Variabile aleatoare

Lect. dr. Voichița Radu, Lect. dr. Alexandru-Darius Filip

Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Științe Economice și Gestiunea Afacerilor
Departamentul de Statistică-Previziuni-Matematică

Proiect ROSE

decembrie 2020

Variabile aleatoare de tip discret

Variabile aleatoare de tip discret

Fie variabila aleatoare de tip discret

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Probleme principale:

I. Calcul de parametri
II. Operații cu variabile aleatoare
III. Funcția de repartiție
IV. Calcul de probabilități
V. Caracteristici numerice

I. Calcul de parametri

Problema 1: Fie variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0,1 & p & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Să se determine parametrul real p astfel încât X să fie o variabilă aleatoare de tip discret.

Rezolvare: Se știe că în orice variabilă aleatoare de tip discret, suma probabilităților care se află pe linia a doua din distribuția lui X este 1.

Avem

$$0,1 + p + 0,4 + 0,2 = 1 \;\Leftrightarrow\; 0,7 + p = 1$$

de unde obținem $\boxed{p = 0,3}$.

Problema 2: Fie variabilele aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,3 & p \end{pmatrix} \text{ și } Y : \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ p & q & 0,2 \end{pmatrix}$$

Să se determine parametrii reali p și q astfel încât X și Y să fie variabile aleatoare de tip discret.

Rezolvare: Avem sistemul:

$$\begin{cases} 0,1 + 0,2 + 0,3 + p = 1 \\ p + q + 0,2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,6 + p = 1 \\ p + q + 0,2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{p = 0,4} \\ 0,4 + q + 0,2 = 1 \Rightarrow \boxed{q = 0,4} \end{cases}$$

Problema 1: Fie variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Să se scrie distribuțiile variabilelor aleatoare: $2 + X$, $3X$ și X^4.

Rezolvare: Avem:

$$2 + X = \begin{pmatrix} 2 + (-1) & 2 + 0 & 2 + 2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

$$3X = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

$$X^4 = \begin{pmatrix} (-1)^4 & 0^4 & 2^4 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 16 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 16 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Problema 2: Fie variabilele aleatoare independente

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \text{ și } Y : \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

Să se scrie distribuțiile variabilelor aleatoare: $X + Y$ și XY.

Rezolvare: Avem:

$$X + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+1 & -1+3 & 0+1 & 0+3 & 2+1 & 2+3 \\ 0,5 \cdot 0,3 & 0,5 \cdot 0,7 & 0,3 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 0,7 & 0,2 \cdot 0,3 & 0,2 \cdot 0,7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ 0,15 & 0,35 & 0,09 & 0,21 & 0,06 & 0,14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0,15 & 0,09 & 0,35 & 0,27 & 0,14 \end{pmatrix}.$$

II. Operații cu variabile aleatoare

$$XY = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 & -1 \cdot 3 & 0 \cdot 1 & 0 \cdot 3 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ 0,5 \cdot 0,3 & 0,5 \cdot 0,7 & 0,3 \cdot 0,3 & 0,3 \cdot 0,7 & 0,2 \cdot 0,3 & 0,2 \cdot 0,7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0,15 & 0,35 & 0,09 & 0,21 & 0,06 & 0,14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 2 & 6 \\ 0,15 & 0,35 & 0,30 & 0,06 & 0,14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 2 & 6 \\ 0,35 & 0,15 & 0,30 & 0,06 & 0,14 \end{pmatrix}.$$

III. Funcția de repartiție

Problemă: Fie variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Construiți funcția de repartiție asociată variabilei aleatoare X.

Rezolvare: Funcția de repartiție asociată variabilei X este:

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1],\ F_X(x) = P(X < x).$$

Dacă $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow F_X(x) = P(X < \underset{-1}{x}) = 0.$

Dacă $x \in (-1, 0] \Rightarrow F_X(x) = P(X < \underset{0}{x}) = 0,5.$

Dacă $x \in (0, 2] \Rightarrow F_X(x) = P(X < \underset{2}{x}) = 0,5 + 0,3 = 0,8.$

Dacă $x \in (2, +\infty) \Rightarrow F_X(x) = P(X < \underset{+\infty}{x}) = 0,8 + 0,2 = 1.$

Așadar avem

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \\ 0,5, & \text{dacă } x \in (-1, 0] \\ 0,8, & \text{dacă } x \in (0, 2] \\ 1, & \text{dacă } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Problemă: Fie variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Calculați $P(-1 < X < 3)$ și $P(-1 < X \leq 3)$.

Rezolvare:

Pentru $P(-1 < X < 3)$ avem $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$,

deci $P(-1 < X < 3) = 0,2 + 0,1 = 0,3$.

Pentru $P(-1 < X \leq 3)$ avem $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,2 \end{pmatrix}$,

deci $P(-1 < X \leq 3) = 0,2 + 0,1 + 0,4 = 0,7$.

V. Caracteristici numerice

Problemă: Fie variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Calculați valoarea medie, momentele de ordinul 2 și 3, dispersia, abaterea medie pătratică, momentele centrate de ordinul 2 și 3 pentru X.

Rezolvare: Avem:

$$X : \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & \quad x_2 & \quad x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} p_1 & \quad p_2 & \quad p_3 \end{array} \end{array}$$

Valoarea medie: $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$

$$M(X) = (-1) \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,1 = -0,2.$$

Momentul de ordinul 2: $\nu_2(X) = M(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3$

$$\nu_2(X) = M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0,4 + 0^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,1 = 0,8.$$

Momentul de ordinul 3: $\nu_3(X) = M(X^3) = x_1^3 p_1 + x_2^3 p_2 + x_3^3 p_3$

$$\nu_3(X) = M(X^3) = (-1)^3 \cdot 0,4 + 0^3 \cdot 0,5 + 2^3 \cdot 0,1 = 0,4.$$

Dispersia:

$$\boxed{D(X) = M(X^2) - M(X)^2} = 0,8 - (-0,2)^2 = 0,76.$$

Abaterea medie pătratică:

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}} = \sqrt{0,76} = 0,872$$

Momentul centrat de ordinul 2:

$$\boxed{\mu_2(X) = D(X)} = 0,76$$

Momentul centrat de ordinul 3:

$$\mu_3(X) = [-1 - M(X)]^3 \cdot 0,4 + [0 - M(X)]^3 \cdot 0,5 + [2 - M(X)]^3 \cdot 0,1$$

$$= (-1 + 0,2)^3 \cdot 0,4 + (0 + 0,2)^3 \cdot 0,5 + (2 + 0,2)^3 \cdot 0,1 = 0,864.$$

Variabile aleatoare
de tip continuu

Fie variabila aleatoare de tip continuu

$$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}}$$

unde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este densitate de probabilitate pentru X.

Probleme principale:

I. Calcul de parametri

II. Caracteristici numerice

Problemă: Fie variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x\in\mathbb{R}} \quad \text{unde } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} ce^{-x+2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Să se determine parametrul real $c > 0$ astfel încât funcția f să fie densitate de probabilitate pentru variabila X.

Rezolvare: Se știe că funcția f este densitate de probabilitate pentru variabila X dacă

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1}$$

Avem

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} ce^{-x+2}dx = ce^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx =$$
$$= ce^2 \int_{0}^{+\infty} x^0 e^{-x}dx = ce^2 \cdot \Gamma(1) = ce^2.$$

Deci $c = \frac{1}{e^2}$.

Problemă: Fie variabila aleatoare

$$X : \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x\in\mathbb{R}} \quad \text{unde } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Calculați valoarea medie, momentele de ordinul 2 și 3, dispersia și abaterea medie pătratică a variabilei X.

Rezolvare:

Valoarea medie: $\boxed{M(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx}$

Avem

$$M(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2! = 2.$$

Momentul de ordinul 2: $\boxed{\nu_2(X) = M(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x)dx}$

$$\nu_2(X) = M(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = \Gamma(4) = 3! = 6.$$

Momentul de ordinul 3: $\boxed{\nu_3(X) = M(X^3) = \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot f(x)dx}$

$$\nu_3(X) = M(X^3) = \int_{\mathbb{R}} x^3 \cdot f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx = \Gamma(5) = 4! = 24.$$

Dispersia: $\boxed{D(X) = M(X^2) - M(X)^2}$

$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 6 - 2^2 = 2.$

Abaterea medie pătratică: $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2}.$