

MATEMATICI APPLICATE IN ECONOMIE

ANUL I Semestrul 1



UNIVERSITATEA ” BABEȘ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE ECONOMICE ȘI GESTIUNEA
AFACERILOR
TRUNCHI COMUN ANUL I ID
SEMESTRUL I

SUPORT DE CURS

Anul I

Semestrul 1

Cluj Napoca

Cuprins

Informații generale	5
Cerințe pentru examen	7
1 MODULUL I. Analiza matematica	8
1.1 Funcții reale de mai multe variabile reale	9
1.1.1 Spațiul \mathbb{R}^n	9
1.1.2 Derivate parțiale, diferențiabilitate și diferențială	10
1.1.3 Derivate parțiale și diferențiale de ordin superior	14
1.2 Extremele funcțiilor de mai multe variabile	18
1.2.1 Extremele funcțiilor de două variabile	18
1.2.2 Extremele funcțiilor de n variabile ($n \geq 2$)	20
1.2.3 Ajustarea datelor experimentale	24
1.3 Integrale Euleriene	28
1.3.1 Integrala lui Euler de speța întâi. Funcția beta	28
1.3.2 Integrala lui Euler de speța a doua. Funcția gama	32
1.3.3 Integrala Euler-Poisson	33
1.4 Exerciții și probleme rezolvate	34
1.5 Teme de control	38
2 MODULUL II. Teoria probabilitatilor	47
2.1 Câmp de evenimente, câmp de probabilitate	48
2.1.1 Corp de părți ale unei mulțimi	48
2.1.2 Câmp de evenimente	49
2.1.3 Câmp de probabilitate	51
2.1.4 Probabilități condiționate. Independența evenimentelor	54
2.2 Scheme clasice de probabilitate	58
2.2.1 Schema urnei cu bila nerevenită	59
2.2.2 Generalizare. Schema urnei cu bila nerevenită cu mai multe stări	60
2.2.3 Schema urnei cu bila revenită	60
2.2.4 Generalizare. Schema urnei cu bila revenită cu mai multe stări	61
2.2.5 Schema urnelor lui Poisson	62
2.3 Variabile aleatoare	63
2.3.1 Operații cu variabile aleatoare de tip discret	65
2.3.2 Funcția de repartiție	66
2.3.3 Variabile de tip continuu	68

2.3.4	Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare	69
2.4	Repartiții clasice	74
2.4.1	Repartiții clasice de tip discret	74
2.4.2	Repartiții clasice de tip continuu	81
2.5	Exerciții și probleme rezolvate	86
2.6	Teme de control	93

Informații generale

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE ȘTIINȚE ECONOMICE ȘI GESTIUNEA AFACERILOR
TRUNCHI COMUN ANUL I zi si ID
SEMESTRUL I

Date de identificare a cursului

Date de contact ale titularilor de curs:

1. Muresan Anton S., Birou: Cabinetul 229, Etajul II, E-mail: anton.muresan@econ.ubbcluj.ro,
2. Curt Paula, Birou: Cabinetul 229, Etajul II, E-mail: paula.curt@econ.ubbcluj.ro,
3. Lung Rodica, Cabinetul 230, Etajul II, E-mail: rodica.lung@econ.ubbcluj.ro
4. Roșca Alin, Cabinetul 231, Etajul II, E-mail: alin.rosca@econ.ubbcluj.ro,
5. Radu Voichita, Cabinetul 230, Etajul II, E-mail: voichita.radu@econ.ubbcluj.ro
6. Filip Darius, Cabinetul 230, Etajul II, E-mail: darius.filip@econ.ubbcluj.ro
7. Coconet Tiberiu, Cabinetul 231, Etajul II, E-mail: tiberiu.coconet@econ.ubbcluj.ro
8. Pop Flaviu, Cabinetul 231, Etajul II, E-mail: flaviu.pop@econ.ubbcluj.ro

Obiective

- Să familiarizeze studenții cu tehnicile și metodele matematice utilizate în economie.
- Să introducă noțiuni de analiza funcțiilor reale de mai multe variabile reale care să constituie pentru studenți instrumente pentru tratarea unor probleme de extrem, pentru a permite ajustarea datelor experimentale, etc.
- Să creeze baze de analiză matematică necesare pentru studiul teoriei probabilităților și pentru statistica matematică.
- Să pună bazele unei gândiri logice și raționale atât de necesare viitorilor economiști

Competențe profesionale

- Însușirea conceptelor de bază și crearea deprinderii de a le utiliza.
- Capacitatea de a culege, analiza și interpreta date și informații referitoare la problemele economico-financiare și statistice.
- Abilitatea de a raționa, analiza și investiga fenomene și procese economice și de previziuni cu ajutorul metodelor matematice și statistice.

Competențe transversale

- Valorificarea eficientă a resurselor și tehnicilor de învățare pentru propria dezvoltare.
- Aplicarea principiilor, normelor și valorilor eticii profesionale în cadrul propriei strategii de muncă riguroasă, eficientă și responsabilă.

Conditionari si cunostinte prerechizite: -

Descrierea cursului :

Se vor avea în vedere următoarele obiective:

- Introducerea catorva notiuni de analiza functiilor reale de mai multe variabile reale care sa constituie pentru studenti instrumente pentru tratarea unor probleme de extrem, pentru a permite interpolarea si ajustarea datelor experimentale, etc.
- Crearea bazelor de analiza matematica necesare pentru studiul teoriei probabilitatilor si pentru statistica matematica.
- Definirea si studiul principalelor proprietati ale conceptelor de baza din teoria probabilitatilor. Crearea la studenti a unor deprinderi de utilizare a tehnicilor probabilistice si de folosire a acestora in scop aplicativ. Fundamentarea probabilistica a statisticii matematice.

Organizarea temelor (părților) în cadrul cursului:

Cursul va avea următoarele doua parti:

1. Elemente de analiza matematica
2. Elemente de teoria probabilitatilor

Organizarea temelor s-a facut avand in vedere ordinea fireasca si gradul de dificultate sa urmeze o ordine crescatoare. Informatia relevanta referitoare la fiecare tema (parte) se gaseste in lista bibliografica ce va fi prezentata ulterior, iar accesul va fi realizat direct.

Formatul si tipul activitatilor implicate de curs:

Formatul va fi unul clasic, permitand studentului de a-si gestiona singur, fara constrangeri, parcurgerea cursului. De sigur o participare la activitatile planificate va usura intelegerea tematicii cursului. Tipurile de activitati ce vor fi abordate in cadrul cursului vor fi atat cele clasice cat si proiecte de grup.

Materiale bibliografice obligatorii:

Principalele materiale bibliografice pe care le vom utiliza, si care se vor gasi la biblioteca facultatii, iar unele vor putea fi accesate prin internet, sunt:

1. Colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2012.
2. Colectiv, Analiza matematica, Teoria Probabilitatilor si Algebra liniara aplicate in economie, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2008.

Bibliografie completă

1. Dowling E.T., Mathématiques pour l'économiste, McGraw-Hill, Paris, 1990
2. Mureșan A.S., Matematici aplicate în finanțe, bănci și burse, Ed. Risoprint, Cluj-Napoca, 2000

3. Mureșan A.S., și colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2011
4. Mureșan A.S., și colectiv, Analiză matematică, Teoria probabilităților și algebră liniară aplicate în economie, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2007
5. Purcaru I., Matematici generale și elemente de optimizare, Editura Economică, 2004

Materiale si instrumente necesare pentru curs :

Vom folosi: suport electronic de curs, materiale multiplicat, calculator, videoproiector.

Calendarul cursului: este prezentat in calendarul disciplinei

Politica de evaluare si notare:

Evaluarea si notarea finala se va face prin rezolvarea de probleme, intocmirea unor teme de casa. Toate acestea se vor realiza pe parcursul semestrului. Intrarea in examenul final este conditionata de realizarea sarcinilor ce rezulta din temele de control de la sfarsitul fiecarui modul al suportului de curs. Studentii vor primi feed-back la rezultatele realizate in examenul final prin comunicare directa cu cei care solicita. In cazul cand studentul doreste sa revina la un examen de marire a notei, acest nou examen se va desfasura in aceleasi conditii, cu aceleasi cerinte, ca si examenul initial.

Cerințe pentru examen

Nota la examenul de Matematici aplicate în economie se calculează astfel: **maxim 3p referate și teme pentru acasa, și maxim 7p nota la examenul scris**. La examenul scris subiectele constau în rezolvarea de probleme. Pentru cele 3 puncte pe teme și referate trebuie pregătite următoarele două teme (referate teoretice + probleme rezolvate după cum e indicat mai jos):

1. Integrale Euleriene + Rezolvarea problemelor de la Teme de control Modul 1 (maxim 1,5 puncte).
2. Repartiții clasice ale variabilelor aleatoare (binomială, uniformă, normală, [1, Cap.7]) + Rezolvarea problemelor de la teme de control Modul 2 (maxim 1,5 puncte).

[1] Colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2012.

Elemente de deontologie academica:

Pentru a evita situatiile care pun in discutie onestitatea studentilor facem de la inceput precizarea ca se interzice categoric fraudă, iar tentativele de fraudă se vor trata conform reglementarilor în vigoare elaborate la nivelul facultatii si universitatii. Este normal ca atunci cand se utilizeaza anumite date, texte, formulari, etc. luate din alte surse, sa se faca citarea, si astfel sa se asume meritele doar pentru munca si contributia proprie. Se va cere studentului sa aiba un comportament academic fata de profesori si fata de colegi.

Studentii cu dizabilitati:

Nu vor avea nici o problema in a se incadra in cerintele cursului si a celorlalte activitati, sansele in pregatire si obligatiile lor fiind de aceeași factura ca si pentru studentii fara dizabilitati.

Strategii de studiu recomandate:

Recomandam studentilor sa se pregateasca mai intai din aspectele teoretice, asa incat, mai intai, din curs, sa fie studiate modulele cu teoria si exemplele ilustrative formulate, apoi sa se abordeze problemele rezolvate, iar apoi si problemele formulate spre rezolvare. Pentru tot cursul, apreciem ca fondul de timp necesar insusirii complete este de 56 de ore, din care 40 pentru suportul de curs, 8 pentru activitatile directe cu tutorii, iar 12 pentru sarcinile individuale de studiu al bibliografiei si realizarea temelor de control.

Capitolul 1

MODULUL I. Analiza matematica

Obiectivele modulului

- Introducerea catorva notiuni de analiza functiilor reale de mai multe variabile reale care sa constituie pentru studenti instrumente pentru tratarea unor probleme de extrem, pentru a permite interpolarea si ajustarea datelor experimentale, etc.
- Crearea bazelor de analiza matematica necesare pentru studiul teoriei probabilitatilor si pentru statistica matematica.

Concepte de baza

- Spatiul \mathbb{R}^n , distanta in \mathbb{R}^n , topologia euclidiană in \mathbb{R}^n ;
- Limite de functii de la \mathbb{R}^n la \mathbb{R} , continuitatea functiilor de la \mathbb{R}^n la \mathbb{R} ;
- Derivate partiale, diferentiabilitate si diferenciala pentru functiile de la \mathbb{R}^n la \mathbb{R} , derivate partiale si diferenciale de ordin superior;
- Extremele functiilor reale de mai multe variabile reale (libere sau cu legaturi);
- Ajustarea datelor experimentale;
- Integrale Euler.

Rezultate asteptate

Insusirea conceptelor de baza mentionate si crearea deprinderilor de utilizare a acestora. Studentul trebuie sa fie capabil sa aplice in practica notiunile studiate pentru analizarea unor situatii concrete din economie, cum ar fi de exemplu probleme de gestiunea optima a stocurilor.

UNITATEA 1. Functii reale de mai multe variabile reale

1.1 Funcții reale de mai multe variabile reale

1.1.1 Spațiul \mathbb{R}^n

În studiul fenomenelor fizice, economice (și în alte situații) apare de mai multe ori necesitatea studiului mulțimilor cu număr fix de numere reale. De exemplu, spațiul în care trăim este modelat ca o mulțime de puncte determinate de trei coordonate. Fie n un număr natural fixat nenul. Mulțimea sistemelor de forma:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

unde x_1, x_2, \dots, x_n sunt numere reale, se numește **spațiul** \mathbb{R}^n . Elementele acestei mulțimi se numesc puncte, iar numerele x_1, x_2, \dots, x_n care determină punctul x se numesc coordonatele sau componentele acestui punct.

Pe spațiul \mathbb{R}^n se pot considera diverse structuri care să extindă structura axei reale.

Pentru orice pereche de elemente x și y din \mathbb{R}^n , există în \mathbb{R}^n suma lor $x + y$ dată de:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n). \quad (2.1.1)$$

De asemenea, pentru fiecare $\alpha \in \mathbb{R}$ și $x \in \mathbb{R}^n$ există în \mathbb{R}^n

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \quad (2.1.2)$$

Definiția 1.1.1. Se numește **metrică** sau **distanță** pe mulțimea nevidă X orice aplicație

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

astfel încât:

D1) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$ și $d(x, y) = 0 \iff x = y$

D2) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$

D3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ (inegalitatea triunghiului)

Cuplul (X, d) unde X este o mulțime nevidă iar d este o metrică (distanță) pe X se numește **spațiu metric**.

Propoziția 1.1.1. Aplicația $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

este o metrică pe \mathbb{R}^n numită **metrica euclidiană** pe \mathbb{R}^n .

Exemplul 1.1.1. Fie $x = (-1, 3, 1)$ și $y = (2, 1, -1)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$. Avem:

$$d(x, y) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (3 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{17}.$$

Observația 1.1.1. In cazul normei euclidiene pentru $n = 2$ și $n = 3$ regăsim formula distanței dintre două puncte din plan și din spațiu. Intr-adevăr dacă $n = 2$ atunci

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

iar dacă $n = 3$ atunci

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Noțiunile de limită și continuitate se pot introduce în orice spațiu normat, respectiv metric. În cele ce urmează vom considera spațiul \mathbb{R}^n înzestrat cu norma euclidiană respectiv metrica euclidiană.

Definiția 1.1.2. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Aplicația $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$A \ni x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

se numește **funcție reală** de n variabile reale.

Exemplul 1.1.2. În multe probleme economice intervin funcții de tip **Cobb - Douglas** (denumite astfel după economiștii americani C.V. Cobb și P.H. Douglas, cărora li se datorează cercetări și descoperiri în domeniu, în anii 1920). Aceste funcții au forma generală:

$$f : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n},$$

unde $C, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$.

Exemplul 1.1.3. Dacă V este venitul unei societăți comerciale, x numărul de ore de muncă productivă prestată, y fondurile fixe angajate în producție atunci

$$V(x, y) = k x^\alpha y^\beta, \quad k, \alpha, \beta \text{ constante pozitive}$$

(funcție de producție de tip Cobb-Douglas) este o funcție reală de 2 variabile reale.

Exemplul 1.1.4. Dacă $A = [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}^3$ atunci funcția

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

(funcție reală de trei variabile reale) poate reprezenta producția unei întreprinderi dacă x_1 este productivitatea muncii, x_2 numărul de muncitori, x_3 timpul de muncă.

1.1.2 Derivate parțiale, diferențiabilitate și diferențială

În această secțiune se introduc noțiunile de derivată parțială, diferențiabilitate și diferențială.

Derivatele parțiale ale funcțiilor reale de mai multe variabile reale

Definiția 1.1.3. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) un domeniu, $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Fie $i \in \{1, \dots, n\}$. Spunem că f este **derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul a dacă limita**

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

există și este finită.

Notăm această limită (dacă există) cu

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ sau } f'_{x_i}(a).$$

Spunem că f este **derivabilă parțial în raport cu x_i pe D** dacă este derivabilă parțial în raport cu x_i în orice punct $a \in D$. Dacă f este derivabilă parțial în raport cu x_i pe D atunci se poate vorbi de funcția parțială a lui f în raport cu variabila x_i notată $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ și anume

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Observația 1.1.2. În cazul $n = 2$ se notează cu (x, y) în loc de (x_1, x_2) punctul curent din \mathbb{R}^2 , iar în \mathbb{R}^3 se notează cu (x, y, z) în loc de (x_1, x_2, x_3) . Așadar, o funcție de două variabile $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^2$ este derivabilă parțial în raport cu x , respectiv cu y în punctul $a = (a_1, a_2) \in D$, dacă există și este finită următoarea limită

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{x \rightarrow a_1} \frac{f(x, a_2) - f(a_1, a_2)}{x - a_1}$$

respectiv

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{y \rightarrow a_2} \frac{f(a_1, y) - f(a_1, a_2)}{y - a_2}.$$

Pentru funcții elementare (polinoame, funcțiile raționale, trigonometrice, exponențială, logaritmică și compuneri ale acestora, etc.) $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$ se calculează derivând f uzual în raport cu x , considerând y ca parametru, iar $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$ se calculează derivând f în raport cu y și considerând x ca parametru.

Exemplul 1.1.5.

1) Fie $f(x, y) = x^2 + xy$ și $a = (5, -3)$, $D = \mathbb{R}^2$. În acest caz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x, -3) - f(5, -3)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+2)}{x-5} = 7$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{y \rightarrow -3} \frac{f(5, y) - f(5, -3)}{y + 3} = \lim_{y \rightarrow -3} \frac{5y + 15}{y + 3} = 5.$$

În punctul curent avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$ și dacă înlocuim $x = 5$, $y = -3$ regăsim valorile anterioare.

2) Dacă $f(x, y, z) = x^2 + \sin yz$, $D = \mathbb{R}^3$, atunci avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = z \cos yz,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) = y \cos yz.$$

Definiția 1.1.4. Funcția f se numește de **clasă C^1 pe D** și se notează $f \in C^1(D)$ dacă f este derivabilă parțial pe D în raport cu toate variabilele și plus, funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sunt continue pe D .

Observația 1.1.3. Productivitățile marginale (și în general costurile, beneficiile, câștigurile marginale) reprezintă de fapt derivatele parțiale de ordinul I ale funcției care ne dă productivitatea (respectiv costul, beneficiul, câștigul etc.)

Exemplul 1.1.6. Pentru a ara un teren cu suprafața de x_1 ha sunt necesare x_2 ore de muncă pe zi. După x_3 zile de muncă s-au arat y ha de teren. Între aceste variabile există relația:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^4 x_2 x_3^3.$$

Să se determine productivitatea marginală raportată la suprafața terenului, la numărul de ore de muncă pe zi și respectiv la numărul de zile de muncă.

Rezolvare: În cazul problemei noastre vom avea:

$$\begin{aligned} f_{x_1}'(x_1, x_2, x_3) &= 12x_1^3 x_2 x_3^3, \text{ productivitatea marginală raportată la suprafața de teren,} \\ f_{x_2}'(x_1, x_2, x_3) &= 3x_1^4 x_3^3, \text{ productivitatea marginală raportată la numărul orelor de muncă / zi,} \\ f_{x_3}'(x_1, x_2, x_3) &= 9x_1^4 x_2 x_3^2, \text{ productivitatea marginală raportată la numărul de zile de lucru.} \end{aligned}$$

Observația 1.1.4. Tot ca și aplicații ale derivatelor parțiale se definesc:

$$\rho_f^{(x_k)}(x) = \frac{f_{x_k}'(x)}{f(x)} \quad \text{- rata de schimbare parțială a lui } f \text{ în raport cu } x_k,$$

$$\varepsilon_f^{(x_k)}(x) = \frac{x_k f_{x_k}'(x)}{f(x)} \quad \text{- elasticitatea parțială a lui } f \text{ în raport cu } x_k.$$

Diferențiabilitatea funcțiilor reale de mai multe variabile reale

Definiția 1.1.5. Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Spunem că f este **diferențiabilă în punctul** a dacă există $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ și o funcție $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$ cu $\lim_{x \rightarrow a} \omega(x) = \omega(a) = 0$ (deci ω continuă și nulă în a) astfel încât să avem

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - a_i) + \omega(x) \|x - a\| \quad \forall x \in D. \quad (1.1)$$

Spunem că f este **diferențiabilă pe** $A \subset D$ dacă este diferențiabilă în orice punct din A .

Propoziția 1.1.2. Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este diferențiabilă în a atunci f este continuă în a .

Între diferențiabilitatea unei funcții într-un punct și existența derivatelor parțiale în acel punct există următoarea legătură:

Propoziția 1.1.3. Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este diferențiabilă în a atunci f admite derivate parțiale în a și

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \alpha_i$$

pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Observația 1.1.5.

1) Rezultatul precedent implică faptul că relația de definiție 1.1 a diferențiabilității devine:

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i) + \omega(x) \|x - a\|, \quad \forall x \in D. \quad (1.2)$$

- 2) Reciproca propoziției precedente este falsă, adică există funcții care admit derivate parțiale într-un punct și totuși nu sunt diferențiabile în acel punct.

Concret, când e nevoie să studiem diferențiabilitatea unei funcții într-un punct este necesar să avem cunoscute condiții suficiente de diferențiabilitate. Următorul rezultat rezolvă această problemă.

Propoziția 1.1.4. Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă există V vecinătate a punctului a astfel încât f are derivate parțiale pe $V \cap D$ și dacă acestea sunt continue în a atunci f este diferențiabilă în a .

Observația 1.1.6.

- 1) Dacă f admite derivate parțiale continue pe D atunci f este diferențiabilă pe D .
- 2) Propoziția precedentă prezintă condiții suficiente de diferențiabilitate dar nu și necesare.

Diferențiala funcțiilor reale de mai multe variabile reale

Definiția 1.1.6. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, un domeniu $a \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă în a . Se numește **diferențială a funcției f în punctul a** notată $df_{(a)}$, aplicația

$$df_{(a)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad df_{(a)}(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i. \quad (1.3)$$

Observația 1.1.7. 1) Fie $D \subset \mathbb{R}^n$, un domeniu $a \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă în a . Atunci există $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$, ω continuă și nulă în a astfel încât $\forall x \in D$ avem

$$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) (x_i - a_i) + \omega(x) \|x - a\|.$$

$x_i - a_i$ se numește creșterea celui de-al i -lea argument a lui f ($i = \overline{1, n}$)

- $x - a = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$ se numește **sistem de creșteri** ale argumentelor lui f .
 - $f(x) - f(a)$ se numește **creșterea funcției** corespunzătoare sistemului de creșteri $x - a$ ale argumentelor.
 - Pentru x suficient de apropiat de a (adică pentru $\|x - a\|$ suficient de mică astfel încât cantitatea $\omega(x) \|x - a\|$ poate fi neglijată) avem evident $f(x) - f(a) \approx df_{(a)}(x - a)$ adică $df_{(a)}$ aproximează creșterea (sau descreșterea) funcției f în a corespunzătoare unui sistem $x - a$ de creșteri ale argumentelor (deci când se trece de la punctul x la punctul a).
- 2) Considerăm funcțiile $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Avem: $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad (i, j = \overline{1, n})$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$, deci funcțiile φ_i admit derivate parțiale continue pe \mathbb{R}^n și prin urmare sunt diferențiabile în orice punct $a \in \mathbb{R}^n$ și

$$d\varphi_{i(a)}(x - a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) \cdot (x_j - a_j) = x_i - a_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Pentru simplificarea notațiilor vom nota $d\varphi_{i(a)} = dx_i$. Cu aceasta relația 1.3 se scrie

$$df_{(a)}(x - a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j.$$

Adesea dx_1, dx_2, \dots, dx_n se identifică cu creșterile argumentelor și avem

$$df_{(a)}(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i.$$

- 3) Interpretând produsul simbolic $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a)$ ca fiind derivata parțială a lui f în raport cu x_i în punctul a ($i = \overline{1, n}$) se obține

$$df_{(a)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f(a), \quad a \in D. \quad (1.4)$$

Putem considera astfel operatorul de diferențiere

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n. \quad (1.5)$$

Exemplul 1.1.7. Să se calculeze diferențiala funcției $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y - 1$$

Rezolvare: Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2y^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4xy + 1;$$

$$df_{(x,y)}(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy = (3x^2 + 2y^2)dx + (4xy + 1)dy.$$

1.1.3 Derivate parțiale și diferențiale de ordin superior

Derivate parțiale de ordin superior

Definiția 1.1.7. Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție ce admite derivate parțiale pe D .

Dacă derivata $\frac{\partial f}{\partial x_i} : D \rightarrow \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, este derivabilă în raport cu variabila x_j , $j = \overline{1, n}$ în punctul $a \in D$, **numim derivată parțială de ordinul al doilea în punctul a a funcției f în raport cu variabilele x_i, x_j (în această ordine) numărul**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a), \quad (2.4.1)$$

Dacă $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ atunci derivata

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \stackrel{\text{not}}{=} f''_{x_i x_j}(a)$$

se numește **derivata mixtă** în raport cu variabilele x_i și x_j .

Dacă $i = j \in \{1, \dots, n\}$ atunci vom folosi una dintre notațiile

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = f''_{x_i^2}(a).$$

În general o funcție de n variabile reale f are n derivate parțiale de ordin întâi și n^2 derivate parțiale de ordinul doi.

Exemplul 1.1.8. Să calculăm derivatele parțiale de ordinul întâi și doi pentru funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f'_x(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f'_y(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right)'_x = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{2(-x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right)'_y = 2x \left(-\frac{2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right) = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right)'_y = \frac{2(x^2 - y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Se observă că $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$. În general, aceste derivate parțiale de ordinul al doilea nu sunt egale. Următorul criteriu stabilește condiții suficiente pentru ca derivatele parțiale mixte să fie egale.

Teorema 1.1.1. (Schwarz). Dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, are derivate parțiale de ordinul doi mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, într-o vecinătate V a punctului $a \in D$ și dacă aceste funcții derivate parțiale de ordinul doi mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sunt continue în a atunci are loc egalitatea:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Propoziția 1.1.5. Dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ are derivate parțiale de ordinul doi mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, pe D și sunt funcții continue pe D atunci ele sunt egale pe D adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x), \quad x \in D.$$

Observația 1.1.8. Condiția de continuitate a derivatelor mixte este esențială.

Derivate parțiale de ordinul 3 Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție ce admite derivate parțiale de ordinul doi pe D . Atunci putem studia existența derivatelor parțiale de ordinul 3.

Dacă derivata

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\})$$

este derivabilă în raport cu x_k ($k \in \{1, \dots, n\}$) în punctul $a \in D$, numim **derivată parțială de ordinul al treilea** în punctul a a funcției f în raport cu variabilele x_i, x_j, x_k (în această ordine) numărul

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(a) \stackrel{\text{not}}{=} f'''_{x_i x_j x_k}(a) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)(a).$$

Dacă cel puțin doi indici dintre i, j, k sunt diferiți derivata se va numi mixtă. În caz contrar, adică $i = j = k$, se obține derivata de ordinul 3 în raport cu aceeași variabilă x_i ($i = \overline{1, n}$), $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(a) = f'''_{x_i^3}(a)$.

Concluzia Teoremei lui Schwarz rămâne adevărată și pentru derivatele parțiale mixte de ordin mai mare ca doi. De fapt, în ipoteza continuității acelor funcții derivate mixte de ordin superior, importantă este nu ordinea în care se face derivarea ci variabilele în raport cu care se face derivarea și de câte ori se derivatează în raport cu o variabilă. De exemplu avem că

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}.$$

Exemplul 1.1.9. Fie funcția $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x, y) = x \ln y$
Derivatele parțiale distincte de ordinul doi, trei se calculează astfel:

Calculăm mai întâi derivatele parțiale de ordinul întâi

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (x \ln y)'_x = \ln y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x \ln y)'_y = \frac{x}{y}$$

Calculăm derivatele parțiale de ordinul doi distincte

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\ln y) = 0 \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\ln y) = \frac{1}{y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} \right) = -\frac{x}{y^2}. \end{aligned}$$

Calculăm derivatele parțiale de ordinul trei distincte

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (0) = 0 \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = \frac{2x}{y^3}. \end{aligned}$$

Observația 1.1.9. În mod analog se pot defini derivate parțiale de ordin mai mare ca trei.

Diferențiale de ordin superior

În paragraful 1.1.2 a fost introdusă noțiunea de diferențială a unei funcții în punctul a , notată $df_{(a)}$.

Aceasta este dată de $df_{(a)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $df_{(a)}(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$

sau dacă notăm cu $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_m)$ creșterile argumentelor atunci

$$df_{(a)}(dx) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i.$$

De asemenea, am introdus operatorul de diferențiere

$$d = \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n$$

cu ajutorul căruia se poate scrie

$$df_{(a)} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right) f(a).$$

Definiția 1.1.8. Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

- 1) Spunem că f este **de două ori diferențiabilă în punctul a** sau că are diferențială de ordinul doi în a dacă f admite derivate parțiale în raport cu toate variabilele pe o vecinătate V a lui a și funcțiile derivate parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in 1, \dots, n$, (considerate pe $V \cap D$) sunt diferențiabile în a .
- 2) Spunem că funcția f este **diferențiabilă de k ori în punctul a** , sau că are diferențială de ordinul k în a dacă toate derivatele parțiale de ordinul $k-1$ ale lui f există într-o vecinătate V a lui a și sunt diferențiabile în a .
- 3) Spunem că funcția f este diferențiabilă de k ori pe domeniul D dacă este diferențiabilă de k ori în fiecare punct din D .

Prezentăm în continuare (fără demonstrație) un rezultat care ne dă condiții suficiente pentru ca o funcție să fie de k ori diferențiabilă într-un punct.

Teorema 1.1.2. Fie D domeniu, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$ și $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f are într-o vecinătate V a lui a toate derivatele parțiale de ordinul k și dacă aceste funcții derivate parțiale sunt continue în a , atunci f este diferențiabilă de k ori în a .

Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$ și dacă f este o funcție de trei ori diferențiabilă în a atunci

$$d^2 f_{(a_1, a_2)}(dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) dy^2,$$

respectiv

$$\begin{aligned} d^3 f_{(a_1, a_2)}(dx, dy) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a) dx^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(a) dx^2 dy + \\ &+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^2}(a) dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a) dy^3. \end{aligned}$$

Diferențiala de ordinul k în punctul a se definește prin egalitatea

$$d^k f_{(a)}(dx) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right]^{(k)} f(a), \quad (1.6)$$

unde $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_m)$ iar (k) reprezintă puterea simbolică-formală, după care se dezvoltă suma din paranteză și apoi se înmulțește formal cu $f(a)$.

Relația 1.6 pune în evidență operatorul de diferențiere de ordinul k .

$$d^k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{(k)}$$

care este (formal) puterea de ordinul k a operatorului de diferențiere de ordinul întâi. Ridicarea la puterea simbolică conduce la expresia:

$$d^k f_{(a)}(dx) = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!, k_2!, \dots, k_n!} \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} dx_1^{k_1} dx_2^{k_2} \dots dx_n^{k_n}.$$

Exemplul 1.1.10. Scriem diferențialele de ordinul unu, doi și trei pentru funcția: $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ prezentată în exemplul 1.1.9.

Diferențiala de ordinul unu este

$$\begin{aligned} df_{(a_1, a_2)}(dx, dy) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) dy = \\ &= \ln a_2 dx + \frac{a_1}{a_2} dy. \end{aligned}$$

Diferențiala de ordinul doi este

$$\begin{aligned} d^2 f_{(a_1, a_2)}(dx, dy) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1, a_2) dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a_1, a_2) dx dy + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1, a_2) dy^2 &= \frac{2}{a_2} dx dy - \frac{a_1}{a_2^2} dy^2. \end{aligned}$$

Diferențiala de ordinul trei va fi

$$d^3 f_{(a_1, a_2)}(dx, dy) = -\frac{3}{a_2^2} dx dy^2 + \frac{2a_1}{a_2^3} dy^3.$$

1.2 Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Optimizarea matematică se ocupă cu selectarea celui mai bun element dintr-o mulțime de alternative disponibile. În particular, aceasta înseamnă rezolvarea unor probleme în care se caută extremele (maximul sau minimul) unei funcții reale.

În acest capitol vom studia problema calculului extremelor unei funcții reale de mai multe variabile reale, precum și aplicații ale acesteia în domeniul economic, precum problema gestiunii stocurilor sau ajustarea datelor experimentale.

1.2.1 Extremele funcțiilor de două variabile

Definiția 1.2.1. Fie f o funcție de două variabile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ și $(x_0, y_0) \in D$ un punct interior. Funcția f admite un punct de extrem (maxim sau minim) în punctul (x_0, y_0) dacă există o vecinătate V a punctului (x_0, y_0) astfel încât oricare ar fi un punct (x, y) din $V \cap D$ să avem

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &\leq 0, \text{ pentru } (x_0, y_0) \text{ punct de maxim;} \\ f(x, y) - f(x_0, y_0) &\geq 0, \text{ pentru } (x_0, y_0) \text{ punct de minim.} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Observația 1.2.1. *Punctele de extrem corespunzătoare definiției de mai sus sunt puncte de extrem local (maxim local sau minim local).*

Exemplul 1.2.1. *Fie funcția de două variabile $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Punctul $(1, 1)$ este un punct de minim local pentru f , deoarece

$$f(x, y) - f(1, 1) \geq 0$$

pentru orice (x, y) într-o vecinătate V a acestuia. Vom vedea în Exemplul 1.2.3 cum se determină punctul de extrem $(1, 1)$.

Teorema 1.2.1. (Condiții necesare de extrem local)

Dacă funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$ are derivatele parțiale de ordinul întâi f'_x și f'_y continue pe o vecinătate V a unui punct (x_0, y_0) interior domeniului D și dacă (x_0, y_0) este un punct de extrem local, atunci avem:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad (1.8)$$

Demonstrație. Presupunem că (x_0, y_0) este punct de maxim local. Atunci

$$\begin{aligned} f(x, y_0) - f(x_0, y_0) &\leq 0 \\ f(x_0, y) - f(x_0, y_0) &\leq 0, \end{aligned}$$

adică funcțiile parțiale (de o singură variabilă)

$$h(x) = f(x, y_0), \quad g(y) = f(x_0, y)$$

au în punctele x_0 și y_0 valori maxime locale. În baza teoremei lui Fermat, derivatele funcțiilor h și g se anulează în x_0 , respectiv în y_0 , adică avem

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= f'(x_0, y_0) = 0 \\ g'(y_0) &= f'(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

În mod analog se arată că dacă (x_0, y_0) este un punct de minim local pentru funcția $f(x, y)$ atunci au loc condițiile (1.8). \square

Definiția 1.2.2. *Punctele domeniului D în care derivatele parțiale f'_x și f'_y ale funcției f se anulează, se numesc **puncte critice** sau **puncte staționare** ale acestei funcții.*

Exemplul 1.2.2. *Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

din Exemplul 1.2.1. Calculăm punctele critice ale lui f . Acestea sunt soluții ale următorului sistem de ecuații

$$\begin{cases} f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - y) = 0 \\ f'_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - x) = 0. \end{cases}$$

Soluțiile reale ale sistemului sunt (punctele) $(1, 1)$ și $(0, 0)$, acestea fiind cele două puncte critice ale lui f .

Observația 1.2.2. *Natura punctelor staționare, deci a punctelor din domeniul D ce sunt soluții ale sistemului de ecuații (1.8), se va preciza prin intermediul condițiilor suficiente de extrem local, care vor rezulta pe baza Definiției 1.2.1.*

Teorema 1.2.2. (Condiții suficiente de extrem local)

Fie funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Presupunem că f are derivatele parțiale de ordinul întâi și doi continue pe o vecinătate V a unui punct (x_0, y_0) interior domeniului D . Dacă (x_0, y_0) este un punct critic (staționar) al funcției f , atunci folosind următoarele notații

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0), D = B^2 - AC.$$

avem următoarele situații:

- 1) *Dacă $D < 0$ și $A > 0$ atunci (x_0, y_0) este un punct de minim local;*
- 2) *Dacă $D < 0$ și $A < 0$ atunci (x_0, y_0) este un punct de maxim local;*
- 3) *Dacă $D > 0$, atunci (x_0, y_0) nu este un punct de extrem;*
- 4) *Dacă $D = 0$, atunci studiul naturii punctului staționar (x_0, y_0) se face cu ajutorul derivatelor parțiale de ordin superior lui doi.*

Exemplul 1.2.3. *Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

din Exemplul 1.2.1 și 1.2.2. Determinăm extremele funcției f .

Natura acestor două puncte staționare $(1, 1)$ și $(0, 0)$ ale lui f se va stabili utilizând condițiile suficiente de extrem. Avem:

$$f''_{x^2} = 6x, f''_{y^2} = 6y, f''_{xy} = -3.$$

Pentru punctul staționar $(1, 1)$ avem:

$$f''_{x^2}(1, 1) = 6, f''_{y^2}(1, 1) = 6, f''_{xy}(1, 1) = -3 \text{ și}$$

$$D = 9 - 36 = -27 < 0, A = 6 > 0,$$

deci punctul $(1, 1)$ este un punct de minim, iar

$$f_{\min} = f(1, 1) = 1 + 1 - 3 = -1.$$

Pentru punctul staționar $(0, 0)$ avem $D = 9$ și deci acest punct nu este un punct de extrem.

1.2.2 Extremele funcțiilor de n variabile ($n \geq 2$)

În cazul funcțiilor de n variabile avem o extindere firească a Definiției 1.2.1.

Definiția 1.2.3. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ o funcție de n variabile reale și $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ un punct interior lui D . Vom spune că funcția f **admite un punct de maxim local sau minim local** în punctul x^0 dacă există o vecinătate V_{x^0} a acestui punct astfel încât să avem

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^0) &\leq 0, \text{ pentru } x^0 \text{ punct de maxim} \\ f(x) - f(x^0) &\geq 0, \text{ pentru } x^0 \text{ punct de minim} \end{aligned}$$

pentru orice punct $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V_{x^0} \cap D$.

Observația 1.2.3. Punctele de extreme definite mai sus sunt puncte de extrem local. Dacă $n = 2$ atunci regăsim definițiile prezentate în cazul unei funcții de două variabile. Condițiile necesare și suficiente de extrem pentru funcțiile de n variabile vor fi sintetizate în teoremele ce urmează.

Teorema 1.2.3. (Condiții necesare de extrem)

Fie f o funcție definită într-o vecinătate V_{x^0} a punctului $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Dacă acest punct este un punct de extrem al funcției f și dacă în acest punct există derivatele parțiale de ordinul întâi f'_{x_j} , $j = \overline{1, n}$, atunci ele sunt egale cu zero, adică avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0, \forall j = \overline{1, n}. \quad (1.9)$$

Definiția 1.2.4. Punctele în care sunt îndeplinite condițiile necesare de extrem ale funcției f se numesc **puncte critice** (sau **staționare**) ale funcției.

Exemplul 1.2.4. Fie funcția de trei variabile $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x - 2z.$$

Calculăm punctele staționare ale funcției f . Avem sistemul de ecuații

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 1 = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \\ f'_z = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

care reprezintă condițiile necesare de extrem ale funcției. Rezolvând acest sistem de ecuații obținem doar o soluție

$$x_0 = -\frac{1}{2}, y_0 = 0, z_0 = 1$$

și deci găsim punctul staționar $(x_0, y_0, z_0) = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$.

Teorema 1.2.4. (Condiții suficiente de extrem)

Fie f o funcție de n variabile definită într-o vecinătate V_{x^0} a punctului $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ și cu derivatele parțiale de ordinul doi continue în vecinătatea V_{x^0} . Dacă x^0 este un punct staționar al funcției f și

$$d^2 f_{(x^0)}(dx) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) dx_i dx_j > 0 \quad (\text{respectiv } < 0), \forall dx \neq 0$$

atunci punctul x^0 este un punct de minim local (respectiv punct de maxim local). Dacă $d^2 f_{(x^0)}$ ia valori de semne diferite, atunci punctul x^0 nu este punct de extrem.

Observația 1.2.4. Teorema de mai sus ne arată că pentru a stabili natura punctelor staționare, deci natura punctelor care sunt soluții ale sistemului de ecuații

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f'_{x_j}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

trebuie să determinăm diferențiala de ordinul doi corespunzătoare funcției f

$$\begin{aligned} d^2 f(dx) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n \right) \end{aligned}$$

și apoi să stabilim semnul ei în care rolul variabilelor este jucat de creșterile $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, pentru fiecare punct staționar.

Exemplul 1.2.5. Fie funcția de trei variabile $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x - 2z$$

din Exemplul 1.2.4. Calculăm diferențiala de ordinul doi a lui f și încercăm să-i stabilim semnul.

Calculăm mai întâi derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției:

$$f''_{x^2} = 2, f''_{xy} = f''_{yx} = 0, f''_{xz} = f''_{zx} = 0, f''_{y^2} = 2, f''_{yz} = f''_{zy} = 0, f''_{zz} = 2.$$

Diferențiala de ordinul doi în punctul staționar $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{2}, 0, 1)$ este

$$\begin{aligned} d^2 f_{(x_0, y_0, z_0)}(dx, dy, dz) &= f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0) dx^2 + f''_{y^2}(x_0, y_0, z_0) dy^2 + \\ &+ f''_{z^2}(x_0, y_0, z_0) dz^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) dx dy + \\ &+ 2f''_{xz}(x_0, y_0, z_0) dx dz + 2f''_{yz}(x_0, y_0, z_0) dy dz \\ &= 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 > 0. \end{aligned}$$

Conform Teoremei 1.2.4, punctul $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{2}, 0, 1)$ este punct de minim local.

Observația 1.2.5. Pentru fiecare punct staționar x^0 diferențiala de ordinul doi (3.2.3) poate fi scrisă sub forma matriceală

$$d^2 f_{(x^0)}(dx) = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}}_{H(x^0)} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

unde matricea pătratică și simetrică de ordinul n se numește **matricea hessiană** asociată funcției f în punctul staționar x^0 și se notează $H(x^0)$.

Introducând notațiile

$$a_{sj} = f''_{x_s x_j}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_j}(x^0), \quad s, j = \overline{1, n},$$

matricea hessiană $H(x^0)$ are forma:

$$H(x^0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

care este o matrice simetrică deoarece sunt îndeplinite condițiile din teorema lui Schwarz, deci avem egalitățile

$$a_{sj} = f''_{x_s x_j} = f''_{x_j x_s} = a_{js}, \quad \forall s, j = \overline{1, n}.$$

$$\text{Notând prin } A_1 = a_{11}, A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorii principali ai matricei $H(x^0)$, putem formula criteriul lui Sylvester.

Teorema 1.2.5. (Criteriul lui Sylvester)

1) Dacă minorii principali ai matricei hessiene $H(x^0)$ sunt pozitivi, adică sunt îndeplinite inegalitățile:

$$A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, \dots, A_n > 0, \quad (1.10)$$

atunci punctul staționar x^0 este un punct de minim al funcției f .

2) Dacă minorii principali ai matricei hessiene $H(x^0)$ au semne alternate, începând cu semnul minus, deci dacă avem:

$$A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots, (-1)^n A_n > 0, \quad (1.11)$$

atunci punctul staționar x^0 este un punct de maxim al funcției f .

Observația 1.2.6. Pentru $n = 2$, deci dacă este vorba de extremele unei funcții de două variabile f matricea hessiană are forma

$$H(x^0) = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1 x_2} \\ f''_{x_2 x_1} & f''_{x_2^2} \end{pmatrix}_{|x^0} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Dacă sunt îndeplinite condițiile (1.10), obținem

$$A_1 = A = f''_{x_1^2}(x^0) > 0, \quad A_2 = (AC - B^2) = -D > 0$$

și deci punctul x^0 este un punct de minim pentru funcția f .

Dacă sunt îndeplinite condițiile (1.11), obținem

$$A_1 = A = f''_{x_1^2}(x^0) < 0, \quad A_2 = (AC - B^2) = -D > 0$$

și deci punctul x^0 este un punct de maxim pentru funcția f .

Exemplul 1.2.6. Fie funcția de trei variabile $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x - 2z$$

din Exemplele 1.2.4 și 1.2.5. Determinăm extremele funcției f folosind criteriul lui Sylvester.

Matricea hessiană asociată funcției f în punctul staționar $(x_0, y_0, z_0) = (\frac{1}{2}, 0, 1)$ este

$$H(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deoarece sunt îndeplinite condițiile

$$A_1 = 2 > 0, \quad A_2 = 4 > 0, \quad A_3 = 8 > 0,$$

conform cazului 1) din criteriul lui Sylvester rezultă că punctul staționar unic al funcției f este un punct de minim local pentru funcția dată și avem

$$f_{\min} = f(x_0, y_0, z_0) = f\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right) = -\frac{9}{4}.$$

1.2.3 Ajustarea datelor experimentale

Să presupunem că într-un proces concret participă două mărimi măsurabile ale căror valori să fie notate cu x și y . Dependența dintre cele două mărimi poate fi descrisă de o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu ajutorul relației $y = f(x)$. Determinarea funcției f este o problemă centrală în orice știință experimentală. Informații utile în rezolvarea acestei probleme sunt perechi de valori determinate experimental pentru cele două mărimi, dar și cunoașterea tipului dependenței respective.

Valorile determinate experimental sunt în mod obiectiv afectate de erori de măsurare. Recunoașterea acestui fapt subliniază importanța cunoștințelor teoretice despre procesul în discuție.

În cele ce urmează vom considera un procedeu de determinare a unor funcții care să constituie aproximări acceptabile pentru funcția f numite **ajustarea datelor experimentale**.

În ajustarea datelor experimentale se acceptă că dependența este de un anumit tip (de exemplu $y = P_m(x)$, unde P_m este o funcție polinomială de grad cel mult m) și se caută acea dependență care „ajustează” cel mai bine valorile determinate experimental.

În continuare, pentru a folosi limbajul uzual în teoria aproximării, vom utiliza termenul de polinom și când este vorba de funcție polinomială.

Metoda celor mai mici pătrate

Să presupunem că legile teoretice care guvernează procesul în care apar cele două mărimi măsurabile ne asigură că dependența dintre aceste două mărimi este descrisă de relația $y = f(x)$, unde $f \in \mathcal{F}$, unde \mathcal{F} este o clasă precizată de funcții reale de o variabilă reală. Se pune atunci problema determinării acelei funcții f din clasa \mathcal{F} care dă cât mai bine dependența lui y de x în procesul concret respectiv.

Să admitem că n observații experimentale asupra procesului respectiv dau pentru x și y valorile din tabelul următor:

x	x_1	x_2	\cdots	x_n
y	y_1	y_2	\cdots	y_n

Problema pusă revine la determinarea funcției f din clasa \mathcal{F} ale cărei valori în punctele x_1, x_2, \dots, x_n „să se apropie cât mai mult” de datele determinate experimental.

O măsură a „apropierii” funcției f de datele experimentale este

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2.$$

Definiția 1.2.5. *Determinarea funcției f din clasa \mathcal{F} pentru care expresia*

$$\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2$$

*are cea mai mică valoare posibilă se numește **ajustarea datelor experimentale** din tabelul*

x	x_1	x_2	\cdots	x_n
y	y_1	y_2	\cdots	y_n

*cu **metoda celor mai mici pătrate**.*

În cele ce urmează vom considera cazul când \mathcal{F} este clasa funcțiilor polinomiale de grad cel mult m în nedeterminata x , adică

$$\mathcal{F} = \{P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \mid a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, m}\}.$$

A determina funcția f revine atunci la a determina coeficienții a_0, a_1, \dots, a_m .

Notăm

$$F(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n (P_m(x_i) - y_i)^2.$$

Problema pusă se reduce atunci la problema determinării punctului de minim al funcției F , de unde și numele metodei.

Punctele staționare ale funcției F sunt soluțiile sistemului

$$F'_{a_j}(a_0, a_1, \dots, a_m) = 0, \quad j = \overline{0, m}.$$

Efectuând calculele și făcând următoarele notații

$$s_l = \sum_{i=1}^n x_i^l \quad \text{și} \quad t_l = \sum_{i=1}^n x_i^l y_i,$$

se ajunge la

$$F'_{a_j}(a_0, a_1, \dots, a_m) = 2 \left[\sum_{k=0}^m s_{k+j} a_k - t_j \right],$$

astfel încât sistemul care dă punctele staționare ale funcției F este

$$\sum_{k=0}^m s_{k+j} a_k = t_j, \quad j = \overline{0, m},$$

adică

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + \dots + s_m a_m = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + \dots + s_{m+1} a_m = t_1 \\ \dots \\ s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \dots + s_{2m} a_m = t_m. \end{cases}$$

Acest sistem este numit **sistemul normal**.

Sistemul normal poate fi scris dacă se cunosc sumele s_0, s_1, \dots, s_{2m} și sumele t_0, t_1, \dots, t_m . Aceste sume pot fi determinate completând tabelul următor

	x_i^0	x_i^1	x_i^2	\dots	x_i^{2m}	$x_i^0 y_i$	$x_i^1 y_i$	\dots	$x_i^m y_i$
	1	x_1	x_1^2		x_1^{2m}	y_1	$x_1 y_1$		$x_1^m y_1$
	1	x_2	x_2^2		x_2^{2m}	y_2	$x_2 y_2$		$x_2^m y_2$
	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
	1	x_n	x_n^2		x_n^{2m}	y_n	$x_n y_n$		$x_n^m y_n$
\sum	s_0	s_1	s_2	\dots	s_{2m}	t_0	t_1	\dots	t_m

în care coloanele x_i^1 și $x_i^0 y_i$ sunt date de tabelul de date experimentale

x	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_1	y_2	\dots	y_n

restul coloanelor se pot determina ușor, (0^0 va fi interpretat 1), iar în ultima linie figurează sumele elementelor din cele n linii precedente.

Ținând cont de faptul că $s_l = \sum_{i=1}^n x_i^l$, $l = \overline{0, 2m}$, se poate arăta că determinantul sistemului normal este diferit de zero, adică

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_m \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_m & s_{m+1} & \dots & s_{2m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

deci sistemul normal este un sistem compatibil determinat.

Fie $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ soluția unică a sistemului normal. Atunci punctul $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ este punctul staționar unic al funcției F .

Având în vedere că F este o sumă de pătrate:

$$F(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n (P_m(x_i) - y_i)^2,$$

se poate arăta că dacă F are un punct de extrem finit atunci el este punct de minim și că punctul staționar $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)$ este întotdeauna punctul de minim al funcției F .

În acest fel, etapa a doua a procedurii de determinare a extremelor funcției F nu mai trebuie parcursă și deci polinomul (de grad cel mult m) care ajustează în sensul metodei celor mai mici pătrate datele experimentale considerate este

$$P_m(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 + \dots + \bar{a}_m x^m.$$

Observația 1.2.7. Dacă $m = 1$, în locul expresiei „să se determine polinomul de ajustare de grad cel mult unu”, se mai utilizează expresia „să se ajusteze cu o dreaptă”, iar dacă $m = 2$, în locul expresiei „să se determine polinomul de ajustare de grad cel mult doi”, se mai utilizează expresia „să se ajusteze cu o parabolă”. Aceste exprimări se bazează pe faptul că imaginea geometrică a unui polinom de gradul întâi este o dreaptă, iar imaginea geometrică a unui polinom de gradul doi este o parabolă.

Exemplul 1.2.7. Să se ajusteze cu o dreaptă și cu o parabolă datele experimentale din tabelul

x	-1	0	1	2
y	-3	1	0	3

1. Pentru ajustarea cu o dreaptă,

$$m = 1, f = a_0 + a_1x, \begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 = t_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 = t_1 \end{cases}$$

2. Pentru ajustarea cu o parabolă,

$$m = 2, f = a_0 + a_1x + a_2x^2, \begin{cases} s_0a_0 + s_1a_1 + s_2a_2 = t_0 \\ s_1a_0 + s_2a_1 + s_3a_2 = t_1 \\ s_2a_0 + s_3a_1 + s_4a_2 = t_2 \end{cases}$$

Pentru calcularea valorilor $s_0, s_1, s_2, s_3, t_0, t_1$ și t_2 , folosim tabelul

x_i^0	x_i^1	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	y_ix_i	$y_ix_i^2$
1	-1	1	-1	1	-3	3	-3
1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0
1	2	4	8	16	3	6	12
4	2	6	8	18	1	9	9
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	t_0	t_1	t_2

1. Pentru $m = 1$, $f = a_0 + a_1x$ și sistemul normal este: $\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 = 1 \\ 2a_0 + 6a_1 = 9 \end{cases}$

Soluția unică a sistemului este $(\bar{a}_0, \bar{a}_1) = (-\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$.

Polinomul de ajustare de grad cel mult 1 este

$$P(x) = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5}x.$$

Dreapta de ajustare are ecuația: $y = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5}x$.

2. Pentru $m = 2$, $f = a_0 + a_1x + a_2x^2$ și sistemul normal este

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 1 \\ 2a_0 + 6a_1 + 8a_2 = 9 \\ 6a_0 + 8a_1 + 18a_2 = 9 \end{cases}$$

Soluția sistemului: $(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = (-\frac{7}{20}, \frac{39}{20}, -\frac{1}{4})$.

Parabola de ajustare are ecuația

$$y = -\frac{7}{20} + \frac{39}{20}x - \frac{1}{4}x^2.$$

Observația 1.2.8. În aplicații se utilizează, pe lângă funcțiile polinomiale, și funcțiile exponențiale, logaritmice, trigonometrice, etc. Evident, în asemenea cazuri sistemul normal este altul mai complicat și mai dificil de rezolvat.

1.3 Integrale Euleriene

Sub denumirea de integrale euleriene vom studia trei integrale improprii des folosite în teoria probabilităților și în diverse alte domenii ale matematicii aplicate.

1.3.1 Integrala lui Euler de speța întâi. Funcția beta

Definiția 1.3.1. Se numește *integrala lui Euler de speța întâi* integrala

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

care pentru $p < 1$ este o integrală improprie având ca punct critic pe 0 și pentru $q < 1$ este o integrală improprie având ca punct critic pe 1.

Observația 1.3.1. Integrala improprie

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

este convergentă dacă $p > 0$ și $q > 0$ și este divergentă în celelalte cazuri. De fapt dacă $p \geq 1$ și $q \geq 1$ atunci ea este o integrală propriu-zisă (proprie).

Definiția 1.3.2. Funcția reală de două variabile reale $B : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relația

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

se numește *funcția lui Euler de speța întâi* sau *funcția beta*.

Proprietăți ale funcției Beta

(B1) $B(p, 1) = \frac{1}{p}$

Într-adevăr,

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{1-1}dx = \int_0^1 x^{p-1}dx = \left. \frac{x^p}{p} \right|_0^1 = \frac{1}{p}.$$

În particular, pentru $p = 1$ se obține

$$B(1, 1) = 1.$$

(B2) $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$

Într-adevăr, avem

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1} (1-x)^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx,$$

integrală pe care o putem calcula utilizând substituția lui Euler

$$\sqrt{x(1-x)} = tx,$$

de unde se găsește

$$x = \varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

și deci $\varphi'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}.$

Pentru ca $x = 0$ trebuie ca $t = \infty$ și pentru ca $x = 1$ trebuie ca $t = 0$.

Deci

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int_{\infty}^0 \frac{1}{t \cdot \frac{1}{1+t^2}} \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt = -2 \int_{\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \arctg t \Big|_0^{\infty} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi. \end{aligned}$$

(B3) $B(p, q) = B(q, p).$

Într-adevăr, avem

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

din care, făcând substituția $x = \psi(t) = 1-t$ se obține

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 (1-t)^{p-1} (1-(1-t))^{q-1} (1-t)' dt = \\ &= - \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{p-1} dt = \\ &= \int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{p-1} dx = B(q, p). \end{aligned}$$

(B4) Dacă $p > 1$ atunci

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q).$$

Într-adevăr, dacă integrăm prin părți punând

$$f(x) = x^{p-1} \quad \text{și} \quad g'(x) = (1-x)^{q-1}$$

obținem

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = x^{p-1} q \frac{-(1-x)^q}{q} \Big|_0^1 - \\ &\quad - \int_0^1 (p-1)x^{p-2} \cdot \frac{-(1-x)^q}{q} dx = \\ &= \frac{p-1}{q} \int_0^1 x^{p-2} (1-x)^q dx = \\ &= \frac{p-1}{q} \int_0^1 x^{p-2} (1-x)(1-x)^{q-1} dx = \\ &= \frac{p-1}{q} \int_0^1 (x^{p-2} - x^{p-1})(1-x)^{q-1} dx = \\ &= \frac{p-1}{q} \int_0^1 [x^{p-2}(1-x)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^{q-1}] dx = \\ &= \frac{p-1}{q} \left[\int_0^1 x^{p-2}(1-x)^{q-1} dx - \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \right] = \\ &= \frac{p-1}{q} [B(p-1, q) - B(p, q)]. \end{aligned}$$

Deci am obținut egalitatea

$$B(p, q) = \frac{p-1}{q} [B(p-1, q) - B(p, q)],$$

din care se obține imediat

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q).$$

Menționăm că ipoteza $p > 1$ este necesară pentru ca $p-1 > 0$ și deci $B(p-1, q)$ să existe.

Proprietatea (B4) demonstrată aici permite micșorarea cu o unitate a primului argument al funcției B . Ea poate fi utilizată succesiv atâta timp cât primul argument rămâne pozitiv.

(B5) Dacă $q > 1$ atunci

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1).$$

Această proprietate rezultă ușor din proprietățile (B4) și (B3). Într-adevăr, avem succesiv

$$B(p, q) = B(q, p) = \frac{q-1}{p+q-1} B(q-1, p) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1).$$

Proprietatea (B5) permite micșorarea cu o unitate a celui de al doilea argument al funcției B . Ea poate fi de asemenea utilizată succesiv atâta timp cât al doilea argument rămâne pozitiv.

Observăm astfel că prin utilizarea convenabilă a proprietăților (B4) și (B5) se poate calcula $B(p, q)$ pentru $p > 1$ și $q > 1$ dacă se cunoaște $B(\{p\}, \{q\})$, unde $\{x\}$ notează partea fracționară a lui x .

Există tabele cu valori ale lui $B(p, q)$ pentru $0 < p \leq 1$ și $0 < q \leq 1$.

Exemplul 1.3.1. *Exemplu de utilizare a proprietăților (B4) și (B5):*

$$\begin{aligned} B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) &= \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}+\frac{5}{2}-1} B\left(\frac{3}{2}-1, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{6} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{6} \frac{\frac{5}{2}-1}{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}-1\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\frac{3}{2}-1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}-1\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{1}{16} \pi. \end{aligned}$$

(B6) Dacă $m \in \mathbb{N}^*$ și $n \in \mathbb{N}^*$ atunci

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Această relație rezultă din utilizări succesive ale proprietăților (B4) și (B5). De exemplu:

$$B(5, 4) = \frac{4! \cdot 3!}{8!} = \frac{1}{280}.$$

(B7) Dacă $0 < p < 1$ atunci

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Omitem aici demonstrarea acestei proprietăți. Din (B7) se obține imediat (B2) luând $p = \frac{1}{2}$

$$B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi.$$

1.3.2 Integrala lui Euler de speța a doua. Funcția gama

Definiția 1.3.3. Se numește *integrala lui Euler de speța a doua* integrala

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx,$$

care este o integrală improprie (având limita superioară de integrare ∞) și în plus dacă $a < 1$ are punct critic și pe 0.

Observația 1.3.2. Integrala improprie $\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ este convergentă dacă $p > 0$ și este divergentă dacă $p \leq 0$.

Definiția 1.3.4. Funcția reală de o variabilă reală $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin relația

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

se numește *funcția lui Euler de speța a doua* sau *funcția gama*.

Proprietăți ale funcției Gama

($\Gamma 1$) $\Gamma(1) = 1$.

Într-adevăr, avem

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1.$$

($\Gamma 2$) Dacă $p > 1$, atunci

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1).$$

Într-adevăr, dacă integrăm prin părți punând $f(x) = x^{p-1}$ și $g'(x) = e^{-x}$, avem succesiv

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = x^{p-1} (-e^{-x}) \Big|_0^{\infty} - \\ &- \int_0^{\infty} (p-1)x^{p-2} (-e^{-x}) dx = - \frac{x^{p-1}}{e^x} \Big|_0^{\infty} + \\ &+ (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} dx = (p-1)\Gamma(p-1). \end{aligned}$$

Menționăm că ipoteza $p > 1$ este necesară pentru a exista $\Gamma(p-1)$.

Proprietatea $\Gamma 2$) permite micșorarea cu o unitate a argumentului funcției gama. Prin utilizări succesive ale acestei proprietăți, calculul lui $\Gamma(p)$ pentru $p > 1$ poate fi redus la calculul lui $\Gamma(\{p\})$.

Există tabele cu valori ale funcției gama pentru $0 < p \leq 1$.

(Γ3) Dacă $m \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

Proprietatea Γ3) sugerează faptul că funcția gama este o generalizare a factorialului.

Observația 1.3.3. Dacă în proprietatea B6) a funcției beta,

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!},$$

utilizăm în locul factorialului valori ale funcției gama date de proprietatea Γ3) obținem

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

(Γ4) Această relație dintre funcțiile beta și gama rămâne adevărată și pentru argumente reale, adică are loc proprietatea

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \forall p > 0 \text{ și } \forall q > 0$$

cunoscută sub denumirea de **relația lui Euler**.

(Γ5) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Într-adevăr, dacă în relația lui Euler luăm $a = b = \frac{1}{2}$, obținem

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Dar $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$, iar $\Gamma(1) = 1$, deci

$$\pi = \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2,$$

din care rezultă $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

1.3.3 Integrala Euler-Poisson

Definiția 1.3.5. Integrala improprie

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

se numește **integrala Euler-Poisson**.

Observația 1.3.4. Prin calcule elementare se găsesc următoarele rezultate

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

1.4 Exerciții și probleme rezolvate

Problema 1.4.1. Folosind definiția să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ în punctele precizate, pentru funcția de mai jos:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy, (2, 1)$$

$$\begin{aligned} \text{Rezolvare. } \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x, 1) - f(2, 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 1 + x) - (4 + 1 + 2)}{x - 2} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) &= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(2, y) - f(2, 1)}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(4 + y^2 + 2y) - (4 + 1 + 2)}{y - 1} = \\ \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + 2y - 3}{y - 1} &= \lim_{y \rightarrow 1} (y + 3) = 4 \end{aligned}$$

Problema 1.4.2. Să se calculeze derivatele parțiale de ordinul întâi pentru următoarele funcții:

a) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3axy$

b) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{y}{x}$

c) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

(D este domeniul maxim de definiție.)

Rezolvare. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x^2 + y^2 - 3axy)'_x = 2x - 3ay$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 + y^2 - 3axy)'_y = 2y - 3ax$

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)'_x = -\frac{y}{x^2}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right)'_x = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}}$

Problema 1.4.3. Pentru a recolta căpșunile de pe un teren cu suprafața de x_1 ha sunt necesare x_2 ore de muncă pe zi. După x_3 zile de muncă s-au recoltat y kg de căpșuni. Între aceste variabile există relația:

$$y = f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 x_2 x_3^3.$$

Să se determine productivitatea marginală raportată la suprafața terenului, la numărul de ore de muncă pe zi și respectiv la numărul de zile de muncă.

Rezolvare:

Productivitățile marginale (și în general costurile, beneficiile, câștigurile marginale) reprezintă de fapt derivatele parțiale de ordinul I ale funcției care ne dă productivitatea (respectiv costul, beneficiul, câștigul etc.)

În cazul problemei noastre vom avea:

$f_{x_1}'(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 x_2 x_3^3$, productivitatea marginală raportată la suprafața de teren,

$f_{x_2}'(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 x_3^3$, productivitatea marginală raportată la numărul orelor de muncă / zi,

$f_{x_3}'(x_1, x_2, x_3) = 15x_1^2 x_2 x_3^2$, productivitatea marginală raportată la numărul de zile de lucru.

Problema 1.4.4. Se consideră funcția de producție de tip Cobb-Douglas

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 x_2^3 \quad (x_1, x_2 \geq 0).$$

Să se determine ratele de schimbare parțiale și elasticitățile parțiale ale lui f .

Rezolvare:

Pentru o funcție $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se definesc:

$$\rho_f^{(x_k)}(x) = \frac{f'_{x_k}(x)}{f(x)} \quad - \text{rata de schimbare parțială a lui } f \text{ în raport cu } x_k,$$

respectiv

$$\varepsilon_f^{(x_k)}(x) = \frac{x_k f'_{x_k}(x)}{f(x)} \quad - \text{elasticitatea parțială a lui } f \text{ în raport cu } x_k.$$

(Semnificația economică a acestor mărimi va fi studiată la alte discipline.)

În cazul nostru:

$$\rho_f^{(x_1)}(x) = \frac{f'_{x_1}(x)}{f(x)} = \frac{(5x_1^2 x_2^3)'_{x_1}}{5x_1^2 x_2^3} = \frac{10x_1 x_2^3}{5x_1^2 x_2^3} = \frac{2}{x_1}$$

$$\rho_f^{(x_2)}(x) = \frac{f'_{x_2}(x)}{f(x)} = \frac{(5x_1^2 x_2^3)'_{x_2}}{5x_1^2 x_2^3} = \frac{15x_1^2 x_2^2}{5x_1^2 x_2^3} = \frac{3}{x_2}$$

sunt ratele de schimbare parțiale, iar

$$\varepsilon_f^{(x_1)}(x) = \frac{x_1 f'_{x_1}(x)}{f(x)} = \frac{x_1 \cdot 10x_1 x_2^3}{5x_1^2 x_2^3} = 2$$

$$\varepsilon_f^{(x_2)}(x) = \frac{x_2 f'_{x_2}(x)}{f(x)} = \frac{x_2 \cdot 15x_1^2 x_2^2}{5x_1^2 x_2^3} = 3$$

sunt elasticitățile parțiale ale lui f .

Se observă că aceste elasticități sunt egale cu exponenții variabilelor x_1 , respectiv x_2 din expresia funcției f . Aceasta nu este o coincidență, ci o proprietate a funcțiilor Cobb-Douglas. Astfel, pentru funcția Cobb-Douglas

$$y = f(x_1, x_2) = C x_1^\alpha x_2^\beta,$$

semnificațiile sunt următoarele:

x_1 - capitalul (poate fi notat cu K);

x_2 - forța de muncă (poate fi notată cu L);

y - producția;

C - factor rezidual;

α, β - elasticitățile lui y relativ la x_1 , respectiv x_2 .

Problema 1.4.5. Să se scrie diferențialele de ordinele unu, doi și trei pentru funcția $f(x, y) = \ln(xy)$ cu $xy > 0$

Rezolvare. Derivatele parțiale sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \frac{1}{x}, & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^2}, & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} &= \frac{2}{x^3}, & \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} &= 0, & \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} &= \frac{2}{y^3} \end{aligned}$$

$$\text{Diferențiala de ordinul întâi este:} \quad df_{(x, y)}(dx, dy) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = \frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy$$

Diferențiala de ordinul doi este:

$$d^2 f_{(x,y)}(dx, dy) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dy^2 = -\frac{1}{x^2} dx^2 - \frac{1}{y^2} dy^2$$

Diferențiala de ordinul trei va fi:

$$d^3 f_{(x,y)}(dx, dy) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(3)} f(x, y) = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3} dy^3 = \frac{2}{x^3} dx^3 + \frac{2}{y^3} dy^3$$

Problema 1.4.6. O fabrică produce două tipuri de bunuri. Costul producerii acestor bunuri este dat prin funcția $f(x, y)$, unde x și y reprezintă cantitățile produse din fiecare tip de produs. Să se minimizeze costul când

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 100.$$

Rezolvare. Pentru început determinăm punctele staționare.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 9y = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 9x = 0 \end{cases}$$

Soluțiile sistemului, adică $(0, 0)$ și $(3, 3)$, vor fi punctele staționare ale funcției f . Derivatele parțiale de ordinul doi vor fi

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = -9, \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6y$$

și deci diferențialele de ordinul doi calculate în punctele staționare vor fi

$$d^2 f_{(0,0)}(dx, dy) = -18 dx dy$$

$$\text{și } d^2 f_{(3,3)}(dx, dy) = 18 dx^2 - 18 dx dy + 18 dy^2$$

Matricea asociată primei diferențiale de ordinul doi este $A = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$

Folosind această matrice putem afirma că punctul staționar $(0, 0)$ nu este punct de extrem local.

Matricea asociată celei de-a doua diferențiale este

$$A = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}_{\frac{1}{2}L_1 + L_2 \rightarrow L_2} \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ 0 & \frac{27}{2} \end{pmatrix}_{\frac{1}{2}C_1 + C_2 \rightarrow C_2} \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & \frac{27}{2} \end{pmatrix} = D.$$

Din forma matricei D rezultă că forma pătratică asociată celei de-a doua diferențiale este pozitiv definită. Deci punctul staționar $(3, 3)$ este un punct de minim local. Valoarea minimă a costului este $f_{min} = f(3, 3) = 73$.

Problema 1.4.7. Fie datele numerice

$$\begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 1 & 2 & 11 \end{array}$$

Să se ajusteze aceste date numerice:

a) printr-un polinom de gradul întâi (o dreaptă)

b) printr-un polinom de gradul doi (o parabolă)

Rezolvare. a) Avem gradul polinomului $m = 1$, deci pentru scrierea sistemului normal trebuie calculate sumele s_0, s_1, s_2 și sumele t_0 și t_1 .

	x_i^0	x_i^1	x_i^2	$x_i^0 y_i$	$x_i^1 y_i$
	1	-1	1	2	-2
	1	0	0	1	0
	1	1	1	2	2
	1	2	4	11	22
\sum	4	2	6	16	22

Deci $s_0 = 4$, $s_1 = 2$, $s_2 = 6$, $t_0 = 16$ și $t_1 = 22$. Sistemul normal este:

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 = 16 \\ 2a_0 + 6a_1 = 22 \end{cases}$$

Soluția unică a acestui sistem este: $\bar{a}_0 = \frac{13}{5}$, $\bar{a}_1 = \frac{14}{5}$

Atunci polinomul de ajustare de grad cel mult unu este $P_1(x) = \frac{13}{5} + \frac{14}{5}x$, iar dreapta de ajustare este dreapta de ecuație $y = \frac{13}{5} + \frac{14}{5}x$.

b) Având $m = 2$, pentru scrierea sistemului normal vom calcula sumele $s_0 = 4$, $s_1 = 2$, $s_2 = 6$, $s_3 = 8$, $s_4 = 18$, $t_0 = 16$, $t_1 = 22$, $t_2 = 48$.

$$\text{Sistemul normal va fi: } \begin{cases} 4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 16 \\ 2a_0 + 6a_1 + 8a_2 = 22 \\ 6a_0 + 8a_1 + 18a_2 = 48 \end{cases}$$

ce admite soluția unică $\bar{a}_0 = \frac{1}{10}$, $\bar{a}_1 = \frac{3}{10}$, $\bar{a}_2 = \frac{25}{10}$. Polinomul de ajustare de grad cel mult 2 este $P_2(x) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}x + \frac{25}{10}x^2$ iar parabola de ajustare este parabola de ecuație: $y = 0, 1 + 0, 3x + 2, 5x^2$

Problema 1.4.8. Să se calculeze valorile funcțiilor lui Euler:

a) $\Gamma(6)$, b) $\Gamma(\frac{5}{2})$, c) $B(3, 5)$, d) $B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, e) $B(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$

Soluție:

a) $\Gamma(6) = 5! = 120$

b) $\Gamma(\frac{5}{2}) = (\frac{5}{2} - 1) \Gamma(\frac{5}{2} - 1) = \frac{3}{2} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} (\frac{3}{2} - 1) \Gamma(\frac{3}{2} - 1) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$

c) $B(3, 5) = \frac{(3-1)!(5-1)!}{(3+5-1)!} = \frac{2!4!}{7!} = \frac{48}{5040} = \frac{1}{105}$

d) $B(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1!} = \frac{\pi}{2}$

e) $B(\frac{1}{4}, \frac{7}{4}) = \frac{\frac{7}{4}-1}{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}-1} B(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{\frac{3}{4}}{1} B(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4} \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$

Problema 1.4.9. Folosind integralele euleriene să se calculeze integralele:

a) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, b) $\int_2^\infty x e^{2-x} dx$, c) $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx$.

Soluție:

a) Facem schimbarea de variabilă $\frac{x-a}{b-a} = t$, $dx = (b-a) dt$

Limitele de integrare: $\begin{cases} x = a, \Rightarrow t = 0 \\ x = b, \Rightarrow t = 1 \end{cases}$

Deci, $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int_0^1 \frac{(b-a)dt}{\sqrt{(b-a)t(b-a)(1-t)}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} =$

$\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$

b) Facem schimbarea de variabilă

$x - 2 = t \Rightarrow dx = dt$ Obținem astfel:

$$\int_2^\infty x e^{2-x} dx = \int_0^\infty (t+2) e^{-t} dt = \int_0^\infty t e^{-t} dt + 2 \int_0^\infty e^{-t} dt = \Gamma(2) + \Gamma(1) = 1! + 2 \cdot 1 = 3$$

c) Facem schimbarea de variabilă

$$x^2 = \frac{t}{1-t}, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1-t} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)^2} dt$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{\left(\frac{t}{1-t} \right)^{\frac{1}{3}}}{1 + \frac{t}{1-t}} \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1-t} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{6}+1+\frac{1}{2}-2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

1.5 Teme de control

1. Fie dreptele $-26x + 7y = -56$, $\frac{1}{4}x + 17y = -8$, $6x - 13y = 126$, $-5x - \frac{1}{2}y = 55$, $-13x + 19y = -39$. Găsiți pantele și interpretați rezultatele. Aflați punctele de intersecție cu axele de coordonate.

Răspuns. $m_1 = \frac{26}{7}$, $A\left(-\frac{28}{13}, 0\right)$, $B(0, -8)$, $m_2 = -\frac{1}{68}$, $A(-32, 0)$, $B\left(0, -\frac{8}{17}\right)$, $m_3 = \frac{6}{13}$, $A(21, 0)$, $B\left(0, -\frac{126}{13}\right)$, $m_4 = -\frac{5}{2}$, $A(-11, 0)$, $B(0, -110)$, $m_5 = \frac{13}{19}$, $A\left(\frac{39}{13}, 0\right)$, $B\left(0, -\frac{39}{13}\right)$

2. Scrieți ecuațiile dreptelor pentru care folosim formula "punct-pantă": $m=3$ și $(8, -5) \in \text{dr.}$, $m=1/2$ și $(-10, 12) \in \text{dr.}$, $m=-5$ și $(3, -11) \in \text{dr.}$, $m=4/9$ și $(0, -6) \in \text{dr.}$, $m=-2/3$ și $(0, 49) \in \text{dr.}$, $m=23.5$ și $(0, -70) \in \text{dr.}$

Răspuns. $y = 3x - 29$, $y = \frac{x}{2} + 17$, $y = -5x + 4$, $y = \frac{4}{3}x - 6$, $y = -\frac{2}{3}x + 49$, $y = 23.5x - 70$

3. Scrieți ecuațiile dreptelor care trec prin următoarele 2 puncte: $(-1, 10)$ și $(4, -5) \in \text{dr.}$, $(-6, -3)$ și $(9, 7) \in \text{dr.}$, $(4, -5)$ și $(10, -8) \in \text{dr.}$

Răspuns. $y = -3x + 7$, $y = \frac{2}{3}x + 1$, $y = -\frac{x}{2} - 3$

4. Determinați valoarea maximă și / sau minimă a funcțiilor:

a) Cost marginal $C_M(x) = 200 - 24x + x^2$

b) Cost total $C_T(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x + 22$

Răspuns. a) $C_{min} = C_M(12) = 56$, b) $C_{min} = C_T(7) = \frac{83}{6}$, $C_{max} = C_T(2) = \frac{104}{3}$

5. Fie funcția cerere în raport cu prețul unitar, iar a și b sunt parametri reali :

(a) $Q = \frac{a-p}{b}$

(b) $Q = \frac{a-\sqrt{p}}{b}$

- (c) $Q = a \cdot \ln \frac{b}{p}$
- (d) $Q = \frac{53 - p^2}{75}$
- (e) $Q = 8p^{-12} + 13$

Exprimați prețul în funcție de cerere și calculați valoarea marginală (derivata) acestuia.

Răspuns. $p' = -b$, $p' = -2ab + b^2Q$, $p' = -\frac{b}{a}e^{-Q/a}$, $p' = \frac{-75}{2\sqrt{53-75Q}}$, $p' = \frac{-\sqrt{(Q-13)^7}}{2^{18} \cdot 3\sqrt{2}}$

6. Fie funcția cerere exprimată în raport cu prețul unitar, iar a și b sunt parametri reali :

- (a) $Q = a + b \cdot p$
- (b) $Q = a \cdot e^p$
- (c) $Q = \frac{ap}{b+p}$
- (d) $Q = 6 + 8p + 3p^2$
- (e) $Q = 3 \cdot \frac{2+p}{3+p}$

Calculați valoarea marginală a funcției cerere precum și elasticitatea cererii în raport cu prețul.

Răspuns. $E_Q(p) = \frac{-pb}{a+pb}$, $E_Q(p) = -p$, $E_Q(p) = \frac{-b}{b+p}$, $E_Q(p) = \frac{-2p(4+3p)}{3p^2+8p+6}$, $E_Q(p) = \frac{-p}{(2+p)(3+p)}$

7. Fie funcția încasării totale $R(p) = p \cdot C(p)$ unde p este prețul unitar iar C cererea. Arătați că:

- a) dacă cererea este elastică atunci încasările totale sunt descrescătoare
- b) dacă cererea este inelastică atunci încasările totale sunt crescătoare

Răspuns. Indiciu: Exprimați derivata $R'(p)$ în funcție de elasticitate $E_c(p)$:

$$R'(p) = p \cdot C'(p) + C(p) = C(p) \left(1 + \frac{p \cdot C'(p)}{C(p)} \right) = C(p) (1 - E_c(p)).$$

Discuție după semnul lui $R'(p)$.

8. Fie funcția cerere în raport cu prețul $C(p) = 500 - 2p$.

- a) Determinați $E_C(5)$. Este cererea elastică sau inelastică în acest caz ?
- b) Unde cererea este elastică respectiv inelastică în raport cu prețul ?
- c) Care sunt intervalele de monotonie ale funcției încasării totale (vezi problema 4) și respectiv valoarea sa maximă ?

Răspuns.

- a) $E_C(5) < 1$ prin urmare cererea este inelastică în acest caz.

b) Pentru $p > 125$ avem cerere elastică, pentru $p < 125$ inelastică iar pentru $p = 125$ avem elasticitate unitară.

c) $R(p) = 500p - 2p^2$. Se calculează $R'(p)$ și respectiv $R''(p)$. Se obține $R_{max} = R(125) = 43750$.

9. Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi pentru funcțiile de mai jos, în punctele (1,1) și respectiv (1,1,1):

(a) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^3$ **Răspuns:** 10, 9

(b) $f(x, y) = 3x^4 - 5x^2y^3 - 4x^3y^2 - 3y^2 + 4x + 3y + 1$ **Răspuns:** -6, -26

(c) $f(p, q) = 4p^3q^2$ **Răspuns:** 12, 8

(d) $f(k, l) = 4\sqrt{k}l^3$ **Răspuns:** 2, 12

(e) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ **Răspuns:** 1/2, 1/2

(f) $f(p, q) = \frac{p^2 + q^2}{pq}$ **Răspuns:** 0, 0

(g) $f(x, y) = \sqrt{xy^3} + \frac{2}{x}$ **Răspuns:** -3/2, 3/2

(h) $f(s, t) = \frac{s+t}{3t} - \frac{2s+t^2}{\sqrt{s}}$ **Răspuns:** 5/6, -7/3

(i) $f(x, y) = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$ **Răspuns:** $\frac{1}{\sqrt{2}+2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

(j) $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 3yz + xz^2 + z^3$ **Răspuns:** 9, 1, 2

(k) $f(x, y, z) = x^y + y^z$ **Răspuns:** 1, 1, 0

(l) $f(p, q, r) = pqr$ **Răspuns:** 1, 1, 1

(m) $f(x, y, z) = 3x^3\sqrt{y^3z^2}$ **Răspuns:** 9, 9/2, 6

(n) $f(r, s, t) = \frac{r}{s} + \frac{s}{t} + \frac{t}{r}$ **Răspuns:** 0, 0, 0

10. Determinați productivitățile marginale pentru următoarele funcții de producție în punctul (1, 1, 2):

(a) $f(x, y, z) = 3x^2y^4z^3$

(b) $f(p, q, r) = 4p^2\sqrt{qr}$

(c) $f(x, y, z) = 2x + y - 5z$

Răspuns. a) 2, -4, -3; b) -2, -1/2, -1; c) 2/7, 1/7, -10/7

11. Calculați derivatele parțiale de ordinul 1, 2 și 3 pentru funcțiile de mai jos. Calculați de asemenea valorile lor în punctele precizate.

(a) $f(x, y) = 2x^2y^4$, $a = (-2, 2)$ **Răspuns:** (-128, 256), (64, 384, -256), (0, 384, 128, -384)

(b) $f(x, y) = 2\sqrt{xy}$, $a = (1, 1)$ **Răspuns:** (1, 1), (-1/2, -1/2, 1/2), (3/4, 3/4, -1/4, -1/4)

(c) $f(x, y) = 3x^5 - 2xy^2 + y^3$, $a = (2, 1)$ **Răspuns:** (238, -5), (480, -2, -4), (720, 6, 0, -4)

- (d) $f(x, y) = x^3y + xy^3$, $a = (-1, 1)$ **Răspuns:** (4,-4), (-6,-6,3), (6,-6,-6,6)
- (e) $f(x, y) = \frac{2x}{y} - \frac{y}{\sqrt{x}}$, $a = (1, 1)$ **Răspuns:** (5/2,-3), (-1/2,4,-3/2), (5/4,-12,-1/2,4)
- (f) $f(x, y) = y \ln x$, $a = (e, 1)$ **Răspuns:** (1/e, 1), (-1/e², 0, 1/e), (2/e³, 0, -1/e², 0)
- (g) $f(x, y, z) = 3x^2y + 5xyz^2 - 2y^3z^2$, $a = (1, 1, 2)$ **Răspuns:** (26,-1), (6,-48,26), (0,-48,0,6,0,0,-48,10,-38)
- (h) $f(x, y, z) = y \cdot e^x + z^2 \cdot e^y$, $a = (1, 1, 1)$ **Răspuns:** (e,2e,2e), (e,e,2e), (e,e,0,e,0,0,2e,0,2e)

12. Calculați derivatele parțiale specificate pentru funcțiile de mai jos:

- (a) $f(x, y) = xy^3e^y$, $f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ **Răspuns:** $3xy(y^2 + 4y + 2)e^x$
- (b) $f(p, q) = 3p^3q^2$, $f''_{p^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$ **Răspuns:** $18pq^2$
- (c) $f(k, l) = 5\sqrt{k}l^3$, $f''_{kl} = \frac{\partial^2 f}{\partial k \partial l}$ **Răspuns:** $15l^2/2\sqrt{k}$
- (d) $f(s, t) = \frac{2s-t}{s+2t}$, $f'''_{s^2t} = \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial t}$ **Răspuns:** $-30s/(s+2t)^2$
- (e) $f(p, q) = \frac{p^2+q^2}{pq}$, $f''_{qp} = \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p}$ **Răspuns:** $(p^2 + 2pq - q^2)/p^2q^2$
- (f) $f(x, y, z) = 2x + y - 5z$, $f'''_{z^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}$ **Răspuns:** 0
- (g) $f(r, s, t) = \ln\left(\frac{r}{s}\right) + \ln\left(\frac{s}{t}\right) + \ln\left(\frac{t}{r}\right)$, $f'''_{rst} = \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial s \partial t}$ **Răspuns:** 0

13. Scrieți expresiile diferențialelor de ordinul întâi și doi pentru următoarele funcții. Calculați de asemenea expresiile diferențialelor găsite în punctele indicate.

- (a) $f(x, y) = x^2 \ln y$, $a = (2, 5)$, $h = (3, 4)$
- (b) $f(x, y) = x^2y + xe^y$, $a = (-1, -2)$, $h = (1, 1)$
- (c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^3}}{x-y}$, $a = (1, 2)$, $h = (2, 3)$
- (d) $f(x, y, z) = 7x^3y^2z^5$, $a = (3, 2, 1)$, $h = (5, 3, 1)$
- (e) $f(x, y, z) = \ln(x^2y^3 - z^2x)$, $a = (2, 2, 2)$, $h = (1, 1, 1)$

Răspuns:

- (a) $df_{(2,5)}(3, 4) = 12 \ln 5 + \frac{16}{5}$, $d^2f_{(2,5)}(3, 4) = 18 \ln 5 + \frac{416}{25}$
- (b) $df_{(-1,-2)}(1, 1) = 5$, $d^2f_{(-1,-2)}(1, 1) = \frac{1}{e^2} - 8$
- (c) $df_{(1,2)}(2, 3) = -\frac{11}{3}$, $d^2f_{(1,2)}(2, 3) = \frac{177}{6}$
- (d) $df_{(3,2,1)}(5, 3, 1) = 9828$, $d^2f_{(3,2,1)}(5, 3, 1) = 114282$

- (e) $df_{(2,2,2)}(1,1,1) = \frac{77}{30}$, $d^2f_{(2,2,2)}(1,1,1) = -\frac{167}{100}$
14. O fabrică produce două tipuri de bunuri. Costul producerii acestor bunuri este dat prin funcția $f(x, y)$, unde x și y reprezintă cantitățile produse din fiecare tip de produs. Să se minimizeze costul atunci când $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 10$.
- Răspuns:** $f_{min} = f(1, 1) = 9$
15. O fabrică produce trei tipuri de bunuri în cantitățile x , y și z . Să se calculeze pentru ce valori ale acestor cantități, se obține profitul maxim, dacă profitul este dat prin următoarea funcție $f(x, y, z) = xyz^2(14 - x - 2y - 3z)$, $xyz \neq 0$.
- Răspuns:** $f_{max} = f(2, 2, 2) = 128$ Indiciu: desfaceți parantezele, derivați iar apoi în expresia derivatelor parțiale dați din nou factor comun și după egalarea cu 0, simplificați.
16. Găsiți extremele funcțiilor de mai jos:
- (a) $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x + 8y + 6$ **Răspuns:** $f_{min} = f(7, -5) = -7$
- (b) $f(x, y) = -3x^2 + 4xy - 4y^2 + 4x - 4y - 5$ **Răspuns:** $f_{max} = f(1/2, -1/4) = -7/2$
- (c) $f(x, y) = x^3y^2(36 - x - y)$, $xy \neq 0$ **Răspuns:** $f_{max} = f(18, 12) = 5.038.848$
- (d) $f(x, y) = xy + \frac{64}{x} - \frac{8}{y}$ $x, y \neq 0$ **Răspuns:** $f_{max} = f(-2, 1) = -42$
- (e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ **Răspuns:** $f_{min} = f(-1, -2, 3) = -14$
17. O bancă oferă persoanelor fizice credite în valoare de 5000 u.m., 10000 u.m. și respectiv 50000 u.m. Pentru C_1 credite de 5000 u.m. contractate, banca obține un beneficiu de $200 - 3C_1$ u.m./credit. Pentru C_2 credite de 10000 u.m. contractate, beneficiul băncii este $500 - 7C_2$ u.m./credit. Contractarea unui număr de C_3 credite de 50000 u.m. aduce băncii un beneficiu de $560 - 4C_3$ u.m./credit. În cazul rambursărilor anticipate a creditelor contractate, pentru C credite lichidate înainte de termenul scadent, pierderile băncii sunt estimate la $450 + 80C$ u.m. Care ar fi numărul optim de credite contractate, de fiecare tip, astfel ca beneficiul băncii să fie maxim și care ar fi acest beneficiu ?
- Răspuns:** $f_{max} = f(20, 30, 60) = 21.450$ u.m.
- Indiciu: Beneficiul total = Diferența între beneficiile pe fiecare tip de credit în parte și pierderile aferente

$$f(c_1, c_2, c_3) = c_1(200 - 3c_1) + c_2(500 - 7c_2) + c_3(560 - 4c_3) - 450 - 80(c_1 + c_2 + c_3)$$

Importuri (u.m.)	$I(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 237$
Exporturi (u.m.)	$E(y, z) = 2y^3 + 2z^3 - 15y^2 - 21z^2 + 24y + 72z + 365$

Să se determine cantitățile din cele trei tipuri de produse pentru care, la sfârșitul anului, balanța comercială are valoarea maximă și să se precizeze această valoare.

Răspuns: $f_{max} = f(2, 1, 3) = 248$ u.m.

Indiciu: Balanța comercială = Valoarea exporturilor - valoarea importurilor

19. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcțiile de mai jos:

- (a) $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + y = 2$
- (b) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + 2y = 3$
- (c) $f(x, y) = x + 2y$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x^2 - y^2 = -3$
- (d) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $xyz = 1$, știind că $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$
- (e) $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- (f) $f(x, y, z) = xyz$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $xy + yz + zx = 12$.

Răspuns:

- (a) $f_{max} = f(1, 1) = 1$
- (b) $f_{min} = f(1, 1) = -2$
- (c) $f_{max} = f(1, -2) = -3$, $f_{min} = f(-1, 2) = 3$
- (d) $f_{min} = f(1, 1, 1) = 3$
- (e) $f_{max} = f(2, 1, -2) = 9$, $(-2, -1, 2)$ nu e extrem
- (f) $f_{min} = f(-2, -2, -2) = -8$

20. Interiorul unei săli de cinema urmează să fie izolat fonic. În planul de izolare al sălii se urmărește folosirea unei cantități minime de material izolant, podeaua sălii fiind exclusă izolării fonice. Să se determine dimensiunile sălii de cinema dacă volumul ei este de 4000 m³.

Răspuns: $C_{min} = f(20, 20, 10) = 12.000$ u.m.

Indiciu: $f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$ cu legătura $xyz = 4000$.

21. O întreprindere produce o cantitate Q de produse utilizând capitalul K și forța de muncă L . Funcția de producție este

$$Q = F(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}}.$$

Prețul unității de capital este 500 lei, iar prețul unității de forță de muncă este 400 lei. Se cere să se determine acele valori ale lui K și L care minimizează cheltuielile știind că disponibilul pentru producție este de 5.000 bucăți.

Răspuns: $C_{min} = f(10^5, 5^4 \cdot 10^2) = 75.000.000$ u.m.

Indiciu: $f(K, L) = 500K + 400L$ cu legătura $K^{1/2} L^{1/4} = 5000$.

22. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcția $f(x, y, z) = x + y + z$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, cu legătura $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Răspuns: $f_{min} = f(3, 3, 3) = 9$ u.m.

23. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcția $f(x, y, z) = x + y + z$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legăturile $x - y + z = 2$ și $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Răspuns: $f_{max} = f(4/3, 2/3, 4/3) = 10/3$, $f_{min} = f(0, -2, 0) = -2$

24. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcția $f(x, y, z) = xyz$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legăturile $x + y + z = 5$ și $xy + yz + zx = 8$.

Răspuns: $f_{max} = f(4/3, 4/3, 7/3) = f(7/3, 4/3, 4/3) = f(4/3, 7/3, 4/3) = 112/27$, $f_{min} = f(2, 2, 1) = f(2, 1, 2) = f(1, 2, 2) = 4$

25. Media temperaturilor înregistrate în luniile aprilie, mai și iunie a fost de 15° , 20° și respectiv 23° . Care va fi prognoza pentru luna august având în vedere că cercetătorii au observat o creștere liniară (ajustare printr-o dreaptă) a temperaturii până la începutul lunii septembrie.

Răspuns: $y = -2/3 + 4x$, $y = f(8) = 31, 3^\circ$

Indiciu: Pentru simplificarea calculelor setăm *aprilie* := 4. Atunci *mai* := 5 și *iunie* := 6.

26. O companie producătoare de ciocolată a determinat date referitoare la cota de piață și respectiv prețul de vânzare pe kilogram al ciocolatei timp de patru luni consecutive. S-au obținut astfel următoarele rezultate:

Preț pe kg (euro)	4,5	5,2	4,7	4,9
Cota de piață	10	8	8,9	9,1

Să se ajusteze aceste date numerice printr-o dreaptă. Presupunând că în luna a 5-a prețul pe kg este $x = 2$ să se găsească cota de piață y . **Răspuns:** $y = 21, 25 - 2, 54x$, $y = f(2) = 16, 17$

27. În urma unui studiu privind cererea unor produse de primă necesitate, s-au obținut următoarele date pentru venitul x al unei persoane și cererea y a produselor respective:

Venit (mii Dolari)	1	2	4	8
Cerere (mii Dolari)	0,4	1	1,6	2

Să se ajusteze aceste date printr-o dreaptă. **Răspuns:** $y = 0, 46 + 0, 21x$

28. Profitul înregistrat de către o firmă în anul 2004 este de 5,1 milioane euro, în anul 2007 este de 8,3 milioane euro, iar în anul 2009 este de 2,3 milioane euro. Să se ajusteze aceste valori printr-o dreaptă, respectiv printr-o parabolă și să se calculeze previziunea profitului pentru anul 2012 și 2013 (în ambele cazuri).

Răspuns: $y = 5, 52 - 0, 43x$, $f(6) = 1, 43$, $f(7) = 0, 76$; $y = 8, 86 + 0, 25x - 0, 81x^2$, $f(6) = -18, 8$, $f(7) = -29, 08$. Indiciu: Pentru simplificarea calculelor setăm 2006 := 0. Atunci 2004 := -2, 2009 := 3, 2012 := 6 și 2013 := 7.

29. Numărul calculatoarelor vândute lunar de către o firmă este dat în tabelul de mai jos.

luna	ianuarie	martie	aprilie
nr.calc.	30	45	50

Să se ajusteze printr-o dreaptă, respectiv printr-o parabolă, datele de mai sus și să se preconizeze numărul de calculatoare ce urmează a fi vândute în luna septembrie și decembrie (pentru fiecare caz în parte).

Răspuns: $y = 24, 1 + 6, 7x, f(9) \approx 84, f(12) \approx 105; y = 20 + 10, 83x - 0, 83x^2, f(9) \approx 50, f(12) \approx 30$

30. Se consideră următoarele date numerice:

x	1	3	4	5	6
y	1	9	19	33	51

Să se ajusteze datele numerice printr-o dreaptă, respectiv o parabolă, iar apoi să se găsească valoarea lui y din punctul $x = 8$.

Răspuns: $y = -14, 75 + 9, 83x, f(8) = 63, 89; y = 3 - 4x + 2x^2, f(8) = 99$

31. Să se calculeze valorile funcțiilor gama și beta de mai jos:

a) $\Gamma(7)$; b) $\Gamma(\log_2 32)$; c) $B(1, 1)$; d) $B(3, 6)$;

e) $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$; f) $B\left(\frac{1}{6}, \frac{11}{6}\right)$; g) $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$; h) $B\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$;

i) $B\left(B\left(2, \frac{1}{2}\right), 2\right)$; j) $B\left(\frac{n+1}{n}, \frac{n-1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$;

Răspuns: $720, 24, 1, \frac{1}{168}, \pi\sqrt{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{20\sqrt{2}-24}{7}, \frac{96}{\pi(2+\pi)(4+\pi)(6+\pi)}, \frac{9}{28}, \frac{\pi}{n \cdot \sin \frac{\pi}{n}}$

32. Folosind proprietățile funcțiilor gama și beta, calculați:

a) $B\left(4, \frac{1}{6}\right) + 3\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$; b) $B\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}\right) + 2\Gamma(3) - \Gamma(4)$

Răspuns: $\frac{7776}{1729} + \frac{45\sqrt{\pi}}{8}, \frac{77\sqrt{2}\pi-256}{128}$

33. Folosind proprietățile integralelor euleriene, să se calculeze următoarele integrale:

1) $\int_0^1 \sqrt{x}(x-1)^2 dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$; 3) $\int_0^1 \frac{(x-1)^3}{\sqrt[4]{x}} dx$; 4) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}} dx$;

5) $\int_0^1 \frac{1+2x+3x^2}{\sqrt{1-x}} dx$; 6) $\int_0^1 (x+1)^2 \sqrt[3]{1-x} dx$; 7) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[99]{x-1}}$;

8) $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{x-1}}{x-1} dx$; 9) $\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt{x} dx$; 10) $\int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$;

11) $\int_0^1 x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^4 dx$; 12) $\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x}(x+1) dx$; 13) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)^3}{\sqrt[3]{4x}} dx$;

$$\begin{aligned}
& 14) \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx; \quad 15) \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{x-3x^2} dx; \quad 16) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2} dx; \\
& 17) \int_0^3 x \sqrt{\frac{x}{3-x}} dx; \quad 18) \int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}} dx; \quad 19) \int_{-2}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt[3]{e^{x+2}}} dx; \\
& 20) \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt[4]{x-1}} dx; \quad 21) \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x} dx; \quad 22) \int_0^{\infty} \frac{x^2+x+1}{e^x} dx; \quad 23) \int_0^{\infty} x e^{-\sqrt{2}x} dx; \\
& 24) \int_0^{\infty} (x+1)^2 e^{-x} dx; \quad 25) \int_0^{\infty} (x^3+1) e^{-2x+1} dx; \quad 26) \int_0^{\infty} \frac{x e^{x-1}}{e^{3x}} dx; \\
& 27) \int_0^{\infty} x^2 e^{-3x^2} dx; \quad 28) \int_0^{\infty} \frac{x-1}{2e^x} dx; \quad 29) \int_0^{\infty} \frac{e^x+1}{e^{2x}} dx; \quad 30) \int_0^{\infty} \frac{e^x-x}{e^{3x}} dx; \\
& 31) \int_0^{\infty} \frac{e^{2x}(x+1)}{e^{3x+2}} dx; \quad 32) \int_0^{\infty} x^3 e^{-3x+1} dx; \quad 33) \int_0^{\infty} x e^{-(x+3)} dx; \quad 34) \int_{-3}^{\infty} x e^{-(x+3)} dx; \quad 35) \int_1^{\infty} x^2 e^{-\frac{x-1}{4}} dx.
\end{aligned}$$

Răspuns: (1) $\frac{16}{105}$, (2) $-\frac{4}{3}$, (3) $\frac{512}{1155}$, (4) $\frac{8}{5}(x = \sqrt{t})$, (5) $\frac{118}{15}$, (6) $\frac{111}{70}$, (7) $-\frac{99}{98}$, (8) 1, (9) $-\frac{4}{3}(\frac{1}{x} = t)$, (10) $\frac{5\pi}{16}$, (11) $\frac{1}{315}(\sqrt{x} = t)$, (12) $-\frac{9}{28}(x+1 = t)$, (13) $-\frac{3^5}{880\sqrt{32}}(2x = t)$, (14) $-\frac{1}{3}(2x+1 = t)$, (15) $\frac{\sqrt{3}}{72}(3x = t)$, (16) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}(1/x = t)$, (17) $\frac{27\pi}{8}(3-x = t)$, (18) $-\frac{9}{10}(x+1 = t)$, (19) $6(\frac{x+2}{3} = t)$, (20) $-\frac{16}{21}(x-1 = t)$, (21) 6, (22) 4, (23) $1/2(\sqrt{2}x = t)$, (24) 5, (25) $\frac{7e}{8}(2x = t)$, (26) $\frac{1}{4e}(2x = t)$, (27) $\frac{\sqrt{3}\pi}{36}(3x^2 = t)$, (28) 0, (29) $\frac{3}{2}$, (30) $\frac{7}{18}$, (31) $\frac{2}{e^2}$, (32) $\frac{2e}{27}(3x = t)$, (33) $\frac{1}{e^3}$, (34) $-2(x+3 = t)$, (35) $164(\frac{x-1}{4} = t)$

Rezumat

În acest modul s-au prezentat definiții și concepte de bază legate de funcțiile reale de mai multe variabile reale cum sunt: elemente de topologie ale spațiului \mathbb{R}^n , limite de funcții și continuitatea lor de la \mathbb{R}^n la \mathbb{R} , derivate parțiale și diferențiale. Au fost prezentate noțiunile de derivate parțiale și derivate de ordin superior, extremele funcțiilor de mai multe variabile (condiții necesare și suficiente pentru existența extremelor locale). De asemenea s-au prezentat și noțiuni legate de ajustarea prin metoda celor mai mici pătrate a datelor experimentale. În final au fost introduse și studiate noțiunile privind integralele Euler de speta întâi (funcția beta), de speta a doua (funcția gama), proprietățile acestora, precum și integrala Euler-Poisson.

Bibliografie

1. Colectiv, Elemente de algebra liniară, analiza matematică și teoria probabilităților, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2009
2. Colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj-Napoca, 2012.

Capitolul 2

MODULUL II. Teoria probabilitatilor

Obiective

- Definirea si studiul principalelor proprietati ale conceptelor de baza din teoria probabilitatilor.
Crearea la studenti a unor deprinderi de utilizare a tehnicilor probabilistice si de folosire a acestora in scop aplicativ.
Fundamentarea probabilistica a statisticii matematice.

Concepte de baza

- Eveniment aleator, probabilitate, probabilitate conditionata, scheme clasice de probabilitate.
- Variabila aleatoare, functie de probabilitate a unei variabile aleatoare discrete, functie de repartitie a unei variabile aleatoare, densitate de probabilitate, functia de repartitie a unei variabile aleatoare de tip continuu.
- Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare (media, dispersia, momente, corelatia)
- Repartitii clasice.

Rezultate asteptate

Se urmareste buna intelegere de catre studenti a tehnicilor de abordare probabilistica a fenomenelor aleatoare, utilizarea adecvata a schemelor probabilistice care modeleaza astfel de fenomene, intelegerea conceptului de variabila aleatoare, precum si formarea deprinderilor de calcul ale caracteristicilor numerice pentru variabilelor aleatoare. Se doreste ca studentii sa inteleaga foarte bine semnificatia caracteristicilor pe care le calculeaza si, de asemenea sa inteleaga motivele aplicarii teoriei probabilitatilor in statistica matematica.

UNITATEA 1. Câmp de evenimente. Câmp de probabilitate. Scheme clasice de probabilitate.

2.1 Câmp de evenimente, câmp de probabilitate

2.1.1 Corp de părți ale unei mulțimi

Definiția 2.1.1. Se numește **corp de părți** ale mulțimii nevide Ω orice familie nevidă $\mathbb{K} \subset \mathbb{P}(\Omega)$ unde $\mathbb{P}(\Omega)$ este mulțimea părților lui Ω , astfel încât

a) $\forall A \in \mathbb{K} \implies C_A \in \mathbb{K}$ unde $C_A = \Omega \setminus A$;

b) $\forall A, B \in \mathbb{K} \implies A \cup B \in \mathbb{K}$.

Propoziția 2.1.1. Fie \mathbb{K} un corp de părți ale mulțimii nevide Ω . Atunci:

1) $\phi, \Omega \in \mathbb{K}$;

2) $\forall A, B \in \mathbb{K} \implies A \cap B \in \mathbb{K}$;

3) $\forall A, B \in \mathbb{K} \implies A - B \in \mathbb{K}$.

Demonstrație.

1) \mathbb{K} nevidă $\implies (\forall A \in \mathbb{K} \implies C_A \in \mathbb{K}) \implies A \cap C_A \in \mathbb{K} \implies \Omega \in \mathbb{K} \implies C_\Omega \in \mathbb{K} \implies \phi \in \mathbb{K}$. Deci $\phi, \Omega \in \mathbb{K}$.

2) $\forall A, B \in \mathbb{K} \implies C_A, C_B \in \mathbb{K} \implies C_A \cup C_B \in \mathbb{K} \xrightarrow{\text{De Morgan}} C_{A \cap B} \in \mathbb{K} \implies C(C_{A \cap B}) \in \mathbb{K} \implies A \cap B \in \mathbb{K}$.

3) $\forall A, B \in \mathbb{K} \implies A, C_B \in \mathbb{K} \implies A \cap C_B \in \mathbb{K} \implies A - B \in \mathbb{K}$.

□

Observația 2.1.1. Prin definiție, un corp de părți \mathbb{K} este închis față de trecerea la complementară și față de reuniune. Definiția corpului de părți garantează și închiderea sa față de reuniunea sau diferența de mulțimi.

Prin inducție matematică rezultă că un corp de părți este închis și față de reuniunea sau intersecția finită oarecare de mulțimi adică pentru orice $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$, ($n \geq 3$) avem și $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathbb{K}$ respectiv $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathbb{K}$.

De asemenea, un corp de părți conține în mod necesar submulțimile improprii ϕ și Ω .

Exemplul 2.1.1. 1) Dacă $\Omega \neq \phi$ atunci $\mathbb{K} = \mathbb{P}(\Omega)$ este un exemplu (banal) de corp de părți ale lui Ω .

2) Fie $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Atunci

$$\mathbb{K} = \{\phi, \Omega, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$$

este un corp de părți ale lui Ω .

2.1.2 Câmp de evenimente

Vom înțelege prin **experiment aleator** orice experiment al cărui rezultate, considerate din punct de vedere al unui anumit criteriu, nu sunt cunoscute înainte de efectuarea experimentului (repetând un astfel de eveniment, în condiții identice, se pot obține rezultate diferite, nu se poate preciza rezultatul ci se poate face doar o listă cu rezultatele posibile). Orice rezultat posibil în urma unui experiment aleator se numește **eveniment aleator**. Evenimentele care nu se pot realiza drept consecință a realizării altora se numesc **evenimente elementare**. Considerăm, de exemplu, experimentul aruncării unui zar (obișnuit, nemăsluit) și evaluăm rezultatul din punct de vedere al apariției (non-apariției) vreunora dintre fețele de la 1 la 6. Folosim notații de tipul ce urmează:

$A = \{1\}$ – apariția feței 1.

$B = \{1, 4\}$ – apariția vreuneia dintre fețele 1 sau 4.

$C = \{2, 5, 6\}$ – apariția vreuneia dintre fețele 2, 5 sau 6, etc.

A este eveniment elementar (analog $\{2\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{6\}$) dar B nu este elementar (B se poate realiza ca și consecință a realizării lui A). Vom reveni ulterior, cu mai multă rigoare, asupra conceptului de experiment elementar.

Notăm cu Ω mulțimea tuturor evenimentelor elementare generate de un experiment aleator. În continuare ne este comod să tratăm această mulțime ca o mulțime de puncte pentru care submulțimile reduse la un punct corespund evenimentelor elementare. Ω se mai numește și **mulțime fundamentală (de referință)** sau **spațiu de selecție**. Orice alt eveniment poate fi asimilat cu o submulțime a spațiului Ω (în exemplul de mai sus avem $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $A, B, C \subset \Omega$). În particular, Ω corespunde evenimentului constând în realizarea a cel puțin unuia dintre evenimentele elementare posibile ceea ce se întâmplă la orice efectuare a evenimentului și de aceea acest eveniment se numește **eveniment cert** sau **sigur**. Un alt eveniment particular este cel care corespunde mulțimii vide ϕ și care revine la nerealizarea nici unui eveniment elementar posibil, ceea ce este imposibil la orice efectuare a experimentului și din acest motiv acest eveniment se numește **eveniment imposibil**. Vom păstra pentru evenimentul sigur și evenimentul imposibil aceleași notații Ω și respectiv ϕ ca și pentru submulțimile lui Ω cărora le corespund.

Fie \mathcal{E} mulțimea tuturor evenimentelor aleatoare generate de un experiment aleator.

Definiția 2.1.2. Fie $A, B \in \mathcal{E}$. Se numește **intersecție a evenimentelor** A și B , notată $A \cap B$, evenimentul care se realizează dacă și numai dacă se realizează atât A cât și B . Se numește **reuniune a evenimentelor** A și B , notată $A \cup B$, evenimentul care se realizează dacă și numai dacă se realizează cel puțin unul dintre evenimentele A și B . Se numește **diferență a evenimentelor** A și B , notată $A \setminus B$, evenimentul care se realizează atunci când se realizează A dar nu și B (adică $A \setminus B = A \cap C_B$). Se numește **eveniment complementar** evenimentului A , notat C_A , evenimentul care se realizează dacă și numai dacă nu se realizează A (evenimentul complementar lui A se mai numește și **eveniment contrar** lui A și se mai notează \bar{A} sau $\text{non}A$).

Observația 2.1.2. 1) Pe \mathcal{E} s-au evidențiat legile interne de compoziție (binare):

$$\cup, \cap, \setminus : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},$$

$$(A, B) \mapsto A \cup B, (A, B) \mapsto A \cap B, (A, B) \mapsto A \setminus B$$

și legea de compoziție internă (unară) $C : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}, A \mapsto C_A$.

2) Cum $A \setminus B = A \cap C_B, \forall A, B \in \mathcal{E}$ vom urmări în continuare doar proprietăți ale legilor \cup, \cap, C (proprietățile legii „ \setminus ” rezultă din proprietățile legilor „ \cap ” și „ C ”).

Din definițiile de mai sus se obțin rezultatele din următoarea propoziție.

Propoziția 2.1.2. Pentru orice $A, B, C \in \mathcal{E}$ au loc proprietățile:

a) *asociativitate*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

b) *comutativitate*: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

c) *distributivitate*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

d) *idempotență*: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.

e) $A \cap C_A = \phi$, $A \cup C_A = \Omega$, $A \cap \Omega = A$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \phi = \phi$, $A \cup \phi = A$.

Definiția 2.1.3. Fie $A, B \in \mathcal{E}$. Se spune că **evenimentul A implică evenimentul B** (sau că B este **implicat de A**) și se scrie $A \subset B$ (respectiv $B \supset A$) dacă realizarea lui A antrenează neapărat și realizarea lui B .

Observația 2.1.3. 1) Relația de implicație se poate defini și cu ajutorul „ \cup ” sau „ \cap ”. Mai precis, pentru $A, B \in \mathcal{E}$ avem $A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$.

Cum $A \cap \phi = \phi$ și $A \cap \Omega = A$ rezultă că $\phi \subset A$ și $A \subset \Omega$ adică avem $\phi \subset A \subset \Omega$, $\forall A \in \mathcal{E}$.

2) Relația de implicație este o relație de ordine parțială pe \mathcal{E} (adică este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă). Într-adevăr avem:

a) $\forall A \in \mathcal{E} \implies A \subset A$. (reflexivitate)

b) $A, B \in \mathcal{E}$, $A \subset B$ și $B \subset A \implies A = B$. (antisimetrie)

c) $A, B \in \mathcal{E}$, $A \subset B$ și $B \subset C \implies A \subset C$.

3) Se poate arăta că dacă $A, B \in \mathcal{E}$, $A \cup B = \Omega$ și $A \cap B = \phi$ atunci $A = C_B$ sau, echivalent, $B = C_A$.

În particular, cum $A \cap C_A = \phi$ și $A \cup C_A = \Omega$ avem $C(C_A) = A$ și de asemenea din $\phi \cup \Omega = \Omega$, $\phi \cap \Omega = \phi$ rezultă că $\phi = C_\Omega$ și $\Omega = C_\phi$.

Utilizând această observație se poate demonstra propoziția de mai jos (pe care o admitem fără demonstrație).

Propoziția 2.1.3. (relațiile lui De Morgan)

Pentru orice $A, B \in \mathcal{E}$ avem $C_{A \cup B} = C_A \cap C_B$ și $C_{A \cap B} = C_A \cup C_B$.

Definiția 2.1.4. Se spune că evenimentele $A, B \in \mathcal{E}$ sunt **incompatibile** dacă ele nu se pot realiza simultan, adică $A \cap B = \phi$.

Definiția 2.1.5. Se spune că evenimentul $A \in \mathcal{E}$ este **eveniment elementar** dacă $\forall B \in \mathcal{E}$, $B \subset A$ rezultă că $B = \phi$ sau $B = A$ (adică A nu poate fi implicat decât de către evenimentul imposibil sau de către el însuși).

Observația 2.1.4. 1. Mai sus am constatat că evenimentele aleatoare generate de un experiment aleator pot fi concepute ca fiind submulțimi ale unei mulțimi de referință Ω adică \mathcal{E} se poate asimila cu o familie de submulțimi ale lui Ω închisă față de operațiile cu mulțimi și care nu este neapărat $P(\Omega)$. Motivele pentru care nu orice submulțime a lui Ω este eveniment depășesc cadrul acestui curs fiind deci omise. Se poate arăta însă că \mathcal{E} se poate asimila cu un corp de părți (Ω, \mathbb{K}) , pentru care elementele din \mathbb{K} corespund bijectiv cu elementele din \mathcal{E} (în particular mulțimea ϕ din \mathbb{K} corespunde evenimentului imposibil din \mathcal{E} mulțimea de referință Ω din \mathbb{K} corespunde evenimentului sigur din \mathcal{E}), reuniunea a două mulțimi din \mathbb{K} corespunde reuniunii (în sensul din \mathcal{E}) a evenimentelor din \mathcal{E} corespunzătoare celor două mulțimi, etc.

2. În cele de mai sus am presupus implicit că Ω este o mulțime finită. Să considerăm acum, din nou, experimentul aruncării zarului și urmărim evenimentul A constând în faptul că fața 5 (de exemplu) să apară pentru prima dată la o aruncare de ordin par (după un număr impar de neapariții).

Notând cu A_k evenimentul ca fața 5 să apară pentru prima dată la a k -a aruncare ($k \in \mathbb{N}^*$) avem

$$A = A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \dots \cup A_{2k} \cup \dots \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2k}$$
 și suntem conduși la a considera o infinitate numărabilă (un șir) de evenimente elementare $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ unde $\{w_n\} = A_n, n \in \mathbb{N}^*$ și la a cere ca \mathcal{E} să fie închisă și față de reuniunea numărabilă (nu numai finită) de evenimente. În fapt, se poate arăta riguros, în astfel de cazuri \mathcal{E} se poate asimila cu un σ -corp de părți (Ω, \mathbb{K}) .

Din această observație ca și din cea precedentă rezultă că putem opera cu evenimentele utilizând limbajul teoriei mulțimilor și de aceea, în continuare, structurile de evenimente se definesc (din punct de vedere formal) direct ca structuri de mulțimi. Se justifică astfel definiția care urmează.

Definiția 2.1.6. Se numește **câmp de evenimente** orice corp de părți (Ω, \mathbb{K}) al unei mulțimi nevide Ω . Se numește **σ -câmp de evenimente** orice σ -corp de părți (Ω, \mathbb{K}) al unei mulțimi nevide Ω .

Observația 2.1.5. Intr-un σ -câmp de evenimente, relațiile lui De Morgan se pot generaliza pentru șiruri de evenimente adică avem:

$$C\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{A_n} \text{ și } C\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{A_n}.$$

2.1.3 Câmp de probabilitate

Definiția 2.1.7. (definiția axiomatică a probabilității)

Fie (Ω, \mathbb{K}) un câmp de evenimente. Se numește **probabilitate** pe \mathbb{K} orice aplicație $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

P1) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathbb{K}$;

P2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B), \forall A, B \in \mathbb{K}$ cu $A \cap B = \phi$;

P3) $P(\Omega) = 1$.

Se numește **câmp de probabilitate** orice triplet (Ω, \mathbb{K}, P) , unde (Ω, \mathbb{K}) este un câmp de evenimente iar P peste o probabilitate pe \mathbb{K} .

Propoziția 2.1.4. Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de evenimente. Atunci:

a) $P(\phi) = 0$;

- b) $P(C_A) = 1 - P(A), \forall A \in \mathbb{K};$
- c) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A), \forall A, B \in \mathbb{K}, A \subset B;$
- d) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \in \mathbb{K};$
- e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \in \mathbb{K}.$

Demonstrație.

- a) $\Omega \cup \phi = \Omega \implies P(\Omega \cup \phi) = P(\Omega)$ și cum $\Omega \cap \phi = \phi$ rezultă din **P2** că $P(\Omega \cup \phi) = P(\Omega) + P(\phi)$, adică avem $P(\Omega) + P(\phi) = P(\phi)$ sau $1 + P(\phi) = 1$, de unde $P(\phi) = 0$.
- b) $\forall A \in \mathbb{K}$ avem $A \cup C_A = \Omega$, de unde $P(A \cup C_A) = P(\Omega)$, sau $P(A \cup C_A) = 1$, iar din $A \cap C_A = \phi$ rezultă conform **P2** că $P(A \cup C_A) = P(A) + P(C_A)$. Pentru orice $A \in \mathbb{K}$ avem deci $P(A) + P(C_A) = 1$, adică $P(C_A) = 1 - P(A)$.
- c) $\forall A, B \in \mathbb{K}, A \subset B \implies B = A \cup (B - A)$, și cum $A \cap (B - A) = \phi \implies P(B) = P(A \cup (B - A)) \stackrel{\text{P2}}{=} P(A) + P(B - A) \implies P(B - A) = P(B) - P(A)$.
- d) $\forall A, B \in \mathbb{K} \implies B - A = B - (A \cap B)$ cu $A \cap B \subset B \stackrel{\text{c)}}{\implies} P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.
- e) $\forall A, B \in \mathbb{K} \implies A \cup B = A \cup (B - (A \cap B))$ cu

$$A \cap (B - (A \cap B)) = \phi \implies P(A \cup B) = P(A \cup (B - (A \cap B))) \stackrel{\text{P2}}{=} P(A) + P(B - (A \cap B)) \stackrel{\text{c)}}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
 pentru că $A \cap B \subset B$.

□

Consecințe.

1. Dacă $A, B \in \mathbb{K}$, cu $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$. (monotonie)

Într-adevăr, $P(B - A) \geq 0 \stackrel{\text{c)}}{\implies} P(B) - P(A) \geq 0 \implies P(B) \geq P(A)$.

2. $\forall A \in \mathbb{K} \implies 0 \leq P(A) \leq 1$.

Cum $\forall A \in \mathbb{K}$ avem $\phi \subset A \subset \Omega$, folosind consecința precedentă, obținem $P(\phi) \leq P(A) \leq P(\Omega)$ sau $0 \leq P(A) \leq 1$.

3. Prin inducție matematică, folosind **P2**, rezultă că dacă $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$, cu $A_i \cap A_j = \phi, i = \overline{1, n}, i \neq j$, atunci $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ (probabilitatea unei reuniuni finite de evenimente incompatibile două câte două este suma probabilităților evenimentelor reuniunii).

Comportamentul probabilității față de o reuniune finită de evenimente *oarecare* (nu mai sunt incompatibile două câte două) din \mathbb{K} este dat de propoziția care urmează, obținută tot prin inducție matematică pornind de la subpunctul e) din Propoziția 2.1.4.

Propoziția 2.1.5. (formula de adunare a probabilităților sau formula lui Poincaré)

Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate și $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$. Atunci

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n P(A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i < j < k}}^n P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right). \end{aligned}$$

Observația 2.1.6. Dacă $A, B, C, D \in \mathbb{K}$ avem evident

- a) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$;
b) $P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(A \cap D) - P(B \cap C) - P(B \cap D) - P(C \cap D) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)$.

Propoziția 2.1.6. (inegalitatea lui Boole)

Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un σ -câmp de probabilitate și $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un șir de evenimente din \mathbb{K} . Atunci

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - P(A_n)).$$

Observația 2.1.7. Inegalitatea lui Boole este adevărată și pentru un câmp de probabilitate. Dacă $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$ atunci

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n (1 - P(A_i)) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1).$$

Observația 2.1.8. Fie $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ și $\mathbb{K} = P(\Omega)$. Pe câmpul de evenimente (Ω, \mathbb{K}) se consideră probabilitatea P cu proprietatea

$$P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = \dots = P(\{w_n\}) \left(= \frac{1}{n}\right).$$

Dacă $A = \{w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_k}\} \in \mathbb{K}$ atunci

$$P(A) = P\left(\bigcup_{j=1}^k \{w_{i_j}\}\right) = \sum_{j=1}^k P(\{w_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

Se obține astfel o altă definiție a probabilității, adevărată într-un cadru mult mai restrictiv decât cel din Definiția 2.1.7 dar extrem de utilizată în numeroase cazuri practice și constituind, din punct de vedere istoric, prima definiție dată conceptului de probabilitate.

Definiția 2.1.8. (definiția clasică a probabilității)

Probabilitatea unui eveniment A , generat de un experiment aleator care generează un câmp finit de probabilitate cu evenimente elementare egal probabile, este egală cu raportul dintre numărul evenimentelor elementare favorabile realizării lui A și numărul total de evenimente elementare posibile:

$$P(A) = \frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}.$$

2.1.4 Probabilități condiționate. Independența evenimentelor

În paragraful precedent, printre alte proprietăți, s-au studiat și proprietăți care arătau comportamentul probabilității față de reuniunea evenimentelor. În acest paragraf vom urmări comportamentul probabilității față de intersecția evenimentelor, proprietăți grupate într-un paragraf separat tocmai datorită importanței deosebite pe care o au în aplicațiile practice.

Definiția 2.1.9. Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate și $A \in \mathbb{K}$ cu $P(A) \neq 0$. Se numește **probabilitatea evenimentului** $X \in \mathbb{K}$ **condiționată de evenimentul** A , notată $P(X|A)$, raportul

$$P(X|A) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)}.$$

Observația 2.1.9. Avem $P(X \cap A) = P(A) \cdot P(X|A)$. Dacă $A, B \in \mathbb{K}$, $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, atunci

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Am obținut un prim rezultat care indică comportamentul probabilității față de intersecție.

Propoziția 2.1.7. Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate și $A \in \mathbb{K}$ cu $P(A) \neq 0$. Atunci, aplicația $P_A : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, $P_A(X) = P(X|A)$ este de asemenea o probabilitate pe \mathbb{K} , adică $(\Omega, \mathbb{K}, P_A)$ este tot un câmp de probabilitate.

Demonstrație. Verificăm condițiile **P1)**, **P2)**, **P3)** din Definiția 2.1.7.

$$\mathbf{P1)} \quad \forall X \in \mathbb{K} \implies P_A(X) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)} = \frac{\geq 0}{> 0} \geq 0;$$

$$\mathbf{P2)} \quad \forall X, Y \in \mathbb{K} \text{ cu } X \cap Y = \emptyset \implies$$

$$\begin{aligned} P_A(X \cup Y) &= \frac{P((X \cup Y) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((X \cap A) \cup (Y \cap A))}{P(A)} \underset{\text{incomp}}{=} \frac{P(X \cap A) + P(Y \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(X \cap A)}{P(A)} + \frac{P(Y \cap A)}{P(A)} = \\ &= P_A(X) + P_A(Y); \end{aligned}$$

$$\mathbf{P3)} \quad P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

□

Observația 2.1.10. Analog, pornind de la σ -câmpul de probabilitate (Ω, \mathbb{K}, P) și $A \in \mathbb{K}$ cu $P(A) \neq 0$, se obține σ -câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathbb{K}, P_A)$, unde $P_A : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, $P_A(X) = P(X|A)$.

Propoziția 2.1.8. (formula de înmulțire a probabilităților)

Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate și $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$ astfel încât $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$. Atunci

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right).$$

Definiția 2.1.10. Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate. Se spune că evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$ formează un **sistem complet de evenimente** dacă

- a) $P(A_i) \neq 0, \forall i = \overline{1, n};$
- b) $A_i \cap A_j \neq \emptyset, \forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j;$
- c) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega.$

Observația 2.1.11. Evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$ formează un sistem complet de evenimente dacă și numai dacă la orice efectuare a experimentului se realizează unul și numai unul dintre evenimentele sistemului. Un exemplu banal de sistem complet de evenimente este sistemul $\{A, C_A\}$ unde $A \in \mathbb{K}, P(A) \neq 0$. Renunțând la condiția a) (cerută aici pentru comoditate) mulțimea tuturor evenimentelor elementare (poate fi o infinitate numărabilă) ale unui câmp de evenimente oferă un alt exemplu de sistem complet de evenimente.

Propoziția 2.1.9. (formula probabilității totale)

Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate și $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$ un sistem complet de evenimente iar $X \in \mathbb{K}$. Atunci

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(X|A_i).$$

Demonstrație.

Avem $X = \Omega \cap X = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap X = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap X)$ unde evenimentele $A_i \cap X, i = \overline{1, n}$ sunt incompatibile două câte două. Deci

$$P(X) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap X) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(X|A_i).$$

□

Propoziția 2.1.10. (formula lui Bayes)

Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate și $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$ un sistem complet de evenimente iar $X \in \mathbb{K}$ astfel încât $P(X) \neq 0$. Atunci, pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixat, avem

$$P(A_j|X) = \frac{P(A_j) \cdot P(X|A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(X|A_i)}.$$

Demonstrație.

Pentru orice $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixat, avem

$$P(A_j \cap X) = P(A_j) \cdot P(X|A_j) = P(X) \cdot P(A_j|X)$$

de unde

$$P(A_j|X) = \frac{P(A_j) \cdot P(X|A_j)}{P(X)}.$$

Din formula probabilității totale rezultă

$$P(A_j | X) = \frac{P(A_j) \cdot P(X | A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(X | A_i)}.$$

□

Definiția 2.1.11. Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate și $A, B \in \mathbb{K}$. Se spune că A și B sunt **independente** dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Observația 2.1.12. Definiția independenței a două evenimente, dată formal mai sus, este echivalentă cu afirmația că A și B sunt independente dacă nu se condiționează reciproc. Fie $A, B \in \mathbb{K}$ astfel încât $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$ și A, B independente în sensul Definiției 2.1.11. Atunci

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

și

$$P(B | A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B),$$

adică faptul că B nu condiționează pe A este surprins în relația $P(A | B) = P(A)$ și analog faptul că A nu condiționează pe B rezultă din egalitatea $P(B | A) = P(B)$.

Propoziția 2.1.11. Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate și $A, B \in \mathbb{K}$. Dacă A și B sunt independente, atunci $(C_A$ și $B)$, $(C_B$ și $A)$, $(C_A$ și $C_B)$ sunt de asemenea independente.

Definiția 2.1.12. Fie (Ω, \mathbb{K}, P) un câmp de probabilitate și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se spune că evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$ sunt **independente (în totalitate)** dacă oricare ar fi $i_1, i_2, \dots, i_r \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n$, cu $r \in \mathbb{N}^*$, $r \leq n$, avem

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_r}).$$

Se spune că evenimentele $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathbb{K}$ sunt **independente k câte k** , cu $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n-1$, dacă oricare k evenimente dintre A_1, A_2, \dots, A_n sunt independente (în totalitate).

Se spune că familia $(A_i)_{i \in I}$ de evenimente din \mathbb{K} este **formată din evenimente independente (în totalitate)** dacă orice subfamilie finită a sa este formată din evenimente independente (în totalitate).

Se spune că familia $(A_i)_{i \in I}$ de evenimente din \mathbb{K} este **formată din evenimente independente k câte k** , cu $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, dacă orice subfamilie finită cu cel puțin k elemente este formată din evenimente independente k câte k .

Observația 2.1.13. 1. Propoziția 2.1.11 se poate generaliza în sensul că dacă $(A_i)_{i \in \overline{1, n}}$ (sau familia $(A_i)_{i \in I}$) este formată din evenimente independente (în totalitate sau k câte k) atunci proprietatea se păstrează dacă o parte dintre evenimente se înlocuiesc cu complementarele lor.

2. Evident, independența (în totalitate) implică independența k câte k . Reciproca acestei afirmații este falsă așa cum rezultă și din exemplul de mai jos datorat lui Cebâșev.

Înceiem acest paragraf cu trei exemple care să ilustreze modul de utilizare al formulelor tratate (formula de adunare și respectiv înmulțire a probabilităților, formula probabilității totale și respectiv formula lui Bayes).

Exemplul 2.1.2. *Dintre cei 20 de studenți ai unei grupe, 6 cunosc limba engleză, 5 cunosc limba franceză, 2 cunosc limba germană. Care este probabilitatea ca un student, luat la întâmplare din această grupă, să cunoască o limbă străină (dintre cele trei menționate)?*

Rezolvare.

Considerăm evenimentele:

E : „studentul considerat cunoaște limba engleză”,

F : „studentul considerat cunoaște limba franceză”.

G : „studentul considerat cunoaște limba germană”,

X : „studentul considerat vorbește o limbă străină (dintre cele trei)”.

Din definiția clasică a probabilității avem

$$P(E) = \frac{6}{20}, \quad P(F) = \frac{5}{20}, \quad P(G) = \frac{2}{20}.$$

Cum $X = E \cup F \cup G$ și evenimentele E, F, G nu sunt incompatibile două câte două rezultă folosind formula lui Poincaré că

$$\begin{aligned} P(X) &= P(E \cup F \cup G) \\ &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(E \cap G) \\ &\quad - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G). \end{aligned}$$

Evenimentele E, F, G , sunt independente în totalitate și deci:

$$\begin{aligned} P(X) &= P(E) + P(F) + P(G) - P(E) \cdot P(F) - P(E) \cdot P(G) - \\ &\quad - P(F) \cdot P(G) + P(E) \cdot P(F) \cdot P(G) \\ &= \frac{6+5+2}{20} - \frac{6 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{20 \cdot 20} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 2}{20 \cdot 20 \cdot 20} \\ &= \frac{13}{20} - \frac{52}{400} + \frac{3}{400} = \frac{211}{400}. \end{aligned}$$

Exemplul 2.1.3. *O urnă conține a bile albe și b bile negre. Se extrag succesiv, fără repunere, trei bile. Care este probabilitatea ca toate cele trei bile extrase să fie albe (presupunem $a \geq 3$)?*

Rezolvare.

Considerăm evenimentele:

A_i : „a i -a bilă extrasă a fost albă”, $i = \overline{1, 3}$

X : „toate cele trei bile extrase au fost albe”.

Avem $X = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Din formula de înmulțire a probabilităților avem

$$P(X) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 \cap A_2).$$

Utilizând definiția clasică a probabilității obținem

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{a}{a+b}, \quad P(A_2 | A_1) = \frac{a-1}{a+b-1}, \quad P(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{a-2}{a+b-2} \text{ și deci} \\ P(X) &= \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a-2}{a+b-2}. \end{aligned}$$

Exemplul 2.1.4. Trei urne conțin bile albe și bile negre în compozițiile:

$$U_1(a, b), U_2(c, d), U_3(e, f).$$

Se extrage o bilă din U_3 și dacă ea este albă se pune în U_1 și se extrage o a doua bilă din U_1 iar dacă este neagră se pune în U_2 și a doua bilă se extrage din U_2 . Să se afle probabilitățile ca:

a) a doua bilă extrasă să fie albă;

b) prima bilă extrasă să fi fost albă dacă a doua bilă extrasă a fost neagră.

Rezolvare.

Considerăm evenimentele:

A_i : „a i -a bilă extrasă a fost albă”, ($i = \overline{1, 2}$);

N_i : „a i -a bilă extrasă a fost neagră”, ($i = \overline{1, 2}$).

a) Se cere $P(A_2)$. Rezolvarea este un exemplu de utilizare a formulei probabilității totale cu sistemul complet de evenimente A_1, N_1 . Avem

$$A_2 = A_2 \cap \Omega = A_2 \cap (A_1 \cup N_1) = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap N_1).$$

Cum $A_2 \cap A_1$ și $A_2 \cap N_1$ sunt incompatibile rezultă că

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap N_1) \\ &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(N_1)P(A_2|N_1) \\ &= \frac{e}{e+f} \frac{a+1}{a+b+1} + \frac{f}{e+f} \frac{c}{c+d+1}. \end{aligned}$$

Analog,

$$\begin{aligned} P(N_2) &= P(A_1)P(N_2|A_1) + P(N_1)P(N_2|N_1) \\ &= \frac{e}{e+f} \frac{b}{a+b+1} + \frac{f}{e+f} \frac{d+1}{c+d+1} \end{aligned}$$

(sau $P(N_2) = 1 - P(A_2)$).

b) Se cere $P(A_1|N_2)$. Rezolvarea oferă un exemplu de utilizare a formulei lui Bayes care permite interschimbarea raportului de condiționare apriori-aposteriori. Probabilitatea $P(A_1|N_2)$ ne este mai puțin la îndemână decât $P(N_2|A_1)$ iar formula lui Bayes ne permite calculul lui $P(A_1|N_2)$ cu ajutorul lui $P(N_2|A_1)$. Avem

$$P(A_1|N_2) = \frac{P(A_1) \cdot P(N_2|A_1)}{P(N_2)} = \frac{\frac{e}{e+f} \cdot \frac{b}{a+b+1}}{\frac{e}{e+f} \cdot \frac{b}{a+b+1} + \frac{f}{e+f} \cdot \frac{d+1}{c+d+1}}.$$

2.2 Scheme clasice de probabilitate

Sub acest titlu vor fi descrise anumite experimente aleatoare și vor fi calculate probabilitățile unor evenimente ale acestora. Din multiple motive aceste experimente aleatoare apar foarte des în aplicații. Tradițional, descrierea experimentelor respective se face cu ajutorul unor urne din care se extrag bile.

În cele ce urmează vom înțelege prin **urnă** o incintă în care se află **bile** (sfere identice ca mărime și greutate, dar putând avea culori diferite). Din exterior nu se pot vedea culorile bilelor din urnă, însă se consideră că există un mecanism cu ajutorul căruia bilele pot fi extrase din urnă, bilele existente în urnă având toate aceeași șansă de a fi extrase.

2.2.1 Schema urnei cu bila nerevenită

Urna U conține a bile albe și b bile negre. Din U se fac n extrageri succesive de câte o bilă fără întoarcere, adică fără a reintroduce în urnă bilele extrase. Să remarcăm că modul acesta de a extrage n bile din urna U este echivalent cu extragerea celor n bile deodată. Se pune problema determinării probabilității evenimentului $X_{a,b}^{k,l}$ că din cele n bile astfel extrase k sunt albe și $l = n - k$ sunt negre. Evident că a, b, n, k și l sunt numere naturale și $n \leq a + b$, $k \leq \min\{n, a\}$, $l \leq \min\{n, b\}$.

Să ne imaginăm că cele $a + b$ bile existente în urna U ar fi numerotate de la 1 la $a + b$. Experimentul aleator al extragerii celor $n = k + l$ bile din această urnă are C_{a+b}^{k+l} rezultate posibile egal probabile. Dintre acestea, favorabile realizării evenimentului $X_{a,b}^{k,l}$ sunt $C_a^k C_b^l$ căci k bile dintre cele a bile albe existente în urnă pot fi alese în C_a^k moduri diferite, fiecărei asemenea alegeri corespunzându-i C_b^l moduri diferite de alegere a l bile dintre cele b bile negre existente în urna U .

Notăm

$$P_{a,b}(k, l) = P(X_{a,b}^{k,l}).$$

După definiția clasică a probabilității se obține

$$P_{a,b}(k, l) = \frac{C_a^k \cdot C_b^l}{C_{a+b}^{k+l}}. \quad (2.1)$$

Observația 2.2.1. Din cauza asemănării membrului drept al relației (2.1) cu termenul general al seriei hipergeometrice, schema urnei cu bila nerevenită se mai numește **schema hipergeometrică**.

Exemplul 2.2.1. Urna U conține 3 bile albe și 2 bile negre. Din U se extrag deodată 3 bile (sau echivalent, se fac 3 extrageri succesive de câte o bilă fără întoarcere). Să se calculeze probabilitatea evenimentului A că cel mult două din bilele astfel extrase sunt albe.

Rezolvare.

Este clar că evenimentul A se realizează dacă din cele trei bile extrase din U exact două sunt albe, sau exact una este albă, sau nici una nu este albă, adică

$$A = X_{3,2}^{2,1} \cup X_{3,2}^{1,2} \cup X_{3,2}^{0,3}.$$

Evenimentele reuniunii care dă evenimentul A sunt evident două câte două incompatibile, deci

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X_{3,2}^{2,1}) + P(X_{3,2}^{1,2}) + P(X_{3,2}^{0,3}) \\ &= P_{3,2}(2, 1) + P_{3,2}(1, 2) + P_{3,2}(0, 3). \end{aligned}$$

Dar $X_{3,2}^{0,3} = \emptyset$ deoarece este imposibil ca din urna U să fie extrase (fără întoarcere) 3 bile negre, ea conținând doar 2 asemenea bile. Atunci

$$P_{3,2}(0, 3) = P(X_{3,2}^{0,3}) = P(\emptyset) = 0$$

și deci

$$\begin{aligned} P(A) &= P_{3,2}(2, 1) + P_{3,2}(1, 2) = \frac{C_3^2 \cdot C_2^1}{C_5^3} + \frac{C_3^1 \cdot C_2^2}{C_5^3} \\ &= \frac{3 \cdot 2}{10} + \frac{3 \cdot 1}{10} = \frac{9}{10} = 0,9. \end{aligned}$$

2.2.2 Generalizare. Schema urnei cu bila nerevenită cu mai multe stări

O generalizare naturală a schemei precedente se obține considerând că în urnă se găsesc bile de mai mult decât două culori (stări), să zicem de s culori.

Urna U conține a_i bile de culoarea c_i , $i = \overline{1, s}$. Din U se fac n extrageri succesive de câte o bilă fără întoarcere (ceea ce este echivalent cu extragerea celor n bile deodată). Se cere probabilitatea evenimentului $X_{a_1, a_2, \dots, a_s}^{k_1, k_2, \dots, k_s}$ ca dintre cele n bile extrase k_i sunt de culoarea c_i , $i = \overline{1, s}$. Evident că $a_1, a_2, \dots, a_s, k_1, k_2, \dots, k_s$ și n sunt numere naturale, $\sum_{i=1}^s k_i = n$ și $k_i \leq \min\{a_i, n\}$, $i = \overline{1, s}$.

În acest caz numărul total de evenimente elementare ale experimentului aleator este $C_{a_1+a_2+\dots+a_s}^{k_1+k_2+\dots+k_s}$, iar numărul evenimentelor elementare favorabile evenimentului $X_{a_1, a_2, \dots, a_s}^{k_1, k_2, \dots, k_s}$ este $C_{a_1}^{k_1} \cdot C_{a_2}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{a_s}^{k_s}$.

Notăm

$$P(X_{a_1, a_2, \dots, a_s}^{k_1, k_2, \dots, k_s}) = P_{a_1, a_2, \dots, a_s}(k_1, k_2, \dots, k_s).$$

Definiția clasică a probabilității da

$$P_{a_1, a_2, \dots, a_s}(k_1, k_2, \dots, k_s) = \frac{C_{a_1}^{k_1} \cdot C_{a_2}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{a_s}^{k_s}}{C_{a_1+a_2+\dots+a_s}^{k_1+k_2+\dots+k_s}}. \quad (2.2)$$

Exemplul 2.2.2. Dintre cele 10 bilete ale unei loterii unul este câștigător cu 10000 u.m., două sunt câștigătoare cu câte 5000 u.m., trei sunt câștigătoare cu câte 1000 u.m. și patru sunt necâștigătoare. Un jucător cumpără patru bilete din această loterie. Să se calculeze probabilitatea p ca dintre cele patru bilete cumpărate unul să fie câștigător cu 5000 u.m., două să fie câștigătoare cu câte 1000 u.m. și unul să fie necâștigător.

Rezolvare.

Probabilitatea căutată poate fi calculată utilizând relația (2.2) și se obține

$$p = P_{1,2,3,4}(0, 1, 2, 1) = \frac{C_1^0 \cdot C_2^1 \cdot C_3^2 \cdot C_4^1}{C_{10}^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{210} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35} \approx 0,114.$$

2.2.3 Schema urnei cu bila revenită

Urna U conține bile de două culori (albe și negre). Compoziția urnei este cunoscută în sensul că se cunoaște probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie albă (fie această probabilitate p) și probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie neagră (o notăm cu q , $q = 1 - p$). Din U se efectuează n extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere (adică după extragerea oricărei bile și observarea culorii ei, bila extrasă este reintrodusă în urnă înaintea extragerii următoare). Se cere probabilitatea evenimentului X_n^k că dintre cele n bile astfel extrase k sunt albe (atunci restul de $n - k$ bile sunt negre). Evident k și n sunt numere naturale și $k \leq n$.

Se obține

$$P(X_n^k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Observația 2.2.2. Cum membrul drept al relației (??) este coeficientul lui t^k din dezvoltarea cu formula binomului lui Newton a lui $(p + q)^n$, schema urnei cu bila revenită se mai numește **schema binomială**. Această schemă este numită și **schema lui Bernoulli**. Esențial în schema urnei cu bila revenită este faptul că, din cauza reintroducerii bilei în urnă după fiecare extragere, rezultatele extragerilor sunt evenimente total independente și din acest motiv ea este uneori numită **schema extragerilor (probelor) repetate și independente**, iar schema urnei cu bila nerevenită este numită atunci **schema extragerilor (probelor) repetate și dependente**.

Exemplul 2.2.3. Urna U conține 2 bile albe și 3 bile negre. Din U se fac 6 extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcerea bilei în urnă după fiecare extragere. Să se calculeze probabilitatea ca 4 dintre cele 6 bile extrase să fie albe, iar 2 să fie negre.

Rezolvare.

Cum la fiecare extragere putem obține oricare dintre cele $2 + 3 = 5$ bile existente în urnă, fiecare extragere este un experiment aleator care generează câte un câmp de evenimente cu 5 rezultate posibile echiprobabile. Atunci, folosind definiția clasică a probabilității, găsim că probabilitatea ca la oricare din cele 6 extrageri să se obțină o bilă albă este $p = \frac{2}{5}$, iar probabilitatea ca la oricare din cele 6 extrageri să se obțină o bilă neagră este $q = \frac{3}{5}$.

Probabilitatea ca 4 din cele 6 bile extrase să fie albe și 2 să fie negre este

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 15 \cdot \frac{16}{625} \cdot \frac{9}{25} = \frac{432}{3125} = 0,13824.$$

Observația 2.2.3. Din schema urnei cu bila revenită se obține următoarea schemă numită **schema lui Pascal**. Să presupunem că urna U conține bile albe și negre. Fie p probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie albă și $q = 1 - p$ probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie neagră. Se cere probabilitatea evenimentului Y_n^k ca la efectuarea a n extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere din urna U să se obțină k bile albe și $n - k$ bile negre, iar a n -a bilă extrasă din U să fie albă (adică probabilitatea ca cea de a k -a bilă albă să se obțină după ce au fost extrase $n - k$ bile negre). Fără dificultate se obține că probabilitatea acestui eveniment este

$$P(Y_n^k) = P\left(X_{n-1}^{k-1} \cap A_n\right).$$

Deoarece rezultatul unei extrageri nu este influențat de rezultatele extragerilor precedente (bila fiind reintrodusă în urnă după fiecare extragere) avem

$$\begin{aligned} P(Y_n^k) &= P(X_{n-1}^{k-1}) \cdot P(A_n) = P_{n-1}(k-1) \cdot p = \\ &= C_{n-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot q^{(n-1)-(k-1)} p = C_{n-1}^{k-1} \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \end{aligned}$$

Observația 2.2.4. Din schema lui Pascal se obține ca un caz particular **schema geometrică** luând $k = 1$. Probabilitatea ca efectuând n extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere din urna U (cunoscută în sensul că se știe că probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie albă este p , iar probabilitatea ca o bilă extrasă din U să fie neagră este $q = 1 - p$) să se obțină pentru prima dată bilă albă în cea de a n -a extragere este

$$\begin{aligned} P(Y_n^1) &= P\left(X_{n-1}^0 \cap A_n\right) = P(X_{n-1}^0) \cdot P(A_n) = \\ &= P_{n-1}(0) \cdot p = C_{n-1}^0 \cdot p^0 \cdot q^{n-1-0} \cdot p = p \cdot q^{n-1}. \end{aligned}$$

Denumirea de schema geometrică provine de la faptul că probabilitatea $p \cdot q^{n-1}$ este al n -lea termen al progresiei geometrice cu primul termen p și rația q .

2.2.4 Generalizare. Schema urnei cu bila revenită cu mai multe stări

Această schemă este o generalizare naturală a schemei urnei cu bila revenită, ea referindu-se la extrageri cu întoarcere dintr-o urnă în care există bile de mai mult decât două culori.

Urna U conține bile de s culori c_1, c_2, \dots, c_s , $s \in \mathbb{N}$, $s > 2$. Compoziția urnei U este cunoscută în sensul că se cunoaște probabilitatea ca o bilă extrasă din U să aibă culoarea c_i , $i = \overline{1, s}$. Fie această probabilitate p_i . Evident $p_i > 0$, $i = \overline{1, s}$ și $\sum_{i=1}^s p_i = 1$.

Din U se fac n extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere (adică, după extragerea oricărei bile și observarea culorii ei, bila extrasă este reintrodusă în urnă înaintea extragerii următoare).

Se cere probabilitatea evenimentului $X_n^{k_1, k_2, \dots, k_s}$ ca dintre cele n bile astfel extrase k_i să fie de culoarea c_i , $i = \overline{1, s}$. Evident $0 \leq k_i \leq n$, $i = \overline{1, s}$ și $\sum_{i=1}^s k_i = n$.

Notăm $P(X_n^{k_1, k_2, \dots, k_s}) = P_n(k_1, k_2, \dots, k_s)$ și se poate deduce formula:

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_s) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}. \quad (2.3)$$

Remarcăm că dacă în (2.3) luăm $s = 2$ și notăm $p_1 = p$, $p_2 = 1 - p = q$, $k_1 = k$ și $k_2 = n - k$ se obține membrul drept al relației (??).

Observația 2.2.5. Deoarece membrul drept al relației (2.3) este coeficientul lui $t_1^{k_1} t_2^{k_2} \dots t_s^{k_s}$ din dezvoltarea lui

$$(p_1 t_1 + p_2 t_2 + \dots + p_s t_s)^n$$

schema urnei cu bila revenită cu mai multe stări se mai numește **schema polinomială** sau **schema multinomială**.

Exemplul 2.2.4. Urna U conține 2 bile roșii, 4 bile albe și 3 bile albastre. Din U se fac 6 extrageri succesive de câte o bilă cu întoarcere. Se cere probabilitatea ca dintre cele 6 bile extrase una să fie roșie, două să fie albe și trei să fie albastre.

Rezolvare.

Avem evident $p_1 = \frac{2}{9}$, $p_2 = \frac{4}{9}$, $p_3 = \frac{3}{9}$, $n = 6$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ și $k_3 = 3$, deci probabilitatea cerută este

$$P_6(1, 2, 3) = \frac{6!}{1!2!3!} \left(\frac{2}{9}\right)^1 \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{3}{9}\right)^3 \approx 0,0325.$$

2.2.5 Schema urnelor lui Poisson

Schema urnelor lui Poisson este o altă generalizare a schemei urnei cu bila revenită.

Experimentul de la schema urnei cu bila revenită studiată în secțiunea 2.2.3 poate fi imaginat și în modul următor: există n urne U_1, U_2, \dots, U_n cu compoziții identice, din fiecare urnă se extrage câte o bilă și se caută probabilitatea evenimentului ca dintre cele n bile astfel extrase k sunt albe.

O generalizare a acestui experiment se obține considerând că cele n urne au compoziții diferite.

Să presupunem date urnele U_1, U_2, \dots, U_n și că aceste urne conțin bile albe și negre, compozițiile urnelor sunt cunoscute în sensul că se știe că probabilitatea ca o bilă extrasă din U_i să fie albă este p_i , $i = \overline{1, n}$ (atunci probabilitatea ca o bilă extrasă din U_i să fie neagră este $q_i = 1 - p_i$, $i = \overline{1, n}$). Se extrage câte o bilă din fiecare din cele n urne și se cere probabilitatea evenimentului X^k că dintre cele n bile astfel extrase k sunt albe și $n - k$ sunt negre. Evident $0 < p_i < 1$, $i = \overline{1, n}$ și $0 \leq k \leq n$.

Dacă A_i este evenimentul că bila extrasă din U_i este albă atunci $P(A_i) = p_i$ și $P(\overline{A_i}) = 1 - p_i = q_i$.

Se constată ușor că probabilitatea cerută este egală cu coeficientul lui t^k din polinomul $(p_1t + q_1)(p_2t + q_2) \dots (p_nt + q_n)$ de gradul n în t , astfel încât probabilitatea $P(X^k)$ este dată de relația

$$\sum_{k=0}^n P(X^k)t^k = \prod_{i=1}^n (p_i t + q_i). \quad (2.4)$$

Remarcăm faptul că dacă în schema urnelor lui Poisson considerăm toate cele n urne identice (adică $p_i = p$, $q_i = q$, $i = \overline{1, n}$) atunci relația (2.4) devine

$$\sum_{k=0}^n P(X^k)t^k = (pt + q)^n,$$

astfel încât

$$P(X^k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

adică $P(X^k) = P_n(k)$ dat de relația (2.4).

Exemplul 2.2.5. *O întreprindere agricolă cultivă grâu în 3 ferme. Din date statistice se știe că probabilitatea ca într-un an oarecare producția de grâu la hectar să depășească 3000 kg este $p_1 = 0,5$ la prima fermă, $p_2 = 0,4$ la a doua și $p_3 = 0,6$ la ferma a treia. Se cere probabilitatea evenimentului X că într-un anumit an producția de grâu la hectar să depășească 4000 kg la cel puțin două din cele trei ferme.*

Rezolvare.

Notăm cu X^k evenimentul că exact în k dintre cele 3 ferme producția de grâu în anul respectiv depășește 3000 kg la hectar, $k = \overline{0, 3}$. Se observă că evenimentul X^k este de tipul celor descrise în schema urnelor lui Poisson.

Avem

$$P(X) = P(X^2 \cup X^3) = P(X^2) + P(X^3).$$

Relația (2.4) ne dă

$$(0, 4t + 0, 6)(0, 5t + 0, 5)(0, 6t + 0, 4) = 0, 12 + 0, 38t + 0, 38t^2 + 0, 12t^3,$$

astfel că $P(X^2) = 0, 38$ și $P(X^3) = 0, 12$, deci

$$P(X) = 0, 38 + 0, 12 = 0, 50.$$

UNITATEA 2. Variabile aleatoare. Repartitii clasice de probabilitate

2.3 Variabile aleatoare

Până acum evenimentele au fost studiate mai întâi din punct de vedere calitativ, iar o dată cu introducerea probabilităților și din punct de vedere cantitativ. Studiul se extinde prin considerarea unei noțiuni noi, aceea de **variabilă aleatoare**, variabilă care va juca un rol similar în teoria probabilităților ca și variabila din cadrul analizei matematice sau din altă parte a matematicii.

În cazul variabilelor aleatoare valorile vor fi luate dintr-o anumită mulțime nu în mod cert ci numai cu o anumită probabilitate. Ca notație pentru variabila aleatoare se utilizează de obicei literele mari latine sau pot fi utilizate și literele grecești η, ζ, \dots

Considerăm un câmp de probabilitate (Ω, \mathcal{K}, P) .

Definiția 2.3.1. Se numește **variabilă aleatoare reală** orice aplicație

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

care asociază fiecărui element ω un număr real $X(\omega)$,

$$\omega \longmapsto X(\omega)$$

astfel încât

$$X^{-1}(-\infty, x) \in \mathcal{K}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aici, prin $X^{-1}(-\infty, x)$ am notat evenimentul identificat cu mulțimea elementelor $\omega \in \Omega$ astfel încât $X(\omega) < x$, adică

$$X^{-1}(-\infty, x) = \{\omega \mid \omega \in \Omega, X(\omega) < x\}.$$

Observația 2.3.1. În cele ce urmează vom avea în vedere două categorii de variabile aleatoare și anume:

- variabile aleatoare **de tip discret**;
- variabile aleatoare **de tip continuu**.

Variabilele aleatoare **de tip discret** sunt acelea pentru care mulțimea valorilor (codomeniul lui X) este o mulțime finită sau numărabilă de forma

$$M = \{x_i \mid x_i \in \mathbb{R}\}_{i \in I}, \quad I \subset \mathbb{N}.$$

Variabila aleatoare **de tip continuu** este variabila a cărei codomeniu M este un interval $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ închis sau nu.

Exemplul 2.3.1. Notăm cu X variabila aleatoare care reprezintă suma punctelor obținute la aruncarea a două zaruri. Atunci

$$M = \{2, 3, 4, 5, 6, \dots, 11, 12\}.$$

Exemplul 2.3.2. Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \Omega\}$, $M = \{x_1, x_2\} \subset \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$. Arătăm că $X : \Omega \rightarrow M$, $X(\omega_1) = x_1$, $X(\omega_2) = x_2$, $X(\omega_3) = x_2$ este o variabilă aleatoare.

Rezolvare.

$$\begin{aligned} X^{-1}((-\infty, x)) &= \emptyset \in \mathcal{K}, \quad \text{pentru orice } x \leq x_1; \\ X^{-1}((-\infty, x)) &= \{\omega_1\} \in \mathcal{K}, \quad \text{pentru orice } x_1 < x \leq x_2; \\ X^{-1}((-\infty, x)) &= \{\omega_2, \omega_3\} \in \mathcal{K}, \quad \text{pentru orice } x > x_2. \end{aligned}$$

Definiția 2.3.2. Dacă X este o variabilă aleatoare de tip discret atunci numim **funcție de probabilitate** și o notăm cu

$$f_X : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

funcția care asociază fiecărui

$$x_i \longmapsto f_X(x_i) = P(\{X = x_i\})$$

unde $\{X = x_i\}$ reprezintă evenimentul ca variabila aleatoare discretă X ia valoarea x_i .

Observația 2.3.2. Atunci când nu e pericol de confuzie indicele X de la funcția f se va omite și vom nota $f(x_i)$ cu p_i , unde p_i reprezintă probabilitatea evenimentului ca variabila X să ia valoarea x_i . Se constată fără greutate că sistemul de evenimente $\{X = x_i\}_{i \in I}$ este un sistem complet de evenimente și atunci vor fi îndeplinite **întotdeauna** următoarele două condiții:

$$\begin{cases} \sum_{i \in I} p_i = 1; \\ p_i \geq 0, i \in I. \end{cases}$$

Astfel variabilei aleatoare de tip discret X i se asociază un tabel (tablou) de repartitie (distribuție) de forma

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I} \quad \text{sau detaliat} \quad X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Se vede că repartitia (distribuția) conține pe prima linie valorile pe care variabila aleatoare le ia, de obicei scrise o singură dată și în ordine crescătoare, iar pe linia a doua sunt trecute probabilitățile cu care variabila aleatoare X ia valoarea corespunzătoare p_i .

Exemplul 2.3.3. Revenim la primul exemplu din această secțiune și cerem în plus să construim distribuția acestei variabile aleatoare. Atunci

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

2.3.1 Operații cu variabile aleatoare de tip discret

Ca și cu variabilele obișnuite, și cu variabilele aleatoare se pot face operații. Pentru fiecare nouă variabilă obținută după efectuarea operațiilor trebuie să cunoaștem tabloul de repartitie.

1. Adunarea unei variabile aleatoare X cu un număr constant C :

$$C + X : \begin{pmatrix} C + x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I};$$

2. Înmulțirea unei variabile X cu o constantă C :

$$C \cdot X : \begin{pmatrix} C \cdot x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I};$$

3. Ridicarea la putere a unei variabile aleatoare X . Fie $k \in \mathbb{N}$. Atunci:

$$X^k : \begin{pmatrix} x_i^k \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I},$$

Când au sens x_i^k se poate lua $k \in \mathbb{Z}$ sau chiar $k \in \mathbb{R}$.

4. Suma a două variabile aleatoare X și Y :

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}, Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j \in J} \implies X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{i \in I, j \in J},$$

unde

$$p_{ij} = P\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right).$$

Caz particular. Atunci când X și Y sunt independente,

$$\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}, \forall (i, j) \in I \times J$$

vor fi tot independente, deci p_{ij} este produsul $p_{ij} = p_i q_j$.

5. Produsul a două variabile aleatoare X și Y :

$$X \cdot Y : \left(\begin{array}{c} x_i y_j \\ p_{ij} \end{array} \right)_{i \in I, j \in J}, p_{ij} = P\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right).$$

Exemplul 2.3.4. *Se consideră variabilele aleatoare de distribuții:*

$$X : \left(\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{array} \right) \quad Y : \left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{array} \right).$$

Presupunem că acestea sunt independente. Să se efectueze următoarele operații: $2X$, $3+Y$, X^4 , $X+Y$, XY , $\frac{X}{Y}$.
Rezolvare.

$$\begin{aligned} 2X &: \left(\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{array} \right); \\ 3+Y &: \left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 0.4 & 0.6 \end{array} \right); \\ X^4 &: \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 16 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{array} \right); \\ X+Y &: \left(\begin{array}{cccccc} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \\ 0.12 & 0.18 & 0.2 & 0.3 & 0.08 & 0.12 \end{array} \right) \Rightarrow \\ X+Y &: \left(\begin{array}{ccccc} -3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 0.12 & 0.2 & 0.26 & 0.3 & 0.12 \end{array} \right); \\ Y^{-1} &: \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{array} \right); \\ \frac{X}{Y} &: \left(\begin{array}{cccccc} (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} & (-1) \cdot 1 = -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0.12 & 0.18 & 0.2 & 0.3 & 0.08 & 0.12 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \frac{X}{Y} &: \left(\begin{array}{cccc} -1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0.26 & 0.5 & 0.12 & 0.12 \end{array} \right) \end{aligned}$$

2.3.2 Funcția de repartiție

Studiul variabilelor aleatoare se poate considera și prin intermediul unei noi funcții asociate variabilei aleatoare. Această funcție numită uneori **funcție cumulativă a probabilităților** are o serie de proprietăți foarte ușor de exploatat, mai ales când e vorba de a evalua probabilitățile unor evenimente construite cu variabile aleatoare. Fie X o variabilă aleatoare discretă.

Definiția 2.3.3. Se numește **funcție de repartiție** asociată lui X , și se notează cu

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1],$$

funcția care asociază $x \longmapsto F_X(x)$, definită prin

$$F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(\{X < x\}).$$

Observația 2.3.3. Atunci când nu există pericolul de confuzie se va renunța la indicele X și la acoladele din membrul drept și vom folosi notația

$$F(x) = P(X < x).$$

Exemplul 2.3.5. Să construim funcția de repartiție pentru variabila aleatoare X din Exemplul 2.3.4.

Rezolvare.

Reprezentăm pe o axă valorile variabilei X . Studiem fiecare caz în parte:

$$\text{Dacă } x \leq -1 \implies F(x) = P(X < x) = P(\emptyset) = 0;$$

$$\text{Dacă } -1 < x \leq 0 \implies F(x) = P(X < x) = P(x = -1) = 0.3;$$

$$\begin{aligned} \text{Dacă } 0 < x \leq 2 \implies F(x) &= P(X < x) = P(\{x = -1\} \cup \{x = 0\}) = \\ &= 0.3 + 0.5 = 0.8; \end{aligned}$$

$$\text{Dacă } x > 2 \implies F(x) = P(X < x) = 1.$$

Deci putem scrie

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0.3, & -1 < x \leq 0 \\ 0.8, & 0 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Proprietăți ale funcției de repartiție.

Folosind doar definiția și proprietăți ale probabilităților, se deduc următoarele proprietăți ale funcției de repartiție.

1) $0 \leq F(x) \leq 1;$

2) $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1;$

3) F este crescătoare: $\forall x', x'' \in \mathbb{R}$, are loc implicația

$$x' < x'' \implies F(x') \leq F(x'');$$

4) F este continuă la stânga: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,

$$F(x_0) = F(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < x_0}} F(x);$$

5) $\forall x', x'' \in \mathbb{R}$, cu $x' < x''$, are loc egalitatea

$$P(x' \leq X < x'') = F(x'') - F(x').$$

Justificare: Pornim de la evenimentul $X < x''$.

Observația 2.3.4. *Plecând de la Proprietatea 5) se demonstrează că sunt adevărate relațiile:*

$$\begin{aligned}P(x' \leq X \leq x'') &= F(x'') - F(x') + P(X = x''); \\P(x' < X < x'') &= F(x'') - F(x') - P(X = x'); \\P(x' < X \leq x'') &= F(x'') - F(x') + P(X = x'') - P(X = x').\end{aligned}$$

2.3.3 Variabile de tip continuu

În aplicații, variabilele aleatoare de tip discret nu sunt întotdeauna suficiente. Într-adevăr, există probleme care sunt descrise de variabile aleatoare ce nu sunt discrete.

Exemplul 2.3.6. *Greutatea unui produs este reprezentată printr-o variabilă aleatoare care ia orice valoare dintr-un anumit interval. Este nevoie să se aibă în vedere o variabilă aleatoare de tip continuu.*

Definiția 2.3.4. *Variabila aleatoare reală X este de tip continuu dacă funcția sa de repartiție F este dată printr-o relație de forma:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt,$$

f fiind o funcție integrabilă pe orice interval de forma $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare de tip continuu se bucură de aceleași proprietăți ca și în cazul variabilelor aleatoare de tip discret precum și de proprietăți specifice.

Observația 2.3.5. *Din definiția de mai sus și având în vedere proprietățile integralelor, avem*

$$f(x) = F'_d(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Definiția 2.3.5. *Funcția f se numește funcție densitate de probabilitate a variabilei aleatoare de tip continuu, și are proprietăți similare cu acelea ale funcției de probabilitate din cazul discret.*

Teorema 2.3.1. *Dacă F este funcție de repartiție a unei variabile aleatoare continue, atunci densitatea de probabilitate f are următoarele proprietăți*

$$1) \quad f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.$$

Observația 2.3.6. *După cum în cazul variabilei aleatoare discrete aveam o așa-zisă repartiție, adică un tablou cu două linii, pe prima linie fiind trecute valorile variabilei, iar pe a doua funcția de probabilitate, tot așa și la variabilele aleatoare de tip continuu vom considera o așa numită **repartiție** sau **distribuție**. Astfel, pentru o variabilă aleatoare de tip continuu care ia valori doar dintr-un interval al axei reale, repartiția va avea forma:*

$$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}}$$

unde

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1.$$

2.3.4 Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

Studiul variabilei aleatoare atât de tip discret cât și de tip continuu se extinde prin introducerea unor caracteristici numerice cu ajutorul cărora se dau informații suplimentare despre ele. Aceste caracteristici se împart în mai multe categorii:

- *de grupare*: care evidențiază niște numere în jurul cărora se grupează valorile variabilelor;
- *de împrăștiere (de depărtare)*: care dau informații asupra gradului de depărtare a valorilor variabilelor față de o caracteristică de grupare principală;
- *privind forma distribuției*: simetrie, asimetrie, boltire, turtire, etc.

Caracteristici de grupare

Sunt niște numere care se determină pornind de la variabila aleatoare considerată, numere în jurul cărora se grupează toate valorile variabilei aleatoare.

Valoarea medie. Valoarea medie este considerată cea mai importantă dintre caracteristicile de grupare.

Definiția 2.3.6. Se numește **valoarea medie** a variabilei aleatoare X și se notează $M(X)$ numărul calculat prin una din relațiile

$$\begin{aligned}M(X) &= \sum_{i \in I} x_i p_i, \text{ dacă } X \text{ este variabilă aleatoare discretă;} \\M(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \text{ dacă } X \text{ este variabilă aleatoare continuă.}\end{aligned}$$

Exemplul 2.3.7. Fie variabila aleatoare X având distribuția

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Valoare medie a lui X este

$$M(X) = -0.8 + 0.3 + 0.6 = 0.1.$$

Exemplul 2.3.8. Fie variabila aleatoare X având distribuția

$$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}}, \text{ unde } f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Valoare medie a lui X este

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x 3x^2 dx = 3 \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Propoziția 2.3.1. Valoarea medie are câteva proprietăți. Astfel dacă X și Y sunt variabile aleatoare, c o constantă reală, avem

$$1) \quad M(c \cdot X) = c \cdot M(X);$$

- 2) $M(C) = c$, unde variabila aleatoare constantă $C : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$;
- 3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;
- 4) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, dacă X, Y sunt independente;
- 5) $X_{\min} \leq M(X) \leq X_{\max}$, unde X_{\min}, X_{\max} sunt valorile minime și maxime pe care le poate lua X ;
- 6) $a \leq M(X) \leq b$ unde X este o variabilă aleatoare continuă, iar $[a, b]$ e intervalul pentru care $f_X(x) \neq 0$.

Valoarea modală (moda).

Definiția 2.3.7. Se numește **valoarea modală** a variabilei aleatoare X numărul notat cu $M_o(X)$ care este valoarea variabilei X cu cea mai mare probabilitate (valoarea cea mai probabilă) pentru variabila aleatoare discretă, respectiv argumentul pentru care f are valoare maximă în cazul variabilelor de tip continuu.

Exemplul 2.3.9. Pentru variabila aleatoare prezentată în Exemplul 2.3.7 avem $M_o(X) = -2$.

Exemplul 2.3.10. Fie X din Exemplul 2.3.8. Avem $M_o(X) = 1$.

Valoarea mediană.

Definiția 2.3.8. Se numește **valoare mediană** a variabilei aleatoare X numărul $M_e(X)$ care împarte repartiția în două părți egale, adică e este numărul pentru care $P(X \leq M_e(X)) \geq \frac{1}{2} \leq P(X \geq M_e(X))$.

Observația 2.3.7. În cazul când se utilizează funcția de repartiție din Definiția 2.3.3 se deduce că

$$F(M_e(X)) = \frac{1}{2}$$

adică valoarea mediană este soluția inecuațiilor

$$F(M_e(X)) \leq \frac{1}{2} \quad \text{și} \quad F(M_e(X) + 0) \geq \frac{1}{2}.$$

Exemplul 2.3.11. În cazul variabilei X din Exemplul 2.3.8 avem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x 3t^2 dt, & x \in (0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases} \implies F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^3, & x \in (0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\implies F(x) = \frac{1}{2} \quad \text{adică} \quad x^3 = \frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = M_e(X).$$

Momentele de ordin superior. În aceeași categorie de caracteristici de grupare figurează așa zisele **momente de ordin superior**. În unele aplicații este nevoie să se utilizeze puterile naturale ale unei variabile aleatoare X^2, X^3, \dots, X^k , valori pentru care caracteristicile de grupare principale joacă un rol important. Astfel introducem momentele de ordin superior în următoarea definiție.

Definiția 2.3.9. Se numește **moment de ordin k** al variabilei aleatoare X și se notează ν_k numărul

$$\nu_k = M(X^k).$$

Se observă că $\nu_1 = M(X)$, $\nu_0 = 1$. Cele mai des utilizate în aplicații sunt ν_2 , ν_3 , ν_4 .

Exemplul 2.3.12. Fie $X : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$. Atunci

$$\nu_2 = M(X^2) = (-2)^2 \cdot 0,4 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,3 = 1,6 + 0,3 + 1,2 = 3,1;$$

$$\nu_3 = M(X^3) = (-8) \cdot 0,4 + 0,3 + 8 \cdot 0,3 = 3,2 + 0,3 + 2,4 = 5,9;$$

$$\nu_4 = M(X^4) = 16 \cdot 0,4 + 0,3 + 16 \cdot 0,3 = 6,4 + 0,3 + 4,8 = 11,5.$$

Exemplul 2.3.13. Pentru $X : \begin{pmatrix} x \\ 3x^2 \end{pmatrix}_{x \in [0,1]}$ avem

$$\nu_2 = \int_0^1 x^2 3x^2 dx = \frac{3}{5};$$

$$\nu_3 = \int_0^1 x^3 3x^2 dx = \frac{1}{2};$$

$$\nu_4 = \int_0^1 x^4 3x^2 dx = \frac{3}{7}.$$

Caracteristici de împrăștiere (sau de depărtare)

După ce au fost analizate principalele caracteristici de grupare vom evidenția cât de depărtate sunt valorile variabilei față de o valoare de grupare. Într-adevăr, valoarea medie dă informații asupra numărului în jurul căruia se grupează valorile variabilei, dar acestea nu sunt de ajuns. De exemplu în cazul variabilelor aleatoare care pot fi diferite dar să aibă aceeași valoare medie.

Exemplul 2.3.14. Fie variabilele $X_1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ și $X_2 : \begin{pmatrix} -100 & 100 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Atunci

$$M(X_1) = M(X_2) = 0,$$

cu toate că valorile lor diferă semnificativ.

Există mai multe caracteristici de împrăștiere. Cele mai des utilizate sunt

- dispersia (varianța);
- abaterea medie pătratică;
- momente centrate de ordin superior.

Dispersia. Dispersia este cea mai importantă caracteristică de împrăștiere.

Definiția 2.3.10. Se numește **dispersia** variabilei aleatoare X numărul notat $D(X)$ definit ca valoare medie a pătratului variabilei aleatoare abatere $[X - M(X)]$, adică numărul

$$D(X) = M[(X - M(X))^2].$$

Avem

$$\begin{aligned} D(X) &= \sum_{i \in I} (x_i - M(X))^2 p_i, \\ &\text{dacă } X \text{ este variabilă aleatoare discretă;} \\ D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx, \\ &\text{dacă } X \text{ e variabilă aleatoare continuă.} \end{aligned}$$

Propoziția 2.3.2. Dispersia are următoarele proprietăți

- 1) $D(X) \geq 0$;
- 2) $D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X)$;
- 3) $D(c) = 0$;
- 4) $D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)$ dacă X, Y sunt independente;
- 5) $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \nu_2 - \nu_1^2$.

Exemplul 2.3.15. Pentru $X : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \end{pmatrix}$ din Exemplul 2.3.7 avem valoarea medie $M(X) = 0.1$ și dispersia

$$D(X) = (-2 - 0,1)^2 \cdot 0,4 + (1 - 0,1)^2 \cdot 0,3 + (2 - 0,1)^2 \cdot 0,3 = 3,09$$

sau

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2 = 3,1 - 0,01 = 3,09.$$

Exemplul 2.3.16. În cazul variabilei aleatoare continue din Exemplul 2.3.8 avem

$$D(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 3x^2 dx = 3 \int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right) dx = \frac{3}{80},$$

sau

$$D(X) = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}.$$

Exemplul 2.3.17. Pentru X_1 din exemplul 2.3.14 avem

$$D(X_1) = (-1 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$

iar pentru X_2 din același exemplu aveam

$$D(X_2) = (-100 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (100 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{100^2}{2} = 10000.$$

Abaterea medie pătratică.

Definiția 2.3.11. Se numește **abatere medie pătratică** a variabilei aleatoare X și se notează $\sigma(X)$ numărul dat prin relația

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Abaterea medie pătratică a fost introdusă pentru că unitățile de măsură ale acestora sunt exact aceleași cu unitățile de măsură ale valorilor variabilei aleatoare.

Momentele centrate de ordin superior. Pentru $k \in \mathbb{N}$ se introduc ca o extensie a dispersiei, momentele centrate de ordin superior.

Definiția 2.3.12. Se numește **moment centrat de ordinul k** al variabilei aleatoare X și se notează μ_k valoarea medie a puterii k a variabilei abatere

$$\mu_k = M \left[(X - M(X))^k \right].$$

Observația 2.3.8. Momentele centrate de ordinul 1 și 2 sunt $\mu_1 = 0$ și $\mu_2 = D(X)$. Cele mai des utilizate sunt μ_3, μ_4 .

Teorema 2.3.2. Între momentele centrate de ordin superior μ_k și momentele de ordin superior ν_k există relația de legătură

$$\mu_k = \sum_{i=0}^k C_k^i (-1)^i \cdot \nu_{k-i} \cdot (\nu_1)^i.$$

În particular avem

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2; \\ \mu_3 &= \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3; \\ \mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.\end{aligned}$$

Demonstrația se face folosind definiția 2.3.12 a momentului centrat de ordin superior, formula binomului lui Newton pentru $(X - M(X))^k$ și proprietățile valorii medii.

Cazul distribuțiilor clasice. Prezentăm în continuare valoarea medie și dispersia în cazul variabilelor aleatoare care urmează distribuții clasice.

Distribuția	$M(X)$	$D(X)$
Binomială	np	npq
Hipergeometrică	$n \frac{a}{a+b}$	$n \frac{a}{a+b} \frac{b}{a+b} \frac{a+b-n}{a+b-1}$
Poisson	λ	λ
Pascal (Geometrică)	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Uniformă	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normală	m	σ^2

2.4 Repartiții clasice

După cum s-a văzut în Capitolul precedent, există două clase de variabile aleatoare și anume variabile aleatoare de tip discret și de tip continuu. În acest capitol se vor evidenția câteva astfel de variabile, de cele două tipuri, care sunt cunoscute și sub denumirea de **repartiții clasice**. Acestea sunt importante fie prin legătura lor cu diferite scheme clasice de probabilitate, fie funcțiile lor de probabilitate / densitate de probabilitate sunt funcții cunoscute cu anumite proprietăți remarcabile. Ele au fost studiate de-a lungul timpului de diferiți matematicieni cărora unele le poartă numele.

2.4.1 Repartiții clasice de tip discret

Acestea se împart la rândul lor în discrete simple și numărabile după numărul de valori (finit sau infinit) pe care le pot avea. Prezentăm în continuare cele mai cunoscute repartiții clasice de tip discret.

Repartiția hipergeometrică

Definiția 2.4.1. Variabila aleatoare X de tip discret urmează **legea hipergeometrică** dacă distribuția ei are forma:

$$X : \left(P_{a,b}(k, n-k) \right)_{k=0, n}, \quad \text{unde} \quad P_{a,b}(k, n-k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n},$$

$a, b, n \in \mathbb{N}$ sunt parametrii distribuției care trebuie să îndeplinească condițiile

$$n \leq a + b; \quad \max(0, n-b) \leq k \leq \min(n, a).$$

Observația 2.4.1. Probabilitățile $P_{a,b}(k, n-k)$ din distribuția lui X sunt cele de la schema urnei cu bila nerevenită cu două stări (schema hipergeometrică).

Verificarea condițiilor pentru ca $P_{a,b}(k, n-k)$ să fie o funcție de probabilitate are loc în două etape.

- 1) $P_{a,b}(k, n-k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} > 0;$
- 2) $\sum_{k=0}^n P_{a,b}(k, n-k) = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_{k=0}^n C_a^k C_b^{n-k} = 1.$

A doua relație are loc dacă se ține seama de **relația lui Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^n C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n.$$

Aceasta se demonstrează prin identificarea coeficienților lui x^n din egalitatea

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a (1+x)^b, \quad n \leq a+b.$$

Notăm în cele ce urmează

$$p = \frac{a}{a+b}, \quad q = \frac{b}{a+b}$$

probabilitățile evenimentelor ca la prima extragere să se obțină o bilă de culoarea din care avem a bile, respectiv de culoarea din care avem b bile. Este atunci imediată egalitatea

$$p + q = 1.$$

Ne propunem să calculăm în continuare principalele caracteristici numerice pentru distribuția hipergeometrică, și anume valoarea medie și dispersia.

Calculul valorii medii pentru distribuția hipergeometrică Conform relației de definiție avem

$$M(X) = \sum_{k=0}^n k P_{a,b}(k, n-k) = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_{k=1}^n k C_a^k C_b^{n-k}.$$

Modificăm produsul $k C_a^k$ astfel:

$$k C_a^k = k \frac{a!}{k! (a-k)!} = a \frac{(a-1)!}{(k-1)! (a-k)!} = a C_{a-1}^{k-1}.$$

Atunci, pentru valoarea medie avem folosind relația lui Vandermonde

$$M(X) = \frac{a}{C_{a+b}^n} \sum_{k=1}^n k C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k} = \frac{a}{C_{a+b}^n} C_{a+b-1}^{n-1}.$$

Se efectuează simplificările după scrierea explicită a combinațiilor și obținem

$$M(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} = n \cdot p.$$

Calculul dispersiei pentru distribuția hipergeometrică Vom porni cu formula de calcul a dispersiei și anume

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Calculăm pentru început momentul de ordinul doi

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 P_{a,b}(k, n-k) = \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_{k=1}^n k^2 C_a^k C_b^{n-k} \\ &= \frac{1}{C_{a+b}^n} \sum_{k=1}^n [k(k-1) + k] C_a^k C_b^{n-k} \\ &= \frac{1}{C_{a+b}^n} \left[\sum_{k=2}^n k(k-1) C_a^k C_b^{n-k} + \sum_{k=1}^n k C_a^k C_b^{n-k} \right]. \end{aligned}$$

Se evaluează următoarele expresii

$$\begin{aligned} k(k-1) C_a^k &= k(k-1) \frac{a!}{k! (a-k)!} = \\ &= a(a-1) \frac{(a-2)!}{(k-2)! (a-k)!} = a(a-1) C_{a-2}^{k-2}, \quad k \geq 2; \end{aligned}$$

$$kC_a^k = aC_{a-1}^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Momentul de ordinul doi se va scrie succesiv după cum urmează (se folosește relația lui Vandermonde):

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \frac{a}{C_{a+b}^n} \sum_{k=1}^n C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k} + \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^n} \sum_{k=2}^n C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} \\ &= \frac{a}{C_{a+b}^n} C_{a+b-1}^{n-1} + \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^n} C_{a+b-2}^{n-2} \\ &= n \frac{a}{a+b} + n(n-1) \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}. \end{aligned}$$

Știind că $M(X) = n \frac{a}{a+b}$, putem calcula dispersia astfel:

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2) - [M(X)]^2 \\ &= n \frac{a}{a+b} + n(n-1) \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} - n^2 \frac{a^2}{(a+b)^2} \\ &= n \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a+b-n}{a+b-1} \end{aligned}$$

sau

$$D(X) = n \cdot p \cdot q \frac{a+b-n}{a+b-1}.$$

În concluzie, pentru repartiția hipergeometrică avem

$$M(X) = n \cdot p$$

$$D^2(X) = n \cdot p \cdot q \frac{a+b-n}{a+b-1}$$

cu $p = \frac{a}{a+b}, q = \frac{b}{a+b}.$

Repartiția binomială

Definiția 2.4.2. Variabila aleatoare de tip discret urmează **legea binomială** dacă distribuția ei are forma:

$$X : \left(\begin{matrix} k \\ P(n, k) \end{matrix} \right)_{k=\overline{0, n}}$$

unde $P(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad p \in [0, 1], \quad q = 1 - p.$

Observația 2.4.2. Probabilitățile $P(n, k)$ din distribuția lui X sunt cele de la schema urnei lui Bernoulli (schema binomială).

Condițiile din definiția unei funcții de probabilitate sunt verificate de $P(n, k)$ după cum urmează:

- 1) $P(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k} \geq 0$;
- 2) $\sum_{k=0}^n P(n, k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$.

Calculul valorii medii pentru distribuția binomială

$$M(X) = \sum_{k=0}^n k P(n, k) = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Exprimăm produsul $k C_n^k$ astfel

$$k C_n^k = k \frac{n!}{k! (n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} = n C_{n-1}^{k-1}.$$

Atunci avem

$$M(X) = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k} = np (p + q)^{n-1} = np$$

deci $M(X) = n \cdot p$.

Calculul dispersiei pentru distribuția binomială Pornim cu relația de calcul a dispersiei și anume

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

iar momentul de ordinul doi este

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 P(n, k) = \sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n [k(k-1) + k] C_n^k p^k q^{n-k} = \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k} + np. \end{aligned}$$

Se evaluează produsul $k(k-1) C_n^k$ astfel:

$$k(k-1) C_n^k = k(k-1) \frac{n!}{k! (n-k)!} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)! (n-k)!}$$

și avem

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=2}^n n(n-1) C_{n-2}^{k-2} p^k q^{n-k} + np = \\ &= n(n-1) \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} p^k q^{n-k} + np = \\ &= n(n-1) p^2 \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k p^k q^{n-2-k} + np = \\ &= n(n-1) p^2 (p + q)^{n-2} + np = \\ &= n(n-1) p^2 + np. \end{aligned}$$

Atunci, pentru dispersie avem

$$D(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

sau

$$D(X) = npq.$$

În concluzie, la repartiția binomială avem

$$M(X) = n \cdot p, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q.$$

Observația 2.4.3. La repartiția hipergeometrică am introdus notațiile $p = \frac{a}{a+b}$ și $q = \frac{b}{a+b}$ și dacă facem ca $a+b \rightarrow \infty$ obținem din repartiția hipergeometrică repartiția binomială.

Repartiția Poisson

Definiția 2.4.3. Variabila aleatoare X de tip discret urmează **legea Poisson** dacă distribuția ei are forma

$$X : \left(P_{\lambda}(k) \right)_{k=0,1,2,\dots}$$

$$\text{unde } P_{\lambda}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \text{și } \lambda > 0.$$

Condițiile pentru funcția de probabilitate se verifică astfel

- 1) $P_{\lambda}(k) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} > 0$ pentru $\lambda > 0$;
- 2) $\sum_{k=0}^{\infty} P_{\lambda}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$

unde am ținut cont de dezvoltarea în serie Mac Laurin a funcției e^x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calculul valorii medii pentru repartiția Poisson

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_{\lambda}(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

Calculul dispersiei pentru repartiția Poisson

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Momentul de ordinul doi se calculează astfel

$$\begin{aligned}
 M(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_{\lambda}(k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} [k(k-1) + k] \frac{\lambda^k}{k!} \\
 &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
 &= \lambda^2 + \lambda.
 \end{aligned}$$

Atunci dispersia este

$$D(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

În concluzie, la repartiția Poisson avem

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

Observația 2.4.4. Dacă variabila aleatoare X urmează legea binomială, adică are distribuția

$$X : \left(\begin{matrix} k \\ P(n, k) \end{matrix} \right)_{k=0, \dots, n} \quad \text{unde} \quad P(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

și dacă $p = p_n$ astfel încât $np_n = \lambda > 0$, atunci pentru $n \rightarrow \infty$, X urmează legea lui Poisson, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Într-adevăr, dacă $p = p_n = \frac{\lambda}{n}$ și $q = 1 - p = 1 - \frac{\lambda}{n}$ atunci putem scrie

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} P(n, k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{n-k} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n} \right)^n \\
 &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.
 \end{aligned}$$

Observația 2.4.5. Deoarece $np_n = \lambda$, când $n \rightarrow \infty$ probabilitatea p_n este mică. Această probabilitate se consideră ca fiind probabilitatea de apariție a unui eveniment. Ea fiind mică, legea lui Poisson se mai numește și **legea evenimentelor rare**.

Repartiția geometrică

Definiția 2.4.4. Variabila aleatoare X de tip discret urmează **legea geometrică** dacă distribuția ei are forma:

$$X : \left(\begin{matrix} k \\ P(k) \end{matrix} \right)_{k=1,2,3,\dots}$$

unde $P(k) = pq^{k-1}$, $p \in (0, 1)$ și $q = 1 - p$.

Verificarea condițiilor pentru funcția de probabilitate:

$$1) P(k) = pq^{k-1} > 0;$$

$$2) \sum_{k=1}^{\infty} P(k) = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \frac{1}{1-q} = 1.$$

unde s-a folosit formula pentru suma seriei geometrice de rație subunitară q :

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Observația 2.4.6. Probabilitățile $P(k)$ sunt cele din schema geometrică.

Calculul valorii medii pentru repartiția geometrică

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}.$$

Considerăm suma

$$\begin{aligned} s_1 = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} &= 1 + 2q + 3q^2 + \dots = (q + q^2 + q^3 + \dots) \\ &= \left(\frac{q}{1-q} \right)' = \frac{1}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

Atunci avem

$$M(X) = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Calculul dispersiei pentru repartiția geometrică Pornim de la relația de calcul

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

iar momentul de ordinul doi este

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 pq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}.$$

Considerăm sumele

$$\begin{aligned} s_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = 1 + 2^2 q + 3^2 q + \dots \\ qs_1 &= q + 2q^2 + 3q^3 + \dots \\ (qs_1)' &= 1 + 2^2 q + 3^2 q^2 + \dots \end{aligned}$$

de unde avem că

$$s_2 = (qs_1)' = \left[\frac{q}{(1-q)^2} \right]' = \frac{1+q}{(1-q)^2}.$$

Atunci

$$M(X^2) = ps_2 = \frac{1+q}{p^2}$$

iar

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

În concluzie, pentru repartiția geometrică avem

$$M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2}, \text{ cu } p+q=1.$$

Definiția 2.4.5. Variabila aleatoare X de tip discret urmează **legea lui Pascal** dacă are distribuția de forma:

$$X : \left(P(n, k) \right)_{k=0,1,2,\dots}$$

unde $P(n, k) = C_{n+k-1}^k p^n q^k$, $p \in (0, 1)$ și $q = 1 - p$.

Observația 2.4.7. Probabilitățile $P(n, k)$ sunt cele de la schema lui Pascal.

Observația 2.4.8. În cazul particular $n = 1$, variabila aleatoare X urmează legea geometrică.

2.4.2 Repartiții clasice de tip continuu

Repartiția uniformă

Definiția 2.4.6. Variabila aleatoare X de tip continuu urmează **legea uniformă** dacă distribuția ei are forma:

$$X : \left(f(x) \right)_{x \in \mathbb{R}}$$

unde densitatea ei de probabilitate $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Verificarea condițiilor pentru funcția densitate de probabilitate:

1) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ pentru $a < b$;

$$2) \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{x}{b-a} \Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Funcția de repartiție Folosim definiția funcției de repartiție, și anume

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

și distingem următoarele cazuri:

– dacă $x \leq a$, atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0;$$

– dacă $a < x \leq b$, atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = 0 + \left. \frac{t}{b-a} \right|_a^x = \frac{x-a}{b-a};$$

– dacă $x > b$ atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{1}{b-a} dt + \int_b^x 0 dt = \left. \frac{t}{b-a} \right|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

În concluzie, funcția de repartiție pentru repartiția uniformă este dată prin

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Calculul valorii medii pentru repartiția uniformă Folosim relația de calcul pentru valoarea medie în cazul continuu și anume

$$M(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

deci

$$M(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Calculul dispersiei pentru repartiția uniformă Folosim din nou relația

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

și avem

$$M(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

deci

$$M(X^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

și dispersia este

$$D(X) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

În concluzie, pentru variabila aleatoare care are repartiția uniformă, avem

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Repartiția normală

Această repartiție este deosebit de importantă deoarece s-a constatat că multe fenomene empirice sunt descrise de legea normală. Graficul densității de probabilitate este numit și **curba** sau **clopotul lui Gauss**.

Definiția 2.4.7. Variabila aleatoare X de tip continuu urmează **legea normală** dacă distribuția ei are forma:

$$X : \left(f(x; m, \sigma) \right)_{x \in \mathbb{R}}$$

unde

$$f(x; m, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

iar m și σ sunt parametrii repartiției, cu $m, \sigma \in \mathbb{R}$ și $\sigma > 0$.

Verificarea condițiilor pentru funcția densitate de probabilitate:

1) $f(x; m, \sigma) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$;

2) $\int_{\mathbb{R}} f(x; m, \sigma) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$

Se face substituția

$$u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$$

de unde obținem:

$$x-m = \sqrt{2}\sigma u \quad \text{sau} \quad x = m + \sqrt{2}\sigma u \quad \text{și} \quad dx = \sqrt{2}\sigma du.$$

Atunci avem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x; m, \sigma) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2}\sigma du = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \end{aligned}$$

unde s-a folosit valoarea integralei Euler-Poisson

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Funcția de repartiție

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Facem substituția

$$\frac{t-m}{\sigma} = y \implies t = \sigma y + m \quad \text{și} \quad dt = \sigma dy.$$

Atunci

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

unde $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este **funcția integrală a lui Laplace** dată prin

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

pentru valorile căreia există tabele.

Proprietățile funcției lui Laplace sunt:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \Phi(0) = 0; & \text{b)} \quad & \Phi(+\infty) = \frac{1}{2}; \\ \text{c)} \quad & \Phi(-\infty) = -\frac{1}{2}; & \text{d)} \quad & \Phi(-z) = -\Phi(z), \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

În concluzie, funcția de repartiție pentru repartiția normală este

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Observația 2.4.9. Folosind funcția lui Laplace putem da formule de calcul pentru următoarele probabilități

$$\begin{aligned} 1) \quad & P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right); \\ 2) \quad & P(m-r < X < m+r) = P(|X-m| < r) = \\ & = \Phi\left(\frac{m+r-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-r-m}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{r}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Dacă $r = k\sigma$ avem

$$P(|X-m| < k\sigma) = 2\Phi(k)$$

de unde obținem prin particularizare

$$\begin{aligned} P(|X-m| < \sigma) &= 2\Phi(1) = 0,6826; \\ P(|X-m| < 2\sigma) &= 2\Phi(2) = 0,9544; \\ P(|X-m| < 3\sigma) &= 2\Phi(3) = 0,9972. \end{aligned}$$

Calculul valorii medii pentru repartiția normală

$$M(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x; m, \sigma) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Facem din nou substituția

$$u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma} \implies x = m + \sqrt{2}\sigma u, \quad dx = \sqrt{2}\sigma du$$

și obținem

$$\begin{aligned} M(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (m + \sqrt{2}\sigma u) e^{-u^2} \sqrt{2}\sigma du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du + \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} du \right]. \end{aligned}$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

și atunci, pentru că a doua integrală este nulă (integrala unei funcții impare pe interval simetric față de origine),

$$M(X) = m,$$

deci parametrul m este tocmai media repartiției normale.

Calculul dispersiei pentru repartiția normală De această dată vom folosi definiția dispersiei ca fiind momentul centrat de ordinul doi și avem:

$$D(X) = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 \cdot f(x; m, \sigma) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Facem substituția $u = \frac{x-m}{\sqrt{2}\sigma}$ și avem $(x-m)^2 = 2\sigma^2 u^2$ de unde obținem

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sigma^2 u^2 e^{-u^2} \sqrt{2}\sigma du \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u (e^{-u^2})' du \\ &= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \sigma^2 \end{aligned}$$

deci parametrul σ este tocmai abaterea medie pătratică pentru repartiția normală.

2.5 Exerciții și probleme rezolvate

Problema 2.5.1. Se studiază alegerea unui proiect de modernizare a unei companii. S-au prezentat 3 proiecte care pot fi viabile sau nu. Dacă notăm cu A_i , $i = \overline{1,3}$, evenimentul „proiectul i este viabil”, să se exprime în funcție de A_1, A_2, A_3 următoarele evenimente:

- a) toate proiectele sunt viabile;
- b) cel puțin un proiect este viabil;
- c) două proiecte sunt viabile;
- d) cel mult două proiecte sunt viabile;
- e) un singur proiect este viabil.

Soluție: Notăm cu \bar{A}_i , $i = \overline{1,3}$, evenimentul „proiectul i nu este viabil”.

a) Notăm cu A evenimentul „toate proiectele sunt viabile” $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$, adică toate cele 3 proiecte sunt rentabile.

b) Notăm cu B evenimentul „cel puțin un proiect este viabil” și astfel putem scrie $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

c) Notăm cu C evenimentul „două proiecte sunt viabile”.

$$C = (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

d) Notăm cu D evenimentul „cel mult două proiecte sunt viabile”. Evenimentul D este echivalent cu a spune că: nici un proiect nu este viabil, doar un proiect este viabil sau două proiecte sunt viabile.

$$D = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup C.$$

e) Notăm cu E evenimentul „un singur proiect este viabil”. Atunci:

$$E = (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3).$$

Problema 2.5.2. O monedă este aruncată de 3 ori și secvența de mărci și steme este înregistrată.

a) Scrieți spațiul evenimentelor elementare Ω

b) Scrieți următoarele evenimente, folosind evenimentele elementare:

A -să apară cel puțin 2 steme

B -primele 2 aruncări sunt steme

C -ultima aruncare este marcă

c) Determinați următoarele evenimente:

$$1) C_A; \quad 2) A \cap B; \quad 3) A \cup C$$

Soluție: Spațiul evenimentelor aleatoare Ω este:

$\Omega = \{SSS, SSM, SMS, MSS, MMS, MSM, SMM, MMM\}$, unde cu S notăm apariția stemei, iar cu M apariția mărcii.

b) Evenimentele A, B, C , se scriu folosind evenimentele elementare din Ω după cum urmează:

$$A = \{SSS, SSM, SMS, MSS\}$$

$$B = \{SSM, SSS\}$$

$$C = \{SSM, SMM, MMM, MSM\}$$

c) Evenimentele C_A , $A \cap B$, $A \cup B$ se scriu folosind punctul b) astfel:

$$C_A = \bar{A} = \{SMM, MMM, MMS, MSM\}$$

$$A \cap B = \{SSM, SSS\}$$

$$A \cup C = \{SSS, SSM, SMS, MSS, SMM, MMM, MSM\}$$

Problema 2.5.3. Presupunem că într-o cameră sunt 5 persoane. Care este probabilitatea ca cel puțin 2 persoane să aibă aceeași zi de naștere.

Soluție: Fie A evenimentul „cel puțin 2 persoane au aceeași zi de naștere”. Atunci \bar{A} este evenimentul „cele 5 persoane au zile de naștere diferite”

Presupunem că anul are 365 zile

$$\text{Așadar } P(\bar{A}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5}$$

$$\text{Deci, } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot 362 \cdot 361}{365^5}$$

Problema 2.5.4. În România numerele de înmatriculare ale mașinilor au 7 caractere: 2 litere urmate de 2 cifre și alte trei litere. Dacă toate secvențele de 7 caractere sunt egal probabile, care este probabilitatea ca numărul de înmatriculare al unei mașini noi să nu conțină cifre și litere identice?

Soluție: Notăm cu A evenimentul cerut.

Alfabetul conține 26 litere, iar cifrele de pe numărul de înmatriculare pot fi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Numărul total de plăcuțe de înmatriculare este $26^5 \times 10^2$ (corespunzătoare celor 5 litere și 2 cifre). Numărul plăcuțelor ce conțin litere și cifre diferite este: $(26 \cdot 25) \times (10 \cdot 9) \times (24 \cdot 23 \cdot 22)$ (corespunzătoare primelor 2 litere diferite, urmate de 2 cifre diferite și alte trei litere diferite de primele 2 și diferite între ele).

$$\text{Deci, } P(A) = \frac{26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{26^5 \cdot 10^2} = 0,597$$

Problema 2.5.5. Fie $P_B(A) = \frac{1}{2}$, $P_{\bar{B}}(A) = \frac{1}{2}$ și $P_A(B) = \frac{1}{2}$. Se cere :

a) să se determine $P(A)$ și $P(B)$.

b) evenimentele A și B sunt independente?

Soluție: Folosind definiția probabilității condiționate se obține:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$$

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A \setminus B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{1}{2}$$

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$$

Dacă notăm $P(A) = x$, $P(B) = y$, $P(A \cap B) = z$, se obține sistemul liniar:

$$\begin{cases} \frac{z}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{x-z}{1-y} = \frac{1}{2} \\ \frac{z}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{2}y \\ z = \frac{1}{2}x \\ x - z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y \end{cases}, \text{ de unde prin calcule } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{4}.$$

$$\text{În concluzie: } P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}$$

Condiția ca evenimentele A și B să fie independente este: $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

Deoarece $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) P(B)$ se obține că evenimentele A și B sunt independente.

Problema 2.5.6. O firmă de asigurări are clienți din 3 categorii de risc: ridicat, mediu, scăzut, care au respectiv probabilitățile de a cere despăgubiri în caz de accidente: 0,02, 0,01, 0,0025 într-un an. Proporțiile celor 3 categorii de clienți în cadrul companiei sunt respectiv 10%, 20%, 70%. Care este probabilitatea ca un client al firmei să fie despăgubit? Care este proporția de despăgubiri ce provin într-un an de la clienții cu risc ridicat?

Soluție: Notăm cu B evenimentul „un client al companiei este despăgubit” și cu:

A_1 -evenimentul „clientul provine din categoria de risc ridicat”

A_2 -evenimentul „clientul provine din categoria de risc mediu”

A_3 -evenimentul „clientul provine din categoria de risc scăzut”

Sistemul $\{A_1, A_2, A_3\}$, formează un sistem complet de evenimente deoarece reuniunea lor este evenimentul sigur Ω și sunt două câte două incompatibile. Astfel conform formulei probabilității totale:

$$P(B) = P(A_1) P\left(\frac{B}{A_1}\right) + P(A_2) P\left(\frac{B}{A_2}\right) + P(A_3) P\left(\frac{B}{A_3}\right) = 0,1 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,01 + 0,7 \cdot 0,0025 = 0,00575.$$

Pentru a răspunde la a doua întrebare folosim formula lui Bayes:

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1) P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)} = \frac{0,1 \cdot 0,02}{0,00575} = 0,347.$$

Problema 2.5.7. La o loterie sunt 100 bilete, din care 10 sunt câștigătoare. O persoană cumpără 15 bilete. Săse determine probabilitatea ca:

- 1 bilet să fie câștigător;
- să se obțină toate cele 10 bilete câștigătoare;
- cel puțin 2 bilete să fie câștigătoare.

Rezolvare: Se aplică schema urnei cu 2 stări și bila nerevenită.

$$a) P_{10,90}(1,14) = \frac{C_{10}^1 C_{90}^{14}}{C_{100}^{15}} \quad b) P_{10,90}(10,5) = \frac{C_{10}^{10} C_{90}^5}{C_{100}^{15}}$$

c) Fie A evenimentul ca „cel puțin 2 bilete să fie câștigătoare,,. Considerăm \bar{A} evenimentul contrar ca ca cel mult unul din cele 15 cumpărate să fie câștigător. Are loc:

$$P(\bar{A}) = P_{10,90}(0,15) + P_{10,90}(1,14) = \frac{C_{10}^0 C_{90}^{15}}{C_{100}^{15}} + \frac{C_{10}^1 C_{90}^{14}}{C_{100}^{15}}$$

Probabilitatea cerută va fi $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Problema 2.5.8. Un depozit de piese auto are în stoc piese de la 4 furnizori în următoarele cantități: 100 de la furnizorul F_1 , 50 de la F_2 , 30 de la F_3 și 80 de la F_4 .

În decursul unei săptămâni, depozitul a vândut 45 piese. Care e probabilitatea ca din cele 45 de piese vândute, 15 să provină de la furnizorul F_1 , 5 de la F_2 , 10 de la F_3 și 15 de la F_4 .

Rezolvare: Se aplică schema urnei cu 4 stări și bila nerevenită, unde $a_1 = 100, a_2 = 50, a_3 = 30, a_4 = 80$ $k_1 = 15, k_2 = 5, k_3 = 10, k_4 = 15$. Probabilitatea cerută este:

$$P_{100,50,30,80}(15,5,10,15) = \frac{C_{100}^{15} C_{50}^5 C_{30}^{10} C_{80}^{15}}{C_{260}^{45}}$$

Problema 2.5.9. Pe parcursul unei săptămâni s-a dat predicția cursului valutar, astfel încât cursul poate să crească zilnic cu probabilitatea $\frac{1}{4}$, respectiv să scadă cu probabilitatea $\frac{3}{4}$. Stabiliți probabilitatea ca:

- în 5 zile ale săptămânii cursul valutar să crească;
- în cel mult 3 zile cursul valutar să crească;
- în cel puțin 2 zile cursul valutar să crească;

Rezolvare: Considerăm evenimentul A „cursul valutar să crească într-o zi,,. În fiecare zi poate avea loc A sau \bar{A} .

Se aplică schema urnei cu 2 stări și bila revenită (schema binomială), unde: $n = 7, p = P(A) = \frac{1}{4}, q = P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$,

Probabilitatea de a se produce A de k ori este: $P(k) = C_7^k p^k q^{7-k}$.

$$a) \text{ Probabilitatea cerută este: } P_7(5) = C_7^5 p^5 q^{7-5} = C_7^5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

b) Probabilitatea cerută este:

$$\sum_{k=0}^3 P_7(k) = \sum_{k=0}^3 C_7^k p^k q^{7-k} = \sum_{k=0}^3 C_7^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{7-k}.$$

c) Notăm cu C evenimentul „cursul valutar să crească în cel puțin 2 zile,,. Atunci \bar{C} este evenimentul: „cursul valutar să nu crească în nici o zi sau să crească într-o zi,,. Așadar putem scrie:

$$P(\bar{C}) = P_7(0) + P_7(1) = C_7^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^7 + C_7^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

Probabilitatea cerută este:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}).$$

Problema 2.5.10. *Un supermarket vinde următoarele sortimente de cafea: naturală, cappuccino și espresso. Probabilitatea ca un client să cumpere cafea naturală este 0,55, cappuccino 0,3, iar espresso 0,15.*

Determinați probabilitatea ca din 100 clienți, 70 să cumpere cafea naturală, 20 să cumpere cappuccino, iar 10 să cumpere espresso.

Rezolvare: Aplicăm schema urnei cu 3 stări și bila revenită (schema multinomială)

Fie A_i , evenimentul ca un client să cumpere sortimentul i de cafea, $i = \overline{1, 3}$. Avem evident:

$$p_1 = P(A_1) = 0,55, \quad p_2 = P(A_2) = 0,3, \quad p_3 = P(A_3) = 0,15, \quad n = 100, \quad k_1 = 70, \quad k_2 = 20, \quad k_3 = 10$$

Probabilitatea cerută este:

$$P_{100}(70, 20, 10) = \frac{100!}{70!20!10!} (0,55)^{70} (0,30)^{20} (0,15)^{10}$$

Problema 2.5.11. *Care e probabilitatea ca al 80-lea client care intră într-o bancă, să fie a 20-a persoană care încheie o poliță de asigurare, știind că probabilitatea ca cineva să încheie o poliță de asigurare este de 0,6.*

Rezolvare: Se aplică schema lui Pascal cu $n = 80$ (numărul clienților), $k = 20$ (numărul succeselor), $p = 0,6$, $q = 0,4$.

$$\text{Probabilitatea cerută este: } C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k} = C_{79}^{19} (0,6)^{20} (0,4)^{60}.$$

Problema 2.5.12. *La trei reprezentanțe ale concernului Nokia se găsesc telefoane mobile cu ecran color sau alb-negru în următoarele proporții: la prima reprezentanță 14 cu ecran color și 16 cu ecran alb-negru, la a doua 13 cu ecran color și 17 cu ecran alb-negru, iar la a treia 14 cu ecran color și 18 cu ecran alb-negru. Se alege la întâmplare câte un telefon mobil de la fiecare reprezentanță, pentru a fi supus unor probe de verificare. Care e probabilitatea ca din cele 3 telefoane alese două să fie cu ecran color, iar unul cu ecran alb-negru?*

Rezolvare: Aplicăm schema lui Poisson. Pentru aceasta notăm cu p_i probabilitatea ca telefonul ales de la reprezentanța i să aibă ecran color, $i = \overline{1, 3}$. Avem că:

$$p_1 = \frac{14}{30}, \quad q_1 = \frac{16}{30}, \quad p_2 = \frac{13}{30}, \quad q_2 = \frac{17}{30}, \quad p_3 = \frac{14}{32}, \quad q_3 = \frac{18}{32}$$

Conform schemei lui Poisson, probabilitatea cerută este dată de coeficientul lui t^2 al polinomului $(p_1 t + q_1)(p_2 t + q_2)(p_3 t + q_3)$

adică de:

$$p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = \frac{14}{30} \frac{13}{30} \frac{18}{32} + \frac{14}{30} \frac{17}{30} \frac{14}{32} + \frac{16}{30} \frac{13}{30} \frac{14}{32} = 0,33.$$

Problema 2.5.13. *Variabila aleatoare discretă X ia valorile $-1, 0, 1$ cu probabilitățile $p_1, \frac{1}{3}$ și respectiv p_3 . Să se determine*

- probabilitățile p_1 și p_3 știind că valoarea medie a variabilei aleatoare X este $\frac{1}{3}$;*
- abaterea medie pătratică;*
- momentul centrat de ordinul trei;*
- valoarea medie și dispersia variabilei aleatoare $Y = 3X + 2$.*

Rezolvare.

- Valoarea medie a variabilei aleatoare de tip discret X este

$$M(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p_i = (-1) \cdot p_1 + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot p_3 = \frac{1}{3},$$

prin urmare $p_3 - p_1 = \frac{1}{3}$.

Mai știm că $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$, prin urmare $p_1 + \frac{1}{3} + p_3 = 1$. Așadar obținem următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} p_3 - p_1 = \frac{1}{3} \\ p_1 + p_3 + \frac{1}{3} = 1 \end{cases}$$

având soluțiile $p_1 = \frac{1}{6}$ și $p_3 = \frac{1}{2}$. Prin urmare distribuția variabilei aleatoare date este

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b) Dispersia variabilei aleatoare X o putem calcula cu ajutorul formulei

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Știind că valoarea medie $M(X) = \frac{1}{3}$, mai rămâne de calculat valoarea medie $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p_i = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

Prin urmare

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}.$$

Așadar obținem abaterea medie pătratică

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

c) Momentul centrat de ordinul 3 al variabilei X este

$$\begin{aligned} \mu_3 &= M[(X - M(X))^3] = M\left[\left(X - \frac{1}{3}\right)^3\right] = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(X_i - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot p_i = \\ &= \left(-1 - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{7}{27}. \end{aligned}$$

Cunoscând faptul că momentul centrat de ordinul k se poate exprima și cu ajutorul momentelor de ordinul k prin formula

$$\mu_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i \nu_{k-i} \nu_1^i,$$

putem obține rezultatul de mai sus astfel

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3.$$

Momentul de ordinul 3 al variabilei aleatoare X este

$$\nu_3 = M(X^3) = \sum_{i=1}^3 x_i^3 \cdot p_i = \frac{1}{3}.$$

Prin urmare momentul centrat de ordinul 3 este

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2 = \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{7}{27}.$$

d) Folosindu-ne de proprietățile valorii medii și a dispersiei obținem:

$$\begin{aligned} M(Y) &= M(3X + 2) = 3 \cdot M(X) + 2 = 3; \\ D(Y) &= D(3X + 2) = 3^2 \cdot D(X) = 5. \end{aligned}$$

Problema 2.5.14. Fie X o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \leq 0 \end{cases}.$$

Să se determine valoarea medie și dispersia.

Rezolvare. Valoarea medie a variabilei aleatoare de tip continuu este

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2.$$

Pentru dispersie folosim formula

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

unde

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6.$$

Prin urmare $D(X) = 6 - 4 = 2$, iar abaterea medie pătratică este

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2}.$$

Problema 2.5.15. O variabilă aleatoare X urmează legea binomială cu valoarea medie egală cu 300 și dispersia egală cu 100. Să se afle n , p și q .

Rezolvare. Variabila aleatoare ce urmează legea binomială are $M(X) = n \cdot p$ și $D(X) = n \cdot p \cdot q$. Prin urmare $n \cdot p = 300$ și $n \cdot p \cdot q = 100$. Efectuând substituția obținem $300q = 100$. Prin urmare $q = \frac{1}{3}$. Rezultă de aici că $p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ și prin urmare $n = \frac{300}{p}$, deci $n = 450$.

Problema 2.5.16. Probabilitatea cu care se consumă energie electrică într-o unitate comercială într-o zi este 0,8. Fie X numărul zilelor din săptămână când consumul este normal. Să se scrie distribuția variabilei aleatoare X și să se calculeze valoarea sa medie și dispersia.

Rezolvare. Se observă că variabila aleatoare X urmează legea binomială de parametrii: $n = 7$ (sunt 7 zile într-o săptămână), $p = 0,8$ (probabilitatea să se consume energie electrică în unitatea comercială) și $q = 1 - p = 0,2$.

Distribuția variabilei aleatoare este următoarea:

$$X : \left(C_7^k \cdot (0,8)^k \cdot (0,2)^{7-k} \right)_{k=0,7}$$

Valoarea medie este dată de formula: $M(X) = n \cdot p = 7 \cdot 0,8 = 5,6$.

Dispersia este: $D(X) = n \cdot p \cdot q = 7 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 5,6 \cdot 0,2 = 1,12$.

Problema 2.5.17. O agenție imobiliară are spre vânzare un imobil cu 10 apartamente. Patru dintre acestea sunt cu o singură cameră. În decurs de o săptămână s-au prezentat la agenția imobiliară 3 cumpărători. Fie X numărul clienților ce au cumpărat apartamente cu o cameră. Să se scrie distribuția variabilei aleatoare X și să se calculeze valoarea medie și dispersia ei.

Rezolvare. Variabila aleatoare X urmează legea hipergeometrică de parametrii $n = 3$, $a = 4$, $b = 6$, $p = 0,4$, $q = 0,6$.

Distribuția variabilei aleatoare X este:

$$X : \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p(0) & p(1) & p(2) & p(3) \end{array} \right).$$

cu $p(k) \geq 0$, $k = \overline{0,3}$ și $\sum_{k=0}^3 p(k) = 1$, unde $p(k)$, $k = \overline{0,3}$ reprezintă probabilitățile evenimentelor ca din cele trei apartamente cumpărate k să fie cu o singură cameră. Aceste probabilități sunt calculate cu ajutorul schemei hipergeometrice și sunt egale cu:

$$p(k) = \frac{C_4^k C_6^{3-k}}{C_{10}^3}, \quad k = \overline{0,3}.$$

Se obține $p(0) = \frac{1}{6}$, $p(1) = \frac{1}{2}$, $p(2) = \frac{3}{10}$ și $p(3) = \frac{1}{30}$.

Prin urmare distribuția lui X este:

$$X : \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{30} \end{array} \right)$$

X urmând legea hipergeometrică are:

$$M(X) = n \cdot p = 3 \cdot 0,4 = 1,2$$

și

$$D(X) = n \cdot p \cdot q \frac{a+b-n}{a+b-1} = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,6 \cdot \frac{10-3}{10-1} = 1,2 \cdot 0,6 \cdot \frac{7}{9} = 0,56.$$

Problema 2.5.18. O variabilă aleatoare X urmează legea binomială cu parametrii $n = 4$ și $p = \frac{1}{4}$.

a) Scrieți distribuția variabilei aleatoare X .

b) Scrieți funcția densitate de probabilitate a variabilei aleatoare normale cu aceiași valoare medie și dispersie ca și X .

c) Calculați $P(1 \leq X < 2)$.

Rezolvare. a) Distribuția variabilei aleatoare X ce urmează legea binomială este:

$$X : \left(C_4^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{4-k} \right)_{k=0,4}$$

b) Valoarea medie și dispersia pentru variabila aleatoare X sunt:

$$M(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1 \quad \text{și} \quad D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Dacă variabila aleatoare X' urmează legea normală cu funcția densitate de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

și având media și dispersia egale cu cele ale variabilei aleatoare X , atunci: $m = M(X') = M(X) = 1$ și $\sigma^2 = D(X') = D(X) = \frac{3}{4}$.

Prin urmare $\sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Atunci $f(x) = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} e^{-\frac{2(x-1)^2}{3}}$.

$$c) P(1 \leq X < 2) = F(2) - F(1) = \sum_{k=0}^2 p(k) - \sum_{k=0}^1 p(k) = p(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0,21.$$

Problema 2.5.19. Variabila aleatoare X urmează legea uniformă având valoarea medie și dispersia egale cu 4 respectiv $\frac{1}{3}$. Să se scrie funcția de repartiție a variabilei aleatoare X .

Rezolvare. Dacă variabila aleatoare X urmează legea uniformă pe intervalul (a, b) atunci funcția de repartiție va fi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

iar valoarea medie și dispersia se calculează ca $M(X) = \frac{a+b}{2}$, respectiv $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. Așadar obținem sistemul:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 4 \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{cu soluția } a = 3, b = 5.$$

Rezultă că funcția de repartiție va fi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ \frac{x-3}{2}, & 3 < x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}.$$

2.6 Teme de control

1. O monedă este aruncată de 3 ori și secvența de mărci (M) și steme (S) ce apare este înregistrată.

a) Scrieți spațiul evenimentelor elementare Ω

b) Scrieți următoarele evenimente, folosind evenimentele elementare: A : "să apară cel puțin 2 steme"

B : "primele 2 aruncări sunt steme" C : "ultima aruncare este marcă"

c) Determinați următoarele evenimente: \bar{A} ; $A \cap B$; $A \cup C$.

2. În drum spre locul de muncă un om trece prin 3 intersecții consecutive, semaforizate. La fiecare semafor se oprește sau își continuă drumul. Dacă notăm cu A_i , $i = \overline{1, 3}$ evenimentul "la intersecția i persoana își continuă drumul", să se exprime folosind A_1 , A_2 , A_3 următoarele evenimente:
- persoana are liber la toate intersecțiile
 - persoana oprește la toate intersecțiile
 - persoana oprește la cel puțin o intersecție
 - persoana oprește la cel mult o intersecție.
3. La un telescaun pentru ski așteaptă 5 persoane. Un telescaun poate transporta doar 3 persoane odată.
- În câte moduri se poate organiza primul grup?
 - Care este probabilitatea ca o persoană aleasă aleator dintre cei 5 să fie în primul transport? Dar în al doilea?
- Răspuns.** 10, 0.6 și 0.4
4. Se aruncă o monedă de două ori. Care este probabilitatea ca marca să apară cel puțin o dată? **Răspuns.** 0.75
5. Se aruncă 2 zaruri. Care este probabilitatea ca suma lor să fie:
- 8
 - un număr prim
 - cel puțin 4.
- Răspuns.** 5/36, 5/12, 11/12
6. Se aruncă 2 zaruri. Care este probabilitatea ca suma fețelor să fie 6, știind că suma acestor fețe a dat un număr par?
- Răspuns.** 5/18
7. Presupunem că într-o cameră sunt 5 persoane. Care este probabilitatea ca cel puțin 2 persoane să aibă aceeași zi de naștere.
- Răspuns.** $1 - 0.972865 = 0.027135$
8. Un lift ce conține 5 persoane se poate opri la oricare din cele 7 etaje ale unei clădiri. Care este probabilitatea ca 2 persoane să nu coboare la același etaj?
- Răspuns.** 0.15.

9. Un card emis de o bancă are ca număr de identificare un număr de 7 cifre, ce nu poate începe cu cifra 0. Care sunt probabilitățile ca un număr de identificare:

- a) să înceapă cu 456;
- b) să nu conțină cifre identice;
- c) să se termine cu 21.

Răspuns. 0.0011, 0.006048, 0.01

10. Într-o grupă de studenți sunt 30 care vorbesc limba engleză, 15 vorbitori de limba germană și 8 studenți care cunosc limba franceză. Dintre cei vorbitori de limba engleză, 10 vorbesc și limba germană, iar 3 vorbesc și limba franceză. Pe de altă parte avem 3 studenți care vorbesc și limba germană, și limba franceză. Știind că, este un singur student care vorbește toate cele trei limbi, determinați numărul total al studenților din această grupă.

Răspuns. 38

11. Un student se pregătește pentru 2 examene. Pe baza pregătirii sale el va promova primul examen cu o probabilitate de 60%, iar al doilea examen cu o probabilitate de 50%. Dacă rezultatele de la cele două examene sunt independente,

- a) care este probabilitatea de a promova ambele examene?
- b) care este probabilitatea de a promova cel puțin unul dintre cele două examene?

Răspuns. 0.3, 0.8

12. Daltonismul este o tulburare a vederii cromatice (constând în incapacitatea de a deosebi unele culori), care afectează 8% din populația masculină și 1% din populația feminină. În România un nou-născut este fată cu o probabilitate de 51%. Determinați care este probabilitatea ca un nou-născut din România să sufere de daltonism.

Răspuns. Utilizând formula probabilității totale avem 0.0443

13. La un workshop participă patru firme. Firmele sunt reprezentate de 4, 3, 3, respectiv 5 angajați. Dintre acești reprezentanți 1, 1, 1, 2 vorbesc limba germană. Un investitor din Germania este interesat de aceste firme și se adresează unui reprezentant. Care este probabilitatea ca reprezentantul ales aleator, să vorbească limba germană? Care este probabilitatea ca, dacă, un reprezentant ales aleator vorbește limba germană, atunci el provine de la a patra firmă?

Răspuns. Folosind formula probabilității totale și formula lui Bayes se obține 0.3333 respectiv 0.4.

14. O companie produce în 3 schimburi. Într-o anumită zi, 1% din articolele produse de primul schimb sunt defecte, 2% din cele produse în al doilea schimb și 3% din al treilea schimb. Dacă cele trei schimburi au aceeași productivitate, care este probabilitatea ca un produs din acea zi să fie defect? Dacă un produs este defect, care este probabilitatea ca el să fi fost fabricat în schimbul al treilea?

Răspuns. Folosind formula probabilității totale și formula lui Bayes se obține 0.02 respectiv 0.5.

15. Pentru a participa la un proiect, dintr-o grupă cu 35 studenți (20 fete, 15 băieți) se aleg aleator 7 persoane. Care este probabilitatea ca între studenții aleși să fie:

- a) exact 3 fete;
- b) exact 2 băieți;
- c) cel mult 1 băiat.

Răspuns. 0,2314, 0,2420, 0,97

16. Un magazin are în stoc marfă de la 5 furnizori în următoarele cantități: 30 de la furnizorul F_1 , 100 de la F_2 , 50 de la F_3 , 80 de la F_4 și 40 de la F_5 . În decursul unei săptămâni, depozitul a vândut 50 bucăți. Care e probabilitatea ca din cele 50 de bucăți vândute, 10 să provină de la furnizorul F_1 , 5 de la F_2 , 10 de la F_3 , 15 de la F_4 și 10 de la F_5 .
17. Pe parcursul unei săptămâni s-a dat predicția cursului valutar, astfel încât zilnic cursul poate să crească cu probabilitatea $\frac{1}{6}$, respectiv să scadă cu probabilitatea $\frac{5}{6}$. Stabiliți probabilitatea ca:
- a) în 4 zile ale săptămânii cursul valutar să crească;
 - b) în cel mult 2 zile cursul valutar să crească;
 - c) în cel puțin 2 zile cursul valutar să crească.

Răspuns. 0,0156, 0,9042, 0,3302

18. Un supermarket vinde următoarele sortimente de cafea: naturală, cappuccino și espresso. Probabilitatea ca un client să cumpere cafea naturală este 0,6, cappuccino 0,3, iar espresso 0,1. Determinați probabilitatea ca, din 500 clienți, 250 să cumpere cafea naturală, 120 să cumpere cappuccino, iar 130 să cumpere espresso.
19. Care e probabilitatea ca al 100-lea client ce intră într-o bancă, să fie a 40-a persoană ce încheie un contract de creditare, dacă probabilitatea ca cineva să încheie un astfel de contract este de 0,75?
20. La trei reprezentanțe de telefonie mobilă se găsesc telefoane mobile clasice și android în următoarele proporții: la prima reprezentanță 20 clasice și 30 android, la a doua 23 clasice și 37 android, iar la a treia 34 clasice și 36 android. Se alege la întâmplare câte un telefon mobil de la fiecare reprezentanță, pentru a fi supus unor probe de verificare. Care e probabilitatea ca din cele 3 telefoane alese unul să fie clasic, iar două android? **Răspuns.** 0,4249
21. În catedrala Sfântul Anton din Padova, un vizitator este turist străin cu o probabilitate de 80%. Fiecare turist cumpără un suvenir cu o probabilitate de 60%, în timp ce localnicii cumpără suvenir cu o probabilitate de doar 5%. Să se determine probabilitatea cu care un vizitator cumpără un suvenir și probabilitatea ca al 30-lea vizitator să fie a 10-a persoană care cumpără suvenir. **Răspuns.** 0,49, 0,0113
22. Alegem câte un costum de la 4 producători diferiți. La primul producător probabilitatea ca un costum să aibă vreun defect de fabricație este de 2%, la al doilea producător este de 3%, la al treilea este 5% și la al patrulea este 7%. Determinați probabilitatea evenimentului ca nici unul dintre cele 4 costume alese să nu fie cu defect. Dacă de la primul producător și de la al patrulea alegem câte un costum și de la al doilea și al treilea câte două costume, cu ce probabilitate nu vom avea nici un costum defect printre cele 6 alese? **Răspuns.** 0,8399, 0,7739

23. Într-un lot de 400 piese, 10 sunt defecte. Se aleg aleator 20 piese. Să se calculeze probabilitatea ca între piesele alese :
- a) 4 piese să fie defecte;
 - b) să fie cel mult 2 piese defecte;
24. O comisie internațională este formată din 5 români, 7 italieni, 4 olandezi și 6 elvețieni. Se aleg la întâmplare 10 persoane pentru a forma o subcomisie. Să se calculeze probabilitatea ca din cele 10 persoane alese, 2 să fie români, 3 italieni, 3 olandezi și 2 elvețieni. **Răspuns.** 0,0325
25. Pe parcursul a 10 zile de vară s-a dat prognoza meteo astfel încât zilnic pot cădea precipitații cu probabilitatea 0,2. Calculați probabilitatea de a ploua:
- a) în 3 zile;
 - b) în cel mult 2 zile;
 - c) în cel puțin 3 zile. **Răspuns.** 0,2013, 0,6778, 0,3222
26. Se aruncă un zar de 20 de ori. Să se calculeze probabilitatea ca de 8 ori să apară un număr prim, de 10 ori un număr compus și de 2 ori fața cu un punct. **Răspuns.** 0,1347
27. Avem 4 grupe de studenți: în prima grupă sunt 20 fete și 5 băieți, în a doua grupă sunt 15 fete și 10 băieți, în a treia grupă sunt 10 fete și 15 băieți, în a patra grupă sunt 24 fete și 1 băiat. Se alege câte un student din fiecare grupă pentru a participa la o acțiune publicitară pentru promovarea unui produs. Să se calculeze probabilitatea ca între studenții aleși:
- a) trei să fie fete;
 - b) să fie numai fete;
 - c) să fie cel puțin o fată. **Răspuns.** 0,4531, 0,1843, 0,9981
28. Un magazin oferă o promoție clienților. La fiecare cumpăratură cu valoarea peste 50 RON, cumpărătorul primește un bilet de răzuit. Dacă clientul reușește să colecteze 3 bilete cu logo-ul magazinului, el primește un voucher de cumpărături în valoare de 200 RON. Probabilitatea ca pe un bilet să apară logo-ul magazinului este de 10%. Care este probabilitatea evenimentului ca un cumpărător:
- a) să găsească al 3-lea logo pe al 10-lea bilet?
 - b) să obțină primul logo pe al 10-lea bilet? **Răspuns.** 0,0172, 0,0387
29. Probabilitățile ca dimensiunile unei piese de mașină să fie în limite mai mici, respectiv mai mari decât cele admisibile sunt de respectiv 0.07 și 0.1, iar probabilitatea ca o piesă să aibe dimensiunile în limite admisibile este 0.83. Dintr-un lot de 1000 de piese se extrag 140. Care este probabilitatea ca 5 dintre aceste piese să aibe dimensiunile mai mici decât cele admisibile și 7 mai mari decât cele admisibile.

30. Într-un oraș există 5 magazine de desfacere a berii. Fiecare magazin pune în vânzare câte 3 tipuri de bere. Se cunosc cantitățile zilnice puse în vânzare din fiecare marcă de bere la fiecare magazin: $M_1(130, 200, 50)$; $M_2(125, 190, 45)$; $M_3(120, 120, 120)$; $M_4(147, 156, 200)$; $M_5(130, 123, 100)$. O persoană bine dispusă intră în fiecare magazin, fiind primul client al fiecărui magazin din respectiva zi, și cumpără câte o bere. Calculați probabilitatea ca dintre cele 5 beri 4 să fie din primul fel respectiv probabilitatea ca cel puțin una să fie din primul fel de bere. **Răspuns.** 0,0412, 0,8694
31. La o baltă privată, la care se pescuiește în sistem ”prinde și eliberează”, se estimează că la fiecare lansare există 45% șanse de a prinde un pește. Calculați probabilitatea ca din 10 lansări să fie prinși 7 pești (știind că se poate prinde cel mult un pește la fiecare lansare). Dar probabilitatea ca din 7 încercări să fie prinși doi pești iar al doilea la a 7-a lansare? **Răspuns.** 0,0738, 0,0611
32. Un același tip de contract încheiat la 3 bănci diferite se dovedeste a fi performant cu probabilitățile 0,9, 0,8 și 0,7. Să se scrie distribuția X a numărului de contracte performante din cele trei analizate. Scrieți funcția de repartiție $F_X(x)$.
33. Se consideră 3 urne, fiecare dintre ele conținând 30 de bile albe și negre. Prima urnă conține 15 bile albe, a doua 10 bile albe și a treia 6 bile albe. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Notăm cu X numărul bilelor albe extrase. Scrieți distribuția lui X , funcția sa de repartiție și apoi reprezentați-o grafic. Calculați $P(0 \leq X < 2)$, $P(-1 < X < 1)$ și $P(0 < X \leq 3)$.
34. Fie variabilele aleatoare independente X și Y cu distribuțiile

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad Y : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Să se calculeze: X^3 , Y^2 , $3X$, $X + Y$, XY , $3X + Y^2$.

35. Determinați p și q astfel încât

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{p}{4} & \frac{1}{3} & \frac{q}{3} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad Y : \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{p+1}{4} & q \end{pmatrix}$$

să reprezinte distribuțiile a două variabile aleatoare de tip discret. Scrieți $F_X(x)$ și $F_Y(y)$. Calculați $P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right)$ și $P\left(-1 < Y < \frac{2}{3}\right)$.

36. Considerăm variabilele aleatoare independente

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p + \frac{1}{6} & q + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2p + q & p^2 \end{pmatrix}.$$

Să se scrie distribuția variabilei $2XY$.

37. Să se determine constanta a astfel încât funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a^2 x^3, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} a^2 x e^{-x+1}, & x > 1 \end{cases}$$

să reprezinte densitate de probabilitate a unei variabile aleatoare de tip continuu. Scrieți funcția de repartiție.

38. Să se determine a astfel încat funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}, & x \in [1, e] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă X de tip continuu. Să se determine apoi funcția de repartiție corespunzătoare acestei variabile aleatoare. Calculați $P(0 \leq X \leq e)$.

39. Probabilitatea de a avea consum normal de energie într-o anumită companie este 0.8. Dacă notăm cu X variabila aleatoare ce reprezintă numărul de zile dintr-o săptămână în care consumul de energie este normal în acea companie, să se scrie distribuția lui X , funcția de repartiție a lui X , să se reprezinte grafic această funcție iar apoi să se calculeze $P(1 \leq X \leq 3)$. Să se calculeze valoare medie, dispersia și abaterea medie pătratică.

40. Se aruncă o monedă de 3 ori consecutiv. Fie X variabila aleatoare ce reprezintă numărul de mărci apărute. Scrieți distribuția lui X , funcția sa de repartiție și apoi să se calculeze valoare medie, dispersia și abaterea medie pătratică.

41. Fie v.a. discretă: $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$

- Determinați p_2, p_3 știind că valoarea medie a v.a. X este $5/4$
- Calculați momentele de ordinul 2 și 3 pentru v.a. X
- Calculați dispersia, abaterea medie pătratică și momentele centrate de ordinul 2 și 3
- Calculați valoarea medie și dispersia pentru v.a. $Y = 4X - 7$.

42. Fie v.a. independente: $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p + \frac{1}{6} & q + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ și $Y : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2p + q & 12p^2 \end{pmatrix}$

- Aflați $p, q \in \mathbb{R}$
- Calculați valoarea medie și dispersia v.a. $X, Y, XY, X^2 - 3Y^2$.

43. Să se determine k astfel încat funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} kx, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă X de tip continuu. Să se determine apoi funcția de repartiție corespunzătoare acestei variabile aleatoare. Calculați $P\left(\frac{1}{4} < X < 2\right)$ și $P\left(\frac{1}{8} \leq X \leq 1\right)$. Calculați valoarea medie precum și momentele și momentele centrate de ordinul 2 și 3.

44. Calculați valoarea medie, momentele de ordinul 2 și 3, dispersia, abaterea medie pătratică și momentele centrate de ordinul 2 și 3 pentru v.a. de mai jos:

$$(a) \quad X : \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.3 & a & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad X : \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & 7 \\ 0.2 & b & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad X : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & p \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}} \quad \text{unde } f(x) = \begin{cases} 3 \cdot e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(e) \quad X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}} \quad \text{unde } f(x) = \begin{cases} 12(x^3 - 2x^2 + x), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Rezumat modul

În acest modul s-au introdus noțiunile de eveniment, probabilitate, operații cu evenimente. S-au definit variabilele aleatoare de tip discret și continuu, funcția de repartiție precum și caracteristicile numerice ale variabilelor aleatoare.

În cazul repartițiilor clasice, s-au precizat funcțiile de probabilitate și densitate de probabilitate și au fost calculate valorile medii și dispersiile acestor variabile aleatoare.

Bibliografie modul

1. Colectiv, Analiza matematică, Teoria Probabilităților și Algebra liniară aplicată în economie, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2008
2. Colectiv, Matematici aplicate în economie, Ed. Mega, Cluj Napoca, 2012.