—+—} & \text{—+—} & \text{—+—} & \text{———} & \text{—+—} & \text{—+—} & \text{———>} \\ 0 & \frac{1}{m} & \frac{2}{m} & \dots & \frac{m-1}{m} & 1 & \text{timp} \end{array}$$

Valoarea la momentul t a anuităţii constante fracţionate anticipate este

$$V_m(t) = r_m \cdot \frac{1 - v_m^{nm}}{i_m} \cdot u_m^{tm+1}$$

dacă se ţine seama de formulele obtinute mai sus.

Observaţie. Se poate considera, pentru simplificare, că rata corespunzătoare unui an este proporţională cu rata corespunzătoare unei subperioade, astfel că $r = m r_m$. Se obţine astfel că dacă $r = 1$ u.m., avem $r_m = \frac{1}{m}$ u.m. De asemenea, pot fi avute în vedere şi alte legături între cele două rate: anuală şi a subperioadei. ♦

2.2.3 Amortizarea împrumuturilor indivizibile

Amortizarea împrumuturilor indivizibile, făcându-se cel mai adesea eşalonat, se bazează în principal pe anuităţi. Pentru a putea pune în evidenţă diferitele modele de amortizare, vom avea nevoie în cele ce urmează de notaţii, relaţii între elementele care intervin, precum şi de tabele de amortizare. Considerăm în continuare (fără a restrânge generalitatea), că rambursarea are loc prin intermediul unor anuităţi întregi posticipate.

Pentru a amortiza un împrumut (s, p, t), vom avea nevoie să cunoaştem, pentru fiecare an:

- suma nerambursată la începutul fiecărui an k, notată prin R_k, $k = \overline{1, n}$, unde $t = n$ este durata în ani a împrumutului,

- dobânda pentru datoria nerambursată R_k în anul k, notată prin D_k, $k = \overline{1, n}$,

- amortismentul aferent anului k (cota din împrumut care urmează a se rambursa la sfârşitul anului k), notată prin Q_k, $k = \overline{1, n}$,

- rata corespunzătoare anului k (suma de bani care se va plăti la sfârşitul anului k), notată prin r_k, $k = \overline{1, n}$.

Între elementele precizate mai sus au loc, în general, câteva relaţii, cum ar fi:

$$R_1 = s$$

ceea ce ne spune că la început, în primul an, datoria debitorului faţă de creditor este suma împrumutată iniţial s;

$$R_{k+1} = R_k - Q_k,\ k = \overline{1,n},$$

adică, suma nerambursată la începutul anului $k+1$ se obţine din diferenţa dintre suma nerambursată la începutul anului k şi partea din împrumut rambursată la sfârşitul anului k;

$$D_k = i \cdot R_k,\ k = \overline{1,n},$$

ceea ce înseamnă că dobânda pentru datoria rămasă nerambursată la începutul anului k se calculează după formula operaţiunii de dobândă simplă $D = i \cdot R_k \cdot 1$, deoarece datoria rămâne neschimbată timp de un an, iar i reprezintă dobânda unitară anuală. După ce a trecut perioada împrumutului, datoria debitorului devine zero, deci

$$R_{n+1} = 0$$

ceea ce înseamnă că

$$R_n = Q_n$$

De asemenea, în fiecare an, rata se va calcula cu formula

$$r_k = Q_k + D_k,\ k = \overline{1,n}$$

Aşa cum am precizat, aceste relaţii au loc în general. În cazurile când una dintre aceste relaţii nu va avea loc, se va face precizarea respectivă.

Relaţiile de mai sus nu sunt întotdeauna suficiente pentru a putea determina toate elementele ce intervin într-un plan de amortizare. Ceea ce ne va ajuta în acele situaţii va fi principiul echilibrului financiar, care se exprimă printr-o egalitate a datoriilor celor două părţi (debitor şi creditor) la un acelaşi moment de timp t. De exemplu, pentru $t = n$, acest principiu se scrie în felul următor

$$s\,u^n = \sum_{k=1}^{n} r_k\, v^{k-n}$$

Ţinând cont de toate relaţiile de mai sus, la fiecare amortizare se va întocmi un plan (tabel) de amortizare care va conţine cel puţin următoarele coloane:

k	R$_k$	D$_k$	Q$_k$	r$_k$

şi care va avea atâtea linii cât este numărul de ani în care se face rambursarea.

Ca o particularitate a amortizării împrumuturilor indivizibile este faptul că aceasta poate avea loc în mod direct sau indirect şi anume:

- în cazul amortizărilor directe, debitorul rambursează direct creditorului datoria pe care o are faţă de el;

- în cazul amortizărilor indirecte, debitorul constituie la o terţă parte fie toată datoria pe care o are către creditor, fie numai o parte din ea, urmând ca la scadenţă debitorul să ridice de la terţa parte suma constituită pe care o va da creditorului. Cum depunerile de sume la terţa parte de către debitor sunt însoţite şi de o dobândă, este evident că prin acest procedeu debitorul poate fi avantajat, în sensul că pe seama terţei părţi debitorul îşi micşorează datoria faţă de creditor.

Amortizări directe

Modelul 1D (modelul de amortizare prin plată unică la scadenţă)

Acest model este un model degenerat de amortizare, în care debitorul restituie creditorului o singură dată, la scadenţă, întreaga sa datorie egală cu $S = s\,u^n$ (operaţiunea de dobândă compusă). Cu notaţiile adoptate, tabelul de amortizare se va completa în felul următor:

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	s	$s\,i$	0	0
2	$s\,u$	$s\,u\,i$	0	0
...	...	...	...	...
n-1	$s\,u^{n-2}$	$s\,u^{n-2}\,i$	0	0
n	$s\,u^{n-1}$	$s\,u^{n-1}\,i$	$s\,u^{n-1}$	$s\,u^n$

Observaţie. În acest caz de amortizare, relaţia $r_k = Q_k + D_k$ nu are loc pentru $k = \overline{1, n-1}$ şi are loc numai pentru $k = n$ (ultimul an). De asemenea, $R_{k+1} = R_k + D_k$, $k = \overline{1, n-1}$, deoarece, dobânda D_k deşi a fost calculată, nu s-a plătit, şi deci trebuie cumulată. ♦

Modelul 2D (modelul de amortizare prin achitarea sumei la scadenţă şi plata periodică a dobânzilor)

În acest caz tabelul de amortizare se prezintă în felul următor:

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	s	$s\,i$	0	$s\,i$
2	s	$s\,i$	0	$s\,i$
...	...	...	...	...
n-1	s	$s\,i$	0	$s\,i$
n	s	$s\,i$	s	$s\,u$

Ca o particularitate a acestui model este faptul că liniile corespunzătoare anilor $k = \overline{1, n-1}$ sunt identice şi asta indiferent de câţi ani intermediari sunt.

Pentru a vedea dacă tabloul este bine întocmit, se poate scrie principiul echilibrului financiar pentru un anumit moment de timp t. De exemplu, să considerăm $t = 0$, momentul la care creditorul a împrumutat debitorului suma s, şi la acest moment de timp actualizăm plăţile făcute de debitor către creditor şi anume r_k, $k = \overline{1, n}$. Egalând cele două valori actuale, obţinem

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} s\,i\,v^k + s\,u\,v^n$$

Efectuând calculele în membrul drept al relaţiei de mai sus obţinem identitatea $s = s$.

Modelul 3D (modelul de amortizare prin cote constante)

Caracteristica acestui model de amortizare este faptul că în fiecare an se rambursează cote egale din împrumut, însoţite bineînţeles de dobânzile aferente pentru datoriile nerambursate. Aceasta înseamnă că sunt adevărate următoarele relaţii de calcul

$$Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$$
$$Q_k = Q = \frac{s}{n},\ k = \overline{1, n}$$
$$s = n\,Q$$

Atunci, tabelul de amortizare se prezintă în felul următor:

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	nQ	nQi	Q	$(ni+1)Q$
2	$(n-1)Q$	$(n-1)Qi$	Q	$[(n-1)i+1]Q$
...	...	...	...	...
k+1	$(n-k)Q$	$(n-k)Qi$	Q	$[(n-k)i+1]Q$
...	...	...	...	...
n	Q	Qi	Q	$(i+1)Q$

La acest model se observă că atât dobânzile D_k, $k=\overline{1,n}$, cât şi ratele r_k, $k=\overline{1,n}$, sunt termenii unei progresii aritmetice cu primul termen $D_1 = si = nQi$ şi respectiv $r_1 = si + Q = (ni+1)Q$ şi cu aceeaşi raţie $-Qi$. De aceea, putem scrie

$$D_{k+1} = D_k - Qi,\ k=\overline{1,n}$$
$$r_{k+1} = r_k - Qi,\ k=\overline{1,n}$$

Prin urmare, la acest model de amortizare, rata corespunzătoare primului an este cea mai mare, celelalte fiind din ce în ce mai mici. Acest fapt poate constitui un avantaj, dar în acelaşi timp şi un dezavantaj în funcţie de posibilităţile pe care la are debitorul.

Facem precizarea că acest model mai este cunoscut şi sub denumirea de ”model de amortizare prin rate descrescătoare”.

Evaluând la acelaşi moment $t=0$ datoriile celor două părţi, cu alte cuvinte suma s pe de o parte şi ratele r_k, $k=\overline{1,n}$ pe de altă parte, principiul echilibrului financiar se scrie sub forma

$$s = \sum_{k=1}^{n} \{[s-(k-1)Q]\,i + Q\}\, v^k$$

Efectuând calculele în membrul drept se va ajunge la identitatea $s=s$.

Modelul 4D (modelul de amortizare prin rate constante)

La acest model, debitorul plăteşte la sfârşitul fiecărui an o aceeaşi rată r_k, $k=\overline{1,n}$, prin intermediul căreia acoperă atât o parte din împrumut, cât şi dobânda pentru suma nerambursată. Deoarece la început suma nerambursată este mai mare, urmând ca ea să scadă pe măsură ce se plătesc cotele în fiecare an, acest fapt atrage după sine dobânzi diferite, cu valoare mai mare în primul an şi în descreştere în anii următori. Cum suma dintre dobândă şi cotă formează rata, care în acest caz este constantă, vom avea cote din ce în ce mai mari pentru fiecare an. Însă datele pe care le avem nu sunt suficiente pentru a putea întocmi planul (tabelul) de amortizare şi prin urmare vom avea nevoie de o relaţie suplimentară care este principiul echilibrului financiar. La momentul $t=0$ cele două datorii sunt suma iniţială s şi suma ratelor r actualizate. Ratele r formează o anuitate constantă întreagă posticipată, pentru care valoarea iniţială este dată de relaţia $V(0) = IN = r\cdot\frac{1-v^n}{i}$. Astfel, obţinem următoarea relaţie pentru rata constantă necunoscută

$$s = r\cdot\frac{1-v^n}{i}$$

de unde obţinem

$$r = \frac{s\,i}{1-v^n}$$

Cunoscând acum suficiente elemente, putem construi tabloul de amortizare

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	$s = r \cdot \frac{1-v^n}{i}$	$s\,i = r\,(1-v^n)$	$r - D_1 = r\,v^n$	r
2	$s - r\,v^n = r \cdot \frac{1-v^{n-1}}{i}$	$r\left(1-v^{n-1}\right)$	$r\,v^{n-1}$	r
...	...	...	...	...
n	$r \cdot \frac{1-v}{i}$	$r\,(1-v)$	$r\,v$	r

Se constată că în acest caz de amortizare, cotele corespunzătoare fiecărui an sunt termenii unei progresii geometrice cu primul termen $Q_1 = r\,v^n$ şi raţia $\frac{1}{v} = u$. Cotele corespunzătoare anilor $k = \overline{2,n}$ se pot calcula folosind următoarea relaţie

$$Q_k = Q_1\,u^{k-1},\ k = \overline{2,n}$$

Se observă din tabelul de amortizare că

$$\begin{aligned} R_n &= r \cdot \frac{1-v}{i} = r \cdot \frac{1-\frac{1}{1+i}}{i} \\ &= r \cdot \frac{\frac{i}{1+i}}{i} = rv \\ &= Q_n \end{aligned}$$

Amortizări indirecte

La acest tip de amortizări, după cum am mai subliniat, intervine încă o persoană (aşa numita terţa parte) pe lângă creditor şi debitor. Schematic, problema se prezintă în felul următor:

CREDITOR ——(s,p,t)——> DEBITOR ——p'——> TERŢA PARTE

<———————————————————

În timp ce între creditor şi debitor se lucrează cu procentul anual p, între debitor şi terţa parte se foloseşte, de obicei, un procent p'. Dacă $p = p'$, acest caz ne conduce la aşa-numitul **sistem francez**. Dacă însă $p \neq p'$, suntem conduşi la **sistemul american** de amortizare. Se demonstrează matematic faptul că dacă $p' > p$ atunci debitorul iese în avantaj faţă de creditor, pe seama terţei părţi. Atât între creditor şi debitor pe de o parte, cât şi între debitor şi terţa parte pe de altă parte, va avea loc câte o amortizare directă efectuată după unul dintre modelele de amortizare directă prezentate mai sus. Se pot imagina diverse combinaţii. Dintre acestea, prezentăm în cele ce urmează câteva.

Modelul 1I (modelul de amortizare prin plata periodică a dobânzilor către creditor şi constituirea sumei împrumutate la terţa parte prin plăţi periodice constante)

Acest model de amortizare indirectă este constituit din două modele de amortizare directă, după cum urmează

$$\begin{array}{ccc} & & \text{CREDITOR} \\ & 2D \nearrow & \\ \text{DEBITOR} & & \\ & 4D \searrow & \\ & & \text{TERŢA PARTE} \end{array}$$

Corespunzător modelului de amortizare directă 2D, debitorul va plăti anual creditorului dobânzile (calculate cu procentul p), urmând să restituie suma împrumutată s la scadenţă. În paralel, debitorul va constitui această sumă s la terţa parte (folosind procentul p') prin plăţi periodice constante (conform modelului de amortizare directă 4D). Dacă în final suma s va fi constituită la terţa parte atunci, la momentul $t = 0$, această sumă va fi $s' = s\,v'^n$ (pentru a afla datoria la momentul $t = 0$ faţă de terţa parte, se actualizează suma s prin intermediul procentului p'). Rata constantă pe care o va plăti debitorul terţei părţi în fiecare an se va calcula după formula

$$r' = \frac{s'\,i'}{1 - v'^n} \quad \text{sau}$$
$$r' = \frac{s\,v'^n\,i'}{1 - v'^n}$$

Modelul 2I (modelul de amortizare printr-o unică plată către creditor şi constituirea întregii sume datorate la terţa parte prin plăţi periodice constante)

Aceste model de amortizare indirectă este constituit din două modele de amortizare directă, după cum urmează

$$\begin{array}{ccc} & & \text{CREDITOR} \\ & 1D \nearrow & \\ \text{DEBITOR} & & \\ & 4D \searrow & \\ & & \text{TERŢA PARTE} \end{array}$$

Corespunzător modelului de amortizare directă 1D, debitorul nu va plăti nimic creditorului decât în ultimul an, la scadenţă, când va înapoia întreaga datorie (calculată cu procentul p), şi anume suma $S = s\,u^n$. În paralel, debitorul va constitui această sumă S la terţa parte (folosind procentul p') prin plăţi periodice constante (conform modelului de amortizare directă 4D). Dacă în final suma S va fi constituită la terţa parte, atunci la început (la momentul $t = 0$) această sumă va fi $S' = S\,v'^n = s\,u^n\,v'^n$ (pentru a afla datoria la momentul $t = 0$ faţă de terţa parte, se actualizează suma S prin intermediul procentului p'). Atunci rata constantă pe care o va plăti debitorul terţei părţi în fiecare an se va calcula după formula

$$r' = \frac{S'\,i'}{1 - v'^n} \quad \text{sau}$$
$$r' = \frac{s\,u^n\,v'^n\,i'}{1 - v'^n}$$

2.3 Probleme rezolvate

Problema 1. Să se calculeze dobânda care s-a obţinut ca urmare a depunerii unei sume iniţiale de 2 500 u.m. cu procentul anual de 11% din data de 10 martie 2005 până în data de 25 iulie 2005 în funcţie de:

a) numărul de zile;

b) numărul de chenzine întregi (o chenzină = 15 zile);

c) numărul de luni întregi.

Rezolvare.

a) calculăm numărul de zile $z = 137$ zile

$$\begin{aligned} D_z &= \frac{s \cdot i \cdot z}{360} = \\ &= \frac{2500 \cdot 0,11 \cdot 137}{360} = \\ &= 104,65 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

b) între 10 martie 2005 şi 25 iulie 2005 sunt 9 chenzine întregi

$$\begin{aligned} D_q &= \frac{s \cdot i \cdot q}{24} = \\ &= \frac{2500 \cdot 0,11 \cdot 9}{24} = \\ &= 103,125 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

c) între 10 martie 2005 şi 25 iulie 2005 sunt 4 luni întregi

$$\begin{aligned} D_l &= \frac{s \cdot i \cdot l}{12} = \\ &= \frac{2500 \cdot 0,11 \cdot 4}{12} = \\ &= 91,67 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

Problema 2. O persoană dispune de două sume de bani s_1 şi s_2 astfel încât prima sumă este de cinci ori mai mare decât a doua. Persoana plasează prima sumă pe timp de 135 zile cu procentul anual de 10% şi a doua sumă pe timp de 3 luni cu procentul anual de 9%. Ştiind că dobânda adusă de prima sumă este mai mare cu 66 u.m. decât cea produsă de a doua sumă, să se determine valorile celor două sume iniţiale.

Rezolvare. Notăm cu D_1 şi D_2 dobânzile corespunzătoare celor două sume iniţiale. Din datele problemei putem scrie că:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 5 \cdot s_2 \\
D_1 &= \frac{s_1 \cdot 0,1 \cdot 135}{360} \\
D_2 &= \frac{s_2 \cdot 0,09 \cdot 3}{12} \\
D_1 &= D_2 + 66
\end{aligned}
$$

Se observă că avem, de fapt, de rezolvat următorul sistem de două ecuaţii cu două necunoscute:

$$
\begin{cases}
s_1 = 5 \cdot s_2 \\
0,0375 \cdot s_1 = 0,0225 \cdot s_2 + 66
\end{cases}
$$

Înlocuind $s_1 = 5 \cdot s_2$ în cea de a doua ecuaţie, obţinem

$$(0,1875 - 0,0225) \cdot s_2 = 66$$

de unde găsim

$$
\begin{aligned}
s_2 &= 400 \text{ u.m.} \\
s_1 &= 2\ 000 \text{ u.m.}
\end{aligned}
$$

Problema 3. O persoană depune la o bancă suma de 300 u.m.. Ştiind că procentul anual este de 15% pe an, să se calculeze ce sumă va avea persoana respectivă după 4 ani şi care este valoarea dobânzii.

Rezolvare. Se cunosc $s = 300$ u.m., $p = 15\%$, $n = 4$ ani. Se va folosi operaţia de dobândă compusă deoarece $n = 4 > 1$ an. Pentru suma finală S avem formula $S = s \cdot u^n$, iar $u = 1 + i$. În cazul de faţă, dobânda unitară anuală este $i = \frac{p}{100} = 0,15$, iar factorul de fructificare este $u = 1,15$ şi avem

$$S = 300 \cdot (1,15)^4 = 300 \cdot 1,749 = 524,7 \text{ (u.m.)}$$

$$D = S - s = 524,7 - 300 = 224,7 \text{ (u.m.)}$$

Problema 4. O persoană primeşte moştenire un libret de economii întocmit în urmă cu 6 ani. Procentul anual a fost în primii doi ani 15%, iar în ultimii patru ani de 12%. Suma finală care se poate ridica de pe libretul respectiv este de 2 080,98 u.m.. Ce sumă iniţială a fost depusă?

Rezolvare. Se cunosc $n = 6$ ani, $n_1 = 2$ ani, $n_2 = 4$ ani, $p_1 = 15\%$, $p_2 = 12\%$ şi $S = 2\,080,98$ u.m.. Suma iniţială s este necunoscută. Folosind formula dobânzii compuse, putem scrie:

- după primii doi ani suma iniţială s devine $S_1 = s \cdot u_1^2 = s \cdot (1 + i_1)^2$; această sumă devine sumă iniţială pentru următoarea perioadă;

- după ultimii patru ani obţinem suma finală $S = S_1 \cdot u_2^4 = s \cdot u_1^2 \cdot u_2^4 = s \cdot (1 + i_1)^2 \cdot (1 + i_2)^4$. De aici obţinem imediat că

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{S}{(1+i_1)^2 \cdot (1+i_2)^4} = \\
&= \frac{2\,080,98}{(1,15)^2 \cdot (1,12)^4} = \\
&= 1\,000\,(\text{u.m.})
\end{aligned}
$$

În concluzie, în urmă cu 6 ani s-a depus suma de 1 000 u.m.

Problema 5. Se consideră cazul unei bănci care oferă o rată anuală a dobânzii de 10% pentru depozitele pe termen de 1 lună. Să se calculeze dobânda primită la scadenţă de către o persoană care a depus suma de 10 000 u.m. pe timp de 1 lună. Presupunând că persoana doreşte capitalizarea dobânzii, să se calculeze ce sumă va avea persoana respectivă peste 5 luni şi peste 1 an. Să se calculeze, de asemenea, care este dobânda unitară anuală echivalentă.

Rezolvare. Se cunosc următoarele elemente $s = 10\,000$ u.m., $p = 10\%$, $i = 0,1$, $i_{12} = \frac{i}{12} = 0,008(3)$, $t_5 = 5$ luni, $t_{12} = 12$ luni. Notăm prin D_1 dobânda după o lună, S_5 suma finală după 5 luni, S_{12} suma finală după 12 luni şi prin P_1 procentul anual echivalent.

Dobânda pe care o primeşte persoana după o lună este

$$D_1 = s \cdot i_{12} \cdot 1 = 83,(3)\ (\text{u.m.})$$

Dacă dobânda se capitalizează, peste 5 luni persoana va putea ridica suma

$$
\begin{aligned}
S_5 &= s \cdot u_{12}^5 = s \cdot (1+i_{12})^5 = \\
&= 10\,000 \cdot (1+0,008(3))^5 = \\
&= 10\,000 \cdot 1,042196 = \\
&= 10\ \ 421,96\ (\text{u.m.})
\end{aligned}
$$

Deci, dobânda aferentă este de

$$D_5 = 10\ \ 421,96 - 10\,000 = 421,96\ (\text{u.m.})$$

Dacă se capitalizează dobânda, peste 12 luni persoana va putea ridica suma

$$
\begin{aligned}
S_{12} &= s \cdot u_{12}^{12} = s \cdot (1+i_{12})^{12} = \\
&= 10\,000 \cdot (1+0,008(3))^{12} = \\
&= 10\,000 \cdot 1,104274 = \\
&= 11\,042,74\ (\text{u.m.})
\end{aligned}
$$

Pentru a afla procentul anual echivalent, avem

$$s \cdot u_{12}^{12} = s \cdot u_1$$

$$(1+i_{12})^{12} = 1 + I_1$$

unde cu I_1 s-a notat $\frac{P_1}{100}$

$$\begin{aligned} I_1 &= (1+i_{12})^{12} - 1 = \\ &= (1+0,008(3))^{12} - 1 = \\ &= 0,104274 \end{aligned}$$

şi deci avem $P_1 = 10,42\%$.

Problema 1. O persoană achiziţionează un bun în valoare de 1000 u.m., plata acestui bun urmând a se efectua în rate egale pe timp de doi ani. Se cunoaşte rata anuală a dobânzii de 10%. Să se calculeze care este valoarea unei rate dacă plata are loc:

a) la sfârşitul fiecărui an;

b) la începutul fiecărui an;

c) la sfârşitul fiecărei luni;

d) la începutul fiecărei luni;

e) la sfârşitul fiecărui trimestru;

f) la începutul fiecărui trimestru;

Care este valoarea acumulată a ratelor la sfârşitul celor doi ani, în fiecare caz în parte?

Rezolvare. Fiind vorba despre o plată în rate, avem, de fapt, pentru fiecare caz în parte câte o anuitate, după cum urmează:

a) anuitate constantă întreagă posticipată;

b) anuitate constantă întreagă anticipată;

c) şi e) anuitate constantă fracţionată posticipată;

d) şi f) anuitate constantă fracţionată anticipată.

Pentru fiecare caz în parte, preţul bunului achiziţionat (1000 u.m.) reprezintă valoarea iniţială a anuităţii ($V(0) = IN$), iar valoarea acumulată a ratelor la sfârşitul celor doi ani reprezintă valoarea finală a anuităţii ($V(n) = V(2) = FIN$). Prin urmare, rata constantă se va găsi, de fiecare dată, din formula valorii iniţiale a anuităţii respective.

a) În acest caz avem $n = 2$, $p = 10$, $i = 0,1$, $u = 1,1$, $v = 0,(90)$ şi

$$\begin{aligned} V(t) &= r \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot u^t \\ V(0) &= r \cdot \frac{1-v^n}{i} \\ V(n) &= r \cdot \frac{u^n - 1}{i} \end{aligned}$$

de unde, înlocuind elementele cunoscute, obţinem

$$10^3 = r \cdot \frac{1-(0,(09))^2}{0,1}$$

care este o ecuaţie de gradul întâi în necunoscuta r. Soluţia acestei ecuaţii se exprimă astfel

$$r = \frac{0,1 \cdot 10^3}{1-(0,(90))^2}$$

de unde rata constantă ce se va plăti la sfârşitul fiecărui an este

$$r = 576,19 \text{ u.m.}$$

În acest caz, valoarea finală a anuităţii este

$$\begin{aligned} V(2) &= r \cdot \frac{u^2-1}{i} \\ &= 576,19 \cdot \frac{(1,1)^2-1}{0,1} \\ &= 1\,210 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

b) Dacă plata ratelor constante se va face la începutul fiecărui an, suntem conduşi la următoarele valori ale anuităţii constante întregi anticipate cu $p = 10$, $i = 0,1$, $u = 1,1$, $v = 0,(90)$ şi

$$\begin{aligned} V^a(t) &= r \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot u^{t+1} \\ V^a(0) &= r \cdot \frac{1-v^n}{i} \cdot u \\ V^a(n) &= r \cdot \frac{u^n-1}{i} \cdot u \end{aligned}$$

Înlocuind elementele cunoscute în valoarea iniţială a anuităţii, obţinem rata în acest caz

$$\begin{aligned} 10^3 &= r \cdot 1,1 \cdot \frac{1-(0,(90))^2}{0,1} \\ r &= \frac{0,1 \cdot 10^3}{1,1\left(1-(0,(90))^2\right)} \\ r &= 523,81 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Valoarea finală a anuităţii este

$$\begin{aligned} V^2(2) &= r \cdot \frac{u^2-1}{i} \cdot u = \\ &= 523,81 \cdot 1,1 \cdot \frac{(1,1)^2-1}{0,1} = \\ &= 1\,210 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

c) În acest caz, persoana va plăti lunar, la sfârşitul fiecărei luni, timp de doi ani aceeaşi sumă de bani (rată). Fiind vorba de lună, $m = 12$ (numărul subperioadelor în care se împarte anul). Suntem în cazul unei anuităţi constante fracţionate şi posticipate cu dobânda nominală $\rho = 0,1$, $n \cdot m = 24$, $i_{12} = \frac{\rho}{12} = 0,008(3)$, $u_{12} = 1,008(3)$, $v_{12} = 0,991735$, iar valoarea ei la un anumit moment de timp t este

$$\begin{aligned} V_m(t) &= r_m \cdot \frac{1 - v_m^{n\cdot m}}{i_m} \cdot u_m^{t\cdot m}, \\ V_m(0) &= r_m \cdot \frac{1 - v_m^{n\cdot m}}{i_m}, \\ V_m(n) &= r_m \cdot \frac{u_m^{n\cdot m} - 1}{i_m}. \end{aligned}$$

Înlocuind datele cunoscute, obţinem

$$\begin{aligned} 10^3 &= r_{12} \cdot \frac{1 - (0,991735)^{24}}{0,008(3)} \\ r_{12} &= \frac{0,008(3) \cdot 10^3}{1 - (0,991735)^{24}} \\ r_{12} &= 46,14 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

Valoarea finală este

$$\begin{aligned} V_{12}(2) = r_{12} \cdot \frac{u_{12}^{24} - 1}{i_{12}} &= \\ = 46,14 \cdot \frac{(1,0079)^{24} - 1}{0,0079} &= \\ = 1220,39 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

d) În acest caz, persoana va plăti lunar, la începutul fiecărei luni, timp de doi ani o aceeaşi sumă de bani (rată). Fiind vorba de lună, $m = 12$ (numărul subperioadelor în care se împarte anul). Suntem în cazul unei anuităţi constante, fracţionate şi anticipate cu dobânda nominală $\rho = 0,1$, $n \cdot m = 24$, $i_{12} = \frac{\rho}{12} = 0,008(3)$, $u_{12} = 1,008(3)$, $v_{12} = 0,991735$, iar valoarea ei la un anumit moment de timp t este

$$\begin{aligned} V_m^a(t) &= r_m \cdot \frac{1 - v_m^{n\cdot m}}{i_m} \cdot u_m^{(t\cdot m+1)}, \\ V_m^a(0) &= r_m \cdot \frac{1 - v_m^{n\cdot m}}{i_m} \cdot u_m, \\ V_m^a(n) &= r_m \cdot \frac{u_m^{n\cdot m} - 1}{i_m} \cdot u_m. \end{aligned}$$

Înlocuind datele cunoscute, obţinem

$$
\begin{aligned}
10^3 &= r_{12} \cdot \frac{1-(0,991735)^{24}}{0,008(3)} \cdot 1,008(3) \\
r_{12} &= \frac{0,008(3) \cdot 10^3}{(1-(0,991735)^{24}) \cdot 1,008(3)} \\
r_{12} &= 45,76 \text{ u.m.}
\end{aligned}
$$

Valoarea finală este

$$
\begin{aligned}
V_{12}^a(2) = r_{12} \cdot \frac{u_{12}^{24}-1}{i_{12}} \cdot u_{12} &= \\
&= 45,76 \cdot 1,008(3) \cdot \frac{(1,008(3))^{24}-1}{0,008(3)} = \\
&= 1220,39 \text{ u.m.}
\end{aligned}
$$

e) În acest caz, persoana va plăti trimestrial, la sfârşitul fiecărui trimestru, timp de doi ani o aceeaşi sumă de bani (rată). Fiind vorba de trimestru, $m = 4$ (numărul subperioadelor în care se împarte anul). Suntem în cazul unei anuităţi constante fracţionate şi posticipate cu dobânda nominală $\rho = 0,1$, $n \cdot m = 8$, $i_4 = \frac{\rho}{4} = 0,025$, $u_4 = 1,025$, $v_4 = 0,975609$, iar valoarea ei la un anumit moment de timp t este

$$
\begin{aligned}
V_m(t) &= r_m \cdot \frac{1-v_m^{n\cdot m}}{i_m} \cdot u_m^{t\cdot m} \\
V_m(0) &= r_m \cdot \frac{1-v_m^{n\cdot m}}{i_m} \\
V_m(n) &= r_m \cdot \frac{u_m^{n\cdot m}-1}{i_m}
\end{aligned}
$$

Înlocuind datele cunoscute, obţinem

$$
\begin{aligned}
10^3 &= r_4 \cdot \frac{1-(0,975609)^8}{0,025} \\
r_4 &= \frac{0,025 \cdot 10^3}{1-(0,975609)^8} \\
r_4 &= 139,46 \text{ u.m.}
\end{aligned}
$$

Valoarea finală este

$$
\begin{aligned}
V_4(2) = r_4 \cdot \frac{u_4^8-1}{i_4} &= \\
&= 139,46 \cdot \frac{(1,025)^8-1}{0,025} = \\
&= 1218,40 \text{ u.m.}
\end{aligned}
$$

f) În acest caz, persoana va plăti trimestrial, la începutul fiecărui trimestru, timp de doi ani o aceeaşi sumă de bani (rată). Fiind vorba de trimestru, $m = 4$ (numărul subperioadelor în care se împarte anul). Suntem în cazul unei anuităţi constante fracţionate şi anticipate cu dobânda nominală $\rho = 0,1$, $n \cdot m = 8$, $i_4 = \frac{\rho}{4} = 0,025$, $u_4 = 1,025$, $v_4 = 0,975609$, iar valoarea ei la un anumit moment de timp t este

$$V_m^a(t) = r_m \cdot \frac{1 - v_m^{n \cdot m}}{i_m} \cdot u_m^{(t \cdot m+1)}$$
$$V_m^a(0) = r_m \cdot \frac{1 - v_m^{n \cdot m}}{i_m} \cdot u_m$$
$$V_m^a(nm) = r_m \cdot \frac{u_m^{n \cdot m} - 1}{i_m} \cdot u_m$$

Înlocuind datele cunoscute, obţinem

$$10^3 = r_4 \cdot 1,025 \cdot \frac{1 - (0,975609)^8}{0,025}$$
$$r_4 = \frac{0,025 \cdot 10^3}{1,025\left(1 - (0,975609)^8\right)}$$
$$r_4 = 136,06 \text{ u.m.}$$

Valoarea finală este

$$V_4^a(2) = r_4 \cdot \frac{u_4^8 - 1}{i_4} \cdot u_4 =$$
$$= 136,06 \cdot 1,025 \cdot \frac{(1,0025)^8 - 1}{0,025} =$$
$$= 1218,40 \text{ u.m.}$$

Problema 2. O persoană împrumută suma de 500 u.m., negociind scadenţa împrumutului la 6 ani şi dobânda anuală la valoarea de 25%. De asemenea, la momentul efectuării împrumutului se stabileşte că întreaga datorie (suma împrumutată şi dobânda aferentă) se va plăti la scadenţă. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător rambursării acestui împrumut.

Rezolvare. Este vorba de modelul de amortizare directă 1D. Se cunosc următoarele date:

$$s = 500,\ n = 6,\ p = 12\%$$

de unde obţinem, pentru factorul de actualizare u valoarea 1,12. La momentul scadenţei (sfârşitul celui de-al patrulea an) se va rambursa suma $S = s u^n = 986,91$ u.m.; la sfârşitul celorlalţi ani nu se plăteşte nimic. Tabloul de amortizare se prezintă dupa cum urmeaza

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	500	60	0	0
2	560	67.2	0	0
3	627.2	75.26	0	0
4	702.46	84.3	0	0
5	786.76	94.41	0	0
6	881.17	105.74	881.17	986.91

♦

Problema 3. Se consideră acelaşi împrumut de 500 u.m. (ca şi la Problema 2), rambursabil pe timp de 6 ani cu dobânda anuală 12%. De această dată, la sfârşitul fiecărui an, vor fi plătite dobânzile aferente, iar suma împrumutată se va restitui la scadenţă. Să se prezinte tabloul de amortizare.

Rezolvare. Este vorba de modelul de amortizare directă 2D. Tabloul de amortizare urmatorul:

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	500	60	0	60
2	500	60	0	60
3	500	60	0	60
4	500	60	0	60
5	500	60	0	60
6	500	60	500	560

♦

Problema 4. O persoană împrumută de la o bancă suma de 500 u.m., pe timp de 6 ani, cu dobânda anuală 12%, urmând ca la sfârşitul fiecărui an să se ramburseze aceeaşi cotă din împrumut, la care se adaugă dobânda aferentă acelei perioade. Să se întocmească tabloul de amortizare corespunzător acestui împrumut.

Rezolvare. Este vorba de modelul de amortizare directă 3D pentru care cota corespunzătoare fiecărui an este aceeaşi şi anume

$$Q_k = Q = \frac{s}{n},\ k = \overline{1,n}$$

În acest caz avem:

$$s = 500,\ n = 6,\ p = 12\%$$

şi atunci obţinem

$$i = 0,12,\ u = 1,12$$
$$Q_k = Q = 83,(3),\ k = \overline{1,6}$$

Tabloul de amortizare este:

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	500	60	83.33	143.33
2	416.67	50	83.33	133.33
3	333.33	40	83.33	123.33
4	250	30	83.33	113.33
5	166.67	20	83.33	103.33
6	83.33	10	83.33	93.33

♦

Problema 5. Să se întocmească planul de amortizare pentru un împrumut de 500 u.m., pe timp de 6 ani, cu dobânda anuală de 12%, dacă rambursarea are loc prin plăţi periodice constante (la sfârşitul fiecărui an).

Rezolvare. Plăţile periodice constante care vor avea loc sunt, de fapt, rate constante, deci este vorba de modelul de amortizare directă 4D. Datele problemei sunt:

$$s = 500,\ n = 6,\ p = 12\%$$

Rata constantă se calculează considerând că suma împrumutată s este valoarea iniţială a unei anuităţi constante, întregi, posticipate cu ratele constante r. Atunci are loc următoarea relaţie:

$$s = r \cdot \frac{1 - v^n}{i}$$

de unde rezultă formula de calcul pentru rata constantă şi anume:

$$r = \frac{s\,i}{1 - v^n}$$

Prin urmare, la sfârşitul fiecărui an se va rambursa rata constantă r cu care se acoperă atât o parte din împrumut, cât şi dobânda pentru suma nerambursată corespunzătoare fiecărui an. În acest caz avem:

$$r = \frac{500 \cdot 0,12}{1 - \left(\frac{1}{1,12}\right)^6}$$
$$r = 121,61 \text{ (u.m.)}$$

Tabloul de amortizare este urmatorul:

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	500	60	61.61	121.61
2	438.39	52.61	69.01	121.61
3	369.38	44.33	77.29	121.61
4	292.09	35.05	86.56	121.61
5	205.53	24.66	96.95	121.61
6	108.58	13.03	108.58	121.61

♦

Problema 6. O persoană (creditorul) împrumută de la o bancă suma de 2500 u.m., pe timp de 5 ani, cu dobânda anuală 11%. Persoana în cauză (debitorul) urmează să restituie creditorului dobânzile la sfârşitul fiecărui an, iar suma necesară restituirii sumei împrumutate o va constitui la o altă bancă (terţa parte) prin plăţi periodice constante pe timp de 5 ani, cu dobânda anuală 12%. Să se întocmească planurile de amortizare pentru rambursarea acestui împrumut.

Rezolvare. Între debitor şi creditor va avea loc o amortizare directă de tipul 2D, cu procentul p, iar între debitor şi terţa parte, o amortizare directă de tipul 4D, cu procentul p', ceea ce înseamnă că este vorba, de fapt de o amortizare indirectă după modelul 1I. Se cunosc:

$$s = 2500,\ n = 5,\ p = 11\%,\ p' = 12\%$$

La scadenţă, debitorul trebuie să aibă constituită la terţa parte suma s care, actualizată la momentul contractării împrumutului, cu procentul corespunzător terţei părţi, p', este

$$
\begin{aligned}
s' &= s v'^n \\
s' &= 1418,57\,(\text{u.m.})
\end{aligned}
$$

Această sumă este valoarea iniţială a unei anuităţi constante întregi posticipate cu rata constantă r'. Deci, putem scrie

$$
s v'^n = r' \frac{1 - v'^n}{i'}
$$

Astfel, rata constantă r' ce va trebui plătită la sfârşitul fiecărui an terţei părţi este dată de relaţia

$$
\begin{aligned}
r' &= \frac{s v'^n i'}{1 - v'^n} \\
r' &= \frac{2\,500 \cdot \left(\frac{1}{1,12}\right)^5 \cdot 0,12}{1 - \left(\frac{1}{1,12}\right)^5} \\
r' &= 393,52\,(\text{u.m.})
\end{aligned}
$$

Tabloul de amortizare debitor-creditor (2D) este urmatorul

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	2500	275	0	275
2	2500	275	0	275
3	2500	275	0	275
4	2500	275	0	275
5	2500	275	2500	2775

Tabloul de amortizare debitor-terţa parte (4D) este:

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	1418.57	170.23	223.3	393.52
2	1195.27	143.43	250.09	393.52
3	945.18	113.42	280.1	393.52
4	665.08	79.81	313.72	393.52
5	351.36	42.16	351.36	393.52

Se observă că sumele depuse la terţa parte, vor deveni la scadenţă:

$$
\begin{aligned}
r'\left(u'^3 + u'^2 + u' + 1\right) &= 393,52\,(1,4049 + 1,2544 + 1,12 + 1) = \\
&= 1\ 880,75\ (\text{u.m.})\ \blacklozenge
\end{aligned}
$$

Problema 7. Să se întocmească planul de amortizare a unui împrumut în valoare de 2 500 u.m., rambursabil pe timp de 5 ani, cu dobânda anuală 11%, prin achitarea la scadenţă a întregii datorii către creditor şi constituirea sumei datorate la o terţa parte cu dobânda anuală 12%, prin plăţi periodice constante.

Rezolvare. Se cunosc

$$s = 2\,500,\ n = 5,\ p = 11\%,\ p' = 12\%$$

Între debitor şi creditor procentul este p, iar modelul de amortizare directă este 1D; între debitor şi terţa parte procentul este p', iar modelul de amortizare directă este 4D. În concluzie, este vorba de o amortizare indirectă după modelul 2I.

Tabloul de amortizare debitor-creditor (1D) este

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	2500	275	0	0
2	2775	305.25	0	0
3	3080.25	338.83	0	0
4	3419.08	376.1	0	0
5	3795.18	417.47	3795.18	4212.65

La scadenţă, debitorul trebuie să aibă constituită la terţa parte suma su^n care este datoria pe care o are faţă de creditor şi care, actualizată la momentul iniţial (în raport cu procentul p') este $su^n v'^n$. Deci, la momentul iniţial, datoria debitorului faţă de terţa parte este $su^n v'^n$, sumă care reprezintă valoarea iniţială a unei anuităţi constante, întregi, posticipate, cu rata constantă r'. Are loc următoarea relaţie:

$$\begin{aligned} su^n v'^n &= r'\frac{1 - v'^n}{i'} \\ su^n v'^n &= 2\,390,37 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

de unde obţinem formula de calcul pentru rata r' şi anume

$$\begin{aligned} r' &= \frac{su^n v'^n i'}{1 - v'^n} \\ r' &= \frac{2\,500 \cdot (1,11)^5 \cdot \left(\frac{1}{1,12}\right)^5 \cdot 0,12}{1 - \left(\frac{1}{1,12}\right)^5} \\ r' &= 663,11 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

Tabloul de amortizare debitor-terţa parte (4D) este

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	2390.37	286.84	376.27	663.11
2	2014.1	241.69	421.42	663.11
3	1592.68	191.12	471.99	663.11
4	1120.69	134.48	528.63	663.11
5	592.06	71.05	592.06	663.11

♦

2.4 Teme de control

2.4.1 Dobânzi

necesar:
5 ore

Dobânda simplă

1. Se depune spre fructificare suma de 6500 u.m. pe timp de 3 luni, cu o rată anuală a dobânzii de 4,5%. Să se calculeze dobânda şi suma finală obţinute.

   Răspuns. $D = 73,125$ u.m., $S = 6573,125$ u.m.

2. Cu ce rată anuală a dobânzii a fost împrumutată sumă de 3000 lei pe 7 luni astfel încât suma finală datorată să fie 3500 lei? Cât este dobânda semestrială echivalentă?

   Răspuns. $i = 28,57\%$, $i_2 = 14,29\%$.

3. O persoană obţine, prin depunerea unei sume de bani la bancă din data de 21 martie 2012 până în data de 13 octombrie 2012, la o rată anuală a dobânzii de 7,5%, suma de 7509 u.m. Ce sumă a depus persoana respectivă la bancă?

   Răspuns. $s = 7200$ u.m.

4. Pe ce perioadă de timp trebuie să depună o persoană suma de 5000 lei astfel încât, dacă banca practică o rată anuală a dobânzii de 9%, suma pe care o poate retrage la sfârşitul perioadei să fie de 5225 lei

   Răspuns. $t = \frac{1}{2}$, 180 zile sau 6 luni.

5. O persoană reuşeşte să economisească bani şi să şi depună într-un cont la bancă. Ea deschide un depozit de economii la începutul anului de 2000 lei, după 2 luni unul de 1000 lei, iar după încă 3 luni mai face un depozit de 3000 lei. Ce sumă poate ridica persoana la sfârşitul anului dacă rata anuală a dobânzii a fost de 12%?

   Răspuns. $S = 6550$ lei.

6. Dacă timp de patru luni o persoană depune în acelaşi cont, în fiecare dată de 5 a lunii, câte 1000 lei cu o rată anuală a dobânzii de 7%, de ce sumă va dispune la sfârşitul celei de a patra luni?

   Răspuns. $S = 4058,6746$ lei.

7. Aveţi posibilitatea de a alege să primiţi suma de 990 u.m. azi, 995 u.m. peste o lună sau 1000 u.m. peste 3 luni. Ce variantă veţi alege, dacă vorbim de o rata anuală a dobânzii de 8%?

   Răspuns. 990 u.m.

8. O persoană dispune de 2 sume de bani totalizând 24000 u.m. Persoana plasează prima sumă (mai mică) pe 9 luni cu i=4% iar pe a doua sumă pe 8 luni cu i=6%. Ştiind că dobânda adusă de cele două sume este de 880 u.m. determinaţi cele 2 sume iniţiale.

   Răspuns. $s_1 = 8000$ u.m., $s_2 = 16000$ u.m.

9. O persoană dispune de 3 sume de bani în progresie aritmetică cu raţia de 3000 u.m. Persoana plasează aceste trei sume pe o perioadă de un an, cu rate anuale ale dobânzii aflate în progresie geometrică cu raţia 3/2. Ştiind că dobânda totală realizată este de 1100 u.m. şi că cea mai mare sumă aduce o dobândă de 9 ori mai mare decât cea mai mică sumă, determinaţi cele 3 sume iniţiale precum şi ratele anuale ale dobânzii aferente lor.

   Răspuns. $s_1 = 2000$ u.m., $s_2 = 5000$ u.m., $s_3 = 8000$ u.m., $i_1 = 4\%$, $i_2 = 6\%$, $i_3 = 9\%$.

Dobânda compusă

1. O persoană depune la o bancă 5300 lei. Ştiind că rata anuală a dobânzii este de 5,6% calculaţi suma pe care persoana o va ridica peste 3 ani, respectiv 5 ani. Care este valoarea dobânzii acumulate pe perioadele respective? Cât este dobânda unitară trimestrială echivalentă i_4?

   Răspuns. $S_{3\text{ ani}} = 6241,19$ lei, $D_{3\text{ ani}} = 941,19$ lei, $S_{5\text{ ani}} = 6959,78$ lei, $D_{5\text{ ani}} = 1659,78$ lei, $i_4 = 0,0137 = 1,37\%$.

2. Se depun spre fructificare 1000 euro pe 4 ani. Cu ce rata anuală a dobânzii trebuie plasaţi pentru a obţine 1200 euro? Dar dacă plasamentul se face pe 5 ani?

   Răspuns. $i = 4,66\%$ (4 ani), $i = 3,71\%$ (5 ani).

3. Pe câţi ani trebuie să depunem 150 euro astfel încât să putem ridica 190 euro? Dar să dublăm o sumă de bani? Ştim că rata anuală a dobânzii este 3,75%.

   Răspuns. n=7 ani respectiv n=19 ani.

4. Ce sumă a fost depusă de către o persoană, dacă după 6 ani are în contul său 125000 lei? Ştim că rată anuală a dobânzii a fost de 8%.

   Răspuns. $s = 78771,21$ lei.

5. Aflaţi suma finală şi dobânda pentru un depozit de 4500 u.m. pe 7 ani dacă în primii 4 ani rata anuală a dobânzii a fost 6,7% iar în următorii 3 ani a fost 4,8%.

   Răspuns. $S = 6713,58$ lei, $D = 2213,58$ lei.

6. Ce sumă iniţială a fost depusă într-un cont, în urmă cu 5 ani, dacă suma finală care se poate ridica de la bancă este acum de 8288,21 lei. Se ştie că în primii 3 ani rata anuală a dobânzii a fost 5,67% iar în ultimii 2 ani, 8,2%.

   Răspuns. $s = 6000$ lei.

Dobanda nominala

1. Să se calculeze suma finală după 3 ani pentru un depozit de 4780 lei la o rată anuală a dobânzii de 4,8% cu capitalizare lunară. Cât este dobânda unitară efectivă?

   Răspuns. $S = 5518,75$ lei, $i = 4,91\%$.

2. Un capital de 7000 lei a crescut în 10 luni la suma de 7419,21 lei. Să se determine dobânzile anuale nominală şi efectivă, dacă vorbim de un depozit cu capitalizare lunară.

   Răspuns. $\rho = 7\%$, $i = 7,23\%$.

3. Cu ce rata nominală a dobânzii se va tripla o sumă în 3 ani dacă se face capitalizare lunară? Care va fi dobânda unitară efectivă?

   Răspuns. $\rho = 37,18\%$, $i = 44,22\%$.

4. Cu ce rata nominală a dobânzii se va dubla o sumă în 8 ani dacă se face capitalizare la 3 luni? Care va fi dobânda unitară efectivă?

   Răspuns. $\rho = 8,7588\%$, $i = 9,0508\%$.

2.4.2 Împrumuturi

necesar: 5 ore

Anuităţi

1. O persoană cumpără un bun în valoare de 5000 RON, plătind un avans de 20%, restul urmând să fie achitat în rate egale, timp de 3 ani, cu o rată anuală a dobânzii de 12%. Să se determine valoarea unei rate şi, în funcţie de aceasta, valoarea cumulată a tuturor ratelor la sfârşitul celor trei ani, dacă plata are loc:

   (a) la sfârşitul respectiv începutul fiecărui trimestru;

   (b) la sfârşitul respectiv începutul fiecărei luni;

   (c) la sfârşitul respectiv începutul fiecărui an;

   Răspuns. (a) $401,84$ RON; $5703,04$ RON; $390,14$ RON; $5703,4$ RON;
   (b) $132,85$ RON; $5723,07$ RON; $131,54$ RON; $5723,07$ RON;
   (c) $1665,39$ RON; $5619,71$ RON; $1486,96$ RON; $5619,71$ RON.

2. Să se calculeze rata lunară de plătit la fiecare sfârşit de lună pe o perioadă de 15 ani pentru un credit de 40000 EUR, cu o dobândă unitară anuală de $0,13$.

   Răspuns. $506,09$ EUR.

3. Să se calculeze rata semestrială care trebuie plătită pentru un împrumut de 43000 RON pe o perioadă de 25 de ani cu o dobândă unitară semestrială de $0,055$, dacă plăţile se fac la fiecare început de semestru.

   Răspuns. $2407,24$ RON.

4. Să se calculeze ce rată anuală trebuie plătită la fiecare sfârşit de an pentru un credit de 78000 RON contractat pe 30 de ani, cu o rată anuală a dobânzii de $4,68\%$.

   Răspuns. $4890,44$ RON.

5. Dl. Q. vrea să compare mai multe variante de plăţi în rate pentru un credit de 15000 EUR pe care doreşte să-l ramburseze în 7 ani. Banca îi oferă o rată anuală a dobânzii de 14%. Care ar fi valoarea unei rate dacă ar face plăţile anual, la sfârşit de an? Dar dacă ar plăti lunar, la sfârşit de lună? Dar la fiecare sfârşit de trimestru? Comparând valorile acumulate ale ratelor, care variantă este mai avantajoasă pentru bancă?

   Răspuns. $3497,88$ EUR, $281,10$ EUR, $849,03$ EUR; $37534,03$ EUR, $39740,76$ EUR, $39302,57$ EUR.

6. Dna E. a luat acum doi ani un credit de 12000 RON, contractat pe o perioada de 4 ani cu o rată anuală al dobânzii de 17%, plătind pentru el rate lunare la fiecare sfârşit de lună. Care este valoarea ratei pe care o plăteşte? Care este valoarea acumulată a ratelor în prezent ($t = 2$)?

   Răspuns. $346,26$ RON; $16819,19$ RON.

7. Se consideră un credit în valoare de 50000 RON, rambursat prin plăţi periodice semestriale. În care din variantele următoare valoarea ratei este mai mică? Dar valoarea totală cumulată a ratelor dacă plăţile se fac posticipat?

   - cu o rată anuală a dobânzii de 8% pe o perioadă de 10 ani;
   - cu o rată anuală a dobânzii de 4% pe o perioadă de 20 de ani.

   Răspuns. $3679,08$ RON; $109556,06$ RON; $1827,78$ RON; $110401,98$ RON.

8. Să se calculeze rata anuală care trebuie plătită la fiecare început de an pentru un credit în valoare de 12500 EUR, pe o perioadă de 10 ani, cu dobândă unitară anuală de $0,055$.

   Răspuns. $1571,89$ EUR.

9. Ce sumă se acumulează într-un cont în care se depun lunar, la sfârşit de lună, 300 EUR, pe o perioadă de 2 ani, dacă rata anuală a dobânzii este de $2,15\%$.

   Răspuns. $7350,31$ EUR.

Rambursări directe întregi

1. Să se întocmească tabelul de amortizare pentru împrumutul de 2005 u.m., prin cote constante, pe timp de 5 ani, cu dobânda anuală de 12%.

   Răspuns. Modelul 3D, cu $Q = 401$ u.m.

2. Să se întocmească tabelul de amortizare a unui împrumut de 49000 RON pe timp de 7 ani, cu i=16%, dacă la sfârşitul fiecărui an se rambursează aceeaşi cotă din împrumut, la care se adaugă dobânda aferentă acelei perioade.

   Răspuns. Modelul 3D, cu $Q = 7000$ RON

3. O persoană împrumută de la o bancă suma de 10000 lei pe timp de 5 ani cu dobânda anuală de 15%. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător acestui împrumut ştiind că la sfârşitul fiecărui an se va rambursa aceeaşi parte din suma împrumutată la care se adaugă dobânda aferentă acelei perioade. Să se determine suma plătită efectiv de către debitor.

   Răspuns. Modelul 3D, cu $Q = 2000$ lei. Suma plătită efectiv este de 14500 lei.

4. O persoană împrumută de la o bancă suma de 10000 lei pe timp de 5 ani cu dobânda anuală de 15%. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător acestui împrumut, ştiind că întreaga datorie este returnată prin plata unei sume constante la sfârşitul fiecărui an. Să se determine de asemenea şi suma plătită efectiv de către persoana respectivă.

   Răspuns. Modelul 4D, cu $r = 2983.16$. Suma efectiv plătită este 14915.80 lei.

5. O persoană cumpără un bun în valoare de 14000 RON, urmând ca valoarea acestui bun să o ramburseze prin plăţi periodice constante posticipate pe timp de 6 ani, cu dobânda anuală de 13%. Să se întocmească tabelul de amortizare corespunzător acestui împrumut.

   Răspuns. Modelul 4D, cu $r = 3502,15$ RON

6. În vederea achiziţionării unei locuinţe, o persoană împrumută de la o bancă suma de 45000 u.m., pe timp de 6 ani, cu procentul anual de 10, urmând ca rambursarea să aibă loc prin plăţi periodice constante, plătibile la sfârşitul fiecărui an. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător acestui împrumut.

   Răspuns. Modelul 4D, cu $r = 10332,33$ u.m.

7. Ce rată ar trebui să plătească la începutul fiecărui an, o persoană ce doreşte să împrumute 7000 lei, pe 3 ani, cu i=4%? Care este valoarea cumulată a acestor rate la sfârşitul celor 3 ani? Faceţi tabelul de rambursare pe cei 3 ani.

   Răspuns. Modelul 4D, cu $r = 2425,42$ lei. Valoarea cumulată a ratelor este de $7874,04$ lei.

Rambursări (amortizări) prin Fond de acumulare

1. O persoană împrumută de la o bancă suma de 15000 $ pe 4 ani cu un i=10%. Persoana plăteşte creditorului dobânzile aferente la sfârşitul fiecărui an, iar suma împrumutată o constituie la o altă bancă prin rate egale posticipate pe timp de 4 ani cu i'=11%. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător.

   Răspuns. Modelul 1FA, cu $r' = 3184,89$ $

2. O persoană împrumută de la o bancă 20000 €, pe timp de 4 ani cu o rată anuală a dobânzii de 9%. Persoana în cauză plăteşte creditorului dobânzile la sfârşitul fiecărui an, iar suma împrumutată o constituie la o altă bancă, într-un fond de acumulare, pe timp de 4 ani, cu rata anuală a dobânzii de 11%, plătind la sfârşitul fiecărui an o aceeaşi rată. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător fondului de acumulare.

   Răspuns. Modelul 1FA, cu $r^{'} = 4246,53$ €

3. O persoană împrumută de la o instituţie financiară suma de 12500 u.m., pe timp de 3 ani, cu i=10%. Debitorul urmează să restituie creditorului întreaga datorie la scadenţă, iar această sumă o va constitui la o altă instituţie financiară, prin plăţi periodice constante posticipate, pe timp de 3 ani, cu dobânda anuală de 12%. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător.

   Răspuns. Modelul 2FA, cu $r^{'} = 4930,50$ u.m.

4. O persoană împrumută de la o bancă suma de 7500 €, pe timp de 5 ani cu i=10%. Persoana respectivă plăteşte creditorului întreaga datorie la scadenţă, iar suma datorată o constituie la o altă bancă,într-un fond de acumulare, prin rate egale posticipate, cu i'=9%, pe timp de 5 ani. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător fondului de acumulare.

   Răspuns. Modelul 2FA, cu $r^{'} = 2018,28$ €

5. O persoană împrumută de la bancă suma de 10000 lei pe 5 ani cu i=12%. Persoana în cauză urmează să restituie creditorului dobânzile la sfârşitul fiecărui an, iar suma necesară restituirii sumei împrumutate o va constitui la o altă bancă doi ani mai târziu datei semnării contractului, prin rate egale plătibile la sfârşitul fiecărui an, cu i'=14%. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător.

   Răspuns. Modelul 1FA, cu $r' = 2907,32$ lei

6. O persoană împrumută de la o bancă suma de 7500 euro, la începutul anului 2015, pe timp de 6 ani cu i=10%. Persoana respectivă plăteşte creditorului întreaga datorie la scadenţă, iar suma datorată o constituie la o altă bancă prin plăţi periodice constante posticipate, cu i'=9%, pe timp de 4 ani, începând cu anul 2017. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător.

   Răspuns. Modelul 2FA, cu $r' = 2905,39$ €.

Bibliografie 1. Colectiv, Elemente de matematici financiare şi actuariale. Teorie şi probleme, Editura Mega 2013.

2. Muresan A. S., Filip D. A. , Ban I. M., Hangan A., *Operatiuni financiare*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2005.

3 MODULUL II. MATEMATICI ACTUARIALE

Obiective

- Familiarizarea cu tehnicile si metodele utilizate in cadrul matematicilor actuariale
- Definirea notiunilor de plata viagera unica, anuitati viagere, plati in caz de deces, asigurari de persoane si bunuri

Concepte de baza

- Functii biometrice (probabilitati de viata si de deces, functia de supravietuire, viata medie, tabele de mortalitate)
- Plati viagere (plata viagera unica, anuitati viagere)
- Plati in caz de deces (plata unica in caz de deces, anuitati de deces)
- Asigurari de persoane. Rezerva matematica.
- Asigurari de bunuri

Rezultate asteptate

In urma parcurgerii acestui modul se asteapta ca studentii sa cunoasca si sa opereze cu notiunile introduse, sa fie in stare sa le aplice la problemele concrete.

Sinteza

3.1 UNITATEA 1. Funcţii biometrice

necesar: 1 oră

1.1. Introducere

Noţiunea de asigurare de persoane vizează modurile în care se poate face o plată, nu în mod cert ci numai probabil, dacă se realizează anumite evenimente ce privesc viaţa sau decesul unei persoane asigurate. Studiul acestor fenomene de viaţă şi de deces poate fi realizat datorită unor caracteristici ce li se pot atribui. Cea mai importantă caracteristică este mortalitatea. Intensitatea mortalităţii este dată de anumiţi coeficienţi numerici. Aceştia pot lua mai multe valori, variaţia fiecăruia prezentând un aspect funcţional în sensul că în general variabila independentă este vârsta, iar funcţia (variabila dependentă) este mortalitatea.

1.2. Probabilităţile de viaţă şi de deces

Se consideră o colectivitate în care toţi indivizii au aceeaşi vârstă - x ani. Se poate pune întrebare: care este probabilitatea ca o persoană în vârstă de x ani să fie în viaţă la vârsta de y ani, $y \geq x$. Răspunsul este exprimat prin probabilitatea de viaţă, notată prin simbolul $p(x,y)$. Probabilitatea evenimentului contrar, ca persoana în vârstă de x ani să nu fie în viaţă la y ani, este probabilitatea de deces pe care o vom nota cu simbolul $q(x,y)$. Între cele două notaţii are loc relaţia corespunzătoare probabilităţilor unor evenimente contrare

$$p(x,y) + q(x,y) = 1$$

Cazuri particulare:

1) Dacă $y = x+1$ vom scrie $p(x,y) = p(x,x+1) = p_x$ care este probabilitatea ca persoana în vârstă de x ani să fie în viaţă peste 1 an, respectiv $q(x,y) = q(x,x+1) = q_x$, care este probabilitatea ca persoana în vârstă de x ani să nu mai fie în viaţă peste 1 an. Evident, avem: $p_x + q_x = 1$.

2) Dacă $y = x+n$ vom scrie $p(x,y) = p(x,x+n) =_n p_x$ care este probabilitatea ca persoana în vârstă de x ani să fie în viaţă peste n an, respectiv $q(x,y) = q(x,x+n) =_n q_x$ care este probabilitatea ca persoana în vârstă de x ani să nu mai fie în viaţă peste n an. Evident, avem: ${}_n p_x +_n q_x = 1$. ⧫

Observaţie: Probabilităţile de viaţă şi de deces se determină pe cale experimentală studiind o mare colectivitate de persoane care trăiesc în aceleaşi condiţii. Cu aceste probabilităţi se întocmesc tabele.

1.3. Funcţia de supravieţuire

Una dintre cela mai importante caracteristici ce se regăsesc în teoria asigurărilor este funcţia de supravieţuire.

Considerăm o colectivitate de persoane, toate având aceeaşi vârstă de a ani şi notăm cu l_a volumul colectivităţii (numărul de persoane ce formează respectiva colectivitate).

Definiţie. Se numeşte funcţie de supravieţuire l_x numărul mediu de persoane din cele l_a care vor fi în viaţă la vârsta de x ani ($a \le x$).⧫

Observaţie. Funcţia de supravieţuire depinde deci de vârsta persoanei asigurate şi se defineşte ca valoarea medie a numărului de persoane care ajung la vârsta de x ani dintr-un număr de l_a persoane în vârstă de a ani ⧫

Pentru a exprima valoarea funcţiei l_x vom construi o variabilă aleatoare Z pentru care $M(Z) = l_x$. Notăm cu z numărul persoanelor în viaţă la x ani şi cu $p(a,x)$ probabilitatea ca o persoană în vârstă de a ani să fie în viaţă la vârsta de x ani. Persoanele din colectivitate trăiesc în aceeaşi zonă, în aceleaşi condiţii şi astfel putem aprecia că distribuţia variabilei aleatoare Z este o distribuţie binomială (dacă experienţa se repetă de mai multe ori în aceleaşi condiţii, deci dacă probabilitatea de a se realiza un eveniment nu se modifică la diverse repetări ale experienţei, atunci distribuţia binomială este cea care trebuie realizată, iar pentru variabila aleatoare, Z, $p(a,x)$ are aceeaşi valoare pentru orice persoană din colectivitate).

Facem precizarea că distribuţia binomială, în general, are forma:

$$X : \begin{bmatrix} x \\ C_n^x p^x q^{n-x} \end{bmatrix}_{x=\overline{0,n}}$$

pentru care valoarea medie este: $M(X) = np$, iar dispersia este $D^2(X) = npq$.

În cazul nostru, variabila este notată cu Z, valorile variabilei sunt z, $n = l_a$, $p = p(a,x)$, $q = q(a,x)$.Astfel obţinem

$$Z : \begin{bmatrix} z \\ C_{l_a}^z \left(p(a,x)\right)^z \left(q(a,x)\right)^{l_a - z} \end{bmatrix}_{z=\overline{0,l_a}}$$

Conform formulei de mai sus pentru media distribuţiei binomiale, obţinem

$$M(Z) = l_x = p(a,x) \cdot l_a$$

de unde rezultă imediat

$$p(a,x) = \frac{l_x}{l_a} \ ⧫$$

Considerăm în cele ce urmează $a \le x \le y$. Extinzând rezultatele, putem spune că evenimentul ca o persoană în vârstă de a ani să fie în viaţă la vârsta de y ani este dat de intersecţia a doua evenimente dependente şi anume: primul, ca persoana în vârstă de a ani să fie în viaţă la x ani şi al doilea, ca persoana în vârstă de a ani (şi care a ajuns la vârsta de x ani) să fie în viaţă şi la y ani. Respectând formula pentru probabilitatea intersecţiei a două evenimente dependente se poate scrie:

$$p(a,y) = p(a,x) \cdot p(x,y)$$

unde $p(x,y)$ este de fapt o probabilitate condiţionată. Din această relaţie, se obţine

$$p(x,y) = \frac{p(a,y)}{p(a,x)}$$

adică obţinem exprimarea probabilităţii de viaţa cu ajutorul funcţiei de supravieţuire

$$p(x,y) = \frac{l_y}{l_x}$$

dacă s-a făcut simplificarea cu l_a. ♦

1.4. Viaţa medie

A treia funcţie biometrică importantă este viaţa medie. Pentru a o defini considerăm o persoană în vârstă de x ani. Trebuie evidenţiat în cele ce urmează numărul de ani câţi mai are de trăit această persoană. Pentru simplificarea calculelor, admitem următoarea ipoteză simplificatoare: persoana, oricare ar fi ea, decedează la jumătatea unui an, deci admitem că o persoană de o anumită vârstă de x ani mai are de trăit un număr întreg de ani şi jumătate.

Notăm cu Z variabila aleatoare ce reprezintă numărul de ani şi jumătate câţi mai are de trăit o persoană în vârstă de x ani.

$$Z : \begin{bmatrix} n + \frac{1}{2} \\ {}_{n/n+1}q_x \end{bmatrix}_{n=0,1,\ldots}$$

unde ${}_{n/n+1}q_x$ este probabilitatea ca persoana să decedeze între $x+n$ şi $x+n+1$ ani (la jumatatea anului), adică

$${}_{n/n+1}q_x = p(x, x+n) \cdot q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \left(1 - \frac{l_{x+n+1}}{l_{x+n}}\right) = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}$$

Definiţie. Viaţa medie, notată cu simbolul e_x, se defineşte ca valoarea medie a numărului de ani câţi mai are de trăit o persoană în vârstă de x ani. ♦

Prin urmare, $e_x = M(Z)$ şi are valoarea

$$e_x = \sum_{n \geq 0} \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}$$

sau, dezvoltând suma, obţinem expresia

$$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{n \geq 1} l_{x+n}. \blacklozenge$$

Observaţie: Lipsa indicelui superior la semnul sumei semnifică faptul ca însumarea este limitată numai la acei indici ai elementelor constitutive pentru care vârsta $x+n$ nu depăşeşte limita de vârstă (practic 100 ani).♦

1.5. Tabele de mortalitate

Pentru a dispune de valorile funcţiilor utilizate, în teoria asigurărilor de persoane, se întocmesc tabele de mortalitate fundamentate pe date statistice şi pe ajustarea acestor date prin diferite metode de calcul. De regulă, tabelele conţin următoarele valori: x - numărul de ani, l_x - funcţia de supravieţuire, d_x - numărul persoanelor decedate între vârsta de x şi $x+1$ ani, p_x - probabilitatea de viaţă, q_x - probabilitatea de deces, e_x - viaţa medie. De asemenea, tabelele conţin şi o serie de „numere de comutaţie" la care vom face referire în cele ce urmează.

Toate numerele utilizate în teoria asigurărilor de persoane se pot deduce prin calcul, pornind, de exemplu, de la numerele l_x.

1.6. Arborescenţa viageră şi de deces

Pentru ilustrarea momentelor în care se efectuează diferite categorii de plăţi, vom construi o arborescenţă (un graf simplificat) ce evidenţiază fenomenul de viaţă, respectiv de deces. Vârfurile arborescenţei simbolizează anii, iar arcele arată faptul că persoana rămâne în viaţă de la un an la altul (arcele superioare) sau că decedează în anul respectiv (acul inferior).

Vom exemplifica arborescenţa viageră şi de deces pentru următoarea situaţie: persoana în vârstă de x ani va fi în viaţă la vârsta de $x+n$ ani şi nu va fi în viaţă la vârsta de $x+n+1$ ani. Astfel vom putea calcula probabilitatea ${}_{n/n+1}q_x$, folosită la determinarea vieţii medii. Aşadar, avem:

p_x $\qquad\qquad\qquad$ p_{x+n-1}

|------↓|- ... ----↓|----------↓

$\boxed{x}$ $\quad$ $\boxed{x+1}$ ... $\boxed{x+n-1}$ $\quad$ $\boxed{x+n}$ $\quad$ $\boxed{x+n+1}$

|___________↑

q_{x*n}

Pe arcele superioare s-au înscris probabilităţile $p_x, ..., p_{x+n-1}$, iar pe arcul inferior probabilitatea q_{x+n}. Deci, evenimentul ca persoana în vârstă de x ani să fie în viaţă la $x+n$ ani are probabilitatea

$$p_x \cdot p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+n-2} \cdot p_{x+n-1} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \cdot ... \cdot \frac{l_{x+n-1}}{l_{x+n-2}} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$
$$= p\left(x, x+n\right) =_n p_x$$

Atunci, evenimentul ca persoana în vârstă de x ani să decedeze între $x+n$ şi $x+n+1$ ani are probabilitatea

$${}_n p_x \cdot q_{x+n} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \left(1 - \frac{l_{x+n+1}}{l_{x+n}}\right) = \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} =_{n/n+1} q_x$$

Observaţie. Dacă într-o arborescenţă viageră şi de deces pot exista mai multe arce superioare, fiecare simbolizând că persoana este în viaţă între cei doi ani consecutivi, există un singur arc inferior şi anume cel care corespunde anului în care are loc decesul. ♦

Exemplu. Să se construiască arborescenţa viageră şi de deces în cazul $x = 49$ şi $n = 2$. Să se explice semnificaţiile probabilităţilor p_{49} , p_{50} , ${}_2p_{49}$ şi q_{51}.

Rezolvare: Vârfurile arborescenţei sunt reprezentate de $49, 50, 51$ şi 52 şi cu ajutorul arcelor vom calcula probabilităţile menţionate. Vom avea următoarea arborescenţă:

p_{49} $\qquad$ p_{50}

|--------↓|--------↓

$\boxed{49}$ $\quad$ $\boxed{50}$ $\quad$ $\boxed{51}$ $\quad$ $\boxed{52}$

|___________↑

q_{51}

Astfel, probabilităţile cerute vor avea următoarele semnificaţii:

- p_{49}- este probabilitatea ca persoana în vârstă de 49 ani să fie în viaţă peste un an, deci la 50 ani;
- p_{50}- este probabilitatea ca persoana în vârstă de 50 ani să fie în viaţă la 51 ani;
- q_{51}- este probabilitatea ca persoana în vârstă de 51 ani să nu fie în viaţă peste un an, la 52 ani;
- ${}_2p_{49}$ - este probabilitatea ca persoana în vârstă de 49 ani să fie în viaţă peste doi an, deci la 51 ani.

Vom calcula aceste probabilităţi cu ajutorul valorilor funcţiei de supravieţuire luate din tabelele de mortalitate, obţinând:

$$\begin{aligned}
p_{49} &= \frac{l_{50}}{l_{49}} = \frac{81077}{81603} = 0,9935541,\\
p_{50} &= \frac{l_{51}}{l_{50}} = \frac{80501}{81077} = 0,9928956,\\
q_{51} &= 1 - p_{51} = 1 - \frac{l_{52}}{l_{51}} = 1 - \frac{79867}{80501} = 0,0078757
\end{aligned}$$

În cazul probabilităţii evenimentului ca persoana în vârstă de 49 ani să fie în viaţă peste 2 ani, adică la 51 ani, se poate utiliza relaţia

$${}_2p_{49} = p_{49} \cdot p_{50} = 0,9935541 \cdot 0,9928956 = 0,9864954$$

sau relaţia

$${}_2p_{49} = \frac{l_{51}}{l_{49}} = \frac{80501}{81603} = 0,9864955 \; \blacklozenge$$

3.2 UNITATEA 2. Plăţi viagere

necesar: 3 ore

2.1. Generalităţi

Aşa cum am mai precizat, în cadrul asigurărilor de persoane, plăţile efectuate de cele două părţi au un caracter aleator. În ceea ce îl priveşte pe asigurat, plata are loc doar dacă este în viaţă la momentul efectuării plăţii, iar asiguratorul va efectua operaţiunea doar dacă se realizează evenimentul stabilit prin contractul de asigurare. Plata se consideră ca fiind o variabilă aleatoare cu distribuţie stabilită. Pentru ca între obligaţiile părţilor contractante să se realizeze principiul echilibrului financiar, se impune egalitatea valorilor medii actuale ale celor două variabile aleatoare: plata efectuată de către asigurator şi plata efectuată de către asigurat, ambele actualizate. În practică, valoarea medie actuală a plăţii (plăţilor) efectuate de către asigurat se numeşte primă de asigurare şi poate fi unică sau periodică, iar valoarea medie actuală a plăţii (plăţilor) efectuate de către asigurator se numeşte sumă asigurată şi poate fi, de asemenea, unică sau periodică. Primele, rezultate din compararea obligaţiilor celor două parţi în momentul semnării contractului de asigurare, se numesc prime matematice (nete), la acestea putându-se adăuga, însă, unele plusuri ca urmare a unor cheltuieli de administrare.

Dacă notăm cu $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ variabilele aleatoare corespunzătoare plăţilor efectuate în cazul mai multor asigurări şi cu Z variabila sumă a acestor variabile, avem egalitatea:

$$Z = Z_1 + Z_2 + ... + Z_n$$

Pentru valorile medii avem relaţia

$$M(Z) = M(Z_1) + M(Z_2) + ... + M(Z_n)$$

Notând cu P - prima, obţinem următoarele relaţii

$$P = M(Z),\ P_1 = M(Z_1),\ ...,\ P_n = M(Z_n)$$

Astfel, putem scrie egalitatea

$$P = P_1 + P_2 + ... + P_n$$

ce exprimă principiul cumulării contractelor.

2.2. Tipuri de plăţi viagere

Definiţie. Plata viageră reprezintă acel tip de plată care se efectuează de (sau către) o persoană atât timp cât ea este în viaţă la momentul efectuării plăţii.

Plata viageră unică

Vom ilustra această plată prin formularea unei probleme.

Considerăm o persoană în vârstă de x ani căreia urmează să i se plătească peste n ani o unitate monetară, dacă va fi în viaţă atunci. Dacă persoana nu va fi în viaţă la $x + n$ ani, atunci nu se va efectua nici o plată. Ne propunem să aflăm care este valoarea medie actuală a acestei plăţi, acum, când persoana este în vârstă de x ani.

Notând cu Z variabila aleatoare care reprezintă plata efectuată, ea va avea următoarea distribuţie

$$Z : \begin{bmatrix} v^n & 0 \\ {}_n p_x & {}_n q_x \end{bmatrix}_{n=0,1,...}$$

Valorile variabilei aleatoare Z sunt sumele actualizate ce se vor plăti după modelul descris mai sus, iar probabilităţile cu care variabila ia aceste valori sunt precizate pe linia a doua. Practic, în cazul nostru, v^n reprezintă valoarea actuală a unităţii monetare (v este factorul de actualizare în operaţia de dobândă compusă) pentru situaţia în care persoana va fi în viaţă peste n ani, iar 0 este valoarea actuală a 0 unităţi monetare, dacă persoana nu este în viaţă peste n ani. De asemenea, avem ${}_n p_x$ - probabilitatea ca o persoană de x ani să fie în viaţă peste n ani, iar ${}_n q_x$ reprezintă probabilitatea evenimentului contrar.

Definiţie. Valoarea medie a variabilei aleatoare Z se numeşte factor de actualizare viager şi se notează cu simbolul ${}_n E_x$. ♦

Deci,

$${}_n E_x = M(Z) = v^n \cdot {}_n p_x$$

sau, folosind relaţia

$$_{n}p_{x}=\frac{l_{x+n}}{l_{x}}$$

factorul de actualizare viager poate fi scris şi sub forma

$$_{n}E_{x}=v^{n}\cdot\frac{l_{x+n}}{l_{x}}=\frac{v^{x+n}\cdot l_{x+n}}{v^{x}\cdot l_{x}}$$

Se introduce următoarea notaţie:

$$D_{x}=v^{x}\cdot l_{x}$$

şi D_x se numeşte număr de comutaţie. Deci, mai putem scrie factorul de actualizare viager astfel

$$_{n}E_{x}=\frac{D_{x+n}}{D_{x}}\ \blacklozenge$$

Anuităţi viagere

Dacă plăţile se fac în mai multe tranşe, fiecare aferentă unui anumit moment de timp, atunci putem extinde problema astfel:

Care este valoarea medie actuală a plăţilor viagere (rate) $S_1, S_2, ..., S_k$ plătibile peste $n_1, n_2, ...n_k$ ani, în condiţiile în care acestea se efectuează dacă persoana de x ani este în viaţă peste $n_1, n_2, ..., n_k$ ani? Aceste plăţi se fac fie de către asigurat, fie de către asigurator şi sunt egale cu S_1 la împlinirea vârstei de $x+n_1$ ani,..., S_k la împlinirea vârstei de $x+n_k$ ani.

Definiţie: Se numeşte anuitate viageră cu ratele $S_1, S_2, ..., S_k$ ansamblul format din momentele de plată $x+n_1$, $x+n_2$,..., $x+n_k$ şi ratele anuităţii. ♦

Dacă notăm cu Z_i variabila ce exprimă efectuarea plăţii viagere corespunzătoare vârstei de $x+n_i$ ani şi cu Z variabila ce exprimă suma plăţilor viagere efectuate, se poate scrie

$$M(Z)=M(Z_1)+M(Z_2)+...+M(Z_k)$$

sau, conform relaţiilor de mai sus,

$$M(Z)=S_1\cdot{}_{n_1}E_x+...+S_k\cdot{}_{n_k}E_x$$

unde, $M(Z)$ reprezintă valoarea actuală a anuităţii viagere.

Anuităţi viagere constante întregi

- **Anuităţi viagere constante întregi posticipate**

Definiţie: Spunem că anuitatea viageră este constantă întreagă posticipată dacă ratele viagere sunt constante, se plătesc la intervale de câte un an, la sfârşitul fiecărui an. ♦

Astfel $S_1 = S_2 = ... = S_k = S = 1\ u.m.$, $n_2 - n_1 = n_3 - n_2 = ... = n_k - n_{k-1} = 1\ an$, $n_j = j$, $j = \overline{1,k}$.

- – **Anuitatea viageră constantă întreagă posticipată imediată nelimitată**

Definiţie: Spunem că anuitatea viageră constantă întreagă posticipată este imediată şi nelimitată, dacă ratele viagere se plătesc începând cu primul an, nelimitat (practic până la decesul persoanei). ♦

Notând cu a_x valoarea medie actuală a unei anuităţi viagere constante întregi posticipate imediate nelimitate, vom obţine

$$\mathrm{a}_x = {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots$$

Introducând numărul de comutaţie

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots$$

anuitatea viageră constantă întreagă posticipată imediată nelimitată se mai poate scrie

$$\mathrm{a}_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

- – **Anuitate viageră constantă întreagă posticipată amânată cu n ani, nelimitată.**

Definiţie: Anuitatea viageră constantă întreagă posticipată spunem că este amânată cu n ani şi nelimitată dacă ratele viagere se plătesc după al n-lea an de la încheierea contractului până la decesul persoanei. ♦

Astfel notând cu ${}_{n|}\mathrm{a}_x$ valoarea medie actuală a acestei anuităţi putem scrie

$${}_{n|}\mathrm{a}_x = {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + \ldots$$

sau

$${}_{n|}\mathrm{a}_x = \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n+2}}{D_x} + \ldots$$

deci

$${}_{n|}\mathrm{a}_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

Exemplu. Vom prezenta soluţia pentru exemplul 1.

Rezolvare. Din enunţul problemei deducem că nepotul va primi la sfârşitul fiecărui an suma constantă de 10 000 u.m. începând cu vârsta de 25 ani. În condiţiile în care acesta are acum doar 12 ani, vorbim despre o anuitate viageră constantă întreagă posticipată amânată cu 13 ani, nelimitată. Deci pentru ca începând cu vârsta de 25 ani, nepotul să primească o sumă de 10 000 u.m. la sfârşitul fiecărui an, în prezent bunicul va trebui să plătească suma (prima) P care este dată de

$$P = S \cdot {}_{13|}\,\mathrm{a}_{12} = 10\,000 \cdot \frac{N_{12+13+1}}{D_{12}}$$

Numerele de comutaţie necesare se iau din tabelul cu procentul 5%, şi avem: $D_{12} = 49\ 785,16$ respectiv $N_{26} = 447\ 220,98$ Rezultă că

$$P = 10\,000 \cdot \frac{447\ 220,98}{49\ 785,16} = 89\,830,2 \text{ u.m.} ♦$$

- – **Anuitate viageră constantă întreagă posticipată imediată, limitată la n ani.**

Anuitatea viageră constantă întreagă posticipată imediată şi limitată la n ani dacă ratele viagere se plătesc începând cu primul an, timp de n ani. ♦

Notând cu simbolul $a_{x:\overline{n|}}$ valoarea medie actuală a acestei anuităţii avem relaţia

$$a_{x:\overline{n|}} = {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_nE_x$$

De fapt avem

$$a_{x:\overline{n|}} = a_x - {}_{n|}a_x$$

adică

$$a_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

- **Anuităţi viagere constante întregi anticipate**

Deosebirea între anuitatea viageră constantă întreagă anticipată şi cea posticipată constă în faptul că la cea anticipată ratele viagere se plătesc la începutul fiecărui an.

În acest caz vom folosi aceleaşi tipuri de anuităţi, dar pentru care vom folosi ä.

Astfel avem următoarele relaţii

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

în cazul **anuităţii viagere constante întregi anticipate imediate şi nelimitate**,

$${}_{n|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

pentru **anuitatea viageră constantă întreagă anticipată amânată cu n ani, nelimitată**, respectiv

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

pentru anuitatea viageră constantă întreagă anticipată imediată, limitată la n ani.

Anuităţi viagere constante fracţionate

Definiţie: Spunem că anuitatea viageră constantă este fracţionată dacă ratele viagere se plătesc pentru fiecare subperioadă în care se împarte anul. ♦

La aceste anuităţi fracţionate se împarte anul în m intervale egale, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. În plus, considerăm că la sfârşitul fiecărei subperioade astfel obţinute, se plătesc câte $\frac{1}{m}$ u.m..

- **Anuităţi viagere constante fracţionate posticipate**

Definiţie: Spunem că anuitatea viageră constantă fracţionată este posticipată dacă ratele viagere se plătesc la sfârşitul fiecărei subperioade. ♦

Pentru simplificarea calculelor vom presupune că, în decursul unui an, factorul de actualizare viager variază liniar. Cu alte cuvinte, punctul de coordonate $\left(x + n + \frac{j}{m}, {}_{n+j/m}E_x\right)$ aparţine dreptei determinată de punctele: $(n, {}_nE_x)$ şi $(n+1, {}_{n+1}E_x)$,adică

$$\frac{{}_{n+j/m}E_x - {}_nE_x}{\frac{j}{m}} = \frac{{}_{n+1}E_x - {}_nE_x}{1}$$

Rezultă că

$${}_{n+j/m}E_x = \frac{j}{m} \cdot ({}_{n+1}E_x - {}_nE_x) + {}_nE_x, \quad n \geq 0$$

- **– Anuitatea viageră constantă fracţionată posticipată imediată nelimitată**

Definiţie: Spunem că anuitatea viageră constantă fracţionată posticipată este imediată nelimitată dacă ratele viagere de câte $\frac{1}{m}$ u.m. se plătesc la sfârşitul fiecărei subperioade începând cu primul an până la decesul persoanei. ♦

Dacă notăm valoarea medie actuală a unei anuităţi viagere constante fracţionate posticipate imediate nelimitate cu $a_x^{(m)}$, obţinem

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot ({}_{1/m}E_x + {}_{2/m}E_x + \ldots) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{n \geq 0} \sum_{j=1}^{m} {}_{n+j/m}E_x =$$
$$= \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{N_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{m+1}{2m}$$

deci

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \mathrm{a}_x - \frac{m+1}{2m}$$

Notând cu:

$$N_x^{(m)} = N_x - \frac{m-1}{2m} \cdot D_x$$

vom obţine:

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \frac{N_x^{(m)}}{D_x} - \frac{1}{m}$$

- **– Anuitatea viageră constantă fracţionată posticipată amânată cu *n* ani**

Definiţie: Spunem că anuitatea viageră constantă fracţionată posticipată este amânată cu n ani dacă ratele viagere de câte $\frac{1}{m}$ u.m. se plătesc începând cu al n-lea an până la decesul persoanei. ♦

Notând cu ${}_{n|}\mathrm{a}_x^{(m)}$ valoarea medie actuală a acestei anuităţi şi ţinând cont că

$$\mathrm{a}_x^{(m)} = \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{m-1}{2m} \cdot \frac{N_x}{D_x}$$

vom putea scrie

$${}_{n|}\mathrm{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \cdot ({}_{n+1/m}E_x + {}_{n+2/m}E_x + \ldots) = \mathrm{a}_{x+n}^{(m)} \cdot {}_nE_x$$

Sau dacă avem în vedere că

$$\mathrm{a}_{x+n}^{(m)} = \mathrm{a}_{x+n} + \frac{m-1}{2m}$$

rezultă

$${}_{n|}\mathrm{a}_{x}^{(m)} = \mathrm{a}_{x+n} \cdot_n E_x + \frac{m-1}{2m} \cdot_n E_x$$

Ştiind însă că

$$\mathrm{a}_{x+n} \cdot_n E_x =_{n|} \mathrm{a}_x$$

expresia finală este

$${}_{n|}\mathrm{a}_{x}^{(m)} =_{n|} \mathrm{a}_x + \frac{m-1}{2m} \cdot_n E_x$$

- – **Anuitatea viageră constantă fracţionată posticipată imediată limitată la n ani**

Definiţie: Spunem că anuitatea viageră constantă fracţionată posticipată este imediată şi limitată la n ani dacă ratele viagere de câte $\frac{1}{m}$ u.m. se plătesc începând cu primul an, timp de n ani. ♦

Notăm cu $\mathrm{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}$ valoarea medie actuală a acestei anuităţi şi ea va fi dată de relaţia

$$\mathrm{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \mathrm{a}_{x}^{(m)} -_{n|} \mathrm{a}_{x}^{(m)}$$

- **Anuităţi viagere constante fracţionate anticipate**

Deosebirea între anuitatea viageră constantă fracţionată anticipată şi cea posticipată constă în faptul că la cea anticipată ratele viagere de câte $\frac{1}{m}$ u.m. se plătesc la începutul fiecărei subperioade din fiecare an.

Deoarece plata ratelor se face încă de la începutul primei subperioade, avem

$$\ddot{\mathrm{a}}_{x}^{(m)} = \frac{1}{m} + \mathrm{a}_{x}^{(m)}$$

Folosind relaţia de calcul a anuităţii viagere constante fracţionate posticipate imediate nelimitate vom putea scrie următoarea expresie

$$\ddot{\mathrm{a}}_{x}^{(m)} = \frac{N_x^{(m)}}{D_x}$$

Analog, pentru **anuitatea constantă fracţionată anticipată amânată cu n ani nelimitată**, putem scrie

$${}_{n|}\ddot{\mathrm{a}}_{x}^{(m)} =_{n|} \ddot{\mathrm{a}}_x - \frac{m-1}{2m} \cdot_n E_x$$

Pentru **anuitatea viageră constantă fracţionată anticipată imediată limitată la n ani** avem

$$\ddot{\mathrm{a}}_{x:\overline{n|}}^{(m)} = \ddot{\mathrm{a}}_{x}^{(m)} -_{n|} \ddot{\mathrm{a}}_{x}^{(m)}$$

3.3 UNITATEA 3. Plăţi în caz de deces

necesar: 1 oră

Dacă în cazul plăţilor viagere evenimentul aleator care condiţiona efectuarea acestora a fost ca persoana să fie în viaţă la momentele efectuării plăţilor viagere, acum, la plăţile în caz de deces evenimentul aleator presupune că decesul persoanei are loc într-un interval precizat.

3.1. Plata unică în caz de deces

Ne fixăm din nou atenţia asupra unei persoane în vârstă de x ani. Pentru simplificarea calculelor se face următoarea presupunere: persoana, oricare ar fi ea, decedează exact la mijlocul unui an. Cu alte cuvinte, o persoană mai are de trăit n ani şi jumătate. Dacă persoana în cauză decedează între $x+n$ şi $x+n+1$ ani, la jumătatea anului (conform convenţiei de mai sus), familia sa (sau persoana indicată de aceasta) va primi 1 u.m. Dacă persoana nu decedează la momentul indicat, atunci nu se va efectua nici o plată.

Problema care se pune aici constă în a determina care este valoarea medie actuală a plăţii unice în caz de deces descrisă mai sus. În acest sens considerăm variabila aleatoare Z care are drept valori, valorile actualizate ale sumelor ce se plătesc în caz de deces. Această variabilă aleatoare are următoarea distribuţie

$$Z : \begin{bmatrix} 0 & v^{n+1/2} \\ 1 - {}_{n/n+1}q_x & {}_{n/n+1}q_x \end{bmatrix}$$

unde $v^{n+1/2}$ reprezintă valoarea actuală a unei unităţi monetare plătibile peste n ani şi jumătate, iar

$${}_{n/n+1}q_x = {}_n p_x \cdot q_{x+n}$$

reprezintă probabilitatea ca o persoană în vârstă de x ani să decedeze între $x+n$ şi $x+n+1$ ani, exact la jumătatea anului.

Definiţie: Se numeşte factor de actualizare în caz de deces valoarea medie a variabilei aleatoare Z de mai sus. ♦

Notăm cu simbolul ${}_nD_x$ acest factor şi avem

$$\begin{aligned}
{}_nD_x = M(Z) &= v^{n+1/2} \cdot {}_{n/n+1}q_x \\
&= v^{n+1/2} \cdot \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} \\
&= \frac{v^{x+n+1/2} \cdot (l_{x+n} - l_{x+n+1})}{v^x \cdot l_x} \\
&= \frac{v^{1/2} \cdot v^{x+n} \cdot l_{x+n} - u^{1/2} \cdot v^{x+n+1} \cdot l_{x+n+1}}{v^x \cdot l_x} \\
&= \frac{v^{1/2} \cdot D_{x+n} - u^{1/2} \cdot D_{x+n+1}}{D_x} \\
&= \frac{u^{1/2} \cdot (v \cdot D_{x+n} - D_{x+n+1})}{D_x}
\end{aligned}$$

Introducem numărul de comutaţie

$$C_x = u^{1/2} \cdot (v \cdot D_x - D_{x+1}),$$

şi, astfel, se poate scrie

$$ {}_{n}D_x = \frac{C_{x+n}}{D_x} $$

3.2. Anuităţi de deces

Anuităţile de deces sunt acelea pentru care plata în caz de deces se efectuează oricând are loc decesul persoanei, între doi ani dinainte precizaţi. Aici vom întâlni numai cazul întreg, deoarece intervalul dintre două momente când ar fi posibilă efectuarea plăţii este de un an şi decesul persoanei se consideră, conform ipotezei, că va avea loc peste un număr întreg de ani şi jumătate.

Prin intermediul acestei noţiuni suntem interesaţi să vedem care este valoarea medie actuală a mai multor posibilităţi de plată în caz de deces, de câte o unitate monetară şi care urmează a fi plătite o singură dată în cazul în care persoana decedează în anul respectiv.

- **Anuitate de deces imediată şi nelimitată**

Definiţie: Spunem că anuitatea de deces este imediată şi nelimitată dacă plata sumei se va face oricând survine decesul persoanei. ♦

Variabila aleatoare Z aferentă acestei anuităţi se va descompune în variabile aleatoare, $Z_k, k \geq 0$, $Z = \sum\limits_{k \geq 0} Z_k$, Z_k fiind variabile care reprezintă plata unică ce se va efectua pentru doi ani consecutivi, k, $k+1$.Trecând la valorile medii, putem scrie.

$$ M(Z) = \sum_{k \geq 0} M(Z_k) = \sum_{k \geq 0} {}_{k}D_x = \sum_{k \geq 0} \frac{C_{x+k}}{D_x} $$

Introducem un nou număr de comutaţie M_x

$$ M_x = \sum_{k \geq 0} C_{x+k} = \sum_{k \geq 0} u^{1/2} \cdot (v \cdot D_{x+k} - D_{x+k+1}) $$
$$ M_x = u^{1/2} \cdot (v \cdot N_x - N_{x+1}) $$

Astfel, putem scrie

$$ M(Z) = \sum_{k \geq 0} \frac{C_{x+k}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x} $$

Notând $A_x = M(Z)$, adică valoarea actuală medie a anuităţii de deces imediată nelimitată, avem

$$ A_x = \frac{M_x}{D_x} $$

- **Anuitate de deces dublu limitată inferior la m ani (inclusiv) şi superior la n ani (exclusiv)**

Definiţie: Anuitatea de deces spunem că este dublu limitată inferior la m ani (inclusiv) şi superior la n ani (exclusiv) dacă plata se va efectua oricând are loc decesul între $x+m$ ani (inclusiv) şi $x+n$ ani (exclusiv). ♦

Dacă notăm cu ${}_{m|n}A_x$ valoarea medie actuală a acestei anuităţi de deces dublu limitată, vom obţine

$$
{}_{m|n}A_x = M(Z) = \sum_{k=m}^{n-1} {}_kD_m = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{C_{x+k}}{D_x} = \frac{M_{x+m} - M_{x+n}}{D_x}
$$

Astfel avem

$$
{}_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+n}}{D_x}
$$

Observaţii:
Pentru $m = 0$ se obţine **anuitatea de deces imediată limitată la n ani** şi anume

$$
A_{x:\overline{n|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}
$$

Pentru intervalul $[n,.)$ se va obţine **anuitatea de deces amânată cu n ani nelimitată** (practic până la limita de vârstă)

$$
{}_{n|}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}
$$

În scrierea $[n,.)$, "." simbolizează limita de vârstă.

3.4 UNITATEA 4. Asigurări de persoane

necesar:
5 ore

3.4.1 Principiul echilibrului financiar

Din cele prezentate până în acest punct deducem că există o relaţie bine determinată între suma asigurată, S şi prima P, această relaţie având la bază tocmai principiul echilibrului financiar. Legătura dintre cele două variabile are loc indiferent dacă plăţile efectuate de/către o persoană se realizează într-o singură tranşă sau eşalonat. Pentru cazul concret al asigurărilor de persoane, acest principiu se reflectă în egalitatea (la un acelaşi moment de timp) dintre valorile medii actuale ale plăţilor aleatoare plătibile fie în cazul când asiguratul este în viaţă, fie că a decedat, conform prevederilor din contractul de asigurare. Acesta contract este un înscris ce ia naştere în urma acordului de voinţă a celor două părţi contractante (asiguratul şi instituţia de asigurare) şi în care sunt stipulate o serie de elemente.

3.4.2 Asigurarea de viaţă

În contractul de asigurare se stabileşte, între altele, că:

Obligaţiile asiguratului	Obligaţiile instituţiei de asigurare
Asiguratul, în vârstă de x ani plăteşte periodic, anticipat o primă de asigurare, P, timp de k ani.	Asiguratorul va plăti asiguratului o suma, S, când acesta împlineşte $x+n$ ani. Dacă la această vârstă asiguratul nu este în viaţă, instituţia de asigurare nu are nici o obligaţiefinanciară.

În vederea aplicării principiului echilibrului financiar, trebuie să stabilim mai întâi valorile medii actualizate ale obligaţiilor celor două părţi. Astfel, avem

Valoarea medie actuală a unei unităţi monetare ce urmează a fi plătită anticipat, timp de k ani este $_{/k}\text{a}_x$, întrucât avem de-a face cu o anuitate viageră anticipată cu rata de 1 u.m. Deoarece se plătesc P u.m. anticipat, vom avea drept valoare medie actuală $P \cdot \ddot{\text{a}}_{x:\overline{k}|}$.	Valoarea medie actuală a unei unităţi monetare ce se plăteşte peste n ani este: $_nE_x$, întrucât avem de-a face cu o plată viageră unică. Deoarece se plăteşte o sumă, S, vom avea drept valoarea medie actuală, $S \cdot_n E_x$.

Conform principiului echilibrului financiar, putem scrie egalitatea

$$P \cdot \ddot{\text{a}}_{x:\overline{k}|} = S \cdot_n E_x$$

Dacă exprimăm anuitatea întreagă constantă anticipată limitată, $_{/k}\text{a}_x$, respectiv factorul de actualizare viager, $_nE_x$, cu ajutorul numerelor de comutaţie, obţinem

$$P \cdot \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

şi atunci, expresia primei P va fi

$$P = S \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}$$

Cazuri particulare:

1. Pentru $k = 1$ prima se plăteşte o singură dată, altfel spus, avem primă unică. În aceste condiţii diferenţa $N_x - N_{x+1} = D_x$, deci vom obţine

$$P = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

2. Pentru $k = n$ (de obicei $k \le n$) şi $k > 1$, adică atunci când prima nu este unică, ea se va plăti, de obicei, periodic până când asiguratul împlineşte cei $x+n$ ani, deci pe tot timpul asigurării.

În acest moment el va primi de la asigurator suma S. În aceasta situaţie, prima se exprimă sub forma

$$P = S \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

3.4.3 Asigurarea de pensii

Contractul de asigurare prevede, printre altele, următoarele:

Obligaţiile asiguratului	Obligaţiile instituţiei de asigurare
Asiguratul, în vârstă de x ani plăteşte periodic, anticipat o primă, P, timp de k ani.	Asiguratorul va plăti periodic asiguratului o suma (pensie anuală), S, din momentul în care acesta împlineşte $x+n$ ani până la decesul său. Dacă asiguratul decedează înaintea împlinirii vârstei stabilite prin contract, instituţia de asigurare nu are nici o obligaţie financiară.
Valoarea medie actuală a unei unităţi monetare ce urmează a fi plătită anticipat, timp de k ani este $\ddot{a}_{x:\overline{k}|}$, întrucât avem de-a face cu o anuitate viageră cu rata de 1 u.m. Deoarece se plătesc P u.m. anticipat vom avea drept valoare medie actuală $P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$.	Valoarea medie actuală a obligaţiilor asiguratorului este ${}_{n|}\ddot{a}_x$ în cazul unei unităţi monetare, întrucât este vorba de anuitate viageră amânată cu n ani. Deoarece se plăteşte o pensie anuală, S, vom avea drept valoarea medie actuală $S \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$.

Conform principiul echilibrului financiar putem scrie

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = S \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

Procedând analog ca şi în cazul asigurărilor de viaţă prin folosirea numerelor de comutaţie, vom obţine

$$P \cdot \frac{N_x - N_{x+k}}{D_x} = S \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

de unde rezultă

$$P = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}$$

Cazuri particulare:

1. Dacă prima este unică ($k = 1$) şi cum $N_x - N_{x+1} = D_x$, suntem conduşi la următoarea formulă

$$P = S \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

   În situaţia specială că pensia începe a fi plătită de către asigurator chiar din primul an ($n = 0$) rezultă

$$P = S \cdot \frac{N_x}{D_x}$$

2. Şi la asigurarea de pensii putem întâlni cazul în care primele se plătesc până în momentul în care instituţia de asigurare va începe să plătească pensia anuală. De această dată ($k = n$) avem

$$P = S \cdot \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

3. În multe situaţii concrete plăţile se fac fracţionat, pe subperioade ale perioadei de bază. De exemplu, perioada de bază este de 1 an, iar plăţile se fac lunar. Din acest motiv, vom considera că avem de-a face cu m subperioade de plată ($m = 12$ la plăţile lunare), caz în care vom utiliza expresia

$$P = S \cdot \frac{N_{x+n}^{(m)}}{N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}}$$

În această relaţie, numerele de comutaţie se vor calcula cu ajutorul formulei

$$N_x^{(m)} = N_x - \frac{m-1}{2m} \cdot D_x$$

Exemplu. Ca şi aplicaţie la acest tip de asigurare vom rezolva exemplul al doilea prezentat chiar la începutul acestui capitol.

Rezolvare. Suntem în cazul unei asigurări de pensii pentru care cunoaştem: $m = 12$, $x = 40$, $k = n = 30$, $S = 100$ \$, $p = 5\%$. Înlocuind aceste date în formula

$$P = S \cdot \frac{N_{x+n}^{(m)}}{N_x^{(m)} - N_{x+n}^{(m)}}$$

vom obţine

$$P = 100 \cdot \frac{N_{70}^{(12)}}{N_{40}^{(12)} - N_{70}^{(12)}}$$

Din tabelul cu numerele de comutaţie, avem: $N_{40} = 193\ 870,81$, $N_{70} = 13\ 775,38, D_{40} = 12\ 053,29, D_{70} = 1\ 776,45$. Cu ajutorul acestora vom calcula $N_{70}^{(12)}$ respectiv $N_{40}^{(12)}$ astfel

$$N_{70}^{(12)} = N_{70} - \frac{12-1}{2\cdot 12}\cdot D_{70} = 13\ 775,13 - \frac{11}{24}\cdot 1\ 776,45 = 12\ 961,17$$

iar

$$N_{40}^{(12)} = N_{40} - \frac{12-1}{2\cdot 12}\cdot D_{40} = 193\ 870,81 - \frac{11}{24}\cdot 12\ 053,29 = 188\ 346,38$$

Revenind în relaţia de calcul pentru determinarea primei, obţinem

$$P = 100\cdot \frac{12\ 961,17}{188\ 346,38 - 12\ 961,17} = 7,39\ \$$$

În concluzie, pentru ca pensia lunară să fie de 100 $, după 30 ani de la momentul semnării contractului, asiguratul va trebui să plătească, tot lunar, instituţiei de asigurare 7,39 $ timp de 30 ani. ⧫

3.4.4 Asigurare de deces

În contractul de asigurare sunt stipulate, între altele, următoarele:

Obligaţiile asiguratului	Obligaţiile instituţiei de asigurare
Asiguratul, în vârstă de x ani plăteşte anual, anticipat o primă P, timp de k ani.	Dacă asiguratul decedează între vârsta de $x+m$ ani (inclusiv) şi $x+n$ ani (exclusiv), atunci asiguratorul va plăti unei persoane indicate de asigurat suma S.
Valoarea medie actuală a sumelor plătite este $P\cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$.	Valoarea medie actuală a sumei plătite de asigurator este $S\cdot {}_{m|n}A_x$.

Conform principiului echilibrului financiar putem scrie

$$P\cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = S\cdot {}_{m|n}A_x$$

Din această egalitate, folosind numerele de comutaţie pentru cele două anuităţi, obţinem

$$P = S\cdot \frac{M_{x+m} - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}$$

Cazuri particulare:

1. Dacă prima este unică, $k = 1$, atunci $N_x - N_{x+1} = D_x$ de unde rezultă

$$P = S\cdot \frac{M_{x+m} - M_{x+n}}{D_x}$$

2. Dacă $m = 0$ şi $k = n$, ceea ce înseamnă că prima se plăteşte pe tot timpul asigurării, plata sumei S realizându-se doar dacă decesul survine în acest interval, atunci:

$$P = S \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

3. Dacă prima plătită de asigurat este unică, urmând să se primească suma asigurată, S, oricând ar avea loc decesul, de la momentul încheierii contractului şi până la limita de vârstă, adică: $m = 0$ şi $n \to \infty$ (teoretic), avem

$$P = S \cdot \frac{M_x}{D_x}$$

Exemplu. Vom rezolva exemplul al treilea prezentat la începutul capitolului.

Rezolvare. Suntem în situaţia unei asigurări de deces pentru care: $x = 45$, $S = 1\ 000$ u.m., $n = 35$, $m = 0$, $p = 5\%$, $k = 1$ în primul caz şi $k = 35$ în al doilea caz.

În primul caz, formula de calcul este

$$P = S \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

adică

$$P = 1\ 000 \cdot \frac{M_{45} - M_{80}}{D_{45}} = 1\ 000 \cdot \frac{2\ 699,55 - 399,23}{9\ 274,34} = 248,03 \text{ u.m.}$$

În al doilea caz, când prima se plăteşte anual, folosim relaţia

$$P = S \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}$$

Utilizând datele din ipoteză, obţinem

$$P = 1\ 000 \cdot \frac{M_{45} - M_{80}}{N_{45} - N_{80}} = 1\ 000 \cdot \frac{2\ 699,55 - 399,23}{139\ 436,85 - 2\ 452,23} = 16,79 \text{ u.m.} \blacklozenge$$

3.4.5 Asigurare mixtă

Aşa cum s-a putut desprinde din prezentarea anterioară a primelor două tipuri de contracte de asigurare, există situaţii în care instituţia de asigurare este exonerată de la plata sumei asigurate sau a pensiei anuale. Pentru a înlătura acest neajuns, există posibilitatea încheierii unei asigurări mixte ce combină elementele asigurărilor de viaţă şi de deces.

Obligaţiile asiguratului	Obligaţiile instituţiei de asigurare
Asiguratul, în vârstă de x ani plăteşte periodic, anticipat o primă, P, timp de k ani.	Asiguratorul va plăti asiguratului suma S, dacă acesta este în viaţă la $x+n$ ani sau altor persoane indicate de asigurat, dacă acesta din urmă decedează până la $x+n$ ani.
Pentru o unitate monetară, valoarea medie actuală corespunzătoare este $\ddot{a}_{x:\overline{k}|}$. Deoarece se plătesc P u.m. anticipat, valoarea medie actuală va fi: $P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|}$.	Valoarea medie actuală a unei unităţi monetare ce urmează a fi plătită peste n ani, dacă persoana va fi în viaţă atunci, este ${}_nE_x$. Dacă are loc decesul, până la împlinirea vârstei de $x+n$ ani, atunci valoarea medie actuală este $A_{x:\overline{n}|}$.Cumulând cele două situaţii avem ${}_nE_x + A_{x:\overline{n}|}$.Deoarece este vorba de S u.m., valoarea medie actuală va fi $S \cdot \left({}_nE_x + A_{x:\overline{n}|}\right)$.

Conform principiului echilibrului financiar, rezultă egalitatea

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = S \cdot \left({}_nE_x + A_{x:\overline{n}|}\right)$$

de unde

$$P = S \cdot \frac{{}_nE_x + A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{k}|}}$$

Exprimând cu numerele de comutaţie, după simplificări obţinem rezultatul final

$$P = S \cdot \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+k}}$$

Cazuri particulare:

1. Dacă prima este unică, deci $k = 1$, deoarece $N_x - N_{x+1} = D_x$ obţinem

$$P = S \cdot \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

2. Când $k \neq 1$, avem în cele mai multe cazuri $k = n$, şi astfel

$$P = S \cdot \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

4.6. Rezerva matematică

Metode de calcul

Instituţia de asigurare constituie un fond bănesc, numit rezervă matematică, care va fi utilizat pentru efectuarea plăţilor către persoanele asigurate. Pentru a evalua valoarea acestui fond se fixează un moment de evaluare şi se stabileşte cât reprezintă rezerva aferentă fiecărui asigurat la momentul respectiv. Rezerva totală se obţine prin însumarea tuturor acestor rezerve actualizate la momentul de evaluare stabilit. În principal, există două metode fundamentale de determinare a rezervei matematice: metoda prospectivă şi cea retrospectivă. În vederea prezentării celor două metode vom introduce următoarele notaţii relaţii:

t– momentul de evaluare, la care se calculează rezerva matematică,

$D_0^{'}$– datoria instituţiei de asigurare, actualizată la momentul zero,

$D_0^{''}$– datoria asiguratului, actualizată la momentul zero,

$D_t^{'}$– datoria instituţiei de asigurare, actualizată la momentul t,

$D_t^{''}$– datoria asiguratului, actualizată la momentul t,

R_t– cuantumul rezervei matematice la momentul t,

${}_{/t}D_0^{'}$– valoarea actuală a obligaţiilor asiguratorului până la momentul t, evaluată la momentul zero,

${}_{/t}D_0^{''}$– valoarea actuală a obligaţiilor asiguratului până la momentul t, evaluată la momentul zero,

${}_{t/}D_0^{'}$– valoarea actuală a obligaţiilor asiguratorului ulterioare momentului t, evaluată la momentul zero,

${}_{t/}D_0^{''}$– valoarea actuală a obligaţiilor asiguratului ulterioare momentului t, evaluată la momentul zero.

Rezerva matematică calculată prin metoda prospectivă este dată de:

$$R_t = D_t^{'} - D_t^{''},$$

iar prin cea retrospectivă:

$$R_t = \frac{{}_{/t}D_0^{''} - {}_{/t}D_0^{'}}{{}_tE_0}$$

Indiferent de metoda folosită, rezerva matematică are aceeaşi valoare. Pe de o parte, obligaţiile anterioare şi posterioare datei de evaluare a rezervei actualizate, în total dau valoarea actuală a întregii obligaţii:

$$\begin{gathered} {}_{/t}D_0^{'} + {}_{t/}D_0^{'} = D_0^{'}, \\ {}_{/t}D_0^{''} + {}_{t/}D_0^{''} = D_0^{''}, \end{gathered}$$

iar pe de altă parte, obligaţiile actualizate ale celor două părţi sunt egale:

$$D_0^{'} = D_0^{''}$$

Deoarece

$${}_{t/}D_0^{'} = D_t^{\prime} \cdot {}_tE_0 \text{ şi } {}_{t/}D_0^{''} = D_t^{''} \cdot {}_tE_0,$$

rezultă:

$$R_t = \frac{{}_{/t}D_0^{''} - {}_{/t}D_0^{'}}{{}_tE_0} = \frac{\left(D_0^{''} - {}_{t/}D_0^{''}\right) - \left(D_0^{'} - {}_{t/}D_0^{'}\right)}{{}_tE_0}$$
$$= \frac{{}_{t/}D_0^{'} - {}_{t/}D_0^{''}}{{}_tE_0} = \frac{D_t^{'} \cdot_t E_0 - D_t^{''} \cdot_t E_0}{{}_tE_0} = D_t^{'} - D_t^{''}$$

Exemplul 1. Să se calculeze rezerva matematică în cazul unei asigurări de viaţă în următoarele condiţii:

- asiguratul are vârsta de x ani,
- plata primelor P se va face anual anticipat, timp de n ani, din momentul încheierii contractului de asigurare,
- suma asigurată de S u.m. se va încasa peste n ani, de către asigurat, dacă acesta va fi în viaţă atunci.

Rezolvare.

Fiind vorba de o asigurare de viaţă în condiţiile din enunţ, avem:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S \cdot_n E_x$$

$$\Rightarrow P = S \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

————+————+—————+————>

0	t	n	moment de timp (ani)
x	x+t	x+n	vârsta asiguratului

Considerăm că momentul de evaluare $t \in [0, n]$.

Folosind metoda prospectivă datoriile celor două părţi evaluate la momentul t sunt:

$$D_t^{'} = S \cdot_{n-t} E_{x+t}, \quad D_t^{''} = P \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

Atunci:

$$R_t = S \cdot_{n-t} E_{x+t} - P \cdot_{/n-t} \ddot{a}_{x+t}$$
$$= S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} - S \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+t}}$$
$$= S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \left(1 - \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right) = S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}}$$

În cazul metodei retrospective

$${}_{/t}D_0^{''} = P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|}, \quad {}_{/t}D_0^{'} = 0$$

deci

$${}_{/t}D_0^{''} = R_t \cdot_t E_x$$

$$R_t = \frac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x}{{}_tE_x} = S \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x} \cdot \frac{1}{\frac{D_{x+t}}{D_x}} =$$
$$= S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_{x+t}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{N_x - N_{x+n}} \quad \blacklozenge$$

Exemplul 2. Să se calculeze rezerva matematică în cazul unei asigurări de deces în următoarele condiţii:

- asiguratul are vârsta de x ani,

- plata primelor P se va face anual anticipat, pe tot timpul vieţii asiguratului, din momentul încheierii contractului de asigurare,

- suma asigurată de S u.m. se va încasa de către o persoană desemnată de către asigurat, după decesul asiguratului.

Rezolvare. In acest caz avem

$$P \cdot \ddot{a}_x = S \cdot A_x$$

Folosind numerele de comutaţie

$$P \cdot \frac{N_x}{D_x} = S \cdot \frac{M_x}{D_x}$$

deci

$$P = S \cdot \frac{M_x}{N_x}$$

Calculând apoi rezerva matematică prin metoda prospectivă vom obţine

$$R_t = S \cdot A_{x+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t} = S \cdot \left(\frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} \right) \blacklozenge$$

Exemplul 3. Să se calculeze rezerva matematică în cazul unei asigurări de pensii în următoarele condiţii:

- asiguratul are vârsta de x ani,

- plata primelor P se va face anual anticipat, timp de n ani, din momentul încheierii contractului de asigurare,

- pensia anuală de S u.m. se va încasa de către asigurat, peste n ani, pe tot parcursul vieţii sale.

Rezolvare. Prima netă anuală o vom exprima cu ajutorul relaţiei

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x$$

$$\Rightarrow P = S \cdot \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Folosind metoda retrospectivă în calcularea rezervei matematice, vom avea

$$R_t = \frac{P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x} = S \cdot \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \quad \blacklozenge$$

4.7. Alte tipuri de asigurări de persoane

Pe piaţa asigurărilor din România există peste 40 de companii care au dreptul de a incheia asigurări, o parte dintre acestea încheie şi asigurări de persoane, altele decât cele studiate până acum. Fiecare companie are o ofertă proprie de astfel de asigurări. Informaţii referitoare la tipurile de asigurări oferite se pot obţine vizitând site-ul www.1asig.ro. De asemenea se face şi o diferenţă între persoanele fizice şi cele juridice în oferta de asigurări. Astfel avem asigurări pentru

- vânatori şi/sau pescari sportivi, persoane fizice care contracteaza credite bancare, asigurare medicală pentru călătorii în străinătate, a călătorilor prin societăţi specializate de transport călători, a turiştilor prin societăţi specializate de turism sau prin structuri de cazare, a persoanelor din autovehicule închiriate, a componenţilor echipelor sportive, a avocaţilor, notarilor, medicilor liber-profesionişti cu cabinet propriu, a personalului medical, asigurarea individuală de accidente, asigurarea colectivă de accidente, asigurarea managerului, asigurarea de accidente a persoanelor din autovehicul, asigurarea de accidente a taximetriştilor şi a persoanelor transportate de aceştia, asigurarea de accidente a pompierilor, asigurarea facultativă a pasagerilor pe timpul transportului cu nave maritime/ape interioare, asigurarea suplimentară pentru spitalizare şi intervenţii chirurgicale în caz de îmbolnavire şi/sau accident.

4.8. Asigurări de bunuri

Sub acest titlu generic includem următoarele tipuri de asigurări:

- Asigurări de autovehicule, Asigurări maritime şi de transport, Asigurări de aviaţie, Asigurări de bunuri, Asigurări de raspundere civilă, Asigurări de credite si garanţii, Asigurări de pierderi financiare din riscuri asigurate Asigurări agricole, Asigurare Auto Obligatorie (RCA), Asigurări complexe

Pentru exemplificare, la asigurările de bunuri putem întâlni:

- asigurarea locuinţei (incendiu, explozie, cutremur, inundaţii, vandalism, furt prin efracţie şi altele) - suplimentar se pot asigura bunuri casabile, bani şi/sau valori; asigurarea complexă a gospodăriei - se asigură: bunurile din gospodărie; persoanele pentru riscuri de accidente; răspunderea civilă legală decurgând din prejudicii produse terţilor, pentru riscurile întâmplate în gospodaria asigurată; asigurarea bunurilor aparţinând persoanelor juridice; alte asigurări de bunuri, cum ar fi: de avarii accidentale a maşinilor, utilajelor, echipamentelor şi instalaţiilor; de pierdere de profit din întreruperea activităţii; a bunurilor casabile; a echipamentelor electronice; a banilor şi/sau valorilor; a lucrărilor de construcţii-montaj; asigurarea de avarii şi furt a autovehicolelor (CASCO); asigurarea de accidente a conducătorilor şi a altor persoane aflate în autovehicul; asigurarea de răspundere a transportatorului în calitate de cărăus, pentru mărfurile transportate (CMR); asigurarea de răspundere a transportatorului în calitate de cărăus, pentru mărfurile transportate numai pe teritoriul României; asigurarea de răspundere civilă obligatorie auto (RCA); asigurarea de răspundere civilă excedent peste limitele răspunderii la asigurare obligatorie; asigurarea culturilor pentru riscuri generale - se asigură: culturile de cereale; plantele tehnice; culturile de legume şi cartofi; plantele medicinale şi aromatice; culturile furajere; rodul viilor, pomilor fructiferi şi hameiului;

se mai pot asigura: animalele, culturile pentru riscuri specificate prin clauze speciale, serele şi culturile din sere,

- asigurarea bunurilor pe timpul transportului; asigurarea de răspundere a transportatorului pentru pagube produse călătorilor prin accidente de transport; asigurarea facultativă a navelor; asigurarea facultativa a navelor fluviale, navelor de pescuit şi navelor colectoare, precum şi a altor ambarcaţiuni, instalaţii şi utilaje plutitoare, asimilate navelor; asigurarea navelor pe timpul construcţiei; asigurarea facultativă a unităţilor de foraj marin; asigurarea aeronavelor aviaţiei civile; asigurarea riscurilor ce decurg din contractele de leasing încheiate de societatea de leasing cu utilizatorii; asigurarea riscurilor ce decurg din contractele comerciale (de vânzare-cumparare/ distribuţie/ consignaţie) cu plata la termen, integral, sau în rate; asigurarea riscurilor ce decurg din contractele de credit bancar şi/sau comercial, ce au ca destinaţie achiziţionarea de către persoanele fizice a bunurilor casnice, a automobilelor sau locuinţelor;

asigurări de garanţii: garanţii de plată a creditului furnizor, garanţii pentru licitaţii, garantarea plăţii avansurilor.

La aceste tipuri de asigurări, evenimentul aleator care condiţionează efectuarea plăţii sumei asigurate, este evenimentul de producere a daunei. După cum foarte uşor se poate constata, unele dintre asigurările menţionate mai sus sunt obligatorii pentru categoriile de persoane la care se referă, în timp ce alte sunt facultative. Astfel, din categoria celor obligatorii menţionăm RCA şi asigurările de malpraxis (pentru medici, asistenţi medicali, farmacişti).

De remarcat faptul că societăţile de asigurare încearcă să-şi fidelizeze persoanele asigurate oferind poliţe complexe de asigurare (combinând diverse tipuri de asigurare), sau extinderea valabilităţii poliţei Casco pentru extern dacă aceasta este încheiată la aceeaşi firmă de asigurare ca şi RCA.

De menţionat este faptul că din anul 2005 apare o modificare cu privire la asigurarea RCA, aceasta devine o asigurare pe timp nelimitat, cu plata primelor de asigurare semestrial sau anual. De asemenea a apărut obligativitatea unei înştiinţări scrise din partea asiguratului către compania de asigurare, dacă doreşte să schimbe compania, precum şi o declaraţie pe proprie răspundere că nu a asigurat bunul la încă o companie de asigurări.

În ceea ce priveşte cota de primă de asigurare, companiile de asigurare îşi stabilesc cota de primă individual, luând în calcul diverse date. Există însă o asigurare de bunuri, şi anume RCA, pentru care prima de asigurare se stabileşte la nivel guvernamental şi este aceeaşi pentru toate companiile de asigurare.

De la un an la altul, în funcţie de datoriile pe care companiile de asigurare le au către firmele de service unde se repară maşinile care au avut daună, lista cu companiile de asigurare care au dreptul să încheie RCA se modifică. Este important de menţionat că o companie de asigurări care încheie numai RCA, este pusă uşor în imposibilitate de plată, deoarece prima de asigurare acoperă daune foarte mici.

Din anul 2004 a apărut sistemul BONUS-MALUS atât pentru RCA, cât şi pentru Casco. Aceasta înseamnă că dacă într-un an asiguratul a avut daună, în anul următor va trebui să plătească o primă majorată. În funcţie de compania de asigurare, sistemul BONUS funcţionează aplicând reduceri la cota de primă pentru reînnoirea contractului de asigurare, dacă asiguratul nu a avut daună în anul anterior, iar sistemul MALUS funcţionează fie aplicând câte o majorare pentru fiecare daună, fie aplicând diverse cote de majorare în funcţie da rata daunei.

3.5 Probleme rezolvate

Problema 1. Să se calculeze probabilităţile ca o persoană în vârstă de 45 ani să fie în viaţă la 65 ani, respectiv să nu fie în viaţă la această vârstă. Care este viaţa medie?

Rezolvare. Probabilitatea ca o persoană în vârstă de 45 ani să fie în viaţă la 65 ani este dată de

$$p(45,65) = {}_{20}p_{45}$$

Cealaltă probabilitate cerută se referă la evenimentul contrar şi are forma

$$q\,(45,65) =_{20} q_{45}$$

Vom exprima probabilitatea ca o persoană în vârstă de 45 ani să fie în viaţă peste 20 ani utilizând funcţia de supravieţuire, astfel

$$p\,(45,65) = \frac{l_{65}}{l_{45}} = \frac{65\ 068}{83\ 330} = 0,780847233$$

şi

$$q\,(45,65) = 1 - p\,(45,65) = 0,219152767$$

♦

Problema 2. Care este probabilitatea ca o persoană în vârstă de 24 ani să decedeze între 65 şi 70 ani?

Rezolvare. Probabilitatea cerută în enunţul problemei (P) se determină ca probabilitate a două evenimente dependente. Primul eveniment constă în faptul că persoana trebuie să fie în viaţă la 65 de ani, iar cel de-al doilea - ca persoana să decedeze între 65 şi 70 ani. Deci

$$P = p\,(24,65) \cdot q\,(65,70)$$

Dar,

$$p\,(24,65) = \frac{l_{65}}{l_{24}} = \frac{65\ 068}{88\ 010} = 0,739325076$$

respectiv:

$$q\,(65,70) = 1 - p(65,70) = 1 - \frac{l_{70}}{l_{65}} = 1 - \frac{54\ 051}{65\ 068} = 0,169315178$$

Facând produsul valorilor celor două probabilităţi, obţinem

$$P = 0,125178956 \approx 0,125$$

♦

Problema 3. Să se calculeze viaţa medie a unei persoane în vârstă de 90 ani.

Rezolvare. Folosind formula pentru viaţa medie şi anume

$$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \cdot \sum_{n \geq 1} l_{x+n}$$

precum şi valorile funcţiei de supravieţuire obţinem rezultatul

$$\begin{aligned} e_{90} &= 0,5 + \frac{1}{3\ 059} \cdot (2\ 168 + 1\ 487 + 985 + 628 + 384 + 224 + 125 + \\ &= +66 + 33 + 15) = 0,5 + 1,9990192 = 2,4990192 \approx 2,5 \end{aligned}$$

♦

Problema 4. Să se construiască arborescenţa viageră şi de deces în cazul $x = 70$ şi $n = 3$. Să se determine probabilităţile p_{70}, p_{71}, p_{72}, şi ${}_{3/4}q_{70}$.

Rezolvare.
Arborescenţa viageră şi de deces corespunzătoare acestui caz este

```
     p70          p71          p72
  |--------↓|--------↓|--------↓
 [70]      [71]      [72]      [73]      [74]
                               |___________↑
                                    q73
```

Unde:

$$p_{70} = \frac{l_{71}}{l_{70}} = \frac{51\ 363}{54\ 051} = 0,950266919$$
$$p_{71} = \frac{l_{72}}{l_{71}} = \frac{48\ 607}{51\ 363} = 0,946342698$$
$$p_{72} = \frac{l_{73}}{l_{72}} = \frac{45\ 786}{48\ 607} = 0,941963091$$
$$q_{73} = 1 - p_{73} = 1 - \frac{l_{74}}{l_{73}} = 1 - \frac{42\ 920}{45\ 786} = 0,062595553$$

respectiv

$$_{3/4}q_{70} = {_3}p_{70} \cdot q_{73} = p_{70} \cdot p_{71} \cdot p_{72} \cdot q_{73} = 0,053023995 \ \blacklozenge$$

Problema 5. Să se calculeze factorul de actualizare viager $_{22}E_{50}$ cu procentul de actualizare 5%.

Rezolvare. Folosind numerele de comutaţie, obţinem

$$_{22}E_{50} = \frac{D_{70}}{D_{50}} = \frac{1\ 449}{7\ 070,22} = 0,204944117$$

De asemenea, mai putem calcula factorul de actualizare viager pornind de la definiţia sa

$$_{22}E_{50} = v^{22} \cdot \frac{l_{72}}{l_{50}} = \left(\frac{1}{1+0,05}\right)^{22} \cdot \frac{48\ 607}{81\ 077} = 0,204944641$$

Aşa cum era de aşteptat, cele două rezultate coincid. $\blacklozenge$

Problema 6. Care este valoarea actuală medie a anuităţii viagere constante întregi posticipate respectiv anticipate în cazul unei persoane de 43 ani care plăteşte ratele viagere de 50 u.m. timp de 7 ani.

Rezolvare. Presupunem iniţial că plata este de o unitate monetară. În aceste condiţii anuitatea viageră posticipată limitată la 7 ani este

$$\mathrm{a}_{43:\overline{7|}} = \mathrm{a}_{43} - {_{7|}}\mathrm{a}_{43} = \frac{N_{44}}{D_{43}} - \frac{N_{51}}{D_{43}} = \frac{149\ 214,05 - 90\ 603,82}{10\ 304,22} =$$
$$= 5,687983176$$

Dacă ţinem cont de faptul că ratele viagere sunt formate din 50 u.m., atunci

$$50 \cdot \mathrm{a}_{43:\overline{7|}} = 284,4 \text{ (u.m.)}$$

Anuitatea anticipată limitată la 7 ani este

$$\ddot{a}_{43:\overline{7}|} = \frac{N_{43} - N_{50}}{D_{43}} = \frac{159\ 518,28 - 97\ 674,03}{10\ 304,22} = 6,001837111$$

respectiv

$$50 \cdot \ddot{a}_{43:\overline{7}|} = 300,09 \text{ (u.m.)} \quad \blacklozenge$$

Problema 7. Să se determine valoarea medie actuală a anuităţii fracţionate anticipate imediate nelimitată, $a_{38}^{(12)}$.

Rezolvare. Cunoscând că

$$\ddot{a}_{38}^{(12)} = \frac{N_{38}^{(12)}}{D_{38}}$$

unde

$$N_{38}^{(12)} = N_{38} - \frac{11}{24} \cdot D_{38}$$

Căutând apoi valorile numerelor de comutaţie în tabele, avem: $N_{38} = 219\ 942,02$ respectiv $D_{38} = 13\ 373,94$. Rezultă că $N_{38}^{(12)} = 213\ 812,29$, deci

$$\ddot{a}_{38}^{(12)} = \frac{213\ 812,29}{13\ 373,94} = 15,98$$

♦

Problema 8. Să se calculeze factorul de actualizare în caz de deces ${}_{18}D_{52}$, considerând procentul 5%.

Rezolvare. Expresia acestui factor de actualizare în funcţie de numerele de comutaţie este

$${}_{18}D_{52} = \frac{C_{70}}{D_{52}}$$

În această relaţie

$$C_{60} = u^{1/2} \cdot (v \cdot D_{60} - D_{61})$$

Cunoscând $D_{70} = 1\ 776,45$, $D_{71} = 1\ 607,72$ şi $D_{52} = 6\ 317,19$ putem calcula

$$C_{70} = (1,05)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{1,05} \cdot 1\ 776,45 - 1\ 607,72 \right) = 86,21491605$$

Rezultă

$${}_{18}D_{52} = \frac{86,21491605}{6\ 317,19} = 0,013647668$$

Această problemă se mai poate rezolva şi exprimând factorul de actualizare în caz de deces conform definiţiei sale, astfel

$${}_{18}D_{52} = v^{18+\frac{1}{2}} \cdot {}_{18/19}\, q_{52}$$

unde
$$v^{18+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1,05}\right)^{18,5} = 0,405506636$$
iar
$$_{18/19}q_{52} = \frac{l_{70} - l_{71}}{l_{52}} = \frac{54\ 051 - 51\ 363}{79\ 867} = 0,033655953$$

În final, obţinem aproximativ acelaşi rezultat ca şi în cazul primei variante, $_{18}D_{52} = 0,013647712.$♦

Problema 9. Care este valoarea medie actuală a anuităţii de deces $_{5/10}A_{65}$?

Rezolvare. În acest caz este vorba de o anuitate de deces dublu limitată pe care o putem scrie
$$_{5|10}A_{65} = \frac{M_{65+5} - M_{65+10}}{D_{65}}$$
Cum $M_{70} = 1\ 148,15$, $M_{75} = 739,88$ şi $D_{65} = 2\ 729,37$ obţinem
$$_{5/10}A_{65} = \frac{1\ 148,15 - 739,88}{2\ 729,37} = 0,149583969$$

♦

Problema 10. O persoană de 32 ani se asigură să i se plătească peste 18 ani, dacă este în viaţă o sumă de 1 500 u.m.

a) Care este valoarea primei unice?

b) Care este valoarea primei anuale plătibile până la expirarea termenului de asigurare?

Rezolvare.

a) Dacă prima se plăteşte o singură dată, atunci
$$\begin{aligned} P &= S \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = 1\ 500 \cdot \frac{D_{50}}{D_{32}} \\ &= 1\ 500 \cdot \frac{7\ 070,22}{18\ 190,78} = 583,005 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

b) Dacă asiguratul preferă să plătească anual obligaţiile sale către asigurator, atunci $k = 18$ şi
$$\begin{aligned} P &= S \cdot \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = 1\ 500 \cdot \frac{D_{50}}{N_{32} - N_{50}} \\ &= 1\ 500 \cdot \frac{7\ 070,22}{316\ 364,4 - 97\ 674,03} = 48,49 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

Ca şi o concluzie, dacă asiguratul plăteşte o singură dată, atunci va trebui să achite o sumă de 583 u.m., iar dacă plateşte eşalonat, suma este de $48,5$ u.m. ♦

Problema 11. Să se calculeze valoarea primei lunare pe care trebuie să o plătească o persoana în vârstă de 36 ani, timp de 26 ani, pentru ca după aceea să primească o pensie lunară de 250 u.m. Să se rezolve problema şi în cazul când persoana plăteşte rate lunare numai timp de un an.

Rezolvare. În primul caz, cunoaştem că: $x = 36$, $n = k = 26$, iar $S = 250$ u.m. Prima se va calcula astfel

$$P = S \cdot \frac{N_{36+26}^{(12)}}{N_{36}^{(12)} - N_{36+26}^{(12)}} = 250 \cdot \frac{N_{62}^{(12)}}{N_{36}^{(12)} - N_{62}^{(12)}}$$

Dar

$$N_{36}^{(12)} = N_{36} - \frac{11}{24} \cdot D_{36} = 248\ 852,74 - \frac{11}{24} \cdot 14\ 827,30 = 242\ 056,8942$$

respectiv

$$N_{62}^{(12)} = N_{62} - \frac{11}{24} \cdot D_{62} = 34\ 934,10 - \frac{11}{24} \cdot 3\ 396,02 = 33\ 377,5908$$

Valoarea primei este

$$P = 250 \cdot \frac{33\ 377,59}{242\ 056,89 - 33\ 377,59} = 39,9867 \text{ (u.m.)}$$

Deci, asiguratul va plăti lunar, timp de 26 ani suma de $39,9867$ u.m.

În cel de-al doilea an cunoaştem că: $x = 36$, $n = 26$, $k = 1$, $m = 12$ şi $S = 250$ u.m.

Formula primei de asigurare în acest caz va fi

$$P = S \cdot \frac{N_{36+26}^{(12)}}{N_{36}^{(12)} - N_{36+1}^{(12)}} = 250 \cdot \frac{N_{62}^{(12)}}{N_{36}^{(12)} - N_{37}^{(12)}}$$

Deoarece

$$N_{37}^{(12)} = N_{37} - \frac{11}{24} \cdot D_{37} = 234\ 025,44 - \frac{11}{24} \cdot 14\ 083,42 = 227\ 570,53$$

obţinem

$$P = 250 \cdot \frac{33\ 377,59}{242\ 056,89 - 227\ 570,53} = 576,01 \text{ (u.m.)}$$

Cu alte cuvinte, dacă persoana asigurată doreşte să plătească prima lunar doar pe timp de un an, atunci suma se va ridica la $576,01$ u.m.

♦

Problema 12. O persoană în vârstă de 48 ani îşi asigură familia cu o sumă de 2 000 u.m. care urmează să fie plătită de către instituţia de asigurare dacă decesul are loc în decurs de 20 ani.

a) Care este valoarea primei unice?

b) Care este valoarea primei anuale ce urmează a fi plătită pe tot timpul asigurării?

Rezolvare.

a) În acest caz avem următoarele date: $x = 48$, $n = 20$, $S = 2\ 000$, iar $k = 1$.

Expresia primei este

$$P = S \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = 2\ 000 \cdot \frac{M_{48} - M_{68}}{D_{48}}$$

Înlocuind numerele de comutaţie cu valorile corespunzătoare, obţinem

$$P = 2\ 000 \cdot \frac{2\ 571,32 - 1\ 313,22}{7\ 892,11} = 318,82 \text{ (u.m.)}$$

b) Pentru situaţia în care prima este plătită anual pe tot timpul asigurării, adică $k = 20$, avem

$$\begin{aligned} P &= S \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = 100000 \cdot \frac{M_{48} - M_{68}}{N_{48} - N_{68}} \\ &= 2\ 000 \cdot \frac{2\ 571,32 - 1\ 313,22}{113\ 038,04 - 17\ 857,36} \\ &= 26,43 \text{ (u.m.)} \end{aligned}$$

Aşa cum era de aşteptat, în cel de-al doilea caz cuantumul primei este mai mic decât în primul caz când se plăteşte o singură dată. ♦

Problema 13. O persoană în vârstă de 52 ani doreşte să primească, dacă va fi în viaţă, la vârsta de 67 ani suma de 3 200 u.m., iar dacă decedează înaintea împlinirii acestei vârste, suma o va primi familia sa.

a) Care este prima unică?

b) Care este prima anuală plătibilă pe tot timpul asigurării?

Rezolvare. Aşa cum se poate observa suntem în cazul unei asigurări mixte.

a) Deoarece prima este unică înseamnă că valoarea lui k este 1. În plus, din datele problemei rezultă că: $x = 52$, $n = 15$, $S = 3\ 200$ u.m. Atunci

$$P = S \cdot \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{D_x} = 3\ 200 \cdot \frac{D_{67} + M_{52} - M_{67}}{D_{52}}$$

Cunoscând că: $D_{67} = 2\ 322,22,60$, $D_{52} = 6\ 317,19$, $M_{52} = 2\ 378,41$ şi $M_{67} = 1\ 394,90$ valoarea primei va fi

$$P = 3\ 200 \cdot \frac{2\ 322,22 + 2\ 378,41 - 1\ 394,90}{6\ 317,19} = 1\ 674,53 \text{ (u.m.)}$$

b) În condiţiile în care prima este plătită pe tot timpul asigurării ($k = 15$), relaţia de calcul va fi

$$P = S \cdot \frac{D_{x+n} + M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} = 3\ 200 \cdot \frac{D_{67} + M_{52} - M_{67}}{N_{52} - N_{67}}$$

Cum $N_{52} = 83\ 918,12$ şi $N_{67} = 20\ 179,58$ vom avea

$$P = 3\ 200 \cdot \frac{2\ 322,22 + 2\ 378,41 - 1\ 394,90}{83\ 918,12 - 20\ 179,58} = 165,96 \text{ (u.m.)}$$

Deci prima anuală este: $P = 165,96$ u.m.

♦

Problema 14. Să se calculeze folosind metoda prospectivă rezerva matematică în cazul asigurării de deces dacă asiguratul plăteşte prime anuale pe tot timpul asigurării.

Rezolvare. Conform metodei prospective, rezerva matematică are următoarea expresie

$$R_t = D_t^{'} - D_t^{''}$$

Dacă asiguratul în vârstă de x ani plăteşte prime anuale pe tot timpul asigurării înseamnă că: $m = 0$, $k \to \infty$, iar $n \to \infty$ (până la limita de vârstă). În aceste condiţii, prima este: $P = \frac{M_x}{N_x}$. Datoria instituţiei de asigurare actualizată în momentul t este: $D_t^{'} = A_{x+t}$ deoarece obligaţia sa constă în a plăti o unitate monetară (considerăm $S = 1$ u.m.) oricând are loc decesul persoanei, care în momentul t este în vârstă de $x + t$ ani. Cu alte cuvinte avem de-a face cu o anuitate de deces imediată (din momentul t) şi nelimitată. Datoria asiguratului actualizată la momentul t este $D_t^{''} = P \cdot a_{x+t}$, întrucât are obligaţia de a plăti anticipat prima până la decesul său.

Folosind numerele de comutaţie în exprimarea anuităţilor de mai sus, obţinem

$$D_t^{'} = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}}, \quad D_t^{''} = \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}}$$

Rezerva matematică este dată, în consecinţă, de relaţia

$$R_t = \frac{M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x}{N_x} \cdot \frac{N_{x+t}}{D_{x+t}} \ \blacklozenge$$

Problema 15. Să se calculeze, cu metoda retrospectivă, rezerva matematică în cazul asigurării de pensii dacă asiguratul plăteşte prima anuală timp de n ani, iar plata pensiei anuale, de o unitate monetară, se va face după această dată.

Rezolvare. Formula rezervei matematice prin această a doua metodă de calcul este

$$R_t = \frac{{}_{/t}D_x^{''} - {}_{/t}D_x^{'}}{{}_tE_x}$$

unde presupunem că $0 \leq t \leq n$.

Conform enunţului avem: x - vârsta persoanei asigurate, $S = 1$ u.m. şi $k = n$. Ştiind că suntem în cazul unei asigurări de pensii, prima va fi

$$P = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

Pentru calcularea rezervei matematice prin metoda retrospectivă, obligaţiile celor două părţi vor fi actualizate la momentul zero, acela al încheierii contractului de asigurare, deci când asiguratul are x ani. Datoria asiguratului constă în a plăti anticipat prima, P până în momentul t, deci: ${}_{/t}D_x^{''} = P \cdot {}_{/t}a_x$. Instituţia de asigurare nu are nici o obligaţie până la momentul t, întrucât $t \leq n$, deci: ${}_{/t}D_x^{'} = 0$.

Rezultă

$$R_t = \frac{P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tE_x}$$

Dacă exprimăm anuitatea şi factorul de actualizare viager cu ajutorul numerelor de comutaţie şi facem simplificările corespunzătoare, obţinem

$$R_t = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} \ \blacklozenge$$

Problema 16. Să se calculeze rezerva matematică în cazul când două persoane se asigură în următoarele condiţii:

- prima persoană, în vârstă de 30 ani, încheie o asigurare de viaţă de 8 000 u.m. pe timp de 20 ani cu plata unor prime anuale plătibile pe tot timpul asigurării;

- a doua persoană, în vârstă de 40 ani, încheie o asigurare de deces cu plata anuală a primelor timp de 15 ani, cu condiţia că, dacă ea decedează în acest răstimp, familia să primească 10 000 u.m.

Cele două contracte au fost încheiate cu un decalaj de 3 ani, iar momentul în care se cere rezerva este de 5 ani după încheierea primului contract.

Rezolvare. Pentru asigurarea de viaţă avem: $x_1 = 30$, $n_1 = 20$, $S_1 = 8\ 000$, $t_1 = 5$.

Cu aceste date, rezerva este:

$$\begin{aligned} R_{t_1} &= S_1 \cdot \frac{D_{50}}{D_{35}} \cdot \frac{N_{30} - N_{35}}{N_{30} - N_{50}} \\ &= 8\ 000 \cdot \frac{7\ 070,22}{15\ 607,64} \cdot \frac{35\ 5643 - 264\ 460,38}{35\ 5643 - 97\ 674,03} \\ &= 1\ 280,94 \end{aligned}$$

Datele cunoscute în cazul asigurării de deces sunt: $x_2 = 40$, $n_2 = 15$, $S_2 = 10\ 000$, $t_2 = 2$.

Atunci:

$$\begin{aligned} R_{t_2} &= S_2 \cdot \left[\frac{M_{42} - M_{55}}{D_{42}} - \frac{(M_{40} - M_{55}) \cdot (N_{42} - N_{55})}{D_{42} \cdot (N_{40} - N_{55})} \right] = \\ &= 10\ 000 \cdot \left[\frac{2\ 812,97 - 2\ 212,27}{10\ 858,35} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{(2\ 891,02 - 2\ 212,27) \cdot (170\ 376,62 - 66\ 010,99)}{10\ 858,35 \cdot (193\ 870,81 - 66\ 010,99)} \right] =$$

$$= 42,98$$

Rezerva totală este suma celor două rezerve, deci

$$R_t = R_{t_1} + R_{t_2} = 1\ 280,94 + 42,98 = 1\ 323,924 \text{ (u.m.)} \ \blacklozenge$$

3.6 Teme de control

Folosiţi procentul de actualizare de 5% (tabele in Anexa A).

3.6.1 Plăţi viagere. Plăţi în caz de deces.

necesar: 5 ore

Plăţi viagere

1. Calculaţi prin două metode valoarea actuală a unei plăţi de 1 u.m. către o persoană cu vârsta de 51 de ani în cazul în care acesta împlineşte 58 de ani. Calculaţi de asemenea ${}_{20}E_{45}$ şi ${}_{12}E_{37}$

   Răspuns. ${}_{7}E_{51} = 0,6604$; ${}_{20}E_{45} = 0,2942$; ${}_{12}E_{37} = 0,5305$

2. Precizaţi semnificaţia şi calculaţi valoarea medie actuală pentru anuităţile:

a_{39}, $_{10|}a_{40}$, $a_{47:\overline{15|}}$, $\ddot{a}_{53}$, $_{7|}\ddot{a}_{51}$, $\ddot{a}_{29:\overline{20|}}$,
$a_{47}^{(12)}$, $\ddot{a}_{38}^{(4)}$, $_{8|}a_{41}^{(4)}$, $_{5|}\ddot{a}_{46}^{(12)}$, $a_{59:\overline{9|}}^{(2)}$, $\ddot{a}_{55:\overline{11|}}^{(12)}$.

Răspuns. :)

3. Calculaţi valoarea primei unice ce trebuie plătită de o persoană în vârstă de 31 de ani pentru a primi suma de 10000 lei în cazul în care împlineşte vârsta de 65 de ani.

Răspuns. 1425,9718 lei

4. Calculaţi valoarea sumei pe care ar primi-o o persoană actualmente în vârstă de 30 de ani în cazul în care aceasta împlineşte vârsta de 65 de ani, dacă persoana plăteşte o primă unică de 1000 lei.

Răspuns. 7378,3313 lei

5. Calculaţi valoarea actuală medie cumulată a ratelor în valoare de 1700 lei pe care urmează să le plătească o persoană în vârstă de 25 ani, la începutul fiecărui an, în următorii 20 ani?

Răspuns. 21870,4442 lei

6. Determinaţi prima netă pe care o persoană în vârstă de 73 ani trebuie să o plătească în momentul semnării unui contract de asigurare pentru a primi 12000 lei la sfârşitul fiecărui an.

Răspuns. 70549,1918 lei

7. O persoană doreşte ca fiica de 13 ani să primească peste 5 ani, la sfârşitul fiecărei luni, suma de 2000 lei. Calculaţi suma ce trebuie depusă acum.

Răspuns. 342741,432 lei

8. Calculaţi valoarea medie actuală a anuităţii viagere constante întregi posticipate imediate în cazul unei persoane de 32 de ani care plăteşte ratele viagere anuale posticipate de 700 lei timp de 17 ani. Considerând valoarea medie actuală a anuităţii viagere constante întregi posticipate imediate calculate anterior, determinaţi cum se modifică valoarea ratei dacă ratele sunt plătite 21 ani?

Răspuns. 7715,4312 lei; 619,5451 lei

9. Calculaţi valoarea medie actuală cumulată a ratelor în valoare de 300 lei, pe care urmează să le plătească o persoană în vârstă de 41 ani la sfârşitul fiecărui trimestru în următorii 19 ani. Dacă persoana va primi suma de 15000 lei, calculaţi cât va plăti la sfârşitul fiecărui trimestru în următorii 19 ani.

Răspuns. 14121,903 lei; 108,2237 lei

10. Care este valoarea medie actuală a unei plăţi de 2400 lei efectuate la începutul, respectiv sfârşitul fiecărui an, pe o perioadă de 18 ani, în cazul unei persoane actualmente în vârstă de 37 ani? Dar dacă plata s-ar face la sfârşitul, respectiv începutul fiecărei luni?

Răspuns. 28631,8720 lei; 27135,4588 lei; 333852,48 lei; 335350,8472 lei

11. Un părinte doreşte ca copilul său în vârstă de 14 ani să primească anual, la începutul anului, suma de 12000 lei după împlinirea vârstei de 18 de ani. Ce sumă trebuie să depună acum părintele?

    Răspuns. 185424,526 lei

12. Calculaţi valoarea actuală medie cumulată a tuturor ratelor în valoare de 75 lei, pe care urmează să le primească o persoană în vârstă de 46 ani la începutul fiecărei luni, în următorii 19 ani. Calculaţi valoarea ratelor dacă persoana depune 30000 lei.

    Răspuns. 10435,95 lei; 215,6008 lei

Plăţi în caz de deces

1. Calculaţi prin două metode factorii de actualizare de deces ${}_{12}D_{63}$ şi ${}_{9}D_{51}$. Interpretaţi.

   Răspuns. ${}_{12}D_{63} = 0,0229$ şi ${}_{9}D_{51} = 0,0098$

2. Calculaţi valoarea actuală a 1 u.m. plătibile peste 16 ani şi jumătate unei persoane în vârstă de 55 de ani dacă aceasta decedează între 71 şi 72 ani.

   Răspuns. ${}_{16}D_{55} = 0,0158$

3. Precizaţi semnificaţia şi calculaţi valoarea medie actuală pentru anuităţile de deces: A_{67}; ${}_{4|13}A_{58}$; ${}_{5|}A_{48}$; $A_{59:\overline{7|}}$.

   Răspuns. :)

4. Care este valoarea medie actuală a unei plăţi de 7400 €, ce se va face dacă o persoană actualmente de 61 ani, decedează între 85 şi 86 ani? Dar dacă decesul are loc până la 85 de ani?

   Răspuns. 68,5392 €, respectiv 3444,1377 €

5. Calculaţi valoarea medie actuală cumulată a unei plăţi de 12300 $ pe care familia unei persoane în vârstă de 74 de ani o va primi în cazul în care

   a) decesul persoanei survine începând cu vârsta de 91 de ani;
   b) decesul persoanei survine până la vârsta de 90 de ani.

   Răspuns. 243,1341 $; 8294,1164 $

6. Care este valoarea medie actuală a unei plăţi de 5412 €, ce se va face dacă o persoană actualmente de 53 ani, decedează între 75 şi 80 ani? Dar dacă decesul are loc până la 75 de ani?

   Răspuns. 309,1199 € şi respectiv 1438,1860 €

7. Calculaţi valoarea actuală a sumei de 15500 €, pe care o va primi familia unei persoane actualmente în vârstă de 86 de ani în momentul în care aceasta decedează.

   Răspuns. 13265,6341 €

8. O persoană în vârstă de 37 de ani depune la o firmă de asigurări suma de 4500 lei. Calculaţi suma pe care o va primi familia acestei persoane în momentul decesului acestuia.

   Răspuns. 21041,3852 lei

3.6.2 Asigurări de persoane

necesar: 5 ore

1. Să se calculeze valoarea primei pe care trebuie să o plătească o persoană de 42 de ani, timp de 10 ani, anual anticipat, pentru ca familia sa să primească o sumă de 120 u.m. dacă decesul persoanei intervine înainte ca aceasta să împlinească vârsta de 90 de ani.

   Răspuns. $P = 3,857$ u.m.

2. Domnul Trandafir, în vârstă de 30 de ani, încheie un contract de asigurare la o societate de asigurări. Asigurătorul se obligă să plătească domnului Trandafir suma de 5000 u.m. dacă dânsul va fi în viaţă la vârsta de 50 de ani. Pe de altă parte, în urma contractului de asigurare încheiat, domnul Trandafir se obligă să plătească o primă de asigurare, timp de 20 de ani, anual anticipat. Cât este prima de asigurare?

   Răspuns. $P = 137$ u.m.

3. La o instituţie de asigurare s-a încheiat următorul contract: persoana asigurată, în vârstă de 40 de ani, plăteşte anual anticipat câte o primă timp de 20 de ani; iar instituţia de asigurare se obligă să plătească asiguratului suma de 3000 u.m. dacă acesta va fi în viaţă la împlinirea vârstei de 70 de ani, în caz contrar familia sa va primi suma de 2800 u.m. Să se determine prima plătită anual anticipat.

   Răspuns. $P = 67,426$ u.m.

4. Doamna Margareta, în vârstă de 45 de ani, doreşte ca de la împlinirea vârstei de 70 de ani să primească anual o pensie de 1000 u.m. Pentru aceasta, ea apelează la o agenţie de asigurări unde încheie un contract de asigurare. Agenţia se obligă să plătească pensia dorită de doamna Margareta, doar dacă dânsa ajunge să împlinească vârsta de 70 de ani. Ce fel de asigurare a încheiat doamna Margareta? Ce primă trebuie să plătească anual anticipat, timp de 15 ani în vederea satisfacerii acestei obligaţii pe care dânsa o are menţionată în contractul de asigurare?

   Răspuns. $P = 142,042$ u.m.

5. Se consideră cazul unei persoane, în vârstă de 50 de ani, care încheie un contract de asigurare în vederea obţinerii unei pensii suplimentare. Persoana plăteşte lunar anticipat câte o primă de 150 u.m. pe tot timpul asigurării, urmând ca instituţia de asigurare să plătească trimestrial anticipat pensia. Care este pensia plătită trimestrial de instituţia de asigurare dacă asiguratul plăteşte prima pe toată durata asigurării, timp de 10 ani?

   Răspuns. $S = 590,045$ u.m.

6. O persoană în vârstă de 65 de ani încheie o asigurare de deces. Asiguratul plăteşte semestrial, anticipat, câte o primă de 1000 u.m. urmând ca instituţia de asigurare să plătească familiei asiguratului suma S dacă decesul asiguratului intervine la o vârstă cuprinsă între 85 şi 100 de ani. Primele sunt plătite timp de 15 ani. Găsiţi suma asigurată.

   Răspuns. $S = 295925,075$ u.m.

7. O persoană în vârstă de 32 de ani se asigură să i se plătească peste 18 ani, dacă va fi în viaţă, o sumă de 15000 \$.

   a) Care este valoarea primei unice plătite de acea persoană ?

   b) Care este valoarea primei anuale plătibile până la expirarea termenului de asigurare ?

   Răspuns. 5830,0575 \$; 484,9473 \$

8. Doamna Rus primeşte 10000 € la împlinirea vârstei de 40 de ani. Ea foloseşte aceşti bani pentru a cumpăra o asigurare de viaţă plătibilă la vârsta de 70 de ani, dacă va fi în viaţă. Ce sumă primeşte la 70 de ani dacă supravieţuieşte? Comparaţi suma primită cu suma pe care ar primi-o dacă ar investi banii într-un cont de economii cu i=5%, capitalizarea făcându-se trimestrial, pe aceeaşi perioadă de timp.

   Răspuns. 67850,43 €; 44402,1329 €

9. Să se determine valoarea primei lunare pe care trebuie să o plătească doamna Marinescu, acum în vârstă de 35 de ani, pentru următorii 25 de ani, astfel încât, după această perioadă, să primească o pensie lunară de 1000 lei.

   Răspuns. 187,76 lei

10. Un om bogat în vârstă de 45 de ani doreşte ca în cazul decesului său, fiul să primească o sumă de 1.000.000 lei, dacă decesul survine în următorii 20 de ani.

    a) Care este prima unică pe care o va plăti persoana respectivă ?

    b) Care este prima anuală plătibilă pe tot timpul asigurării ?

    Răspuns. 123312,20 lei; 10031,34 lei

11. O persoană în vârstă de 52 de ani doreşte să primească, dacă va fi în viaţă la vârsta de 67 de ani, suma de 4000 lei, iar dacă decesul are loc înaintea împlinirii acestei vârste familia sa va primi dublul aceste sume.

    a) Care este valoarea primei unice plătite de persoana respectivă?

    b) Care este prima anuală plătibilă pe tot timpul asigurării?

    Răspuns. 2715,9144 lei; 269,1770 lei

12. Domnul Rus având vârsta de 30 de ani, semnează o asigurare de pensii astfel încât, începând cu vârsta de 60 de ani să primească o pensie lunară de 800 lei.

a) Care este valoarea primei trimestriale plătibile pe tot timpul asigurării?

b) Care este valoarea primei semestriale plătibile în următorii 10 ani?

Răspuns. 317,8863 lei; 1222,1572 lei

13. Domnul Ionescu, în vârstă de 40 de ani doreşte să primească de la o companie de asigurări o sumă S dacă va fi în viaţă la 60 de ani, iar dacă nu familia sa va primi jumătate din suma S. Să se determine suma de bani asigurată S, dacă domnul Ionescu plăteşte începând de acum o primă de 150 lei, la începutul fiecărui trimestru, pentru o perioadă de 10 ani.

Răspuns. 12932,931 lei

Bibliografie

1. Muresan A. S., Filip D. A. , Ban I. M., Hangan A., *Operatiuni financiare*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2005.

2. Colectiv, Elemente de matematici financiare şi actuariale. Teorie şi probleme, Editura Mega 2013.

A - Numere de comutaţie (5%)

x	l_x	D_x	N_x	M_x
0	100000	100000	1811317.38	14086.27
1	91992	87611.43	1711317.38	6271.26
2	91000	82539.68	1623705.95	5349.27
3	90545	78216.18	1541166.27	4946.52
4	90286	74278.52	1462950.1	4728.17
5	90101	70596.49	1388671.58	4579.64
6	89951	67122.82	1318075.09	4464.95
7	89837	63845.48	1250952.27	4381.93
8	89735	60736.18	1187106.79	4311.18
9	89644	57785.32	1126370.61	4251.08
10	89562	54983.3	1068585.29	4199.49
11	89484	52319.44	1013601.99	4152.76
12	89407	49785.16	961282.55	4108.83
13	89330	47373.61	911497.38	4066.98
14	89250	45077.31	864123.78	4025.58
15	89165	42889.89	819046.46	3983.68
16	89070	40803.99	776156.57	3939.09
17	88967	38816.01	735352.58	3893.04
18	88856	36921.5	696536.57	3845.78
19	88737	35116.24	659615.07	3797.52
20	88607	33395.05	624498.83	3747.32
21	88470	31755.63	591103.78	3696.93
22	88322	30192.86	559348.15	3645.08
23	88167	28704.65	529155.28	3593.37
24	88010	27289.08	500450.64	3543.49
25	87844	25940.58	473161.56	3493.26
26	87686	24660.88	447220.98	3447.73
27	87527	23443.96	422560.11	3404.09
28	87368	22287.02	399116.15	3362.53
29	87205	21186.13	376829.13	3321.95
30	87036	20138.17	355643	3281.88
31	86860	19140.42	335504.83	3242.14
32	86678	18190.78	316364.4	3203
33	86488	17286.58	298173.62	3164.09
34	86295	16426.67	280887.05	3126.44
35	86092	15607.64	264460.38	3088.73
36	85877	14827.3	248852.74	3050.69
37	85647	14083.42	234025.44	3011.94
38	85399	13373.94	219942.02	2972.14
39	85132	12697.26	206568.08	2931.33
40	84855	12053.29	193870.81	2891.02

41	84571	11440.9	181817.52	2851.65
42	84278	10858.35	170376.62	2812.97
43	83976	10304.22	159518.28	2774.99
44	83665	9777.2	149214.05	2737.75
45	83330	9274.34	139436.85	2699.55
46	82951	8792.53	130162.51	2658.38
47	82536	8331.94	121369.98	2615.45
48	82088	7892.11	113038.04	2571.32
49	81603	7471.89	105145.92	2525.81
50	81077	7070.22	97674.03	2478.81
51	80501	6685.7	90603.82	2429.79
52	79867	6317.19	83918.12	2378.41
53	79172	5964.02	77600.93	2324.76
54	78418	6525.92	71636.91	2269.33
55	77603	5302.33	66010.99	2212.27
56	76735	4993.36	60708.66	2154.39
57	75810	4698.25	55715.3	2095.65
58	74815	4415.8	51017.05	2035.47
59	73741	4145.15	46601.25	1973.61
60	72581	3885.66	42456.09	1909.97
61	71320	3636.34	38570.43	1844.09
62	69937	3396.02	34934.1	1775.28
63	68438	3164.98	31538.07	1704.24
64	66817	2942.88	28373.09	1631.08
65	65068	2729.37	25430.22	1555.91
66	63112	2521.26	22700.84	1475.84
67	61036	2322.22	20179.58	1394.9
68	58836	2131.92	17857.36	1313.22
69	56508	1950.06	15725.44	1230.9
70	54051	1776.45	13775.38	1148.15
71	51363	1607.72	11998.93	1061.93
72	48607	1449	10391.21	977.75
73	45786	1299.91	8942.21	895.68
74	42920	1160.52	7642.3	816.27
75	40025	1030.7	6481.78	739.88
76	37138	910.82	5451.08	667.33
77	34184	798.45	4540.26	596.62
78	31175	693.49	3741.81	528.04
79	28136	596.08	3048.32	462.06
80	25097	506.38	2452.23	399.23
81	22097	424.62	1945.85	340.16
82	19178	350.98	1521.23	285.42
83	16384	285.57	1170.25	235.52
84	13758	228.38	884.69	190.85
85	11338	179.24	656.31	151.65

86	9155	137.84	477.06	117.97
87	7230	103.67	339.22	89.68
88	5575	76.14	3235.55	66.52
89	4188	54.47	159.41	48.04
90	3059	37.89	104.94	33.71
91	2168	25.58	67.05	22.94
92	1487	16.71	41.48	15.1
93	985	10.54	24.77	9.59
94	628	6.4	14.23	5.86
95	384	3.73	7.83	3.44
96	224	2.07	4.1	1.92
97	125	1.1	2.03	1.03
98	66	0.55	0.93	0.52
99	33	0.26	0.38	0.25
100	15	0.11	0.11	0.11