CAPITOLUL 10

REPARTIŢII CLASICE

10.1. Repartiţii discrete

10.1.1. Repartiţia binomială

DEFINIŢIE: Variabila aleatoare X are o **repartiţie binomială** de parametrii n şi p dacă funcţia sa de probabilitate este dată de probabilitatea $p_n(x)$ din schema urnei lui Bernoulli, adică $f(x) = C_n^x p^x q^{n-x}$, $x \in \{0, \ldots, n\}$, $p \in (0,1)$, $p + q = 1$. Deci :

$$X : \begin{pmatrix} x \\ C_n^x p^x q^{n-x} \end{pmatrix}$$

I. $f(x)$ este o funcţie de probabilitate, deoarece:

1) $f(x) \geq 0$, evident deoarece $C_n^x > 0$, $p \geq 0$, $q \geq 0$.

2) $\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1^n = 1$.

II. Pentru calculul **mediei şi dispersiei** vom folosi funcţia generatoare de momente.

$$g(t) = M(e^{tX});\ e^{tX} : \begin{pmatrix} e^{tx} \\ f(x) \end{pmatrix},\quad x = 0, 1, \ldots, n.$$

Deci $g(t) = M(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_n^x p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_n^x (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n$.

$g'(t) = npe^t(pe^t + q)^{n-1}$;

$m_1 = g'(0) = np(p+q)^{n-1} = np$.

$g''(t) = n(n-1)p^2 e^{2t}(pe^t + q)^{n-2} + npe^t(pe^t + q)^{n-1}$;

$m_2 = g''(0) = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1} = n^2p^2 - np^2 + np =$

$= n^2p^2 + np(1-p) = n^2p^2 + npq$

Deci: $M(X) = np$ şi $D(X) = m_2 - m_1^2 = n^2p^2 + npq - n^2p^2 = npq$**.**

Funcția caracteristică:

$$c(t)=M(e^{itX})=\sum_{x=0}^{n}e^{itx}C_n^x p^x q^{n-x}=\sum_{x=0}^{n}C_n^x(p\cdot e^{it})^x q^{n-x}=(p\cdot e^{it}+q)^n$$

Evident, $m_1=M(X)=c'(0)=np$.

Analog se calculează $m_2=\frac{1}{i^2}c''(0)=m^2p^2+npq$. Prin urmare, $D(X)=m_2-m_1^2=npq$.

10.1.2. Repartiția hipergeometrică

DEFINIȚIE: Variabila aleatoare X are **repartiție hipergeometrică** dacă funcția sa de probabilitate este dată de probabilitatea $P_n(X)$ din schema urnei cu bilă nerevenită (Această schemă presupunea că dintr-o urnă cu N bile, din care a erau albe şi b erau negre, se extrag n bile. P_n este probabilitatea ca din cele n bile extrase x să fie albe.). Deci $f(x)=\frac{C_a^x C_{N-a}^{n-x}}{C_N^n}$, $x\in\{0,\ldots,n\}$.

$$X:\begin{pmatrix} x \\ \frac{C_a^x C_{N-a}^{n-x}}{C_N^n}\end{pmatrix}$$

I. $f(x)$ este o funcție de probabilitate, deoarece:

1) $f(x)\geq 0$, evident deoarece toate combinările sunt mai mari ca zero.

2) $\sum_{x=0}^{n}f(x)=\sum_{x=0}^{n}\frac{C_a^x C_{N-a}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{1}{C_N^n}\sum_{x=0}^{n}C_a^x C_{N-a}^{n-x}=1$.

Pentru a calcula suma $\sum_{x=0}^{n}f(x)$ am folosit egalitatea $\sum_{x=0}^{n}C_a^x C_{N-a}^{n-x}=C_N^n$ pe care o vom demonstra în continuare.

$(1+y)^a(1+y)^b=(1+y)^{a+b}$

$(1+y)^a=C_a^0 1+C_a^1 y+\ldots+C_a^{n-1}y^{n-1}+C_a^n y^n+\ldots+C_a^a y^a$

$(1+y)^b=C_b^0 1+C_b^1 y+\ldots+C_b^{n-1}y^{n-1}+C_b^n y^n+\ldots+C_b^b y^b$

$(1+y)^{a+b}=C_{a+b}^0 1+C_{a+b}^1 y+\ldots+C_{a+b}^{n-1}y^{n-1}+C_{a+b}^n y^n+\ldots+C_{a+b}^{a+b}y^{a+b}$

Coeficientul lui y^n din membrul stâng al ultimei relații este :

$$y^n[C_a^0C_b^n + C_a^1C_b^{n-1} + \ldots + C_a^{n-1}C_b^1 + C_a^nC_b^0] = \sum_{x=0}^{n} C_a^x C_b^{n-x} \,.$$

Deci $\sum_{x=0}^{n} C_a^x C_b^{n-x} = C_{a+b}^n \Rightarrow \sum_{x=0}^{n} C_a^x C_{N-a}^{n-x} = C_N^n$.

II. Media şi dispersia:

$$M(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{C_a^x C_{N-a}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$xC_a^x = x\frac{a!}{x!(a-x)!} = x\frac{a(a-1)!}{x(x-1)!(a-x)!} = a\frac{(a-1)!}{(x-1)!(a-x)!} = aC_{a-1}^{x-1}$$

$$\sum_{x=0}^{n} C_a^x C_{N-a}^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} xC_a^x C_{N-a}^{n-x} = a\sum_{x=1}^{n} C_{a-1}^{x-1} C_{N-a}^{n-x} = aC_{N-1}^{n-1}$$

$$M(X) = \frac{aC_{N-1}^{n-1}}{C_N^n} = a\frac{(N-1)!n!(N-n)!}{(n-1)!(N-n)!N!} = a\frac{n}{N} = n\frac{a}{N} = np,\ p = \frac{a}{N}.$$

Pentru a calcula dispersia, vom calcula momentul de ordinul doi.

$$M(X^2) = \frac{1}{C_N^n}\sum_{x=0}^{n} x^2 C_a^x C_{N-a}^{n-x} = \frac{1}{C_N^n}\sum_{x=0}^{n} x(x-1)C_a^x C_{N-a}^{n-x} + \frac{1}{C_N^n}\sum_{x=0}^{n} xC_a^x C_{N-a}^{n-x},$$ unde

$x^2 = x(x-1) + x$.

$$\sum_{x=0}^{n} x(x-1)C_a^x = \sum_{x=2}^{n} x(x-1)\frac{a!}{x!(a-x)!} = a(a-1)\sum_{x=2}^{n}\frac{(a-2)!}{(x-2)!(a-x)!} = a(a-1)\sum_{x=2}^{n} C_{a-2}^{x-2}$$

$$M(X^2) = \frac{a(a-1)}{C_N^n}\sum_{x=0}^{n} C_{a-2}^{x-2} C_{N-a}^{n-x} + M(X) = \frac{a(a-1)}{C_N^n} C_{N-2}^{n-2} + M(X) =$$

$$= \frac{a(a-1)n!(N-n)!(N-2)!}{N!(n-2)!(N-n)!} + n\frac{a}{N} = a(a-1)\frac{n(n-1)}{N(N-1)} + a\frac{n}{N} =$$

$$= \frac{na}{N}\left[\frac{(a-1)(n-1)}{N-1} + 1\right] = \frac{na}{N}\cdot\frac{an-a-n+N}{N-1}.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{na}{N}\cdot\frac{an-a-n+N}{N-1} - \frac{n^2a^2}{N^2} =$$

$$= \frac{na}{N}\left[\frac{an-a-n+N}{N-1} - \frac{na}{N}\right] = \frac{na}{N}\cdot\frac{anN-aN-nN+N^2-nN+na}{N(N-1)}$$

$$= n\frac{a}{N}\cdot\frac{(N-a)(N-n)}{N(N-1)} = a\frac{n}{N}\cdot\frac{N-a}{N}\cdot\frac{N-n}{N-1}.$$

Dar $\frac{a}{N}=p \qquad q=1-p=1-\frac{a}{N}=\frac{N-a}{N}$.

Obținem astfel $D(X)=npq\frac{N-n}{N-1}$.

OBSERVAȚIE: Pentru N suficient de mare în raport cu n putem face aproximarea $\frac{N-n}{N-1}\approx\frac{N-n}{N}=1-\frac{n}{N}$. Atunci $D(X)\approx npq\left(1-\frac{n}{N}\right)$.

Deci dispersia variabilei aleatoare hipergeometrice diferă de dispersia variabilei aleatoare binomiale cu un factor subunitar ce tinde către 1 când $N\to\infty$.

10.1.3. Repartiția uniformă discretă

DEFINIȚIE: O variabilă aleatoare X are o **repartiție uniformă discret**ă dacă funcția sa de probabilitate este de forma $f(x)=\frac{1}{n}$.

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & x & \ldots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

I. $f(x)$ este o funcție de probabilitate, deoarece:

1) $f(x)\geq 0$, evident

2) $\sum_{x=1}^{n} f(x)=n\frac{1}{n}=1$

II. Media şi dispersia

$$M(X)=\sum_{x=1}^{n} x\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

$$M(X^2)=\sum_{x=1}^{n} x^2\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x^2=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12}=$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

10.1.4. Repartiția Poisson

DEFINIȚIE: O variabilă aleatoare X are **repartiție Poisson** dacă funcția sa de probabilitate este de forma $f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$, $x \in N, \lambda > 0$.

$$X : \begin{pmatrix} x \\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \end{pmatrix}$$

I. $f(x)$ este o funcție de probabilitate deoarece:

1) $e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \geq 0$ evident.

2) $\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$, unde $\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}$ este dezvoltarea lui e^{λ} în serie McLaurin.

II. Media şi dispersia le putem determina prin calcul direct**:**

$$M(X) = \sum_{x=0}^{\infty} xe^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\lambda\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda .$$

$$M(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} + M(X) = e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-2)!} + M(X) =$$

$$= \lambda^2\cdot e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + M(X) = \lambda^2\cdot e^{-\lambda}e^{\lambda} + M(X) = \lambda^2 + \lambda .$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda .$$

Funcția caracteristică a variabilei aleatoare Poisson:

$c(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} f(x) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot e^{it})^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}$. Prin urmare $c(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}$.

$$c'(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}\lambda\cdot i\cdot e^{it} \Rightarrow c'(0) = e^{-\lambda(1-1)}\lambda\cdot i\cdot e^{0}$$

$$M(X) = m_1 = \frac{1}{i}c'(0) = \frac{1}{i}\lambda\cdot i\cdot e^{-\lambda\cdot 0} = \lambda$$

$$c''(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}(\lambda \cdot i \cdot e^{it})^2 + e^{-\lambda(1-e^{it})}\lambda \cdot i^2 \cdot e^{it}$$

$$c''(0) = e^{-\lambda(1-1)}\lambda^2 \cdot i^2 \cdot e^0 + e^{-\lambda(1-1)}\lambda^2 \cdot i^2 \cdot e^0 = i^2(\lambda^2 + \lambda)$$

$$m_2 = \frac{1}{i^2}c''(0) = \lambda^2 + \lambda \cdot$$

Prin urmare: $D(X) = m_2 - m_1^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$.

10.2. Repartiții continue

10.2.1. Repartiția continuă uniformă

DEFINIȚIE: O variabilă aleatoare X , continuă, are **repartiție uniformă** dacă funcția sa de probabilitate este de forma $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, $x \in (a,b)$.

I. $f(x)$ este o funcție de probabilitate deoarece:

1) $f(x) \geq 0$ evident, deoarece $b > a$.

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = \frac{b-a}{b-a} = 1$

II. Media şi dispersia:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$M(X^2) = \int_a^b x^2 f(x) = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} =$$

$$= \frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

10.2.2. Repartiția exponențială negativă

DEFINIȚIE: O variabilă aleatoare X are o **repartiție exponențială negativă** de parametru μ dacă funcția sa de probabilitate este de forma $f(x) = \mu \cdot e^{-\mu x}$, $x \geq 0$, $\mu > 0$.

I. $f(x)$ este o funcție de probabilitate deoarece:

1) $f(x) \geq 0$ evident.

2) $\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \mu \cdot e^{-\mu \cdot x} dx = -e^{-\mu \cdot x} \Big|_0^\infty = 0 + 1 = 1$

II. Media şi dispersia:

$M(X) = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty x\mu \cdot e^{-\mu \cdot x} dx = -xe^{-\mu \cdot x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\mu \cdot x} dx =$

$-\frac{1}{\mu} e^{-\mu \cdot x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\mu}$.

În rezolvarea integralei am folosit metoda integrării prin părți, unde $u(x) = x$, $du = dx$, $v(x) = -e^{-\mu \cdot x}$, $dv = \mu \cdot e^{-\mu \cdot x} dx$

$M(X^2) = \int_0^\infty x^2 \mu \cdot e^{-\mu \cdot x} dx = -x^2 e^{-\mu \cdot x} \Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\mu \cdot x} = 0 + \frac{2}{\mu} \int_0^\infty x\mu \cdot e^{-\mu \cdot x} =$

$= \frac{2}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{2}{\mu^2}$.

Integrala a fost calculată tot prin metoda integrării prin părți, unde $u(x) = x^2$, $du = 2xdx$, $v(x) = -e^{-\mu \cdot x}$, $dv = \mu \cdot e^{-\mu \cdot x} dx$.

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$.

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\mu}$.

Putem calcula media şi dispersia şi astfel:

$M(X) = \int_0^\infty x f(x)dx = \int_0^\infty x \cdot \mu \cdot e^{-\mu \cdot x} dx$

Făcând schimbarea de variabilă $\mu \cdot x = y \Rightarrow x = \frac{y}{\mu} \Rightarrow dx = \frac{1}{\mu} dy$ şi observând că limitele de integrare se păstrează, obținem:

$M(X) = \mu \int_0^\infty \frac{y}{\mu} \cdot e^{-y} \cdot \frac{1}{\mu} dy = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty y e^{-y} dy = \frac{1}{\mu} \Gamma(2) = \frac{1}{\mu}$

La fel, $M(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = \mu \int_0^\infty x^2 e^{-\mu \cdot x} dx = \mu \int_0^\infty \frac{y^2}{\mu^2} e^{-y} \frac{1}{\mu} dy =$

$= \frac{1}{\mu^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = \frac{1}{\mu^2} \Gamma(3) = \frac{2}{\mu^2}$.

Prin urmare, $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$.

Repartiția exponențială are proprietatea $M(X)=\sigma_X=\frac{1}{\mu}$.

Repartițiile exponențială și Poisson sunt utilizate în modelarea şi rezlovarea problemelor legate de firele de aşteptare care apar în activitatea economică.

10.2.3. Repartiția normală

DEFINIȚIE: O variabilă aleatoare X are o **repartiție normală** dacă funcția sa de probabilitate este de forma $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$, unde $m\in R$, $\sigma>0$ (1)

Pentru a pune în evidență parametrii m şi σ, densitatea de probabilitate se mai notează $n(x;m,\sigma)$, $x\in R$, $\sigma>0$.

I. $f(x)$ este funcție de probabilitate, deoarece:

1) $n(x;m,\sigma)\geq 0$, evident, din definiție.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} n(x;m,\sigma)dx=1$ sau $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx=1$.

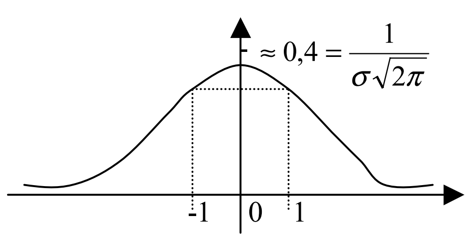
Notăm $\frac{x-m}{\sigma}=y$, $\frac{1}{\sigma}dx=dy\Rightarrow dx=\sigma\cdot dy$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}y^2}\sigma\cdot dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}=1,$$

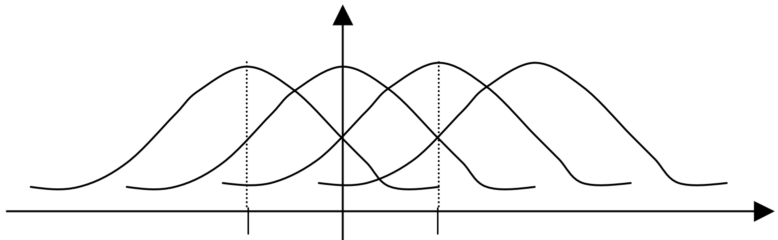
deoarece se ştie că integrala Euler-Poisson $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy=\sqrt{2\pi}$.

Graficul funcției de probabilitate depinde de parametrii m şi σ, forma curbei rămânând (structural) aceeaşi, şi anume forma cunoscută sub numele de **clopotul lui Gauss**.

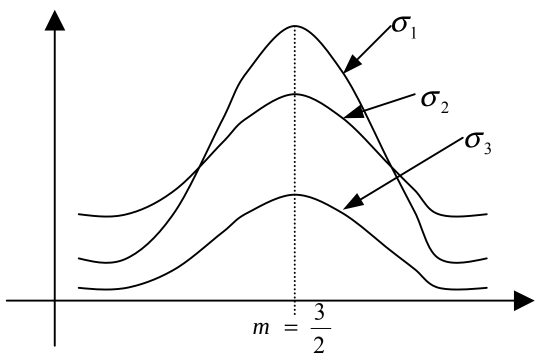
EXEMPLU: $n(x;0,\sigma)$



1) Față de parametrul m , curbele $n(x,m,\sigma)$ reprezintă de fapt translații de-a lungul axei *ox*, menținându-şi forma şi mărimea.



2) Față de parametrul σ , curbele sunt mai ascuțite sau mai plate, astfel încât aria cuprinsă între graficul curbei şi axa *ox* să fie egală cu 1 (unitatea de suprafață). Aici $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.



OBSERVAȚIE: Curba se apropie repede de axa *ox* . În raport cu o abatere $|x-m| < 3\sigma$, diferența față de *ox* este de ordinul a 0,003 unități. Astfel, repartiția normală poate fi considerată definită într-un interval închis şi finit.

Pentru determinarea mediei şi dispersiei vom utiliza **funcția caracteristică a variabilei aleatoare normale.**

$$c(t) = M(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} n(x;m,\sigma)dx \qquad (2)$$

Calculăm pentru început funcția caracteristică a variabilei aleatoare normale normate: $n(y;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$ (3)

$$Y : \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow e^{itY} : \begin{pmatrix} e^{ity} \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{pmatrix}.$$

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} n(y;0,1)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2-2ity)} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2-2ity+i^2t^2)+\frac{1}{2}i^2t^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it)^2+\frac{1}{2}i^2t^2} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it)^2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dy = \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-it)^2} dy = \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz =$$

$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\frac{1}{2}t^2}$, unde am folosit substituția $y - it = z \Rightarrow dy = dz$. Observăm, de asemenea, că utilizând această substituție limitele de integrare nu se schimbă.

Ultima integrală este integrala Euler-Poisson. Ea este egală cu $\sqrt{2\pi}$ şi se calculează astfel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 2\int_{0}^{\infty} e^{it} \frac{dt}{\sqrt{2t}} = \sqrt{2}\int_{0}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \sqrt{2\pi}\,.$$

În calculul de mai sus am folosit substituția :

$$\frac{1}{2}z^2 = t \Rightarrow zdz = dt \Rightarrow dz = \frac{dt}{z};\ \frac{z^2}{2} = t \Rightarrow z = \sqrt{2t} \Rightarrow dz = \frac{dt}{\sqrt{2t}}.$$

Prin urmare, funcția caracteristică a variabilei aleatoare normale normate $n(y;0,1)$ este $c_Y(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ (4)

Fie variabila aleatoare $X = \alpha Y + \beta$. Atunci $c_X(t) = e^{i\beta t} c_Y(\alpha \cdot t)$ (5)

Demonstrație:

$$c_X = M(e^{itX}) = M[e^{it(\alpha \cdot Y + \beta)}] = M[e^{it\alpha Y} e^{it\beta}] = e^{it\beta} M[e^{i(t\alpha)Y}] = e^{it\beta} c_Y(t).$$

Fie variabila aleatoare normală $n(x;m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$.

Facem substituția $\frac{x-m}{\sigma}=y \Rightarrow x=\sigma\cdot y+m \Rightarrow X=\sigma\cdot Y+m$, unde $Y = N(y;0,1)$. Aşa cum am văzut, pentru variabila aleatoare normală normată, funcția caracteristică este $c_Y(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

Deci conform (5) avem:

$$c_X(t) = c_{\sigma Y+m}(t) = e^{imt}c_Y(\sigma \cdot t) = e^{imt}e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

În concluzie, funcția caracteristică a variabilei normale $n(x;m,\sigma)$ este $c_X(t) = e^{imt-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ (6)

Calculul mediei: $M(X) = m_1$

$$m_1 = \frac{c'(0)}{i}$$

$$c'_X(t) = (im - \sigma^2 t)e^{itm-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \Rightarrow c'_X(0) = ime^0 = im \Rightarrow m_1 = m.$$

Deci $M(X) = m$.

Calculul dispersiei: $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = m_2 - m_1^2$

$$m_2 = \frac{c''(0)}{i^2}$$

$$c''(t) = -\sigma^2 e^{itm-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + (im - \sigma^2 t)^2 e^{itm-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$c''(0) = -\sigma^2 e^0 + (im)e^0 = -\sigma^2 - m^2$$

$$m_2 = \frac{c''(0)}{i^2} = \frac{-\sigma^2 - m^2}{i^2} = \sigma^2 + m^2$$ (întrucât, evident, $i^2 = -1$)

Deci $D(X) = \sigma^2 + m^2 - m^2 = \sigma^2$.

OBSERVAȚIE: Parametrii m şi σ ai repartiției normale reprezintă media şi respectiv abaterea medie pătratică.

Funcția de repartiție ; funcția integrală a lui Laplace:

Fie variabila aleatoare normală de parametrii m şi σ: $X : \begin{pmatrix} x \\ n(x;m,\sigma) \end{pmatrix}$, $\sigma > 0$, $m \in R$, unde, aşa cum ştim,

$n(x;m,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$. Funcția de repartiție este :

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x}n(t;m,\sigma)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}dt \qquad (7)$$

Notăm: $N(x;m,\sigma)=\int_{-\infty}^{x}n(t;m,\sigma)dt$ funcția de repartiție a variabilei aleatoare normale.

Fie X o variabilă aleatoare normală cu densitatea de probabilitate $n(x;m,\sigma)$ şi funcția de repartiție $N(x;m,\sigma)$. Dacă facem schimbarea de variabilă $Z=\frac{X-m}{\sigma}$, ştim că Z este o variabilă aleatoare normală normată cu media $m=0$ şi dispersia $\sigma=1$. Deci Z are densitatea de probabilitate $n(z;0,1)$ şi funcția de repartiție $N(z;0,1)$.

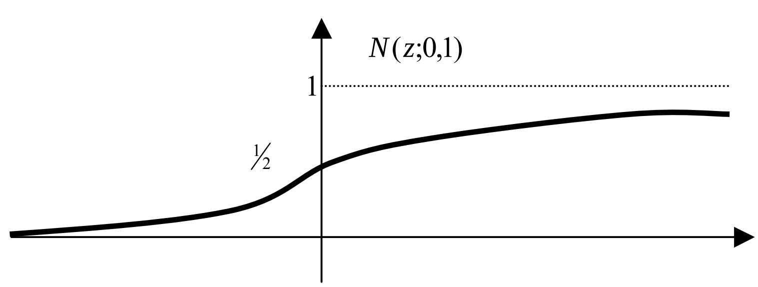
$$F(x)=P(X<x)=N(x;m,\sigma)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2}dt \qquad (8)$$

Pentru calculul integralei (8) facem substituția: $\frac{t-m}{\sigma}=y\Rightarrow dt=\sigma\cdot dy$ .Dacă $t=x$, atunci $y=\frac{x-m}{\sigma}$, iar pentru t tinzând către $-\infty$ şi y tinde către $-\infty$. Astfel, vom obține: $F(x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\sigma\cdot dy=N(y;0,1)=N\left(\frac{x-m}{\sigma};0,1\right)$.

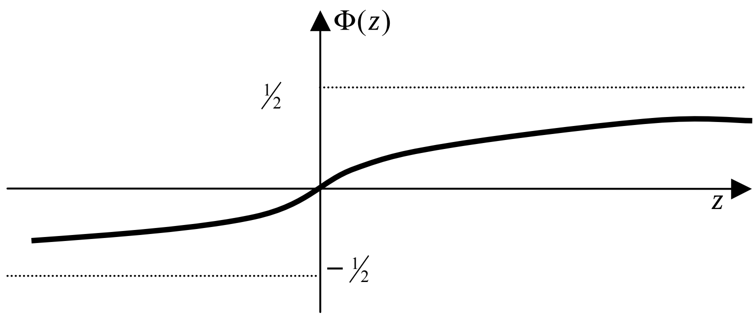
Prin urmare, putem scrie:

$P(X<x)=N(x;m,\sigma)=N(z;0,1)$, unde $z=\frac{x-m}{\sigma}$.

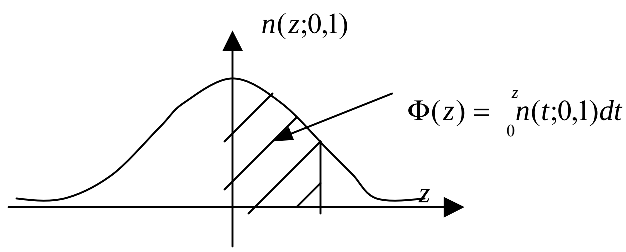
Reprezentarea grafică a funcției de repartiție normală normată de forma $N(z;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$, unde $z=\frac{x-m}{\sigma}$ este:



OBSERVAȚIE: Curba $N(z;0,1)$ este simetrică față de punctul $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Dacă facem o translație de axe: $\Phi(z) = N(z;0,1) - \frac{1}{2}$ (translație datorată lui Laplace), obținem:



OBSERVAȚIE: $\Phi(z)$ este o funcție simetrică față de origine, şi deci funcția Φ este o funcție impară . Prin urmare este suficient să cunoaştem $\Phi(z)$ pentru $z > 0$.



În toate cărțile şi manualele de teoria probabilităților şi statistică matematică, funcția $\Phi(z)$ este tabelată.

Prin urmare, avem: $N(z;0,1) = \frac{1}{2} + \Phi(z)$ este funcția de repartiție a variabilei aleatoare normală normată şi $N(x;m,\sigma) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ este funcția de repartiție a variabilei aleatoare normală nenormată (de parametrii m şi σ).

Calculul momentelor centrate :

Momentele centrate ale variabilei aleatoare normale sunt des utilizate, în special în statistica matematică. Astfel, momentul centrat de ordinul r :

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^r n(x;m,\sigma)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^r \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

Am văzut că:

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^0 n(x;m,\sigma)dx = 1 \Rightarrow \mu_0 = 1 .$$

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx -$$

$$m\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0$$

Notăm : $\frac{x-m}{\sigma} = y \Rightarrow x-m = \sigma \cdot y \Rightarrow dx = \sigma \cdot dy$ şi întrucât $\sigma > 0$, limitele de integrare se păstrează. Obținem:

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^r y^r \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \sigma \cdot dy = \frac{\sigma^r}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^r e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{\sigma^r}{\sqrt{2\pi}}\left[-y^r e^{-\frac{1}{2}y^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}\right] +$$

$$+\frac{\sigma^r}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (r-1)y^{r-2} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sigma^2(r-1)\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{r-2} y^{r-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \Rightarrow \mu_r = \sigma^2(r-1)\mu_{r-2}$$

În rezolvarea acestei integrale am aplicat metoda integrării prin părți, unde $f = y^{r-1} \Rightarrow f' = (r-1)y^{r-2}$, $g' = ye^{-\frac{1}{2}y^2} \Rightarrow g = -e^{-\frac{1}{2}y^2}$.

Deci:

$$\mu_2 = \sigma^2(2-1) = \sigma^2$$
$$\mu_3 = \sigma^2(3-1)\mu_1 = 0$$
$$\mu_4 = \sigma^2(4-1)\mu_2 = 1\cdot 3\cdot \sigma^4$$
$$\mu_5 = 0$$

....

$$\mu_{2q+1} = 0$$
$$\mu_{2q} = 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2q-1)\sigma^{2q}$$

10.2.4. Repartiția Gamma

DEFINIȚIE: O variabilă aleatoare X are **repartiție Gamma** dacă funcția sa de repartiție este de forma:

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(a+1)b^{a+1}}x^a e^{-\frac{x}{b}}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}, \quad \text{unde} \quad \Gamma(a+1)=\int_0^\infty x^a e^{-x}dx$$

şi $a>-1$, $b>0$.

I. $f(x)$ este funcție de probabilitate, deoarece:

1) $f(x;a,b)\ge 0$, evident

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x;a,b)dx=\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a+1)b^{a+1}}x^a e^{-\frac{x}{b}}dx=\frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty \frac{1}{b^{a+1}}x^a e^{-\frac{x}{b}}dx=$

Notăm $\dfrac{x}{b}=y\Rightarrow x=b\cdot y\Rightarrow dx=b\cdot dy$

$$=\frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty \frac{1}{b^{a+1}}b^a y^a e^{-y}b\cdot dy=\frac{1}{\Gamma(a+1)}\int_0^\infty y^a e^{-y}dy=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1)}=1$$

Amintim câteva proprietați ale integralei Γ:

P1. $\Gamma(a)=(a-1)\Gamma(a-1)$

P2. $\Gamma(n)=(n-1)!$

P3. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Demonstrațiile acestor proprietăți se găsesc în cursurile de analiză matematică.

Funcţia generatoare de momente pentru variabila aleatoare Gamma:

$$g(t)=M(e^{tX})=\int_0^\infty e^{tx}f(x;a,b)dx=\int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{\Gamma(a+1)b^{a+1}}x^a e^{-\frac{x}{b}}dx, \quad a>-1 \quad b>0$$

Facem substituția : $y=\dfrac{x}{b}\Rightarrow x=b\cdot y\Rightarrow dx=b\cdot dy$.

Avem:

$$g(t) = \int_0^\infty e^{bty} \frac{1}{\Gamma(a+1)b^{a+1}} b^a y^a b \cdot dy = \frac{1}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty e^{bty} y^a \cdot e^{-y} \cdot dy =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a+1)} \int_0^\infty e^{-y(1-bt)} y^a dy = \frac{1}{(1-bt)^{a+1}} \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a+1)\left(\frac{1}{1-bt}\right)^{a+1}} e^{-\frac{y}{\frac{1}{1-bt}}} y^a dy = \frac{1}{(1-bt)^{a+1}},$$

deoarece $\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a+1)\left(\frac{1}{1-bt}\right)^{a+1}} e^{-\frac{y}{\frac{1}{1-bt}}} y^a dy = 1$, fiind densitatea de probabilitate a repartiției Γ.

Prin urmare, putem scrie că funcția generatoare de momente pentru Γ este $g(t) = (1-bt)^{-(a+1)}$.

Momentele inițiale:

Calculăm momentele inițiale din relația $g^{(r)}(t)\,|_{t=0} = m_r$, $\quad r = 1,2,....$

$$g'(t) = -(a+1)(1-bt)^{-(a+2)}(-b) = b(a+1)(1-bt)^{-(a+2)} \Rightarrow m_1 = g'(0) = b(a+1)$$

$$g''(t) = b^2(a+1)(a+2)(1-bt)^{-(a+3)} \Rightarrow m_2 = g''(0) = b^2(a+1)(a+2)$$

....

$$g^{(r)}(t) = b^r(a+1)(a+2)\cdot \mathrm{K} \cdot (a+r)(1-bt)^{-(a+r+1)} \Rightarrow m_r = g^{(r)}(0) =$$

$$= b^r(a+1)(a+2)\cdot \mathrm{K} \cdot (a+r)$$

Deci $M(X) = m_1 = b(a+1)$ și

$$D(X) = m_2 - m_1^2 = b^2(a+1)(a+2) - b^2(a+1)^2 = b^2(a+1)$$

Momentele centrate:

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k = M[X-m]^k = M\left[\sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j m^j X^{k-j}\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j m^j M(X^{k-j})$$

Deci : $\mu_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j m^j m_{k-j}$.

OBSERVAȚIE:
Pentru $k = 2$ obținem:

$$\mu_2 = \sum_{j=0}^{2} C_2^j m^j m_{2-j} = C_2^0 m^0 m_2 - C_2^1 m^1 m_1 + C_2^2 m^2 m_0 = m_2 - m_1^2 = D(X), \qquad \text{unde :}$$

$m_0 = M(X^0) = M(1) = 1$ şi $m_1 = M(X^1) = M(X) = m$.
Pentru $k = 1$ obținem:
$\mu_1 = M(X - m) = M(X) - M(m) = m - m = 0$

În cazul repartiției Γ, vom obține:
$\mu_1 = 0$;
$\mu_2 = D(X) = b^2(a+1)$;

$$\mu_3 = \sum_{j=0}^{3} (-1)^j C_3^j m^j m_{3-j} = m_3 - 3m \cdot m_2 + 3m^2 m_1 - m^3 m_0 =$$

$$= b^3(a+1)(a+2)(a+3) - 3b(a+1)b^2(a+1)(a+2) + 3b^2(a+1)^2 b(a+1) - b^3(a+1)^3 =$$

$$= b^3(a+1)[(a+2)(a+3) - 3(a+1)(a+2) + 3(a+1)^2 - (a+1)^2] =$$

$$= b^3(a+1)[(a^2 + 5a + 6 - 3a^2 - 9a - 6 + 2a^2 + 4a + 2] = b^3(a+1)2 \Rightarrow \mu_3 = 2b^3(a+1)$$

$\mu_4 = 3b^4(a+1)(a+3)$.

10.2.5. Repartiția Beta

DEFINIȚIE: O variabilă aleatoare X are **repartiție Beta** dacă densitatea sa de probabilitate este de forma:

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & x \in (-\infty,0) \cup (1,\infty) \end{cases}, \quad \text{unde} \quad a > 0, \quad b > 0 \quad \text{şi}$$

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

I. $f(x)$ este funcție de probabilitate, deoarece:
1) $f(x;a,b) \geq 0$, evident oricare ar fi $x \in [a,b]$
2) $\int_0^1 f(x;a,b)dx = \dfrac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \dfrac{1}{\beta(a,b)} \beta(a,b) = 1$

Reamintim câteva proprietăți ale integralei $\beta(a,b)$:

P1. $\beta(a,b)=\beta(b,a)$

Demonstrație: facem substituția $1-x=y \Rightarrow x=1-y \Rightarrow dx=-dy$.

$$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=-\int_1^0 (1-y)^{a-1}y^{b-1}dy=\int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{a-1}dy=\beta(b,a)$$

P2. $\beta(a,b)=\dfrac{a-1}{a+b-1}\beta(a-1,b-1)$

P3. $\beta(a,b)=\dfrac{a-1}{a+b-1}\cdot\dfrac{b-1}{a+b-2}\beta(a-1,b-1)$

P4. $\beta(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, unde $\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$

II. Calculul momentelor pentru calculul mediei şi dispersiei:

$$m_r=\int_0^1 x^r f(x;a,b)dx=\int_0^1 x^r\frac{1}{\beta(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\frac{1}{\beta(a,b)}\int_0^1 x^{a+r-1}(1-x)^{b-1}dx=$$

$$=\frac{\beta(a+r,b)}{\beta(a,b)}=\frac{\Gamma(a+r)\Gamma(b)}{\Gamma(a+r+b)}\cdot\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}=\frac{\Gamma(a+r)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+r+b)\Gamma(a)}$$

Dar $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a) \Rightarrow \Gamma(a+r)=(a+r-1)\Gamma(a+r-1)=$

$=(a+r-1)(a+r-2)\Gamma(a+r-2)=\ldots=(a+r-1)(a+r-2)\cdot\ldots\cdot a\Gamma(a)$

$\Gamma(a+r+b)=\Gamma(a+b+r)=(a+b+r-1)\Gamma(a+b+r-1)=(a+b+r-1)(a+b+r-2)\cdot$

$\cdot\Gamma(a+b+r-2)=\ldots=(a+b+r-1)(a+b+r-2)\cdot\ldots\cdot(a+b)\Gamma(a+b)$

Deci

$$m_r=\frac{(a+r-1)(a+r-2)\cdot\ldots\cdot a\Gamma(a)\Gamma(a+b)}{(a+b+r-1)(a+b+r-2)\cdot\ldots\cdot(a+b)\Gamma(a+b)\Gamma(a)}=\frac{a(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+r-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdot\ldots\cdot(a+b+r-1)}$$

Prin urmare, $m_1=\dfrac{a}{a+b}=M(X)$, $m_2=\dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}=M(X^2)$

Deci dispersia este :

$$D(X)=m_2-m_1^2=\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}-\frac{a^2}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)(a^2+a)-a^2(a+b+1)}{(a+b)^2(a+b+1)}=$$

$$=\frac{a^3+a^2+a^2b+ab-a^3-a^2b-a^2}{(a+b)^2(a+b+1)}=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

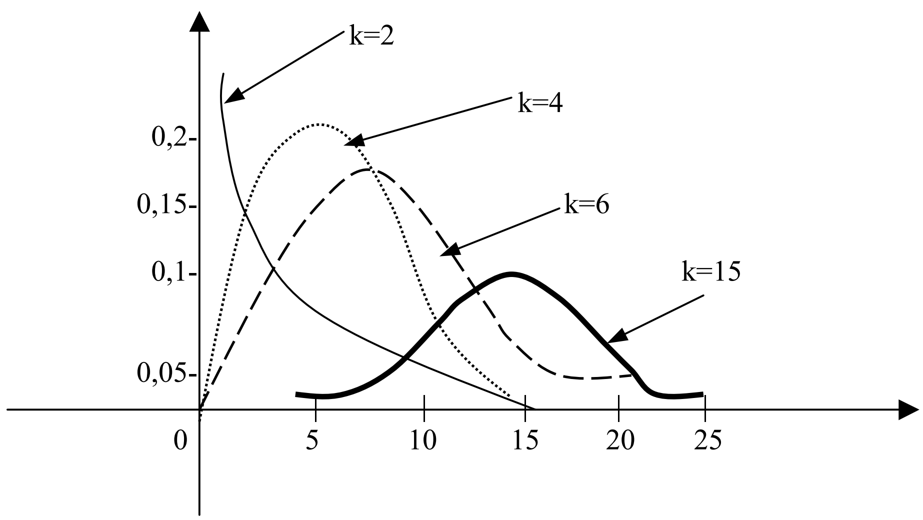
10.2.6. Repartiția χ^2

DEFINIȚIE: O variabilă aleatoare *X* are **repartiție** χ^2 dacă funcția sa de repartiție este de forma:

$$f(x;k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

, unde $k \in N^*$ reprezintă numărul gradelor de libertate.

Mai jos prezentăm graficele funcției $f(x;k)$ pentru $k = 2,4,6,15$.



Se vede că graficele sunt asimetrice, dar, pentru valori mari ale gradelor de libertate $(k > 30)$, graficul repartiției χ^2 se apropie de graficul repartiției normale.

OBSERVAȚIE: χ^2 se poate obține din Γ pentru $a = \frac{k}{2} - 1$ și $b = 2$.

Funcția generatoare de momente a variabilei aleatoare Γ este de forma $g(t)=\frac{1}{(1-bt)^{a+1}}=(1-bt)^{-(a+1)}$ şi $g^{(r)}(0)=m_r$, $r=1,2,\ldots.$. Prin urmare, pentru $a=\frac{k}{2}-1$ şi $b=2$, vom obține funcția generatoare de momente a variabilei χ^2 de forma:

$$g(t)=(1-2t)^{-\frac{k}{2}}.$$

$$g'(t)=-\frac{k}{2}(1-2t)^{-\frac{k}{2}-1}(-2)=k(1-2t)^{-\frac{k}{2}-1} \qquad g'(0)=m_1=k$$

$$g''(t)=-k\left(\frac{k+2}{2}\right)(1-2t)^{-\frac{k}{2}-1}(-2)=k(k+2)(1-2t)^{-\frac{k}{2}-1}$$

$$g''(0)=m_2=k(k+2)$$

$$D(\chi^2)=m_2-m_1^2=k^2+2k-k^2=2k$$

10.2.7. Repartiția Student

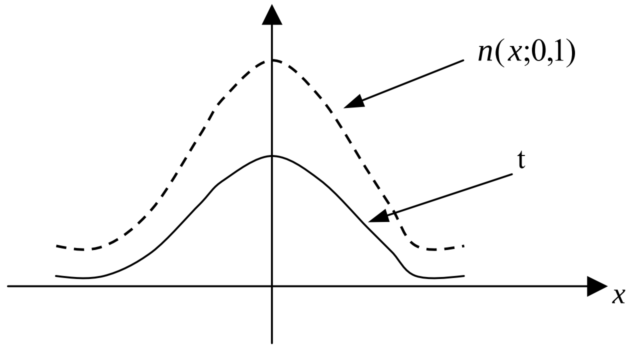
DEFINIȚIE: O variabilă aleatoare X are **repartiție Student** dacă funcția sa de repartiție este de forma:

$$f(t,k)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad t\in\Re$$

Se poate arăta că variabila aleatoare „t" este dată de raportul $t=\frac{z\sqrt{k}}{V}$, unde z este variabila aleatoare $n(x;0,1)$, iar variabila aleatoare V este un χ^2 cu k grade de libertate, independentă de z.

Se arată că $\lim\limits_{k\to\infty} f(t,k)=n(t;0,1)$, deci t este aproximată suficient de bine de $n(x;0,1)$ pentru $k>30$.

$M(t)=0$, iar $D(t)=\frac{k}{k-2}$.



$n(x;0,1)$
t
x