

Matematică Financiară și Actuarială

Temă:

- 1) Se depune spre finanțare suma de 6.500 lei pe timp de 3 luni, cu o rată anuală a dobânzii de 4,5%. Să se calculeze dobândă și suma finală obținute.

$$D = S \cdot i \cdot \frac{l}{12}$$

$$S = 6500$$

$$i = 4,5\% (0,045)$$

$$l = 3$$

$$S = S + D$$

$$D = 6500 \cdot 0,045 \cdot \frac{3}{12} = 6500 \cdot 0,045 \cdot 0,25$$

$$= [73,125] \text{ lei. m}$$

$$S = 6500 + 73,125 = [6573,125] \text{ lei. m}$$

- 2) Cu ce rată anuală a fost cumpărată suma de 3000 lei pe 7 luni astfel încât suma sumă finală dobândată să fie 3500 lei? Cât este dobândă semestrială echivalentă?

$$S = 3000$$

$$i = ?$$

$$l = 7$$

$$S = 3500$$

$$D = ?$$

$$S = S + D \Rightarrow D = S - S \Rightarrow D = 500$$

$$D = S \cdot i \cdot \frac{l}{12} \Rightarrow 500 = 3000 \cdot i \cdot \frac{7}{12} \Rightarrow$$

$$i = \frac{500}{3000 \cdot 0,58} = 0,2857 (28,57\%)$$

$$i_2 = \frac{i}{2} = \frac{28,57}{2} = 14,29\%$$

3) O persoană obține, prin depunerea unei sume de bani la bancă din data de 21 martie 2012 până în data de 13 octombrie 2012, la o rată anuală a dobânzii de 7,5%, suma de 7509 R.R. Ce sumă a depus persoana respectivă la bancă?

$$D = s \cdot i \cdot \frac{z}{360}$$

$$D = ?$$

$$s = ?$$

$$i = 7,5\% = 0,075$$

$$z = 206$$

$$D = s \cdot i \cdot \frac{z}{360} \Rightarrow D = s \cdot 0,075 \cdot \frac{206}{360}$$

$$S = s + D \Rightarrow 7509 = s + s \cdot 0,075 \cdot \frac{206}{360}$$

$$\Rightarrow s = \frac{7509}{1 + 0,075 \cdot \frac{206}{360}}$$

$$\Rightarrow s = 7200 \text{ R.R.}$$

$$21 \text{ martie} = 10$$

$$\text{aprilie} = 30$$

$$\text{mai} = 31$$

$$\text{iunie} = 30$$

$$\text{iulie} = 31$$

$$\text{august} = 31$$

$$\text{septembrie} = 30$$

$$13 \text{ octombrie} = 13$$

$$\underline{206}$$

4) Pe ce perioadă de timp trebuie să depună o persoană sumă de 5000 lei astfel încât, dacă banca practică o rată anuală a dobânzii de 9% sumă pe care o poate rateaza la sfârșitul perioadei să fie de 5225 lei?

$$D = 225$$

$$S = 5000$$

$$i = 0,09 (9\%)$$

$$t = ?$$

$$225 = 5000 \cdot 0,09 \cdot t \Rightarrow$$

$$t = \frac{225}{5000 \cdot 0,09} = \frac{225}{450} = \frac{1}{2} \text{ adică } \boxed{\begin{array}{l} t = 6 \text{ luni} \\ = 180 \text{ zile} \end{array}}$$

5) O persoană reușește să economisească bani și să ii depună într-un cont la băncă. Ea deschide un deposit de economii la începutul anului de 2000 lei, după 1 lună trăiește de 1000 lei, iar după încă 3 luni încă face un deposit de 3000 lei. Ce sumă poate ridica persoana la sfârșitul anului dacă rata anuală a dobânzii a fost de 12%

$$D_1 = S \cdot i \cdot t = 2000 \cdot 0,12 \cdot 1 = 240$$

$$S_1 = 2000$$

$$i_1 = 12\% (0,12)$$

$$t_1 = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} S = S_1 + D_1 \Rightarrow S_1 = 2240 \\ \boxed{1} \end{array}}$$

$$D = S \cdot i \cdot \frac{t}{12} = 100$$

$$S = 1000$$

$$i = 12\% (0,12)$$

$$t = 10$$

$$\boxed{S_2 = S + D = 1100}$$

$$D = S \cdot i \cdot \frac{t}{12} = 810$$

$$S = 3000$$

$$i = 12\% (0,12)$$

$$t = 7$$

$$\boxed{S_3 = S + D = 3210}$$

$$\boxed{S = S_1 + S_2 + S_3 = 2240 + 1100 + 3210 = 6550 \text{ lei}}$$

6) Dacă fiindcă de 4 luni o persoană a depus în același cont, în fiecare lată de 5 luni, căte 1000 lei cu o rată anuală a dobânzii de 7%, de ce sumă va dispune la sfârșitul celei de-a patra luni

Luna 1

$$D = S \cdot i \cdot \frac{t}{12} = 1000 \cdot 0,07 \cdot \frac{1}{12} = 5,83$$

$$S = 1000$$

$$i = 7\% (0,07)$$

$$t = 1$$

$$S = S + D = 1005,83$$

Luna 3

$$D = S \cdot i \cdot \frac{t}{12} = 3014,53 \cdot 0,07 \cdot \frac{1}{12} = 17,60$$

$$S = 3014,53$$

$$i = 7\% (0,07)$$

$$t = 1$$

$$S = S + D = 3035,13$$

Luna 2

$$D = S \cdot i \cdot \frac{t}{12} = 2005,83 \cdot 0,07 \cdot \frac{1}{12} = 11,70$$

$$S = 2005,83$$

$$i = 7\% (0,07)$$

$$t = 1$$

$$S = S + D = 2017,53$$

Luna 4

$$D = S \cdot i \cdot \frac{t}{12} = 4035,13 \cdot 0,07 \cdot \frac{1}{12} = 19,50$$

$$S = 4035,13$$

$$i = 7\% (0,07)$$

$$t = 1$$

$$\boxed{S = S + D = 4058,6746 \text{ lei}}$$

7) Aveti posibilitatea să puneti suma de 990 u.m. astăzi, 995 u.m. peste o lună sau 1000 u.m. peste 3 luni. Ce varianta veți alege, dacă cobrim de o rată anuală a dobânzii de 8%?

Pentru $s = 990$ și $L = 12$

$$D = 79,2$$

$$S = 990$$

$$i = 8\% (0,08)$$

$$t = 1$$

$$S = s + D = 1069,2$$

Pentru $s = 995$ și $L = 11$

$$D = 72,97$$

$$S = 995$$

$$i = 8\% (0,08)$$

$$t = 11$$

$$S = s + D = 1067,97$$

Pentru $s = 1000$ și $L = 9$

$$D = 60$$

$$S = 1000$$

$$i = 8\% (0,08)$$

$$t = 9$$

$$S = s + D = 1060$$

R: Cea mai profitabilă varianță: $s = 990$ și $L = 12 / t = 1$
pentru că aduce cel mai mare profit.

8) O persoană dispune de 2 sume de bani totalizând 24000 lei. Persoana plăsează prima sumă (mai mică) pe 9 luni cu $i = 4\%$ iar pe a doua sumă pe 8 luni cu $i = 6\%$. Stînd că dobânză adusă de cele două sume este de 880 lei. determinați cele 2 sume inițiale.

$$i_1 = 4\% = 0,04$$

$$l_1 = 9$$

$$S_1 = 24000 - S_2$$

$$D = 880 - D_2$$

$$i_2 = 6\% = 0,06$$

$$l_2 = 8$$

$$S_2 = 24000 - S_1$$

$$D_2 = 880 - D_1$$

$$D_1 + D_2 = 880$$

$$S_1 + S_2 = 24000$$

$$S_1 = ? \quad S_2 = ?$$

$$S = 24000 + 880 = 24880$$

$$D_1 = S_1 \cdot i_1 \cdot \frac{l_1}{12} \Rightarrow D_1 = S_1 \cdot 0,04 \cdot \frac{9}{12} = S_1 \cdot 0,03$$

$$D_2 = S_2 \cdot i_2 \cdot \frac{l_2}{8} \Rightarrow D_2 = S_2 \cdot 0,06 \cdot \frac{8}{12} = S_2 \cdot 0,04$$

$$D = D_1 + D_2 = S_1 \cdot 0,03 + S_2 \cdot 0,04$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 880 &= S_1 \cdot 0,03 + (24000 - S_1) \cdot 0,04 \\ &= S_1 \cdot 0,03 + 960 - S_1 \cdot 0,04 \\ &= S_1 (0,03 - 0,04) + 960 \end{aligned}$$

$$880 - 960 = S_1 (0,03 - 0,04)$$

$$S_1 = \frac{-80}{-0,01} = \boxed{8000} \Rightarrow S_2 = 24000 - 8000$$

$$\boxed{S_2 = 16000}$$

9) O persoană dispune de 3 sume de bani în progresie aritmetică cu rază de 3000 u.u. Persoana plasează aceste trei sume pe o perioadă de un an, cu rate anuale ale dobânzii aflate în progresie geometrică cu rază $3/2$. Stînd că dobânza totală realizată este de 1100 u.u. și că cea mai mare sumă aduce o dobânză de 9 ori mai mare decât cea mai mică sumă, determinați cele 3 sume inițiale precum și ratele anuale ale dobânzii aferente lor.

$$S_1 = ?$$

$$i = ?$$

$$t = 1$$

$$D_1 = S_1 \cdot i_1$$

$$S_2 = S_1 + 3000$$

$$\begin{matrix} i_2 = i_1 \cdot \frac{3}{2} \\ t = 1 \end{matrix}$$

$$D_2 = (S_1 + 3000) \cdot i_2$$

$$S_3 = S_2 + 3000$$

$$\begin{matrix} i_3 = i_2 \cdot \frac{3}{2} \\ t = 1 \end{matrix}$$

$$D_3 = S_1 + 3000 + 3000 \cdot i_3$$

$$D_1 = S_1 \cdot i_1$$

$$D_2 = (S_1 + 3000) \cdot i_1 \cdot \frac{3}{2}$$

$$D_3 = (S_1 + 3000 + 3000) \cdot i_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$D = D_1 + D_2 + D_3 = D_1 + D_2 + 9D_1 = 10D_1 + D_2$$

$$1100 = 10(S_1 \cdot i_1) + (S_1 + 3000) \cdot (i_1 \cdot \frac{3}{2})$$

$$1100 = 10S_1 i_1 + \frac{3}{2} i_1 S_1 + \frac{3}{2} i_1 3000$$

$$1100 = 10S_1 i_1 + \frac{3}{2} i_1 S_1 + 4500 i_1$$

$$1100 = \frac{13S_1 i_1}{2} + 4500 i_1$$

$$-\frac{13S_1 i_1}{2} - 4500 i_1 = 0 \Rightarrow S_1 = -400, i_1 = -11 \quad ?$$

Dobândă compusă

1) O persoană depune la bancă 5300 lei. Stiuind că rata anuală a dobânzii este de 5,6% calculați suma pe care persoana o poate ridica peste 3 ani, respectiv 5 ani. Cate este valoarea dobânzii acumulate pe perioadele respective? Cât este dobândă unitată trimeseabilă echivalentă?

$$S_3 = 5300 (1 + 0,056)^3 = 6241,19 \text{ lei}$$

$$D_3 = 6241,19 - 5300 = 941,19 \text{ lei}$$

$$S_5 = 5300 (1 + 0,056)^5 = 6959,78 \text{ lei}$$

$$D_5 = 6959,78 - 5300 = 1659,78 \text{ lei}$$

$$i = 5,6\% = 0,056$$

$$i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1 = \sqrt[4]{1+0,056} - 1 = (1,056)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,51 = [5,1\%]$$

2) Se depun spre fructificare 1000 pe 4 ani. Cu ce rată anuală a dobânzii trebuie plasată pentru a obține 1200 euro? Dar dacă plasamentul se face pe 5 ani?

$$\begin{array}{l|l} S = 1000 \text{ €} & 1200 = 1000(1+i)^4 \Leftrightarrow i = \frac{1200}{1000} = (1+i)^4 \\ S = 1200 \text{ €} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} m = 4 \text{ ani} & \Leftrightarrow (1+i)^4 = 1,2 \\ i = ? & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} & 1+i = 1,2^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow i = 1,2^{\frac{1}{4}} - 1 \\ & i = 0,466 = [4,66\%] \text{ (pe 4 ani)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 1200 = 1000(1+i)^5 & \Leftrightarrow \frac{1200}{1000} = (1+i)^5 \\ & \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (1+i)^5 = 1,2 \Leftrightarrow i = 1,2^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$i = 0,371 = [3,71\%] \text{ (pe 5 ani)}$$

3) Pe câtă ani trebuie să depunem 150 euro astfel încât să puntem năcă 190 euro? Dar să dublaiam o sumă de bani? Stiu că rata anuală este de 3,75%.

$$S = 150$$

$$i = 3,75\% = 0,0375$$

$$S = 190$$

$$n = ?$$

$$S = s(1+i)^n \Rightarrow 190 = 150(1+0,0375)^n$$

$$190 = 150 \cdot 1,0375^n$$

$$\frac{1,0375^n}{1,0375} \frac{190}{150}$$

$$1,0375^n = 1,24$$

(lu)

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln 1,0375 = \ln 1,24 \quad \Leftrightarrow n = \frac{\ln 1,24}{\ln 1,0375} = 6,5 \Rightarrow \boxed{7 \text{ ani}}$$

$$S = 150$$

$$i = 3,75\% = 0,0375$$

$$S = 2S \Rightarrow S = 300$$

$$n = ?$$

$$300 = 150(1+0,0375)^n$$

$$1,0375^n = 2$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1,0375} = 18,8 \Rightarrow \boxed{19 \text{ ani}}$$

4) Ce sumă a fost depusă de către o persoană, dacă după 6 ani are în cont 125000 lei? Stiu că rata anuală a dobânzii a fost de 8%.

$$i = 8\% = 0,08$$

$$n = 6$$

$$S = 125000$$

$$S = ?$$

$$S = s \cdot (1+i)^n$$

$$125000 = s \cdot (1+0,08)^6 \Rightarrow$$

$$s = \frac{125000}{(1+0,08)^6} = \boxed{148471,21}$$

5) Află sumă finală și dobânză pentru un depozit de 4500 lei în perioada de 7 ani, dacă în primii 4 ani rata anuală a dobânzii a fost 6,7% iar în următoarele 3 ani a fost 4,8%

$$S_1 = 4500 \cdot (1 + 0,067)^4 = 5832,74 \text{ lei}$$

$$S_2 = S_1 \cdot (1 + 0,048)^3 = 6413,58 \text{ lei}$$

$$\boxed{S = 6413,58 \text{ lei}}$$

$$\boxed{D = 2213,58 \text{ lei}}$$

6) Ce sumă a fost depusă într-un cont, în urma căruia, după 5 ani, dacă suma finală care se poate ridica de la banca este acum de 8288,21 lei. Se stie că în primele 3 ani rata anuală a dobânzii a fost 5,67% iar în următoarele 2 ani, 8,2%

$$S = ?$$

$$n = 5 \text{ ani}$$

$$S = 8288,21 \text{ lei}$$

$$i = 5,67\% = 0,0567$$

$$i' = 8,2\% = 0,082$$

$$S = s(1+i)^n$$

$$S = s((1+0,0567)^3 \cdot (1+0,082)^2)$$

$$8288,21 = s \frac{(1+0,0567)^3 \cdot (1+0,082)^2}{(1+0,0567)^3 \cdot (1+0,082)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{s \approx 6000 \text{ lei}}$$

Dobândă nominală

1) Să se calculeze suma finală după 3 ani pentru un depozit de 4780 lei la o rată annuală a dobânzii de 4,8% cu capitalizare lunară. Care este dobândă unitară efectivă?

$$S = 4780$$

$$t = 3 \text{ ani}$$

$$i = 4,8\% = 0,048$$

$$p^{(12)} = 0,048$$

$$S = 4780 \cdot \left(1 + \frac{0,048}{12}\right)^{3 \cdot 12} = 5518,75 \text{ lei}$$

$$i_{ef} = \frac{e^{\frac{c}{12}} - 1}{4780} \cdot 4780 = 0,0491 = 4,91\%$$

2) Cu ce rată nominală a dobânzii se va tripla o sumă în 3 ani dacă se face capitalizare lunară? Care va fi dobândă unitară efectivă?

$$S = s \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{n \cdot 12}$$

$$3s = s \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{3 \cdot 12} \quad | :s$$

$$3 = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{36} \Rightarrow \frac{i}{12} + 1 = \sqrt[36]{3} \Leftrightarrow \frac{i}{12} = \sqrt[36]{3} - 1$$

$$\Rightarrow i = 12 \cdot 3^{\frac{1}{36}} - 12 \Rightarrow i = 0,3418 = 34,18\%$$

$$i = \left(1 + \frac{0,3418}{12}\right)^{12} - 1 \Rightarrow i = 0,44218 = 44,22\%$$