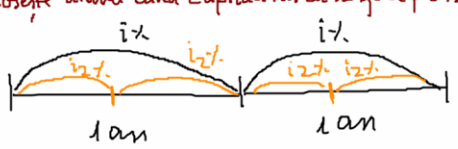


Seminar 3: Dobânda nominală
 - se folosește atunci când capitalizarea se face pe subperioade ale anului.



Capitalizare anuală (cu i)
 Capitalizare semestrială (cu $i/2$)

Dobânda nominală $\boxed{S^{(m)} = i_m \cdot m} \text{ (%)}$
 $m=2$ (semestru)
 $m=4$ (trimestru)
 $m=12$ (lună)

Ex: O bancă oferă o dobândă unitară anuală de 3%, cu capitalizare lunară $\Rightarrow S^{(12)} = 3\%$.

Obs: Suma finală $\boxed{S = A(1+i)^n = A(1+i_m)^{n \cdot m}}$

Dobânda unitară anuală efectivă: $\boxed{i_{ef} = i = (1+i_m)^m - 1} \text{ (%)}$

Dobânda instantanee: $\boxed{\delta = \ln(1+i)} \text{ (%)}$

Dobânzi

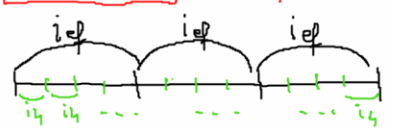
Problema 15: Să se calculeze suma finală după 3 ani pentru un depozit de 4000 €, cu rata anuală a dobânzii de 8%, cu capitalizare trimestrială. Cât este dobânda unitară anuală efectivă? Dar dobânda instantanee echivalentă?

Rezolvare:

$S = ?$
 $n = 3 \text{ ani}$
 $A = 4000 \text{ €}$
 $S^{(4)} = 8\% = 0,08$

$i_{ef} = ?$
 $\delta = ?$

$\boxed{S^{(m)} = i_m \cdot m}$
 $S^{(4)} = i_4 \cdot 4 \Leftrightarrow 0,08 = i_4 \cdot 4 \Leftrightarrow i_4 = \frac{0,08}{4} = 0,02$
 $\boxed{i_{ef} = (1+i_m)^m - 1} = (1+i_4)^4 - 1 = (1+0,02)^4 - 1 = 0,082432 = 8,24\%$
 $\boxed{\delta = \ln(1+i)} = \ln(1+i_{ef}) = \ln(1+0,082432) = 0,07921 = 7,92\%$



$S = A(1+i)^n = 4000(1+0,082432)^3 = 5072,9649 \text{ €}$
 $S = A(1+i_4)^{n \cdot m} = 4000(1+0,02)^{12} = 5072,9671 \text{ €}$

Seminar 1 MFA.pdf - Adobe Acrobat Reader DC (32-bit)

File Edit View Sign Window Help

Home Tools Seminar 1 MFA.pdf x

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear Save

$x^a = b \Rightarrow x = \sqrt[a]{b}$
 $a^x = b \Rightarrow \ln a^x = \ln b$
 $x \cdot \ln a = \ln b$

Dobânzi

Problema 16: Cu ce rată a dobânzii se va dubla o sumă de bani, în 8 ani, dacă se face capitalizare la 3 luni? Care va fi dobânda unitară efectivă?

Rezolvare: *trime stralbe*

$n = 8 \text{ ani}$
 $S^{(4)} = ?$
 $S = 2\Lambda$
 $i_{\text{ef}} = ?$

$S(4) = i_4 \cdot 4$
 $S = \Lambda(1 + i_{\text{ef}})^n$
 $i_{\text{ef}} = (1 + i_m)^m - 1$

$S = \Lambda(1 + i)^n \Leftrightarrow 2\Lambda = \Lambda(1 + i)^n \quad | : \Lambda > 0$
 $\Leftrightarrow 2 = (1 + i)^8 \Leftrightarrow (1 + i)^8 = 2 \Leftrightarrow 1 + i = \sqrt[8]{2}$
 $\Leftrightarrow i = \sqrt[8]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{8}} - 1 = 0,090507 = 9,05\%$
 $i_{\text{ef}} = 9,05\%$

$i_{\text{ef}} = (1 + i_4)^4 - 1 \Leftrightarrow 0,090507 = (1 + i_4)^4 - 1 \Leftrightarrow \sqrt[4]{1,090507} = 1 + i_4$
 $\Leftrightarrow i_4 = \sqrt[4]{1,090507} - 1 = 0,021897$
 $\Rightarrow S^{(4)} = i_4 \cdot 4 = 0,021897 \cdot 4 = 0,087588 = 8,76\%$

Seminar 1 MFA.pdf - Adobe Acrobat Reader DC (32-bit)

File Edit View Sign Window Help

Home Tools Seminar 1 MFA.pdf x

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear Save

$i_m = \frac{i}{m}$

Problema 17:

Să se calculeze dobânda primită la scadență de o persoană ce a depus 10.000 de lei pe o lună de zile, știind că banca acordă o rată anuală a dobânzii de 10%, iar capitalizarea dobânzii se face lunar. Ce sumă va avea persoana dacă banii rămân în cont 5 luni, un an, respectiv doi ani?

Rezolvare:

$S^{(12)} = 10\% = 0,1$
 $\Lambda = 10000 \text{ lei}$
 $t = 1 \text{ lună}$
 $D = ?$
 $S_{5 \text{ luni}} = ?$
 $S_{1 \text{ an}} = ?$
 $S_{2 \text{ ani}} = ?$

$i_{12} \quad i_{12} \quad i_{12} \quad \dots \quad i_{12} \quad \%$

$S^{(12)} = i_{12} \cdot 12 \Leftrightarrow i_{12} \cdot 12 = 0,1 \Leftrightarrow i_{12} = \frac{0,1}{12} = 0,008333$

Cu dob. compusă: $S = \Lambda(1 + i)^n \Rightarrow S = \Lambda(1 + i_{12})^{12}$
 $D = S - \Lambda \Rightarrow D = 10083,33 - 10000 = 8333 \text{ lei}$

Cu dob. simplă: $D = \Lambda \cdot i \cdot \frac{t}{12} = \Lambda \cdot \frac{i}{12} \cdot t = \Lambda \cdot i_{12} \cdot t = 10000 \cdot 0,008333 \cdot 1 = 8333 \text{ lei}$

$S_{5 \text{ luni}} = \Lambda(1 + i_{12})^5 = 10000 \cdot 1,008333^5 = 10423,65 \text{ lei}$
 $S_{1 \text{ an}} = \Lambda(1 + i_{12})^{12} = 10000 \cdot 1,008333^{12} = 11047,086 \text{ lei}$
 $S_{2 \text{ ani}} = \Lambda(1 + i_{12})^{24} = 10000 \cdot 1,008333^{24} = 12203,81 \text{ lei}$

Seminar 1 MFA.pdf - Adobe Acrobat Reader DC (32-bit)

File Edit View Sign Window Help

Home Tools Seminar 1 MFA.pdf x

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear Save

Dobânzi

Problema 18: Dacă rata anuală a dobânzii este de 18% și compunerea se face semestrial, găsiți dobânda unitară efectivă.

Rezolvare:

$$s^{(2)} = 18\% = 0,18 \quad \left| \quad s^{(2)} = i_2 \cdot 2 \Leftrightarrow i_2 \cdot 2 = 0,18 \Leftrightarrow i_2 = 0,09 \right.$$

$$i_{ef} = i = ? \quad \left| \quad i_{ef} = i = (1 + i_m)^m - 1 \right.$$

$$i = (1 + i_2)^2 - 1 = (1 + 0,09)^2 - 1 = 0,1881 = 18,81\%$$

Doc ENG 4:36 PM

Seminar 1 MFA.pdf - Adobe Acrobat Reader DC (32-bit)

File Edit View Sign Window Help

Home Tools Seminar 1 MFA.pdf x

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear Save

Problema 19:

2000 € sunt investiți pe o perioadă de 10 ani, cu dobânda unitară anuală de 10% pe primii trei ani, cu capitalizare semestrială; cu procentul anual 8% pe următorii patru ani, cu capitalizare trimestrială și cu rata anuală a dobânzii de 9% pe ultimii trei ani, cu capitalizare lunară. Găsiți valoarea sumei ce se obține după 10 ani.

Rezolvare:

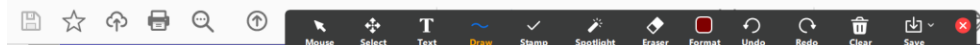
(3 ani) $s^{(2)} = 10\% = 0,1$
 (4 ani) $s^{(4)} = 8\% = 0,08$
 (3 ani) $s^{(12)} = 9\% = 0,09$

$\Delta = 2000 \text{ €}$
 $n = 10 \text{ ani}$
 $S = ?$

$s^{(2)} = i_2 \cdot 2 \Leftrightarrow i_2 \cdot 2 = 0,1 \Leftrightarrow i_2 = \frac{0,1}{2} = 0,05$
 $s^{(4)} = i_4 \cdot 4 \Leftrightarrow i_4 \cdot 4 = 0,08 \Leftrightarrow i_4 = \frac{0,08}{4} = 0,02$
 $s^{(12)} = i_{12} \cdot 12 \Leftrightarrow i_{12} \cdot 12 = 0,09 \Leftrightarrow i_{12} = \frac{0,09}{12} = 0,0075$

$S = \Delta(1+i)^n = \Delta \cdot (1+i_2)^{3 \cdot 2} \cdot (1+i_4)^{4 \cdot 4} \cdot (1+i_{12})^{3 \cdot 12} =$
 $= 2000(1+0,05)^6 \cdot (1+0,02)^{16} \cdot (1+0,0075)^{36} =$
 $= 4814,94 \text{ €}$

Doc ENG 4:48 PM



Dobânzi

Problema 20: În cât timp 2000 € vor acumula o dobândă de 800 €, cu o rată anuală a dobânzii de 10%, capitalizată trimestrial ?

Rezolvare:

$$\Delta = 2000 \text{ €}$$

$$D = 800 \text{ €}$$

$$S^{(4)} = 10\% = 0,1$$

$$n = ?$$

$$S^{(4)} = i_4 \cdot 4 \Leftrightarrow i_4 \cdot 4 = 0,1 \Leftrightarrow i_4 = \frac{0,1}{4} \Leftrightarrow i_4 = 0,025$$

$$S = \Delta(1+i)^n$$

$$S = \Delta + D = 2000 + 800 = 2800 \text{ €}$$

$$i = i_{\text{ef}} = (1+i_m)^m - 1 \Leftrightarrow i = (1+i_4)^4 - 1 = 1,025^4 - 1 = 0,10381289$$

$$\text{Avem: } 2800 = 2000(1+0,10381289)^n \quad | : 2000$$

$$\frac{2800}{2000} = 1,10381289^n \Leftrightarrow 1,10381289^n = 1,4 \quad | \ln$$

$$\ln 1,10381289 = \ln 1,4 \Leftrightarrow n \cdot \ln 1,10381289 = \ln 1,4 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 1,4}{\ln 1,10381289} = 3,4 \text{ ani}$$