

## Scurt istoric

Integrala de speța a doua sau integrala gamma a luat naștere în anul 1729 fiind studiată de Leonhard Euler cu ajutorul lui Christian Goldbach. Aceștia au corespondat o perioadă de timp cu ajutorul scrisorilor urmând ca apoi ideile acestora să fie puse cap la cap. Prima idee a pornit de la teoria interpolării, domeniu pe care l-au studiat aprofundat. A doua legătură urmând a fi făcută între calculul integral și dezvoltarea sistematică a formulelor integralelor nedefinite.

Integrala de speța întâi sau integrala beta a fost studiată de Euler în anul 1730 și 1731. Înainte de acesta fiind folosită și de Isaac Newton și de John Wallis.

## Integralele lui Euler

### Definițiile funcțiilor Beta și Gama

**Definiția 1**      *Integrala depinzând de parametrii  $p$  și  $q$ ,*

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (2.119)$$

*se numește integrala Euler de primul tip sau funcția Beta.*

**Definiția 2**      *Integrala improprie depinzând de parametrul  $p$ ,*

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad (2.120)$$

*se numește integrala Euler de tipul al doilea sau funcția Gama.*

Funcțiile (2.119) și (2.120) joacă un rol important în diferite domenii ale matematicii și ale matematicii fizice. După cum se va arăta, funcția Beta se exprimă în funcție de funcția Gama și din acest motiv vom prezenta mai întâi proprietățile funcției Gama.

### Proprietăți ale funcției Gama

**Teorema**      *Integrala improprie (2.120) este convergentă pentru  $0 < p < +\infty$ , divergentă pentru  $p \leq 0$  și uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice compact  $[p_0, P]$ , unde  $0 < p_0 < P < +\infty$ .*

**Demonstrație.** Dacă  $p - 1 < 0$ , integrandul din (2.120) are un punct singular în limita inferioară. Să despărțim intervalul de integrare în două subintervale, de exemplu  $[0, 1]$  și  $[1, +\infty)$ , prin intermediul punctului  $x = 1$ . Avem

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx. \quad (2.121)$$

Primul termen din membrul doi al egalității (2.121) este o integrală improprie de speța a doua dacă  $p - 1 < 0$ , cu punctul singular în limita inferioară. Scriind această integrală în forma  $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{1-p}} dx$  și aplicând criteriul de comparație în  $\alpha$ , formularea cu limită, deducem că integrala este convergentă dacă  $1 - p < 1$ , adică dacă  $p > 0$ , și divergentă dacă  $p \leq 0$ .

Cel de al doilea termen din membrul al doilea al egalității (2.121) este o integrală improprie de speța întâi convergentă pentru toate valorile reale ale lui  $p$ . Într-adevăr, pentru a arăta aceasta să remarcăm că egalitățile

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 x^{p-1} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = (p+1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = 0$$

sunt satisfăcute pentru orice  $p \in \mathbb{R}$ .

În consecință, integrala improprie  $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  este convergentă pentru orice  $p > 0$  și divergentă pentru  $p \leq 0$ .

Să demonstrăm că integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval finit  $[p_0, P_0]$ , unde  $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$ . Ca și în cazul convergenței obișnuite a acestei integrale, scriem  $[0, +\infty) = [0, 1] \cup [1, +\infty)$  și studiem convergența uniformă în raport cu parametrul  $p$  a integralelor improprii

$$\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx \quad \text{și} \quad \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Când  $p \geq p_0 > 0$  și  $x \in [0, 1]$ , funcția de integrat satisface inegalitatea  $x^{p-1} e^{-x} \leq x^{p_0-1}$ , iar integrala  $\int_0^1 x^{p_0-1} dx$  este convergentă dacă  $p_0 > 0$  și are valoarea  $1/p_0$ .

Conform criteriului lui Weierstrass de convergență a integralelor improprii depinzând de un parametru, rezultă că integrala  $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$  este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe intervalul  $[p_0, +\infty)$ , unde  $p_0 > 0$ .

Evaluând integrala  $\int_0^\lambda x^{p-1} e^{-x} dx$  pentru  $p \rightarrow 0 + 0$  și  $\lambda = \text{const} > 0$  se observă că

$$\int_0^\lambda x^{p-1} e^{-x} dx \geq e^{-1} \int_0^\lambda x^{p-1} dx = \frac{\lambda^p}{pe} \rightarrow +\infty$$

și, în consecință, putem afirma că integrala  $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$  nu este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

Tot datorită criteriului lui Weierstrass rezultă că integrala improprie de speța întâi  $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval de forma  $(-\infty, P_0]$ , unde  $P_0 < +\infty$ , deoarece

$$x^{p-1} e^{-x} \leq x^{P_0-1} e^{-x} \quad \text{pentru } 1 \leq x < +\infty, \quad -\infty < p \leq P_0$$

și integrala  $\int_1^{+\infty} x^{P_0-1} e^{-x} dx$  este convergentă.

Integrala improprie  $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  nu converge uniform în raport cu parametrul  $p$  pe intervalul  $(-\infty, +\infty)$ . Pentru a justifica această afirmație, evaluăm integrala  $\int_\ell^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  pentru  $\ell > 1$  arbitrar, dar fixat și pentru valori mari ale lui  $p$ , deci pentru  $p \rightarrow +\infty$ . Pentru orice număr întreg  $N > 0$  găsim valori ale lui  $p$  astfel încât  $p-1 > N$ , deoarece  $p \rightarrow +\infty$ . Prin urmare, pentru astfel de  $p$  se poate scrie

$$\int_\ell^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx > \int_\ell^{+\infty} x^N e^{-x} dx = -e^{-x} x^N \Big|_{x=\ell}^{+\infty} + N \int_\ell^{+\infty} x^{N-1} e^{-x} dx.$$

Aplicând repetat integrarea prin părți pentru calculul integralei improprii  $\int_\ell^{+\infty} x^{N-1} e^{-x} dx$  în final se găsește

$$\int_\ell^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx > (\ell^N + N\ell^{N-1} + N(N-1)\ell^{N-2} + \dots + N!)e^{-1} \rightarrow +\infty$$

când  $N \rightarrow +\infty$ . În consecință,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_\ell^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = +\infty, \quad (\forall) \ell > 0.$$

Astfel, integrala improprie  $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$  este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval  $[p_0, +\infty)$  cu  $p_0 > 0$  arbitrar, dar fixat, iar integrala improprie  $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  este uniform convergentă pe orice interval  $(-\infty, P_0]$ , unde  $P_0$  este un număr finit, arbitrar.

Așadar, ambele integrale sunt simultan uniform convergente în raport cu parametrul  $p$  pe orice compact  $[p_0, P_0]$ , unde  $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$ , ceea ce dovedește că integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice compact  $[p_0, P_0]$ , ceea ce trebuia de demonstrat.

**Teorema** *Funcția  $\Gamma$  definită în (2.120) este o funcție continuă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .*

**Demonstrație.** Funcția de integrat,  $f(x, p) = x^{p-1}e^{-x}$ , este continuă pe mulțimea  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ , iar conform Teoremei 2.6.1 integrala improprie (2.120) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval finit  $[p_0, P_0]$ , unde  $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$ . Prin urmare, conform Teoremei 2.3.5, rezultă că integrala  $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$  este funcție continuă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .

**Teorema** *Funcția  $\Gamma$  definită în (2.120) este infinit diferențiabilă, derivata de ordin  $k$  exprimându-se prin integrala improprie depinzând de parametrul  $p$*

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^k e^{-x} dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.122)$$

**Demonstrație.** Derivarea formală în raport cu parametrul  $p$  în (2.120) conduce la egalitatea

$$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x) e^{-x} dx. \quad (2.123)$$

Egalitatea (2.123) poate fi justificată arătând că integrala improprie (2.123) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice interval finit  $[p_0, P_0]$ , unde  $0 < p_0 \leq P_0 < +\infty$ , iar derivata parțială în raport cu variabila  $p$  a funcției de integrat  $f(x, p) = x^{p-1}e^{-x}$  este o funcție continuă pe mulțimea  $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ . Faptul că integrala improprie (2.123) este uniform convergentă în raport cu parametrul  $p$  pe orice compact  $[p_0, P_0]$  se demonstrează aplicând criteriul lui Weierstrass integralelor

$$\int_0^1 x^{p-1}(\ln x) e^{-x} dx \quad \text{și} \quad \int_1^{+\infty} x^{p-1}(\ln x) e^{-x} dx,$$

funcțiile  $g(x)$  din integralele  $\int_0^1 g(x)dx$  și  $\int_1^{+\infty} g(x)dx$  fiind date respectiv de

$$g(x) = x^{P_0-1}|\ln x| \quad \text{și} \quad g(x) = x^{P_0-1}|\ln x|e^{-x}.$$

Pentru obținerea derivatei secunde a funcției  $\Gamma(p)$  se aplică raționamentul de mai sus funcției  $\Gamma'(p)$  din (2.123). Din aproape în aproape se obține (2.122) și teorema este demonstrată.

Să stabilim acum o formulă de recurență pentru funcția  $\Gamma$ . Aplicând în (2.120) formula integrării prin părți, obținem

$$p\Gamma(p) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p e^{-x} - \lim_{x \rightarrow 0+0} x^p e^{-x} + \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx.$$

Însă, aplicând o teoremă de tip Hospital, obținem

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p e^{-x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} x^p e^{-x} = 0,$$

deci

$$p\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx,$$

adică

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (2.124)$$

Aplicând în mod repetat această relație de recurență, obținem

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2) \cdots (p+1)p\Gamma(p). \quad (2.125)$$

Din (2.125) rezultă că este suficient să cunoaștem valorile funcției  $\Gamma$  pentru orice  $p$  pozitiv și subunitar pentru a obține valorile lui  $\Gamma$  pentru toate celelalte valori pozitive ale lui  $p$ . De exemplu

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 2\right) = \left(\frac{1}{2} + 2 - 1\right)\left(\frac{1}{2} + 2 - 2\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \quad (2.126)$$

Pentru a finaliza relația (2.126) este necesar să știm valoarea lui  $\Gamma(p)$  pentru  $p = \frac{1}{2}$ ,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx. \quad (2.127)$$

Punând în (2.127)  $x = t^2$  și ținând cont de integrala Poisson, obținem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \quad (2.128)$$

Din (2.126) și (2.128) rezultă  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ .

Luând, în (2.125),  $p = 1$  și ținând seama că

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1, \quad (2.129)$$

rezultă

$$\Gamma(n+1) = n!. \quad (2.130)$$

Cu alte cuvinte, funcția  $\Gamma$  este, într-un anume sens, o generalizare a noțiunii de factorial; putem spune că prin intermediul funcției  $\Gamma$  noțiunea de factorial capătă sens pentru orice număr pozitiv.

Funcția  $\Gamma$  este de cea mai mare importanță în analiză. Ultima proprietate stabilită face să se întrevadă această importanță.

**Teorema**      *Există o valoare  $p_0$  a lui  $p$ , în intervalul  $(1, 2)$ , astfel încât funcția  $\Gamma(p)$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(0, p_0)$  și strict crescătoare pe  $(p_0, +\infty)$ .*

**Demonstrație.** Din expresia (2.119) a funcției  $\Gamma(p)$  deducem că, pentru  $p > 0$ , valorile sale sunt pozitive. De asemenea, din (2.124) avem

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

pentru  $p > 0$  și deci  $\Gamma(p) \rightarrow +\infty$  pentru  $p \rightarrow 0+0$  deoarece  $\Gamma(p+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$  pentru  $p \rightarrow 0+0$ . Mai mult, se poate arăta că  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \Gamma(p) = +\infty$ .

Observând că din relațiile (2.128) și (2.129) avem că  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$  și folosind Teorema 2.6.1 și Teorema 2.6.2, constatăm că pe intervalul  $[1, 2]$  funcția  $\Gamma$  satisface ipotezele Teoremei lui Rolle. Conform acestei teoreme derivata  $\Gamma'(p)$  se anulează într-un punct  $p_0 \in (1, 2)$ . Deoarece  $\Gamma''(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx > 0$  pentru orice  $p > 0$  rezultă că derivata  $\Gamma'(p)$  este o funcție monoton crescătoare pe intervalul  $(0, +\infty)$ . În consecință, derivata  $\Gamma'(p)$  nu are alte rădăcini, în afară de  $p_0$ , în intervalul  $(0, +\infty)$ . În plus,  $\Gamma'(p) < 0$  pentru  $p < p_0$  și  $\Gamma'(p) > 0$  pentru  $p > p_0$  deoarece  $\Gamma'(p)$  este o funcție monoton crescătoare. Deci, funcția  $\Gamma(p)$  are numai o valoare extremă pe intervalul  $0 < p < +\infty$ , și anume un minim în punctul  $p = p_0$ .

## Proprietăți ale funcției Beta

**Teorema**      *Integrala improprie de speța a doua (2.119) este convergentă pentru  $p > 0$  și  $q > 0$ .*

**Demonstrație.** Dacă  $p \geq 1$  și  $q \geq 1$ , funcția de sub semnul integrală este continuă pe  $[0, 1]$ , deci integrala are sens chiar pe  $[0, 1]$  ceea ce arată că (2.119)

este o integrală definită sau proprie. Dacă cel puțin unul din numerele  $p$  și  $q$  este mai mic decât 1, integrala (2.119) este una improprie de speța a doua și pentru studiul naturii acesteia vom descompune intervalul de integrare prin intermediul punctului  $1/2$ .

Dacă  $p < 1$ , atunci din cele două integrale care rezultă după descompunerea intervalului  $[0, 1]$ , integrala

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} dx$$

este improprie de speța a doua cu limita inferioară punct singular. Aplicând criteriul de comparație în  $\alpha$ , în varianta cu limită, constatăm că pentru  $1-p < 1$ , deci pentru  $p > 0$ , această integrală este convergentă.

Dacă  $q < 1$ , atunci integrala

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}} dx$$

este improprie de speța a doua cu limita superioară punct singular. Aplicând același criteriu de comparație, deducem că integrala este convergentă pentru  $1-q < 1$ , deci pentru  $q > 0$ .

Deci, pentru  $p > 0$ ,  $q > 0$ , integrala (2.119) este convergentă. Prin urmare, putem spune că funcția  $B(p, q)$  este definită în porțiunea de plan cu ambele coordonate strict pozitive.

**Teorema**      *Funcția Beta este simetrică în variabilele sale  $p$  și  $q$ , adică*

$$B(p, q) = B(q, p). \quad (2.131)$$

**Demonstrație.** În integrala (2.119) efectuăm schimbarea de variabilă  $x = 1 - t$  și constatăm că are loc (2.131).

Să aplicăm integralei (2.119) teorema de schimbare de variabilă pentru integrale pe interval necompact, punând

$$x = \varphi(u) = \frac{u}{1+u}. \quad (2.132)$$

Funcția  $\varphi$  este derivabilă, cu derivată continuă pe  $(0, +\infty)$ , și aplică intervalul  $(0, +\infty)$  pe intervalul  $(0, 1)$ . Din faptul că derivata

$$\varphi'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$$

este pozitivă pe  $(0, +\infty)$ , rezultă că  $\varphi$  este funcție strict crescătoare pe  $(0, +\infty)$ , deci toate condițiile pentru aplicarea schimbării de variabilă definită de (2.132) sunt îndeplinite. Avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p-1}(1+u)^{q-1}(1+u)^2}du = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du,\end{aligned}$$

deci

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du. \quad (2.133)$$

Integrala din membrul doi al relației (2.133) o scriem în forma

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \int_0^1 \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du, \quad (2.134)$$

iar în cea de a doua integrală din membrul doi al acestei egalități efectuăm schimbarea de variabilă  $u = \frac{1}{y}$ . Obținem

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du = \int_0^1 \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}dy. \quad (2.135)$$

Din (2.133), (2.134) și (2.135) deducem o nouă expresie pentru valorile funcției Beta, și anume

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{u^{p-1} + u^{q-1}}{(1+u)^{p+q}}du.$$

Această expresie arată că funcția Beta este de fapt o integrală improprie cu punctul singular doar în limita inferioară.

**Teorema**      *Dacă  $q > 1$ , atunci funcția Beta satisface relația de recurență*

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1}B(p, q-1), \quad (2.136)$$

*iar dacă  $p > 1$ , atunci*

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1}B(p-1, q). \quad (2.137)$$



**Demonstrație.** Să presupunem întâi că  $q > 1$ . Scriind că  $x^{p-1} = \left(\frac{x^p}{p}\right)'$  și aplicând integralei (2.119) teorema de integrare prin părți pentru integrale improprii, obținem

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx. \quad (2.138)$$

Utilizând în (2.138) identitatea  $x^p = x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$ , deducem

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q),$$

de unde rezultă (2.136).

Ținând seama de (2.136) și presupunând că  $p > 1$ , în baza relației de simetrie (2.131), avem (2.137) și teorema este demonstrată.

Aplicând în mod succesiv formula (2.136) pentru diferite valori naturale ale lui  $q$ , obținem

$$B(a, n) = \frac{n-1}{p+n-1} \cdot \frac{n-2}{p+n-2} \cdots \frac{1}{p+1} \cdot B(p, 1).$$

Însă  $B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1} dx = 1/p$ , deci, ținând seama de (2.131), obținem

$$B(p, n) = B(n, p) = \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n-1)}. \quad (2.139)$$

Luând în rolul lui  $p$  un număr natural  $m$ , din (2.139) rezultă, multiplicând numărătorul și numitorul cu  $(m-1)!$ ,

$$B(m, n) = B(n, m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

## Relație între funcțiile Beta și Gama

Să cercetăm acum dacă între funcțiile Beta și Gama există vreo relație. Pentru aceasta vom avea nevoie de o altă expresie a funcției  $\Gamma$  și în acest sens vom aplica integralei (2.120) teorema de schimbare de variabilă, punând  $x = \frac{1}{\varphi(u)}$ . Această funcție aplică intervalul  $(0, 1)$  pe intervalul  $(+\infty, 0)$ .

De asemenea,  $\varphi$  este strict monotonă pe  $(0, 1)$ , derivabilă, cu derivată continuă pe  $(0, 1)$  și  $\varphi'(u) = -1/u$ . Avem

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx &= - \int_1^0 \left( \ln \frac{1}{u} \right)^{p-1} e^{-\frac{1}{u}} \frac{1}{u} du = \\ &= - \int_1^0 \left( \ln \frac{1}{u} \right)^{p-1} du = \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{u} \right)^{p-1} du,\end{aligned}$$

de unde rezultă

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left( \ln \frac{1}{u} \right)^{p-1} du. \quad (2.140)$$

Pe de altă parte, funcția  $\ln \frac{1}{u}$  este limita unui șir de funcții reale  $(f_n)$ , cu termenul general funcția continuă  $f_n = n(1 - u^{\frac{1}{n}})$ , definită pe intervalul  $(0, +\infty)$ . Deci,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - u^{\frac{1}{n}}) = \ln \frac{1}{u}. \quad (2.141)$$

Șirul de funcții  $(f_n)$  este strict crescător deoarece funcția reală de variabilă reală  $x$  definită pe intervalul  $(0, +\infty)$ , cu valorile date de  $\frac{1 - e^x}{x}$  este crescătoare, având derivata pozitivă. În plus, funcția  $\ln \frac{1}{u}$  este continuă și prin urmare, conform Teoremei 2.3.1, convergența șirului de funcții  $(f_n)$  este uniformă. Putem deci aplica teorema de trecere la limită sub semnul integrală și obținem, în baza relațiilor (2.140) și (2.141),

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{p-1} \int_0^1 \left( 1 - u^{\frac{1}{n}} \right) du.$$

Făcând în ultima integrală schimbarea de variabilă  $u = y^n$ , obținem

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \int_0^1 y^{n-1} (1 - y)^{p-1} dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p B(n, p). \quad (2.142)$$

Ținând seama de relația (2.139), rezultă

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p \frac{(n-1)!}{p(p+1)(p+2) \cdots (p+n-1)}. \quad (2.143)$$

Relațiile (2.142) și (2.143) stabilesc, între funcțiile  $B$  și  $\Gamma$ , o legătură mijlocită de o trecere la limită.

Să stabilim o legătură mai simplă între aceste două funcții. În acest scop, aplicăm integralei (2.120) schimbarea de variabilă  $x = ty$ , unde  $t \geq 0$ . Obținem

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} y^{p-1} e^{-ty} dy. \quad (2.144)$$

Înlocuind în (2.144) pe  $p$  cu  $p + q$ , în care  $q > 0$ , și pe  $t$  cu  $1 + t$ , găsim

$$\frac{\Gamma(p + q)}{(1 + t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy. \quad (2.145)$$

Înmulțind ambii membri ai acestei egalități cu  $t^{p-1}$  și integrând, în raport cu  $t$ , pe intervalul  $(0, +\infty)$ , obținem

$$\begin{aligned} \Gamma(p + q) \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1 + t)^{p+q}} dt = \\ = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Însă, în baza relației (2.133), integrala din primul membru al egalității (2.146) este egală cu  $B(p, q)$ , astfel că putem scrie

$$\Gamma(p + q) \cdot B(p, q) = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)y} dy. \quad (2.147)$$

Să demonstrăm acum că este permisă schimbarea ordinii de integrare în integrala din membrul al doilea al relației (2.147) pentru  $p > 1$  și  $q > 1$ . Pentru aceasta trebuie să arătăm că cele cinci ipoteze ale Teoremei 2.3.8 asupra schimbării ordinii de integrare într-o integrală iterată sunt îndeplinite. Întrădevăr:

(a) funcția

$$f(y, t) = y^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)y} \geq 0$$

este continuă pentru  $0 \leq y < +\infty$ ,  $0 \leq t < +\infty$ ;

(b) dacă  $p > 1$  și  $q > 1$  integrala din membrul doi al relației (2.146) este convergentă;

(c) integrala

$$\int_0^{+\infty} f(y, t) dy = \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy$$

este o funcție continuă de variabila  $t$  pe intervalul  $(0, +\infty)$  deoarece, în baza relației (2.145), avem

$$\int_0^{+\infty} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy = \Gamma(p+q) \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}},$$

iar  $\Gamma$ , după Teorema 2.6.1, este funcție continuă;

(d) integrala

$$\int_0^{+\infty} f(y, t) dt = \int_0^{+\infty} t^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dt \quad (2.148)$$

este de asemenea o funcție continuă pe intervalul  $(0, +\infty)$  deoarece din (2.148) avem mai întâi

$$\int_0^{+\infty} f(y, t) dt = y^{p+q-1} e^{-y} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-ty} dt,$$

iar apoi, după schimbarea de variabilă  $u = ty$ ,

$$\int_0^{+\infty} f(y, t) dt = y^{q-1} e^{-y} \cdot \Gamma(p), \quad (2.149)$$

membrul doi al acestei relații fiind o funcție continuă de  $y$  pe intervalul  $(0, +\infty)$ ;

(e) integrala improprie de prima speță

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(y, t) dt$$

este convergentă deoarece, conform egalității (2.149) și definiției (2.120) a funcției  $\Gamma(q)$ , avem

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(y, t) dt = \Gamma(p) \cdot \Gamma(q), \quad (2.150)$$

iar membrul al doilea este număr real. În consecință, integrala iterată

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} f(y, t) dy = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} y^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)y} dy \quad (2.151)$$

este convergentă și egală cu integrala din primul membru al egalității (2.152). Așadar, din (2.147), (2.152) și (2.151) deducem că pentru  $p > 1$  și  $q > 1$  are loc identitatea

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (2.152)$$

numită *formula lui Jacobi* ce dă legătura între funcțiile  $B$  și  $\Gamma$  ale lui Euler.

Pentru a extinde relația (2.150) la toți  $p > 0$  și  $q > 0$  scriem din nou această relație pentru  $p > 1$  și  $q > 1$  și aplicăm apoi formulele de recurență (2.136) și (2.137) membrului său stâng și formula de recurență (2.124) membrului drept.

Dacă în relația (2.133) considerăm că  $q = 1 - p$ , atunci ea devine

$$B(p, 1 - p) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{p-1}}{1+u} du, \quad (2.153)$$

unde  $0 < p < 1$ . În Exemplul 2.4.3 (vezi relația (2.101)) am arătat că integrala din (2.153) are valoarea  $\frac{p}{\sin p\pi}$ , prin urmare avem

$$B(p, 1 - p) = \frac{p}{\sin p\pi} \quad \text{pentru} \quad 0 < p < 1. \quad (2.154)$$

Relația de recurență (2.152), împreună cu (2.129) și (2.152) conduc la relația importantă

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1 - p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{pentru} \quad 0 < p < 1. \quad (2.155)$$