Probabilități

Def.: - Orice experiment aleator generează o mulțime de posibile realizări, evaluate din punct de vedere al unui criteriu.

- Aceste posibile realizări s.n. evenimente elementare.

- Mulțimea tuturor rezultatelor posibile generate de un exp. aleator s.n. spațiu de selecție. Notăm Ω.

Exemplu: - Experiment: aruncarea unui zar.

- Criteriul: apariția unei fețe de la 1 la 6

- Spațiu de selecție $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ω - conține evenimente elementare.

Obs: dacă X o mulțime

$\mathcal{P}(X)$ = mulțimea părților mulțimii X.

= mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii X.

Ex: $X = \{1,2,3\}$; $\mathcal{P}(X) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \phi\}$

Def: Fie Ω un spațiu de selecție. S.n. eveniment (generat de experimentul aleator corespunzător lui Ω) orice element $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

- evenimente elementare
- evenimente compuse din evenimente elementare.

Ex: cu zarul.

$A = \{2,4,6\}$ = „apariția unui nr. par"

$B = \{2,3,5\}$ = „apariția unui nr. prim"

- ϕ = s.n. evenimentul imposibil (nu se poate realiza niciodată)
- Ω = s.n. evenimentul sigur (se realizează tot timpul)

Ex $\phi = \{7\}$ apariția nr. 7

OPERAȚII CU EVENIMENTE

$A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$A \cup B$ (A sau B) – acel eveniment care se realizează dacă și numai dacă se realizează cel puțin unul dintre A sau B.

$A = \{2,4,6\}$, $B = \{2,3,5\}$ $A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$ = „apare cel puțin 2"
= „apare un nr. par sau un nr. prim"

$A \cap B$ (A și B) – acel eveniment care se realizează dacă și numai dacă se realizează ambele.

$A \cap B = \{2\}$ = „apariția unui nr. par care este și nr. prim"

Obs: operațiile „$\cup$" și „$\cap$" pot fi definite pe o familie de $n \geq 2$ evenimente.

așa scris: $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ și $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$

- $\overline{A} = C_{\Omega}(A)$ - s.n. Eveniment contrar lui A. Se realizează dacă și numai dacă nu se realizează A.

Notație $\overline{A} = \Omega \setminus A$ („acele elemente din Ω care nu se regăsesc în A")

Ex: $A = \{2, 4, 6\}$, $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ = „apariția unui nr. impar"

$B = \{2, 3, 5\}$; $\overline{B} = \{1, 4, 6\}$ = „apariția unui nr. care nu este prim"

Proprietăți ale operațiilor cu evenimente, $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$

1) $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \Omega$, $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$

2) $A \cup \emptyset = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap \Omega = A$

3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (relațiile lui De Morgan)

4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativitatea)

5) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (comutativitate)

6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivitate)

Def: Diferența a două evenimente $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{2, 3, 5\}$

$A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{2, 4, 6\} \cap \{1, 4, 6\} = \{4, 6\}$

- Implicație de evenimente: $A \subset B$ (A implică B)
Realizarea lui A realizarea lui B.

<u>Obs</u>: 1) $A \subset B \Leftarrow\Rightarrow A \cap B = A$ și $A \cup B = B$

2) $\emptyset \subset A \subset \Omega$; $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

$|X|$ = nr. elemente din X

<u>Definiție</u>: Probabilitatea unui eveniment este o măsură numerică (exprimată în procente) a șansei de realizare a unui eveniment.

Considerăm un experiment pentru care $|\Omega|$ finit și toate elementele lui Ω sunt egal probabile.

Atunci $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(A) = \frac{\text{nr. cazuri favorabile realizării lui } A}{\text{nr. cazuri posibile}}$$

(Definiția clasică a probabilității)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\quad P(1) = \frac{1}{6} = P(2) = P(3) = \dots = P(6)$

$B = \{2, 3, 5\}$

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Exemplu: O urnă conține 12 bile, numerotate 1, 2, .., 12. Se extrag toate.
Aflați prob. evenimentului:

A = „la extragerile de rang 3, 8, 10, 12 apar respectiv numerele 1, 2, 3, 4"

Ω = {totalitatea variantelor de extrageri a 12 bile dintr-o urnă, ce conține 12 bile} $\quad |\Omega|$ este finit

evenimente elementare:

$$\left.\begin{array}{l} -\ 1\ 2\ 3\ 4\ \dots\ 11\ 12 \\ -\ 2\ 1\ 3\ 4\ \dots\ 11\ 12 \\ -\ 3\ 2\ 1\ 4\ \dots\ 11\ 12 \\ -\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \vdots \\ -\ 12\ 11\ 10\ \dots\ 3\ 2\ 1 \end{array}\right\} \text{permutări de 12 variante}$$

$12!$ cazuri posibile.

$A = \text{"}\ \frac{*}{1}\ \frac{*}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{*}{4}\ \frac{*}{5}\ \frac{*}{6}\ \frac{*}{7}\ \frac{2}{8}\ \frac{*}{9}\ \frac{3}{10}\ \frac{*}{11}\ \frac{4}{12}\ \text{"}$ – rangul extragerii

$|A| = (12-4)! = 8!$ variante (cazuri favorabile)

$$P(A) = \frac{8!}{12!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 8\cdot 9\cdot \ldots \cdot 12} = \frac{1}{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}$$

2) O urnă conține jetoane numerotate de la 1 la 8. Se extrag 3 fără returnare. (3 simultan). Care este probabilitatea ca suma nr. extrase să fie cel puțin egală cu suma nr. rămase?

$\Omega = \{$ mulțimea submulțimilor de câte 3 numere pe care le putem forma cu nr. $1, 2, 3, \ldots, 8 \}$.

$$|\Omega| = C_8^3 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{3!} = \frac{\cancel{6}\cdot 7\cdot 8}{\cancel{6}} = 7\cdot 8 = 56$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot (n-k)!}$$

$A = \{(a, b, c) \mid a \neq b \neq c,\ a, b, c \in \{1, 2, .., 8\}$, și $\underline{a+b+c \geq 18}\}$

$1+2+ \dots + 8 = 36$

dacă $a+b+c = 17 \Rightarrow$ în urmă suma este 19

$a+b+c = 16 \Rightarrow$ în urmă suma este 20

$A = \{(3,7,8), (4,6,8), (4,7,8), (5,6,7), (5,6,8), (5,7,8), (6,7,8)\}$

Considerăm $P(A) = \dfrac{7}{7 \cdot 8} = \dfrac{1}{8}$

3) Un pachet cu 52 cărți (4 culori, 13 din fiecare culoare). Extragem simultan 5.

$A =$ „cele 5 cărți extrase au aceeași culoare"

primăa

$P(A) = \dfrac{C_{13}^{5}}{C_{52}^{5}} \cdot (4)$

Definiție: Fie Ω spațiu de selecție. O submulțime $K \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ se numește câmp de evenimente:

i) $\forall\ A \in K$ are loc $\overline{A} \in K$ (închisă la negații)

ii) $\forall\ A, B \in K$ are loc $A \cup B \in K$ (închisă la reuniune)

Obs: În cel mai "rău caz" considerăm $K = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exemplu cu zarul: $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

$$K = \{\emptyset, A, B, \Omega\}$$ câmp de evenimente.

Definiția axiomatică a probabilităților

Fie Ω un spațiu de selecție și $K \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ un câmp de evenimente.

Def: Orice aplicație $P : K \to \mathbb{R}$ care îndeplinește:

$P_1)$ $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in K$

$P_2)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \forall A, B \in K$ a.î. $A \cap B = \emptyset$

$P_3)$ $P(\Omega) = 1$

se numește funcție de probabilitate.

Def: Orice triplet (Ω, K, P) s.n. câmp de probabilitate.

Proprietățile funcției de probabilitate

1) $P(\phi)=0$

2) dacă $A, B \in K$, a.î. $A \subset B$ atunci $P(A) \leq P(B)$ ($P(A) \in [0,1]$ $\forall A \in K$)

3) $P(\overline{A}) + P(A) = 1$, $\forall A \in K$

4) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$ $\forall A, B \in K$

$A \cap B = \phi \iff$ A și B sunt ÎNCOMPATIBILE (A și B nu se pot realiza simultan).

5) dacă A și B sunt compatibile (nu sunt incompatibile)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Generalizare: Formula de adunare a probabilităţilor.

Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate. Fie $\{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $A_i \in K$, $i=\overline{1,n}$ o familie de evenimente. Are loc:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<j<k}}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

dacă $n=3$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Obs: Dacă familia $\{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$ conţine evenimente două câte două incompatibile,

$A_i \cap A_j = \phi$ $i \neq j$, atunci

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Ex 3)

$A =$ „cele 5 cărți au aceeași culoare"

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

$A_1 =$ „cele 5 cărți au prima culoare"

⋮

$A_4 =$ „cele 5 cărți au a patra culoare"

echiprobabile

$A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 4 \cdot P(A_1) = 4 \frac{C_{13}^5}{C_{52}^5}$$

Ex 4: O pers. scrie n scrisori către n destinatari, le pune în n plicuri, sigilează plicurile și apoi scrie adresele la întâmplare.

Care este prob. ca cel puțin 1 scrisoare să ajungă la destinatarul potrivit?

A_i = „pers. a i-a primește scrisoarea corespunzătoare"

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

Vezi exemplul 1): $\forall i = \overline{1,n}$ $\quad P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}, \ldots, P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{n!}$$

$$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \cdot \frac{(n-2)!}{n!} + C_n^3 \frac{(n-3)!}{n!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Probabilități condiționate. Independența probabilităților

Def: Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate și $A, B \in K$ cu $P(B) \neq 0$.

Prob. evenimentului A condiționată de evenimentul B este

$$\underbrace{P_B(A) = P(A|B)}_{\text{notații}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(probabilitatea realizării lui A știind că s-a realizat B).

Obs: $\forall\, B \in K$ a.î. $P(B) \neq 0$, P_B este funcție de probabilitate, deci (Ω, K, P_B) este câmp de probabilitate.

Exemplu: Se aruncă 2 zaruri (cu câte 6 fețe).
Care este probabilitatea ca suma nr. obținute să fie cel puțin 7 știind că suma a dat un nr. par?

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{(a,b) \mid a,b = \overline{1,6}\}$ $\quad |\Omega| = 36$

$A =$ „suma $a+b \geq 7$" $= \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3),(2,6),(6,2),(5,3),(3,5),(4,4),(5,4),(4,5),(6,3),(3,6),(6,4),(4,6),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$

$|A| = 21$, $P(A) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

$B = \{$suma $a+b =$ nr. par$\} = \{(a,b) \mid (a,b) \in \Omega \;\; a+b = 2$ sau 4 sau 6 sau 8 sau 10 sau $12\}$.

$B = \{(1,1),(1,3),(3,1),\ldots,(6,6)\}$, $|B| = 18$

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $\quad A \cap B = \{(a,b) \mid a+b = 8$ sau 10 sau $12\} \Rightarrow |A \cap B| = 9$

$P_B(A) = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

Obs: avem $P(A) \neq P_B(A)$ (A și B sunt evenimente dependente)

Def: $A, B \in K$ s.n. evenimente independente dacă și numai dacă

$$P(A) = P_B(A) \quad \text{și} \quad P(B) = P_A(B) \quad (\text{unde } P(A) \neq 0 \text{ și } P(B) \neq 0)$$

Obs: - $A, B \in K$ $P(B) \neq 0$ și $P(A) \neq 0$ are loc:

$$(*) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

- dacă $A, B \in K$ $P(A) \neq 0$ și $P(B) \neq 0$ sunt independente

$$\Longleftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Def: Fie $\{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$; $A_i \in K$.

Familia $\{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$ conține evenimente independente în totalitate dacă $\forall\, 1 \le k \le n$ și $i_1, i_2, \dots, i_k$ indici în mulțime $\{1, 2, \dots, n\}$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Exemplu: Fie $A, B \in K$ a.î. $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

a) Sunt A și B incompatibile?

Dacă A și B sunt incompatibile $\Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$ contradicție
deci A și B sunt compatibile.

Sunt A și B independente?

$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$ dar $\left.\begin{array}{l} P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{12} \\ P(A \cap B) = \frac{1}{10} \end{array}\right\} \Rightarrow$ A și B sunt dependente

b) $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{4}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$

Calculați:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{29}{60}$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = \frac{9}{10}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{29}{60} = \frac{31}{60}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = {}^{5/}\frac{1}{4} - {}^{2/}\frac{1}{10} = \frac{3}{20}$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(\overline{\bar{A} \cap B}) = 1 - P(\bar{A} \cap B) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

$$\overline{\bar{A} \cap B} = \bar{\bar{A}} \cup \bar{B} = A \cup \bar{B}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$$

$$P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = 1 - P_A(B)$$

$$= 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Generalizare a formulei (*):

Formula de înmulțire a probabilităților:

Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate și $\{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $A_i \in K$ o familie de evenimente a.î. $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$. Are loc:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i}(A_n)$$

Exemplu: Fiecare literă a cuvintelor PARTIDELE FUZIONEAZĂ este scrisă pe câte un bilet și acesta este introdus într-o urnă. Extragem simultan 7 bilete (sau pe rând 7 fără returnare). Care este prob. evenimentului: „cele 7 litere formează cuvântul ELEFANT" $=: A$

$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_7$

$A_1 =$ „la ext 1 apare E"

$A_2 =$ „la ext 2 apare L"

$\vdots$

$A_7 =$ „la ext 7 apare T"

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \ldots \cdot P_{\bigcap_{i=1}^{6} A_i}(A_7)$$

$$= \frac{3}{19} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{17} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{13}$$

Obs dacă biletele se reintroduc după fiecare extragere

$$P(A) = \frac{3}{19} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{2}{19} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{19} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_7)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_7$ sunt independente în totalitate.

Variabile aleatoare de tip discret

Def.: Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate. Familia de evenimente $\{A_i\}_{i=\overline{1,n}}$ care verifică:

i) $P(A_i) > 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset \; ; \; i \neq j$

iii) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega \quad \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1 \right)$

se numește Sistem Complet de evenimente (partiție a lui Ω)

Ex: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

a) $A_1 = \{1,2\}, \; A_2 = \{3,4\}, \; A_3 = \{5,6\}$; b) $A_1 = \{1\}, \dots, A_6 = \{6\}$; c) $A_1 = \{1,2,3\}, \; A_2 = \{4,5,6\}$

Def: Fie (Ω, K, P) un câmp de probabilitate.

Orice funcție $X : K \to \mathbb{R}$ care verifică $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{X^{-1}(-\infty, x) \in \mathcal{P}(\Omega)}_{\text{funcție măsurabilă}}$$

s.n. variabilă aleatoare.

Variabilele aleatoare:
- discrete (au un nr. finit sau numărabil de valori)
- continue . . .

Fie X o variabilă aleatoare discretă. Notăm cu x_i $(i \in I \subseteq \mathbb{N})$ valorile funcției X.

$$\forall X \longrightarrow \underline{\text{distribuția}}\ \underline{\text{lui } X} = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I},$$ unde

$$p_i = P(\underbrace{\text{variabila } X \text{ să ia valoarea } x_i}_{\{X = x_i\}})$$

Avem $\sum_{i \in I} p_i = 1$ și $\{X = x_i\} \cap \{X = x_j\} = \emptyset$ $\forall\, i \neq j$, $i, j \in I$.

deci $\{\{X = x_i\}\}_{i \in I}$ formează o partiție

<u>Ex</u>: Se aruncă 2 zaruri. Scrieți distribuția variabilei X = „suma celor 2 numere"

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$p_1 = P(X = 2) = P(\text{suma să fie } 2) = P((1,1)) = \frac{1}{36}$, $p_2 = P(X = 3) = P((1,2) \text{ sau } (2,1)) = \frac{2}{36}$

Operații cu variabile aleatoare de tip discret

$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$, $Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j \in J}$; $c \in \mathbb{R}$

$$c \cdot X : \begin{pmatrix} c x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$$

$$X \pm c : \begin{pmatrix} x_i \pm c \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$$

$$X^c : \begin{pmatrix} x_i^c \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I} \quad (\text{dacă are sens})$$

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{i \in I, j \in J}$$

$$X \cdot Y : \begin{pmatrix} x_i \cdot y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{i \in I, j \in J}$$

Unde

$$p_{ij} = P(X = x_i \cap Y = y_j)$$

Dacă X și Y sunt independente.

$$p_{ij} = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot q_j$$

Fie $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ și $Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ două variabile aleatoare independente:

<u>Calculați</u>: $3 \cdot Y = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$$X^2 : \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0^2 & 1^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$X+Y : \begin{pmatrix} -1+1 & -1+2 & 0+1 & 0+2 & 1+1 & 1+2 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{12} & \frac{4}{12}+\frac{1}{12} & \frac{2}{12}+\frac{1}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{12} & \frac{5}{12} & \frac{3}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix}, \quad \frac{2}{12}+\frac{5}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=1$$

$$X\cdot Y : \begin{pmatrix} -1\cdot 1 & -1\cdot 2 & 0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 1\cdot 1 & 1\cdot 2 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} & \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{12} & \frac{2}{12} & \frac{3}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} \end{pmatrix}$$

$$X + X^2 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+0 & -1+1 & 0+0 & 0+1 & 1+0 & 1+1 \\ p_{11} & p_{12} & p_{21} & p_{22} & p_{31} & p_{32} \end{pmatrix}$$

$$p_{11} = P(X=-1 \cap X^2=0) = P(\emptyset) = 0$$

$$p_{12} = P(X=-1 \cap X^2=1) = P(X=-1 \cap \{X=-1 \cup X=1\}) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$$

$$p_{21} = P(X=0 \cap X^2=0) = P(X=0) = \frac{1}{4}$$

$$p_{22} = P(X=0 \cap X^2=1) = P(\emptyset) = 0$$

$$p_{31} = P(X=1 \cap X^2=0) = P(\emptyset) = 0$$

$$p_{32} = P(X=1 \cap X^2=1) = P(X=1) = \frac{1}{4}.$$

Donc

$$X + X^2 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix};$$