

Analyse III les aantekeningen

Fordeyn Tibo

INHOUDSTAFEL

1	Belangrijke differentiaalvergelijkingen	2
1.1	Differentiaalvergelijking constante coëfficiënten	2
1.2	Euler	3
1.3	De gammafunctie	3
1.4	Differentiaalvergelijking van Bessel	5
1.5	Gewijzigde differentiaalvergelijking van Bessel	8
2	Fourierreeksen	11
2.1	Inleidend	11
2.2	Benaderingsprobleem uitwerken	12
2.3	Intermezzo; over orthogonaliteit	14
2.4	Belang orthogonaliteit	15
2.5	Trigonometrische orthogonaliteit	16
2.6	Fourierreeksen	19
2.7	Convergentie van fourier reeksen	22
2.8	Gibbs verschijnsel	24
2.9	Fourier-Besselreeksen	25
3	Sturm-Liouvilleproblemen	27
3.1	Het eigenwaardeprobleem in de ruimte	27
3.2	Symmetrische eigenwaardeproblemen	28
3.3	Klasse symmetrische problemen	31
	eerste voorbeeld — 31 • Visualisatie van deze eigenfunctie — 33 • tweede voorbeeld — 34 • Periodieke rvw — 37	
3.4	Sturm-Liouvilleproblemen	38
	compacte notatie — 39 • Logica achter ontbinding — 39 • Voorbeeld — 39	
3.5	Singuliere sturm-liouvilleproblemen	41
4	Eerste oefenzitting	45
4.1	Videos 1,2 uw	45
4.2	Tutorial	46
4.3	Vorbereidende oefeningen	46
4.4	Oefeningen	47
5	Partiële differentiaalvergelijkingen	48
5.1	Inleiding	48
5.2	Scheiding der veranderlijken	49

1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

We zullen PDV's later omzetten naar gewone differentiaalvergelijkingen, daarom moeten we drie vormen herhalen.

- differentiaalvergelijkingen constante coëfficiënten
- Differentiaalvergelijking van Euler
- Differentiaalvergelijking van Bessel

En de gamma functie komt ook aan bod voor herhaling.

1.1 Differentiaalvergelijking constante coëfficiënten

Stelling: oplossen met karakteristieke veelterm

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

We vinden de karakteristieke vergelijking

$$\rho(v) = a_0 v^2 + a_1 v + a_2.$$

met mogelijke oplossingen

$$\begin{cases} v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R} \implies y(x) = c_1 e^{v_1 x} + c_2 e^{v_2 x} \\ v_1 = v_2 \implies y(x) = c_1 e^{v_1 x} + c_2 x e^{v_1 x} \\ v_{1,2} = \alpha \pm \beta i \implies y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}.$$

Opmerking 1.1.1 v in plaats van λ

Lambda krijgt later een andere betekenis, daarom nu.

Voorbeeld 1.1.1

$$y'' = \lambda y.$$

waarbij lambda geïnterpreteerd wordt als een parameter

$$p(v) = v^2 - \lambda.$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \implies v_1 = v_2 \implies y(x) = c_1 + c_2 x \\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \implies v_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda} \implies y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x} \\ \lambda \in \mathbb{R}^- \implies v_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda} i \implies y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x) \end{cases}.$$

Herrinnering 1.1.1 Hyperbolische functies

Merk op dat de hyperbolische functies lineaire combinaties zijn van die exponentiële functies dus als lambda positief is vinden we ook

$$y(x) = d_1 \cosh(\sqrt{\lambda}x) + d_2 \sinh(\sqrt{\lambda}x).$$

1.2 Euler

Stelling: Differentiaalvergelijking van Euler

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 x y = 0.$$

We lossen dit op voor $x > 0$ met transformatie

$$y(x) = z(t), t = \ln(x).$$

of ook

$$x = e^t.$$

we krijgen bijgevolg

$$z''(t) + (a_1 - 1)z'(t) + a_2 z(t) = 0.$$

de karakteristieke veelterm wordt

$$p(v) = v^2 + (a_1 - 1)v + a_2.$$

- $v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1 e^{v_1 t} + c_2 e^{v_2 t}.$$

$$\implies y(x) = c_1 x^{v_1} + c_2 x^{v_2}.$$

- $v_1 = v_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1 e^{v t} + c_2 t e^{v t}.$$

$$\implies y(x) = c_1 x^{v_1} + c_2 \ln(x) x^{v_1}.$$

- $v_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$$z(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

$$\implies y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln(x)).$$

Opmerking 1.2.1 Voor $x < 0$

Voer een transformatie uit $x = -u$

1.3 De gammafunctie

Definitie 1.3.1: gamma functie

Gammafunctie voor $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du.$$

We zien dat het domein \mathbb{R}^+ is. Natuurlijk gebruiken we de gamma functie vooral omwille van de fundamentele eigenschap

Eigenschap: Recursiebetrekking
 Recursie eigenschap gamma functie

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs 1.3.1: Bewijs recursie eigenschap

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs;

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^x du.$$

partiele integratie

$$-u^x e^{-u} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

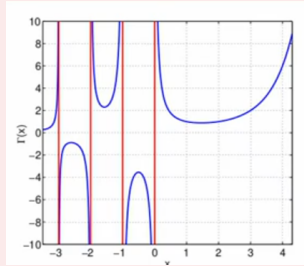
Opmerking 1.3.1

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^x e^{-u} = \lim_{u \rightarrow \infty} u^x e^{-u} = 0.$$

hieruit vinden we dat die term nul wordt

$$\Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

Definitie 1.3.2: Definitie van de gammafunctie op \mathbb{R}



$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du, & x > 0 \\ \frac{\Gamma(x+1)}{x}, & x < 0 \wedge |x| \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

We maken gebruik van die recursiebetrekking om uit te breiden voor negatieve getallen. Het is belangrijk voor later dat we ook negatieve inputs kunnen geven. De manier waarop je dus rekent is dat je in breukvorm telkens een getal binnen het domein krijgt door een negatief getal kleiner dan één te nemen in absolute waarde, en dan vervolgens wanneer je hier voorbij gaat gebruik je de daarvoor berekende recursie.

Gaat niet $\forall x$, voor $x \in \mathbb{N}$ lukt dat niet want je kan $\Gamma(0)$ niet berekenen. Je ziet dus hoe die "lijn van recursie" niet opgaat. We zien dat dus als de verticale asymptoten op de grafiek.

Eigenschap: Gammafunctie en faculteiten

Gammafunctie is een uitbreiding van de faculteitenfunctie

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

kan bewezen worden via inductie, je kunt makkelijk eerst nul beschouwen en zien dat dat gelijk is aan één.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1 = 0!.$$

indien de bewering geldig is voor n , is ze ook geldig voor $n+1$.

Herrinnering 1.3.1 onthoud de volgende eigenschap

Recursiebetrekking

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

1.4 Differentiaalvergelijking van Bessel

Definitie 1.4.1: differentiaalvergelijking van Bessel

Orde p (positieve parameter, niet echt de orde)

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - p^2) y(x) = 0.$$

met $p \geq 0$

Eerste oplossing

van deze differentiaalvergelijking is via reeksontwikkeling voor p .

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p}.$$

Idee of vraag 1.4.1

waarbij C_k voldoet aan de recursiebetrekking die we vinden door in te vullen in differentiaalvergelijking.

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - p^2) y(x) = 0.$$

$$x^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p} \right)'' + x \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p} \right)' + (x^2 - p^2) \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p} \right) = 0.$$

door C_k te schrijven laat ik het somteken even weg

$$\left(C_k x^{k+p} \right)' = (k+p) C_k x^{k+p-1}.$$

$$\left(C_k x^{k+p}\right)'' = (k+p)(k+p-1)C_k x^{k+p-2}.$$

$$C_k = \frac{-C_{k-2}}{k(k+2p)}, k \text{ even}, C_k = 0, k \text{ oneven}.$$

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{k! \Gamma(p+k+1) 2^{2k+p}}.$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

waaruit dus blijkt

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Eigenschap: Afgeleide relatie

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x).$$

stel

$$f(x) = x^n J_n(x).$$

$$f'(x) = n x^{n-1} J_n(x) + x^n J'_n(x).$$

volgens de eigenschap geldt ook

$$f'(x) = x^n J_{n-1}(x).$$

$$\implies n x^{n-1} J_n(x) + x^n J'_n(x) = x^n J_{n-1}(x).$$

Hieruit volgt

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x).$$

Eigenschap: Afgeleide relatie

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$g(x) = x^{-n} J_n(x).$$

$$g'(x) = -n x^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J'_n(x).$$

$$g'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$\implies J'_n(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x).$$

Bewijs 1.4.1: Bewijs van afgeleide relatie

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)].$$

Tel de twee vergelijking uit voorgaande eigenschappen op;

$$J'_n(x) + J'_n(x) = \left(J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)\right) + \left(-J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)\right).$$

dit simplificeren dan volgt direkt het gestelde.

Voorbeeld 1.4.1 (Bessel differentiaalvergelijking vb)

Idee of vraag 1.4.2

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

- Afgeleide relatie

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)].$$

- Relatie J_{-n} en J_n

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

$$\Rightarrow J'_0(x) = \frac{1}{2} [J_{-1}(x) - J_1(x)].$$

$$\Rightarrow J_{-1}(x) = (-1)^1 J_1(x) = -J_1(x).$$

Hieruit volgt direct het gestelde.

Tweede oplossing

$-p$ is de tweede oplossing, dus we zoeken een oplossing met

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{k-p}.$$

$$B_k = \frac{-B_{k-2}}{k(k-2p)}.$$

voor k even en nul voor k oneven.

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-p}}{k! \Gamma(-p+k+1) 2^{2k-p}}, p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0.$$

Opmerking 1.4.1 Lineair onafhankelijke oplossingen

- $J_p(x)$ is Besselfunctie van de eerste soort orde p
- $J_p(x), J_{-p}(x)$ is een fundamenteel stel voor $p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0$
- indien het wel een natuurlijk getal of nul is, kan aangetoond worden : $J_{-n}(x) = \lim_{p \rightarrow n} J_{-p}(x) = (-1)^n J_n(x)$

Bijgevolg moeten we een moeilijkere vorm gebruiken als we de reeksontwikkeling direct willen berekenen.

Besselfunctie van de tweede soort

Definitie 1.4.2: Besselfuncties van de tweede soort

Gedefinieerd als volgt;

$$Y_p(x) = \begin{cases} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, & p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0 \\ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, & p = 0 \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, & p = n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Waar we dus die cotangens moeten beschouwen als coefficient voor J_p en die $\frac{-1}{\sin(\dots)}$ als coefficient van J_{-p}

Idee of vraag 1.4.3

Dus drie keer dezelfde functie met een limiet naar niet gedefinieerde plaatsen, maar ik snap totaal niet waar de functie vandaan komt en hoe we dit bewijzen. Check de cursus vanaf je die eindelijk krijgt en vraag anders aan prof

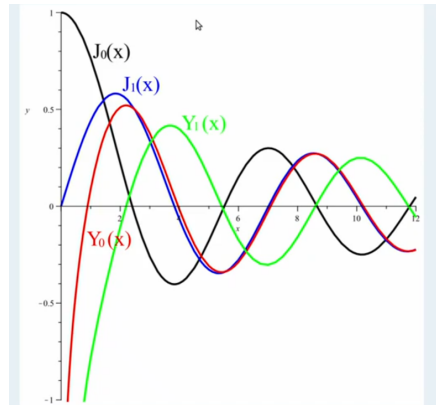
Eigenschap:

Een fundamenteel stel voor $p \geq 0$:

$$\{J_p(x), Y_p(x)\}.$$

Eigenschap:

De Besselfunctie van de tweede soort $Y_p(x)$ zijn onbegrensd in een omgeving van $x = 0$



1.5 Gewijzigde differentiaalvergelijking van Bessel

Definitie 1.5.1: Gewijzigde Besselvergelijking

Gewijzigde Besselvergelijking van orde p

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + p^2) y = 0.$$

met $p \geq 0$ een parameter

Eerste soort

Reeksontwikkeling rond een regulier singulier punt;

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p}.$$

$$C_k = \frac{C_{k-2}}{k(k+2p)}.$$

We vinden

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+p}}{k! \Gamma(p+k+1) 2^{2k+p}}.$$

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

$I_p(x)$ is de gewijzigde Besselfunctie van de eerste soort en orde p .

Tweede soort

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin(p\pi)}.$$

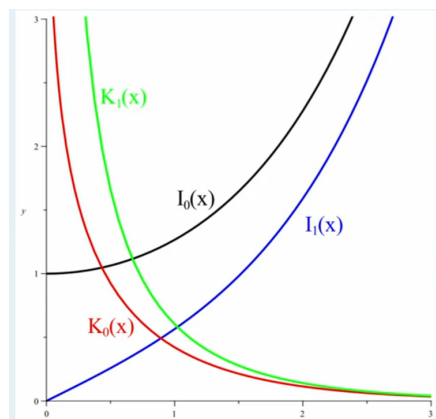
Eigenschap:

Fundamenteel stel voor $\forall p \geq 0$

$$\{I_p(x), K_p(x)\}.$$

Eigenschap:

Voor gewijzigde Besselfuncties van de tweede soort geldt ze zijn onbegrensd in een omgeving $x = 0$

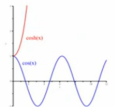
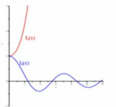


Opmerking 1.5.1 De grafieken

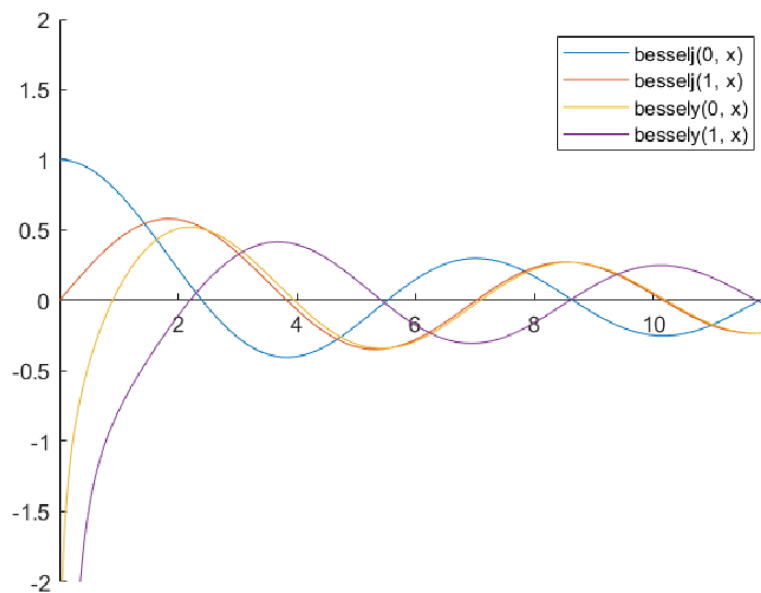
Zorg vooral dat je de grafieken direct in je hoofd hebt, dat zijn de belangrijkste om te onthouden

Stelling: verschillen hyperbolische hyperb vs Besselfuncties

Dit is zowat het belangrijkste van dit hele deel

Trigo- en hyper- functies	Besselfuncties
Differentiaalvergelijking	
$y''(x) + y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$	$x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0$ $y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$
$y''(x) - y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cosh(x) + c_2 \sinh(x)$	$x y''(x) + y'(x) - x y(x) = 0$ $y(x) = c_1 I_0(x) + c_2 K_0(x)$
Reeksontwikkelingen	
$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$ $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$
Grafieken, nulpunten, begrensdheid, orthogonaliteit	
	

overzicht van functies;



2 Fourierreeksen

We willen een functie f benaderen op een interval $[a, b]$ door middel van lineaire combinatie goniometrische functies.

2.1 Inleidend

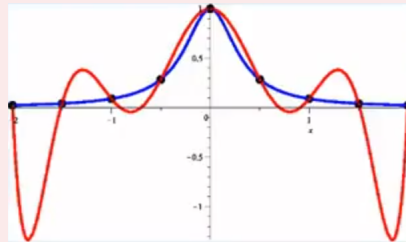
Definitie 2.1.1: Het interpolatiecriterium

Kies N punten $x_j \in [a, b]$ en eis dat $g(x_j) = f(x_j), j = 1, \dots, N$. Met andere woorden er wordt in essentie enkel geëist dat de doelfunctie in enkele punten exact samenvalt. Dan wordt een veelterm bepaald.
lineair stelsel;

$$\sum_{i=1}^n c_i g_i(x_j) = f(x_j), j = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_N(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \dots & g_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_N) & g_2(x_N) & \dots & g_N(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

kwaliteit hangt af van keuzes interpolatiepunten, veelterminterpolatie geeft grote fouten.



Dan is er het minimaxcriterium; Het minimaxcriterium is dus vooral lastig omdat het moeilijk uit te werken is.

$$\max \{ |f(x) - g(x)|, x \in [a, b] \}.$$

minimaliseren van een maximum wordt een zadelpunt probleem genoemd. Zie fig2.1. Je probeert eigenlijk het minimum van een maximum te nemen.

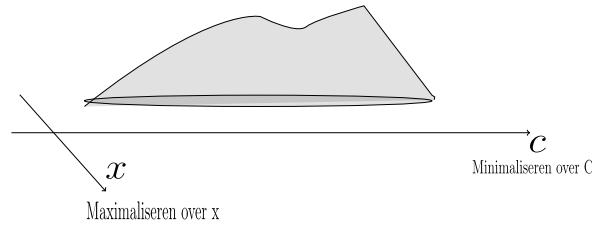


Figure 2.1: zadelpuntprobleem

Dan komen we bij dit criterium om een compromis te sluiten.

Definitie 2.1.2: Kleinste kwadratencriterium

Bepaal $c_i, i = 1, 2, \dots, N$ zodat

$$\int_a^b w(x)(f(x) - g(x))^2 dx.$$

minimaal is met $w(x) > 0$

Eerste observatie is dat we de norm vinden door de wortel te nemen van die integraal.

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b w(x)f(x)^2 dx}.$$

voldoet aan voorwaarden voor de norm

We kunnen het criterium dus interpreteren als

$$\|f - g\|^2.$$

We zoeken een g die het dichtst aansluit bij f .

Opmerking 2.1.1 Belang van $w(x)$

deze laat ons toe om bepaalde functies in het interval meer of minder prioriteit te geven



2.2 Benaderingsprobleem uitwerken

$$I = \int_a^b w(x) \left\{ f(x) - \sum_{i=1}^N c_i g_i(x) \right\}^2 dx = \sigma(c_1, c_2, \dots, c_N).$$

de fout zal een getal zijn dat afhangt van de coëfficiënten. We moeten die dan zo kiezen dat we een minimum krijgen.

De nodig voorwaarde voor een minimum

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c_j} = 0, j = 1, 2, \dots, N.$$

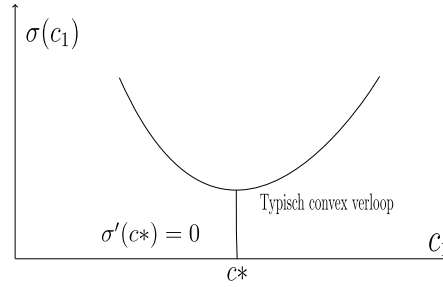


Figure 2.2: één veranderlijke

dit is hoe het eruit zou zien **voor één coefficient** c_1 fig 2.2.
 Voor meerdere veranderlijken, fig 2.3;

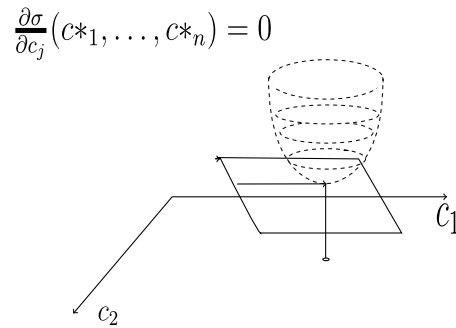


Figure 2.3: meerdereveranderlijken

We werken dit uit en krijgen;

$$(-2) \int_a^b w(x) \left(f(x) - \sum_{i=1}^N c_i g_i(x) \right) g_j(x) dx = 0.$$

of

$$\sum_{i=1}^N c_i (g_i, g_j)_w = (f, g_j)_w, j = 1, 2, \dots, N.$$

Dit kunnen we in stelselvorm schrijven om het duidelijker te maken

$$\begin{pmatrix} (g_1, g_1)_w & (g_1, g_2)_w & \dots & (g_1, g_N)_w \\ (g_2, g_1)_w & \dots & \dots & (g_2, g_N)_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_N, g_1)_w & \dots & \dots & (g_N, g_N)_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, g_1)_w \\ (f, g_2)_w \\ \vdots \\ (f, g_N)_w \end{pmatrix}.$$

2.3 Intermezzo; over orthogonaliteit

Definitie 2.3.1: Orthogonaliteit van functies

Twee functies $f, g \in \mathbb{R}$ zijn orthogonaal op $[a, b]$ als

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

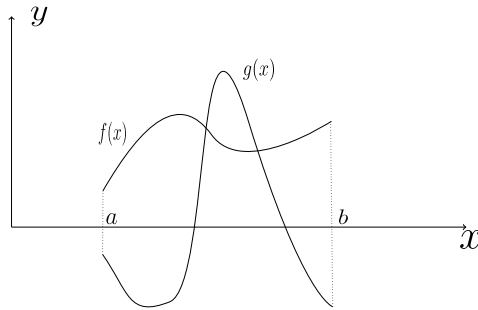


Figure 2.4: Orthogonale functies

Kies n equidistante punten $\in [a, b]$

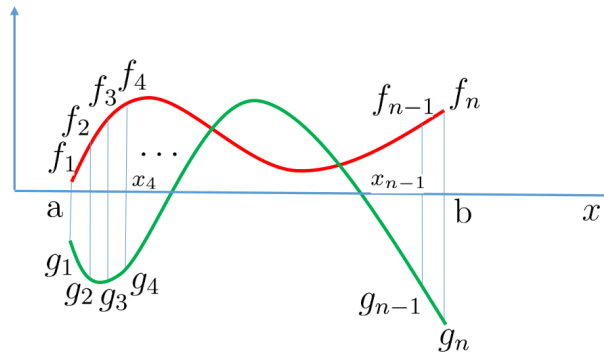
$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b.$$

tussenafstand

$$h = \frac{b-a}{n-1}.$$

zeg

$$f_i = f(x_i), g_i = g(x_i), i = 1, \dots, n.$$



benadering van de integraal

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \approx h(f_1g_1 + f_2g_2 + \dots + f_{n-1}g_{n-1}).$$

kan dus benaderd worden door

$$\begin{aligned} f_1g_1 + \dots + f_{n-1}g_{n-1} &= 0. \\ \iff F^T G &= 0. \end{aligned}$$

Definitie 2.3.2: Orthogonaal tov gewichtsfunctie

Twee reële functies f, g zijn orthogonaal op $[a, b]$ tov gewichtsfunctie w , $w(x) > 0$ voor $x \in (a, b)$

$$\int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = 0.$$

2.4 Belang orthogonaliteit

We gebruiken orthogonaliteit voor het makkelijker uitwerken van dit inwendig product.

$$\int_a^b g_i(x) g_j(x) dx = 0, i \neq j.$$

Als dat gebeurt zullen alle elementen die niet op diagonaal staan wegvallen!

Herrinnering 2.4.1

$$\begin{pmatrix} (g_1, g_1)_w & (g_1, g_2)_w & \dots & (g_1, g_N)_w \\ (g_2, g_1)_w & \dots & \dots & (g_2, g_N)_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_N, g_1)_w & \dots & \dots & (g_N, g_N)_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, g_1)_w \\ (f, g_2)_w \\ \vdots \\ (f, g_N)_w \end{pmatrix}.$$

We komen dan direct uit

$$c_i = \frac{(f, g_i)_w}{(g_i, g_i)_w} = \frac{\int_a^b w(x) f(x) g_i(x) dx}{\int_a^b w(x) g_i(x)^2 dx}, i = 1, 2, \dots, N.$$

Voorbeeld 2.4.1 (benaderen)

We gaan een functie f benaderen op een interval $[a, b]$ door een lineaire combinatie van basisfuncties

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^N c_i g_i(x).$$

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

We gaan een fout karakteriseren met een kleinste kwadratenfunctie met een gewicht $w(x)$

$$\int_a^b w(x) (f(x) - g(x))^2 dx.$$

dit willen we minimaliseren

er zijn voorwaarden mogelijk voor een perfecte match. Stel dat de basisfuncties **orthogonaal zijn tov elkaar op $[a, b]$ tov $w(x)$** . In dat geval is de uitdrukking voor optimale coëfficiënten eenvoudig (de te minimaliseren formule.)

$$c_i = \frac{\int_a^b w(x) f(x) g_i(x) dx}{\int_a^b w(x) (g_i(x))^2 dx}.$$

2.5 Trigonometrische orthogonaliteit

stel $w(x) = 1$ en $[a, b] = [-\pi, \pi]$ we krijgen trigonometrische orthogonaliteit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \begin{cases} 0, k \neq l \\ \pi, k = l \neq 0 \\ 2\pi, k = l = 0 \end{cases}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(lx) dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \begin{cases} 0, k \neq l, k = l = 0 \\ \pi, k = l \neq 0 \end{cases}.$$

Definitie 2.5.1: Trigonometrische veelterm

Gedefinieerd als

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Opmerking 2.5.1 !!!

Wat we nu zullen doen is praten over trigonometrische veelterm benaderingen, als aanknopingspunt voor Fourier reeksen in het stuk hierna! Kijk goed naar de voorwaarden en waar ze vandaan komen, dat is wat belangrijk is in dit deel.

Stelling: Kleinste kwadraten trigonometrische veelterm

- stel we gaan f benaderen op $[-\pi, \pi]$ en we kiezen $w(x) = 1$; benaderen door

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

met

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot (f(x) - g(x))^2 dx = 0.$$

minimaal!

- Basisfuncties $\{1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)\}$ voldoen aan

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot g_i(x) g_j(x) dx = 0, i \neq j.$$

aka ze zijn orthogonaal!

•

$$a_0 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

•

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

•

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Eigenschap: Orthogonaliteitseigenschap van J_0

De besselfuncties van de eerste soort voldoen aan de orthogonaliteitseigenschap

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) dx = 0.$$

Als

- $\alpha \wedge \beta$ verschillende positieve nulpunten zijn van $J_0(x)$ en J'_0

Corollarium of verklaring:

Dit volgt uit;

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) dx = \frac{\beta J_0(\alpha) J'_0(\beta) - \alpha J_0(\beta) J'_0(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

als

$$\alpha \neq \beta.$$

En dat is praktisch waar het bewijs uit handboek naartoe werkt.

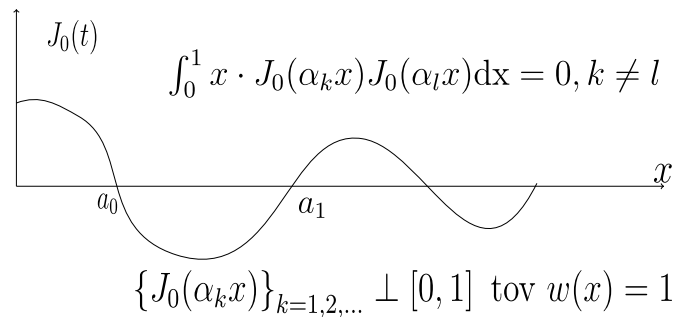


Figure 2.5: Bessel

Wat is hiervan een belangrijke implicatie? Stel we hebben $f(x)$, voorwaarden

- $[0, 1]$, interval kiezen
- $J_0(\alpha_1 x), J_0(\alpha_2 x) \dots$, gescaleerde besselfuncties als basisfuncties
- Kleinste kwadraten criterium met $w(x) = x$

$$\Rightarrow \int_0^1 x (f(x) - g(x))^2 dx, \text{ minimaal.}$$

Opmerking 2.5.2 Wat betekent dit?

We gaan $f(x)$ benaderen door

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^n a_k J_0(\alpha_k x).$$

Algemeen moet je een stelsel oplossen om de a_k te vinden, maar omwille van de orthogonaliteit **vinden we een goede match!**

$$a_k = \int_0^1 x f(x) J_0(\alpha_k x) dx \cdot \frac{1}{\int_0^1 x (J_0(\alpha_k x))^2 dx}.$$

Dit is een eenvoudige uitdrukking voor coëfficiënten.

Voorbeeld 2.5.1 (Met afgeleiden)

$$J_0(\beta_0 x), J_0(\beta_1 x), \dots$$

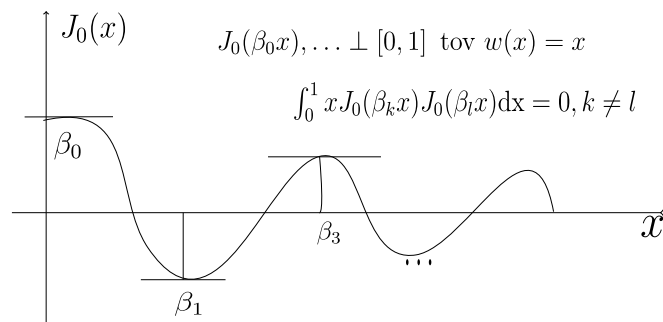


Figure 2.6: Besselafgeleid

Als we hier nu f willen benaderen hebben we enkele ingrediënten nodig;

- $[0, 1]$
- $\{J_0(\beta_0 x), J_0(\beta_1 x), \dots\}$
- We kiezen kleinste kwadratencriterium met $w(x) = x$

$$\int_0^1 x (f - g)^2 dx.$$

Dit is opnieuw een perfecte match. Alle functies zijn orthogonaal op $[0, 1]$ tov x de gewichtsfunctie.

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n a_k J_0(\beta_k x).$$

$$a_k = \frac{\int_0^1 f(x) J_0(\beta_k x) dx}{\int_0^1 x (J_0(\beta_k x))^2 dx}.$$

Eigenschap: Eigenschap van minder belang

Eigenschap die wordt bewezen in de cursus in verband met producten van Bessel-functies met zichzelf; nuttig voor vinden expliciete uitdrukking noemer voor uitdrukking coëfficiënten.

$$\int_0^1 x (J_0(\lambda x))^2 dx = \frac{1}{2} (J_0'(\lambda))^2 + \frac{1}{2} (J_0(\lambda))^2.$$

2.6 Fourierreeksen

We doen dus wat we in het vorig deel besproken hebben, $f(x) \in [-\pi, \pi]$ met basisfuncties

$$g(x) = \begin{cases} 1 \\ \cos(x) \sin(x) \\ \cos(nx) \sin(nx) \\ \vdots \end{cases}.$$

met kleinste kwadraten criterium $w(x) = 1$. Dit betekent dat we de volgende fout minimaliseren;

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Normaal moeten we dus een stelsel oplossen, maar we krijgen een match (dit is gewoon herhaling van het vorig deel).

Definitie 2.6.1: Kleinste kwadraten trigonometrische veelterm

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k = 1, \dots, n.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, k = 1, \dots, n.$$

Opmerking 2.6.1 of ook

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

met

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, k = 0, \dots, n.$$

Definitie 2.6.2: Een fourierreeks

gedefinieerd als

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Eigenschap: Integraal over periodieke functie
 $f(x)$ een periodieke functie met periode T en f integreerbaar;

$$\int_0^T f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) dx.$$

Stel we willen een fourier reeks maken van een functie met periode T , we gebruiken een transformatie;

$$\phi(y) = f(x), x = \frac{yT}{2\pi}.$$

$$\iff \phi(y + 2\pi) = f\left(\frac{yT}{2\pi} + T\right).$$

$$\iff f\left(\frac{yT}{2\pi}\right) = f(x) = \phi(y).$$

Nu heeft ϕ periode 2π

Definitie 2.6.3: Fourierreeks van functie met periode T

$$f(x+T) = f(x), \forall x$$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) \right).$$

met

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx.$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx.$$

Dit volgt uit de substitutie $\phi(y) = f(x), x = \frac{yT}{2\pi}$.

Opmerking 2.6.2 Basis pulsatie

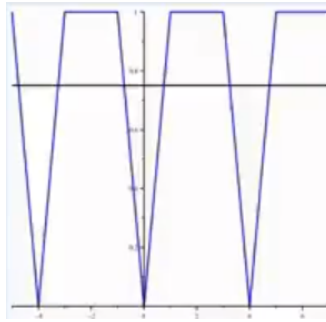
Als je $k = 1$ stelt, dan staat bij a_k een basis pulsatie $\frac{2\pi}{T}$ en alle frequenties die voorkomen in die expansie zijn veelvoud van die basisfrequentie.

Voorbeeld 2.6.1 (Beschouw)

$f(x)$ periodieke uitbreiding van

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 3 \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Dit is een even functie en heeft periode $T = 4$. Ziet er als volgt uit;



Het is een even functie, fourierreeks herleidt tot cosinusreeks

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right).$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{3}{2}.$$

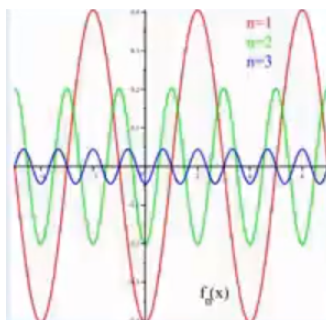
Dit is de gemiddelde waarde.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx.$$

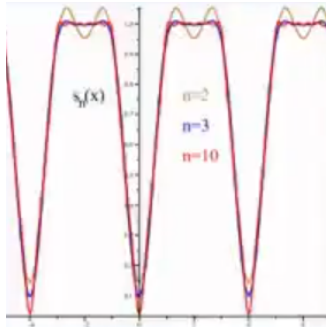
$$\Leftrightarrow \int_0^1 x \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right) dx + \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right) dx.$$

De fundamentele trilling $f_1(x)$ gegeven door

$$f_1(x) = a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$



De hogere harmonischen worden ook weergegeven; f_i bevatten gewon hogere termen!! Dit is fundamenteel om te begrijpen;



Dat is wat je krijgt wanneer je

$$s_3(x) = \sum_{k=0}^3 f_k(x).$$

2.7 Convergentie van fourier reeksen

Definitie 2.7.1: Stuksgewijs continue functie

$f(x)$ is een stuksgewijze continue functie op $[a, b]$ indien f continu is op $[a, b]$ of een eindig aantal discontinuïteiten heeft en in elk punt van $[a, b]$ de linker- en rechterlimiet bestaan.

In a bestaat de rechterlimiet in b de linkerlimiet. Om het met middelbare termen uit te drukken, functie met enkel perforaties als discontinuïteiten of geen discontinuïteiten.

Definitie 2.7.2: Stuksgewijze effen functie

$f(x)$ is stuksgewijze effen op $[a, b]$ indien f, f' continu zijn op $[a, b]$ of een eindig aantal discontinuïteiten hebben in alle punten $x_0 \in [a, b]$. De linker- en rechterlimieten van al deze punten moeten dan bestaan voor zowel f als f' . Om het simpel uit te drukken; **Effen functie is een functie die stuksgewijze continu is en haar afgeleide is ook stuksgewijze continu.** Denk ik.

Idee of vraag 2.7.1

Betekent dat dan dat de originele functie geen discontinuïteiten mag bevatten?

$$f(x_0+) = \lim_{h \rightarrow 0+} f(x_0 + h), f(x_0-) = \lim_{h \rightarrow 0-} f(x_0 + h).$$

$$f'(x_0+) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0+)}{h}, f'(x_0-) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Stelling: Fourierreeks effen functies

Indien $f(x)$ stuksgewijze effen is op $[-\pi, \pi]$ convergeert de fourierreeks puntsgewijze tot

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}, x \in (-\pi, \pi).$$

$$\frac{f((-\pi)+) + f(\pi-)}{2}.$$

Laten we bespreken wat deze stelling betekent;

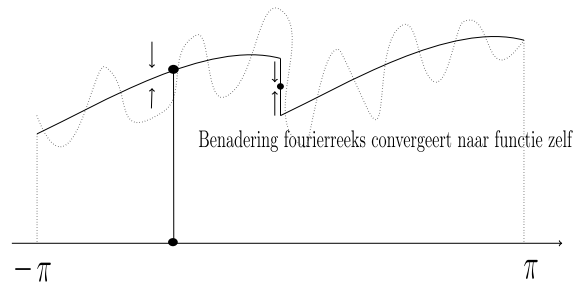


Figure 2.7: effen

Opmerking 2.7.1 Wat kunnen we zeggen over de randpunten?

Op de rand zal de fourierreeks op de discontinuïteit convergeren naar het gemiddelde van de rechter en linkerlimiet!!

Waarom dit zo is kunnen we verder illustreren.

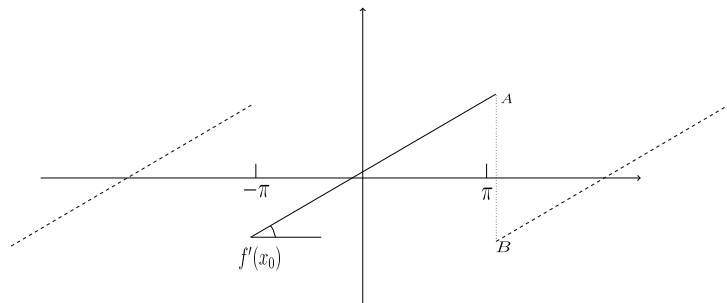


Figure 2.8: discontinuconv

A is de linkerlimiet, B de rechterlimiet. Dat is precies wat er in de stelling staat, gemiddelde van die twee.

Voorbeeld 2.7.1

Bepaal de cosinusreeks; Voor $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$ en bereken aan de hand hiervan;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

en

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

1. Fourier coëfficiënten bepalen;

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(kx) dx.$$

$$\int x^2 \cos(kx) = x^2 \cdot \frac{\sin(kx)}{k} - \int \frac{\sin(kx)}{k} \cdot 2x dx.$$

Idee of vraag 2.7.2

Dit is waanzinnig nu moet ik dubbele partiële integratie toepassen, dit kan niet de bedoeling zijn???

2.8 Gibbs verschijnsel

fout bij benadering

$$R_n(x) = s_n(x) - f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} - \frac{\pi - x}{2}, x \in [0, \pi].$$

Dit komt nog uit een voorbeeld dat ze in het boek waren gestart.

$$R'_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx) + \frac{1}{2} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{2 \sin(\frac{x}{2})}.$$

bemerk

$$\lim_{x \rightarrow 0+} R_n(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$$R_n(x) = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt.$$

Het lokale maximum wordt bereikt door

$$x_n = \frac{\pi}{n + \frac{1}{2}}.$$

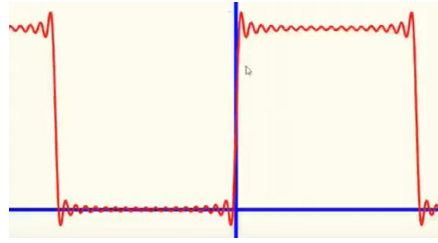
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

Opmerking 2.8.1

Wat er zal gebeuren is dat de overshoot zich meer en meer zal concentreren in de buurt van de discontinuïteit. Maar het hele punt is wel dat je de overshoot niet kwijt kunt raken. Deze convergeert naar een getal groter dan nul.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_n) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \frac{\sin(s)}{s} ds \neq 0.$$

Ze werken het voorbeeld uit in de cursus en meer wordt er niet echt gezegd. Dus je moet gewoon weten dat dit bestaat en gebeurt.



2.9 Fourier-Besselreeksen

Definitie 2.9.1: Fourier-Besselreeks

zij $\alpha_k, k = 1, 2, \dots$ de opeenvolgende positieve nulpunten van $J_0(x)$ en $\beta_0, \beta_k, k = 1, 2, \dots$ de opeenvolgende positieve nulpunten $J'_0(x)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\alpha_k x).$$

waar

$$c_k = \frac{2}{(J_1(\alpha_k))^2} \int_0^1 x f(x) J_0(\alpha_k x) dx, k = 1, 2, \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k J_0(\beta_k x).$$

$$d_k = \frac{2}{(J_0(\beta_k))^2} \int_0^1 x f(x) J_0(\beta_k x) dx, k = 0, 1, \dots$$

Dit zijn de Fourier-Besselreeksen van eerste en tweede soort resp. van orde 0 van $f(x)$.

Opmerking 2.9.1

Tweede soort heeft hier te maken met de nulpunten van de afgeleide van J_0 , heeft **niets** te maken met besselfuncties van de tweede soort.

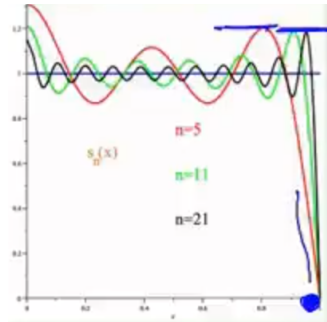
Maar zoals ik het zie hadden we dit al eerder in dit hoofdstuk beredeneert in het stuk over orthogonaliteit.

Stelling:

Stel dat $a_1 < a_2 < \dots$ de positieve nulpunten zijn van $J_0(x)$. Zij $f(x)$ stuksgewijze effen op $[0, 1]$. De fourier-besselreeks van de eerste soort convergeert puntsgewijs tot

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}, \forall x_0 \in (0, 1).$$

Er wordt geen uitspraak gedaan over convergentie op de randpunten, en die is er ook niet altijd.



We krijgen opnieuw een Gibbs-achtig verschijnsel bij volgend voorbeeld;

$$f(x) = 1.$$

De fourier-Besselreeks van de eerste soort;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_k J_1(\alpha_k)} J_0(\alpha_k x).$$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(0) = 1 = f(0) = J_0(\alpha_k)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(1) = 0 \neq f(1)$

Het is niet exact hetzelfde, bij fourierreeksen werd het geïnduceerd door discontinuïteiten in de functie, hier heeft het te maken met dat de benadering altijd moet starten vanuit 0 in het punt 1.

3 Sturm-Liouvilleproblemen

Dit zijn problemen die het algebraïsche eigenwaardeprobleem veralgemenen naar ruimtes van functies.

Herrinnering 3.0.1 Symmetrisch eigenwaardeprobleem

$$A\vec{E} = \lambda\vec{E}.$$

Is symmetrisch als A symmetrisch is; $A = A^T$

- Alle eigenwaarden zijn reëel. $\forall \lambda_i \in \sigma(A) : \lambda \in \mathbb{R}$
- Eigenvectoren horend bij verschillende eigenwaarden staan onderling loodrecht op elkaar.
- Er zijn n onafhankelijke eigenvectoren die een basis opspannen.

$$\implies \forall \vec{X} \in \mathbb{R}^n : \vec{X} = \sum_{i=1}^n c_i \vec{E}_i.$$

Of elke vector in de ruimte kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de eigenvectoren van A. Dat is immers wat het betekent als ze een ruimte opspannen.

3.1 Het eigenwaardeprobleem in de ruimte

Definitie 3.1.1: Operator

- $C^2([a, b], \mathbb{C})$ is de ruimte van functies f van $[a, b]$ naar \mathbb{C} met f, f', f'' continu
- Operator L op $C^2([a, b], \mathbb{C})$ wordt gedefinieerd als;
 - Het domein van de operator, genoteerd $D(L)$ is de verzameling van functies die voldoen aan randvoorwaarden van de vorm

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0.$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

- De actie van de operator wordt beschreven door

$$Ly = a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x).$$

$$\forall y \in D(L).$$

We kunnen nu een eigenwaardeprobleem definiëren dat analoog is aan het probleem bij matrices.

Definitie 3.1.2: Eigenwaardeprobleem van L

Bepaal oplossingen van $Ly = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0$ Dit betekent concreet; We voeren de L operator uit op y en willen dat dit wordt afgebeeld op een veelvoud; We zoeken $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor diffvergelijking

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = \lambda y(x).$$

met randvoorwaarden

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0.$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

Waarvoor deze diffvergelijking met die randvoorwaarden een **niet-triviale oplossing heeft**.

Voorbeeld 3.1.1 (Functies die interval $[0, \pi]$ afbeelden op complexe vlak)

$$\begin{cases} D(L) = \{y \in C^2([0, \pi], \mathbb{C}) : y(0) = 0, y(\pi) = 0\} \\ Ly = y \end{cases}.$$

$$Ly = \lambda y, y \neq 0, y \in D(L).$$

We zoeken een functie van y zodanig dat de tweede afgeleide van y gelijk is aan λy

$$\rightarrow y''(x) = \lambda y.$$

Opmerking 3.1.1

Het feit dat y tot $D(L)$ behoort betekent dat $y(0) = 0 \wedge y(\pi) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y''(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Eigenschap:

Als $\phi_i(x)$ een eigenfunctie is horend bij eigenwaarde λ_i dan is elke functie $c\phi_i(x), c \neq 0$ ook een eigenfunctie horend bij λ_i

Eigenschap:

Eigenfunctie $\phi_i(x), i = 1, \dots, n$ horend bij verschillende eigenwaarden $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ zijn lineair onafhankelijk op $[a, b]$

3.2 Symmetrische eigenwaardeproblemen

We bepalen het inwendig product van functies als

$$(y_1, y_2) = \int_a^b \overline{y_1(x)} y_2(x) dx.$$

Dus de integraal van a tot b van de complex toegevoegde van y_1 maal y_2

We beschouwen nu opnieuw een eigenwaardeprobleem

$$\begin{aligned}
 Ly &= \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0. \\
 \iff a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) &= \lambda y(x). \\
 \begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Definitie 3.2.1: Definitie van zelftoegevoegde operator

L is zelftoegevoegd als

$$\begin{aligned}
 (y_1, Ly_2) &= (Ly_1, y_2), \forall y_1, y_2 \in D(L). \\
 &\equiv \int_a^b \overline{y_1} Ly_2 dx = \int_a^b \overline{(Ly_1)} y_2 dx.
 \end{aligned}$$

Voor alle y_1, y_2 die voldoen aan

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}$$

Als L zelftoegevoegd is, dan is het eigenwaardeprobleem symmetrisch.

We hebben nu enkele eigenschappen die analoog zijn aan eigenschappen met symmetrische matrices.

Bewijs 3.2.1:

Stelling:

De eigenwaarden van een symmetrisch eigenwaardeprobleem zijn reëel

Veronderstel dat $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde is en ϕ de bijhorende eigenfunctie. L is zelftoegevoegd dus geldt

$$(\phi, L\phi) = (L\phi, \phi).$$

Uit $L\phi = \lambda\phi$ volgt;

Idee of vraag 3.2.1

$$\lambda \int_a^b |\phi(x)|^2 dx = \int_a^b \overline{(\lambda\phi(x))} \phi(x) dx = \bar{\lambda} \int_a^b |\phi(x)|^2 dx.$$

Snap niet heel goed hoe dit bewijs in elkaar valt, op welke manier de twee vorige stellingen leiden tot dit tussenresultaat

$$\lambda(\phi, \phi) = \bar{\lambda}(\phi, \phi).$$

$$\iff 0 = (\lambda - \bar{\lambda})(\phi, \phi) = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |\phi(x)|^2 dx.$$

$$\phi \neq 0 \implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eigenfuncties kunnen steeds reëel gekozen worden en in wat volgt kiezen we ze ook $\in \mathbb{R}$

Eigenschap:

eigenfuncties $\phi_n(x), \phi_m(x)$ horend bij verschillende eigenwaarden λ_n en λ_m van een symmetrisch eigenwaardeprobleem zijn orthogonaal over het interval $[a, b]$ tov gewichtsfunctie $w(x) = 1$;

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0.$$

Dit is de directe veralgemening van de eigenvectoren die orthogonaal zijn bij verschillende eigenwaarden voor symmetrische matrices.

Bewijs 3.2.2: Bewijs van die orthogonaliteit

Er geldt

$$(L\phi_n, \phi_m) = (\phi_n, L\phi_m).$$

$$\lambda_n(\phi_n, \phi_m) = \lambda_m(\phi_n, \phi_m).$$

en vermits $\lambda_n \neq \lambda_m$

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_a^b \overline{\phi_n(x)} \phi_m(x) dx = 0.$$

Vermits de eigenfuncties reëel zijn kan $\overline{\phi_n}$ door ϕ_n vervangen worden.

Eigenschap: Eigenfuncties die een basis vormen

Onderstel dat het eigenwaardeprobleem symmetrisch is en bovendien L normaal is (dwz;)

$$a_0(x) \neq 0, \forall x \in [a, b].$$

Dan zijn er oneindig veel reële eigenwaarden $\lambda_n, n = 0, 1, \dots$ zodat

$$|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty.$$

voor een stuksgewijze effen functie f op $[a, b]$ geldt;

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

waarbij

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n(x)^2 dx}.$$

Dus hiermee wordt getoond hoe het idee van eigenvectoren die een basis opspannen voor de originele basis is veralgemeend! De eigenfuncties spannen een basis op voor $f(x)$. Om even iets dieper in te gaan op die uitdrukking voor de coëfficiënten;

$$f(x) \phi_j(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) \phi_j(x).$$

Dit is 0 wanneer $\phi_n(x) \neq \phi_j(x)$

$$\Rightarrow f(x) \phi_j(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) \phi_j(x) = a_j \int_a^b \phi_j(x)^2 dx.$$

Dus vorm het om en voila, magie.

Dit stuk kan worden afgesloten door een parallel te trekken tussen de twee contexten rond symmetrische problemen.

Voorwaarde symmetrie;

$$\langle y_1, Ly_2 \rangle = \langle Ly_1, y_2 \rangle \quad \forall y_1, y_2 \in D(L).$$

voor vectoren;

$$\begin{aligned} \langle x_1, Ax_2 \rangle &= \langle Ax_1, x_2 \rangle, \quad \forall x_1, x_2. \\ x_1^T Ax_2 &= (Ax_1)^T x_2 = x_1^T A^T x_2, \quad \forall x_1, x_2. \\ &\iff A = A^T. \end{aligned}$$

Dus het is analoog, we kunnen drie eigenschappen extraheren

- reële eigenwaarden in beide gevallen
- orthogonaliteit eigenvectoren of eigenfuncties
- eigenvectoren of eigenfuncties volgen een basis

3.3 Klasse symmetrische problemen

3.3.1 eerste voorbeeld

Voorbeeld 3.3.1 (Klasse symmetrische problemen)

$$Ly = \lambda y, .$$

$$\lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0$$

Stel

1. Operator L van de vorm

$$Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x).$$

$$\iff p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x).$$

Dus de tweede coefficient is de afgeleide van de eerste. en wat in het voorbeeld kader staat is compacte notatie.

2. Stel dat de randvoorwaarden gescheiden zijn (rvw waarin enkel a/b voorkomt)

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_3 y'(a) = 0.$$

$$\beta_2 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

of periodieke rvw

$$y(a) = y(b).$$

$$y'(a) = y'(b).$$

met $p(a) = p(b)$

Om terug te komen op dat vorige voorbeeld

Voorbeeld 3.3.2 (Functies die interval $[0, \pi]$ afbeelden op complexe vlak)

$$\begin{cases} D(L) = \{y \in C^2([0, \pi], \mathbb{C}) : y(0) = 0, y(\pi) = 0\} \\ Ly = y \end{cases}.$$

$$Ly = \lambda y, y \neq 0, y \in D(L).$$

$$\rightarrow y''(x) = \lambda y.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y''(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Hebben we te maken met een symmetrisch probleem?

$$Ly = 1y''(x) + 0y'(x) + 0y(x) \iff a_0 = 1, a_1 = 0.$$

Als je kijkt naar de vorm van de operator zie je dat deze juist is. Als je kijkt naar de rvw, in de eerste komt enkel nul voor in de tweede enkel pi. **Gescheiden rvw.** \Rightarrow we hebben te maken met een symmetrisch probleem, dus reële eigenwaarden. Laten we deze berekenen.

- $\lambda = 0$

$$y''(x) = 0 \iff y(x) = c_1 + c_2 x.$$

De algemene oplossing is een veelterm van de eerste graad. rvw gebruiken;

$$y(x) = 0.$$

Enkel de nuloplossing voldoet, triviale oplossing die niets zegt.

- $\lambda > 0$ Oplossing zal ofwel een combinatie zijn van exponentiëlen

$$\begin{cases} \exp(\sqrt{\lambda}x) \\ \exp(-\sqrt{\lambda}x) \end{cases}.$$

of combinatie van hyperbolische functies (dus evident zijn die twee hetzelfde maarja)

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}x).$$

als we hierop de rvw gebruiken

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \implies c_1 = 0.$$

$$c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

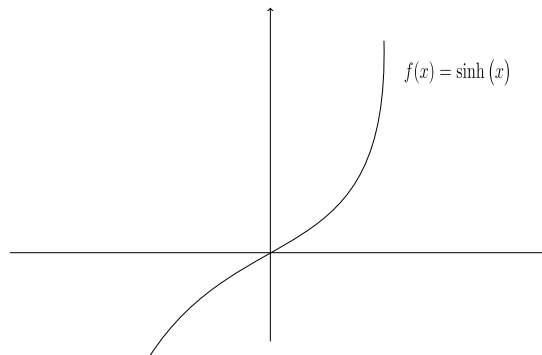


Figure 3.1: sinh

Die functie heeft geen positieve nulpunten dus wederom nuloplossing.

- $\lambda < 0$:

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Moet met matlab bekeken worden maar mij niet vragen hoe. rvw

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \implies c_2 = 0.$$

$$c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0.$$

wow eindelijk een oplossing.

$$\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \dots \rightarrow \lambda_n = -n^2.$$

$$\implies X_n(x) = c_2 \sin(nx).$$

Dan voldoe je aan diffvergelijking en rvw. Oneindig veel eigenfunctie $\sin(nx)$ en dus op constante na!

3.3.2 Visualisatie van deze eigenfunctie

$$y''(x) = \lambda y, y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

$$\phi_n(x) = \sin(nx) \quad n = 1, 2, \dots$$

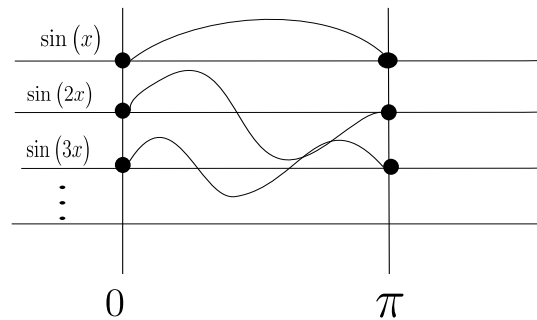


Figure 3.2: eigenfuncties

dit komt neer op een fouriersinusreeks van oneven uitbreiding van f

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

dit is de fouriersinusreeks van oneven uitbreiding f op $[-\pi, \pi]$

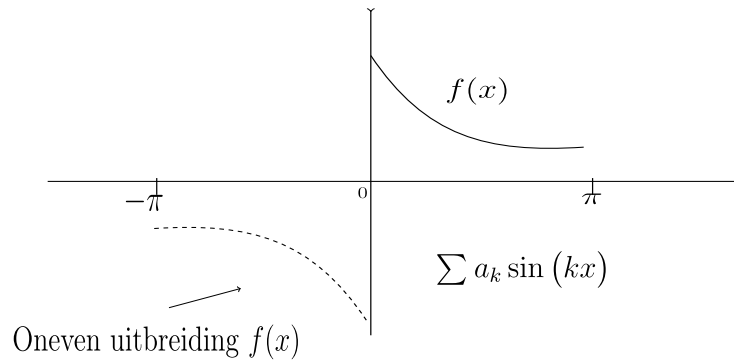


Figure 3.3: Uitbreiding

Een fouriersinusreeks kunnen we ook interpreteren als expansie van de functie in de oplossingen van dit eigenwaardeprobleem.

3.3.3 tweede voorbeeld

Voorbeeld 3.3.3 (Actie is hetzelfde)

$$y''(x) = \lambda y(x).$$

$$y'(0) = 0.$$

$$y'(L) = L.$$

Het verschil is dat we hier te maken hebben met afgeleiden als rvw.

- $\lambda = 0$: $y(x) = c_1 + c_2x$, $y'(x) = c_2$

$$y'(0) = y'(L) = c_2 = 0 \implies \lambda_0 = 0.$$

is een eigenwaarde; $\phi_0(x) = 1$ **Alle constante functies zijn eigenfuncties.**

- $\lambda > 0$

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}x).$$

$$y'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \sinh(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda} \cosh(\sqrt{\lambda}x).$$

de randvoorwaarde zegt nu dat de afgeleide in nul nul moet zijn.

$$\rightarrow c_1 \sqrt{\lambda} \cdot 0 + c_2 \sqrt{\lambda} \cdot 1 = 0 \implies c_2 = 0.$$

De tweede randvoorwaarde zegt dat de afgeleide in het punt L nul moet zijn.

$$\rightarrow c_1 \sqrt{\lambda} \sinh(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

\sinh heeft voor een positief element geen enkel nulpunt. We kunnen enkel aan deze rvw voldoen als $c_1 = 0$. Er blijft niets meer over.

- $\lambda < 0$

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Opmerking 3.3.1

Lambda is negatief daarom de min lambda onder de wortel, snap wel nog niet helemaal waarom dat precies mag

$$y'(x) = -c_1 \sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

We vullen de rvw in

$$\begin{cases} y'(0) = c_2 \sqrt{-\lambda} = 0 \implies c_2 = 0 \\ -c_1 \sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \end{cases}.$$

We hebben een uitweg, er staat een sinus.

$$\sqrt{-\lambda}L = n\pi, n = 1, 2, \dots$$

$$\implies \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, n = 1, 2, \dots$$

voor de eigenfuncties kijken we naar wat overblijft.

$$\phi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

We hadden de eigenfuncties ook makkelijk kunnen bepalen door na te denken over het probleem.

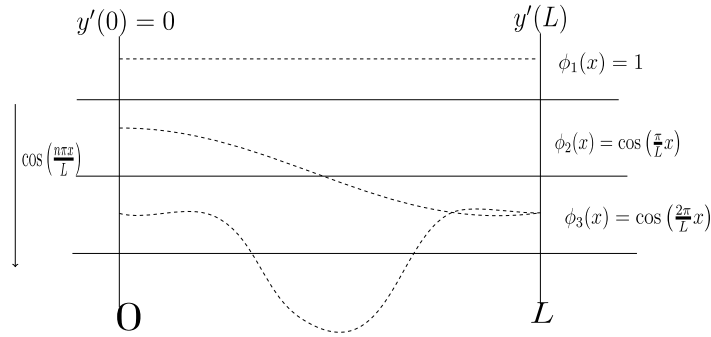


Figure 3.4: visualisatie-van-oplossing

Voorbeeld 3.3.4 (Laatste voorbeeld)

$$y''(x) = \lambda y(x).$$

$$y(0) = 0.$$

$$hy(L) + y'(L) = 0, (h, L > 0).$$

- $\lambda = 0$

$$y(x) = c_1 + c_2 x, y'(x) = c_2.$$

$$y(0) = c_1 = 0.$$

$$hy(L) + y'(L) = hc_1 + hc_2 L + c_2 = 0 \implies c_1 = c_2 = 0.$$

dit is geen eigenwaarde, triviaal

- $\lambda > 0$:

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{\lambda}x).$$

$$y'(x) = \sqrt{\lambda} \left(c_1 \sinh(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}x) \right).$$

$$\iff y(0) = c_1 = 0.$$

$$hy(L) + y'(L) = hc_2 \sinh(\sqrt{\lambda}L) + \sqrt{\lambda}c_2 \cosh(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

$$\implies c_1 = c_2 = 0.$$

opnieuw triviaal geen eigenwaarde.

- $\lambda < 0$:

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

$$y'(x) = \sqrt{-\lambda} \left(-c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x) \right).$$

$$y(0) = c_1 = 0.$$

$$hy(L) + y'(L) = hc_2 \sin(\sqrt{-\lambda}L) + \sqrt{-\lambda}c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}L) = 0.$$

Waarom is deze uitdrukking nul?

$$c_2 \left[h \cdot \sin(\sqrt{-\lambda}L) + \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}L) \right] = 0.$$

ofwel is $c_2 = 0$ maar dan enkel triviale oplossing. Andere mogelijkheid is dat de tweede factor nul is (tussen vierkante haakjes).

$$\iff \sin(\sqrt{-\lambda}L) = \frac{\sqrt{-\lambda}L}{hL} \cos(\sqrt{-\lambda}L).$$

$$\iff \tan(\sqrt{-\lambda}L) = -\frac{\sqrt{-\lambda}L}{hL}.$$

we substitueren $\sqrt{-\lambda}L = \mu$

$$\iff \tan(\mu) = -\frac{\mu}{hL}.$$

met h en L gegeven constanten. Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

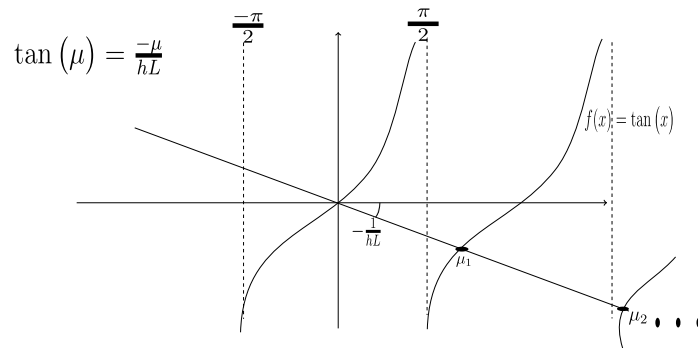


Figure 3.5: tangens

We hebben oneindig veel oplossingen μ_i

$$\lambda_n = \frac{-\mu_n^2}{L^2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Voor de eigenfuncties

$$\phi_n(x) = \sin(\sqrt{-\lambda_n}x) = \sin\left(\frac{\mu_n x}{L}\right).$$

1. Orthogonaliteitseigenschap

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\mu_n x}{L}\right) \sin\left(\frac{\mu_m x}{L}\right) dx = 0, n \neq m.$$

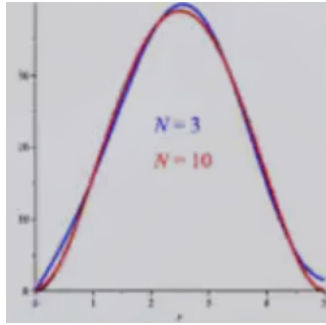
We weten dat dit moet voldaan zijn omdat we te maken hebben met een symmetrisch probleem. tov $w(x) = 1$. Je kan dit aantonen met inverse formules Simpson, maar doe toch maar niet.

2. Convergentie eigenschap

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\mu_n x}{L}\right).$$

waar

$$a_n = \frac{\int_0^L \sin\left(\frac{\mu_n x}{L}\right) f(x) dx}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{L}\right) dx}.$$



Dit probleem zal later nog belangrijk zijn voor warmtevergelijking, dus zorg dat je dit goed herhaalt.

3.3.4 Periodieke rvw

Voorbeeld 3.3.5 (Dubbele eigenwaarden)

Nu hebben we te maken met periodieke rvw.

$$y''(x) = \lambda y(x).$$

$$y(\pi) = y(-\pi).$$

$$y'(\pi) = y'(-\pi).$$

met Ly van de vorm

$$Ly = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x).$$

waarbij

$$p(x) = 1, q(x) = 0.$$

Dus afg. coëff 1 is gelijk aan coëff 0. We kunnen zoeken naar **reële eigenwaarden**

- $\lambda = 0$

$$y(x) = Ax + B.$$

$$-A\lambda + B = A\lambda + B.$$

$$y'(x) = A.$$

$$A = A.$$

$$-A\pi = A\pi \implies A = 0.$$

$$\phi_0(x) = 1, \lambda_0 = 0.$$

- $\lambda < 0$

$$y(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

$$y'(x) = -A\sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

$$\implies \phi_n(x) = A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx).$$

$$\begin{cases} A \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + B \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = A \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + B \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) \\ A\sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + B\sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) = -A\sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) + B\sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}\pi) \end{cases}.$$

$$\implies \begin{cases} 2B \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \\ 2A\sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \\ A \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases}.$$

We beschouwen de nuloplossing waar A en B gelijk zijn aan nul niet

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \dots$$

$$x_n = n^2.$$

Opmerking 3.3.2

Vaak ga je voorwaarden vinden zodat je a in functie van b kunt schrijven of omgekeerd, maar in dit geval niet. We vinden hier een dubbele eigenwaarde, dit is het enige probleem waarbij dit voorkomt.

3.4 Sturm-Liouvilleproblemen

Definitie 3.4.1: Sturm-Liouvilleprobleem

Gegeven een functie r die voldoet aan $r(x) > 0, x \in [a, b]$ zoeken we waarden van $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor de differentiaalvergelijking

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x).$$

met randvoorwaarden

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_3 y'(a) = 0.$$

$$\beta_2 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

een niet-triviale oplossing heeft.

De tweede coefficient is de afgeleide van de eerste. Het is een directe veralgemening van het symmetrische eigenwaardeprobleem.

Opmerking 3.4.1

λ noemen we een eigenwaarde van het Sturm-Liouvilleprobleem $y(x)$ de overeenkomstige eigenfunctie

Eigenschap:

De eigenwaarden van een Sturm-Liouvilleprobleem zijn reëel.

Eigenschap:

Eigenfuncties $\phi_n(x) \wedge \phi_m(x)$ horend bij verschillende eigenwaarden λ_n en λ_m van een Sturm-Liouvilleprobleem zijn orthogonaal over het interval $[a, b]$ ten opzichte van de gewichtsfunctie $w(x) = r(x)$

$$\Leftrightarrow \int_a^b r(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0.$$

In andere woorden worden eigenschappen van ervoor behouden en dit is eigenlijk al vrij uitgebreid eerder besproken. Maar nu geldt orthogonaliteit tov r .

Voor verdere uitwijdding hieromtrent. We weten dat L een zelftoegevoegde operator is

$$(\phi_n, L\phi_m) = (L\phi_n, \phi_m).$$

ϕ_m is een eigenfunctie dus we kunnen zeggen dat

$$L\phi_m = \lambda_m r(x)\phi_m(x).$$

$$L\phi_n = \lambda_n r(x)\phi_n(x).$$

Daardoor verschijnt $r(x)$ ook in orthogonaliteitseigenschap.

Eigenschap:

Met behulp van eigenfuncties kun je een basis vormen. Voor een stuksgewijze effen functie $f(x)$ op $[a, b]$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

waarbij

$$a_n = \frac{\int_a^b r(x)f(x)\phi_n(x)dx}{\int_a^b r(x)\phi_n(x)^2 dx}.$$

onder bepaalde voorwaarden zoals dat L normaal is $p(x) \neq 0, x \in [a, b]$

3.4.1 compacte notatie

Die operator L kan ook compact genoteerd worden. op dit moment staat het dus als volgt;

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x).$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_3 y'(a) = 0.$$

$$\beta_2 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

we kunnen ook L noteren;

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right).$$

daar kun je de kettingregel op toepassen en de vergelijking terugvinden. Deze notatie ga je terugzien in slides en cursus.

3.4.2 Logica achter ontbinding

$$f(x)\phi_k(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)\phi_k(x).$$

$$\int_a^b r(x)f(x)\phi_k(x)dx \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b r(x)\phi_n(x)\phi_k(x)dx.$$

Het enige dat zal overblijven is $n = k$, dat is de enige term die blijft.

$$a_k \int_a^b r(x)\phi_k(x)^2 dx.$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{\int_a^b r(x)f(x)\phi_k(x)dx}{\int_a^b r(x)\phi_k(x)^2 dx}.$$

zeer gelijkaardige redenering als eerder.

3.4.3 Voorbeeld

Voorbeeld 3.4.1

$$xy''(x) + y'(x) = \lambda \frac{1}{x} y(x).$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}.$$

Zoals het nu in de slides staat is alles genoteerd zodat L zelftoegevoegde vorm is.

- $\lambda = 0$ opgelost met matlab, weet nog niet hoe dat moet

$$y(x) = c_1 + c_2 \ln(x).$$

we gebruiken de rvw, geven ze in

$$c_1 = 0 \wedge c_2 = 0.$$

we vinden dus de triviale oplossing

- $\lambda > 0$

$$y(x) = c_1 \cdot x^{\sqrt{\lambda}} + c_2 \cdot x^{-\sqrt{\lambda}}.$$

we geven opnieuw rvw in en vinden enkel de triviale oplossing

$$c_1 = 0 \wedge c_2 = 0.$$

- $\lambda < 0$

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} \ln(x)) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \ln(x)).$$

en als we hier de rvw invullen

$$c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \implies c_1 = 0.$$

tweede rvw;

$$c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \ln(e)) = 0.$$

we zeggen $c_2 \neq 0$ dan met het argument van de sinus nul zijn.

$$\sqrt{-\lambda} = n\pi \implies \lambda_n = -n^2\pi^2.$$

$$\implies \phi_n(x) = \sin(n\pi \ln(x)).$$

Belangrijk om te beseffen dit is een standaard sturm-liouvilleprobleem dus alle eigenschappen moeten gelden.

$$\int_1^e \sin(n\pi \ln(x)) \sin(m\pi \ln(x)) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) \sin(mt) dt = 0, n \neq m.$$

met substitutie

Stelling: Transformatie

Willekeurig eigenwaardeprobleem gegeven

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = \lambda y(x).$$

met gescheiden randvoorwaarden

1. $a'_0(x) = a_1(x)$ symmetrisch eigenwaardeprobleem, eigenfuncties orthogonaal tegenover gewichtsfunctie $w(x) = 1$

2. $a'_0(x) \neq a_1(x)$ dan doe je een transformatie tot

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x).$$

waarbij

$$p(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right).$$

$$q(x) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)} p(x).$$

$$r(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)}.$$

Indien $r(x) > 0$: sturm liouvilleprobleem! Eigenfuncties orthogonaal tov $w(x) = r(x)$

Je kunt dit toepassen op het vorige voorbeeld en dan heb je direct het goede resultaat.

$$x^2 y''(x) + x y'(x) = \lambda y(x) \implies x y''(x) + y'(x) = \lambda \frac{1}{x} y(x).$$

want

$$p(x) = \exp\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) = \exp(\ln(x)) = x, q(x) = 0, r(x) = \frac{1}{x}.$$

3.5 Singuliere sturm-liouvilleproblemen

Definitie 3.5.1: Singuliere randpunten

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x).$$

$$\equiv \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right).$$

met rvw

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_3 y'(a) = 0 \\ \beta_2 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

De eigenschap die vereist dat eigenfuncties een basis vormen vereist dat L normal is;

$$p(x) \neq 0, \forall x \in [a, b].$$

als $p(a) = 0$ en/of $p(b) = 0$? **Dan is a of b een singulier punt.**

Voorbeeld 3.5.1 (Singulier punt)

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) = \lambda x y(x).$$

$$\equiv x y'' + y' = \lambda x y.$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

$p(x) = x, x = 0$ is een singulier punt!.

We gaan eerst in de oefening gewoon aannemen dat het links begrensd is, en voor de rest laten we $y(0) = 0$ los als rvw.

$$y, y' \text{ begrensd } x \approx 0, y(1) = 0.$$

- $\lambda = 0$

$$y(x) = c_1 + c_2 \ln(x).$$

uit rvw halen we direct dat enkel de triviale oplossing overblijft.

- $\lambda > 0$

$$y(x) = c_1 I_0(\sqrt{\lambda}x) + c_2 K_0(\sqrt{\lambda}x).$$

I_0 is gewijzigde besselfunctie van de eerste soort. Beetje equivalent aan cosinus hyperbolicus. K_0 gewijzigde besselfunctie tweede soort.

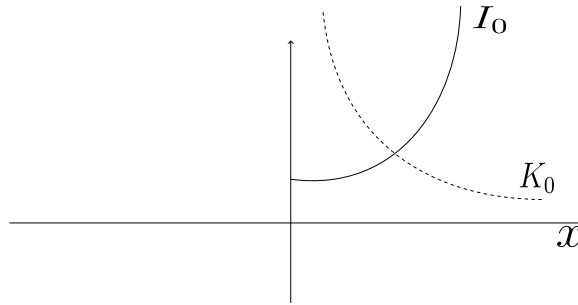


Figure 3.6: knulinul

omwille van het feit dat deze K_0 onbegrensd is en we hadden die begrensde rvw moet $c_2 = 0$. Dan met andere rvw ook opnieuw $c_1 = 0$. Enkel triviale oplossing.

- $\lambda < 0$

$$y(x) = c_1 J_0(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 Y_0(\sqrt{-\lambda}x).$$

Combinaties van de gewone besselfuncties.

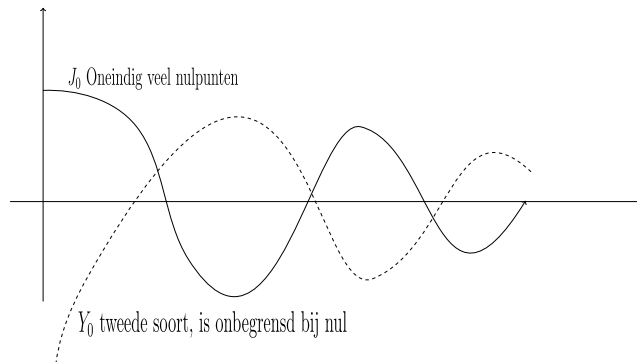


Figure 3.7: gewonebessels

enige dat je echt moet weten over die besselfunctie tweede soort is dat die onbegrensd is in de buurt van nul.

$$\implies c_2 = 0.$$

in 1 moet de functie 0 worden, we vullen dit in

$$c_1 J_0(\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

we willen opnieuw niet dat $c_1 = 0$ dus we kunnen $\sqrt{-\lambda}$ kiezen zodat de oplossingen samenvallen

$$\sqrt{-\lambda} = \alpha_n, n = 1, 2, \dots$$

$$\lambda_n = -\alpha_n^2.$$

$$\phi_n(x) = J_0(\alpha_n \cdot x).$$

Om af te sluiten de eigenschappen overlopen

1. orthogonaliteit

$$\int_0^1 x J_0(\alpha_n x) J_0(\alpha_m x) dx = 0, n \neq m.$$

2. convergentie-eigenschap

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\alpha_n x).$$

waarbij

$$a_n = \frac{\int_0^1 x J_0(\alpha_n x) f(x) dx}{\int_0^1 x J_0^2(\alpha_n x) dx}.$$

dit is een fourier besselreeks zoals vroeger behandeld.

Opmerking 3.5.1

Een fourier besselreeks kan men interpreteren als het ontbinden van een functie f in de eigenfuncties in de oplossingen van een singuliere sturm-liouvilleprobleem.

Voorbeeld 3.5.2

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) = \lambda x y(x).$$

$$\equiv x y'' + y' = \lambda x y.$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

$p(x) = x, x = 0$ is een singulier punt!.

en deze keer echt $y(0) = 0$

Zelfde probleem, nu gaan we het aanpakken zoals het er staat om dit stuk af te sluiten.

• $\lambda = 0$

$$x y''(x) + y'(x) = 0 \implies y(x) = c_1 \ln(x) + c_2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

dus $c_1 = c_2 = 0$ triviale oplossing, wow hoe onverwacht.

- $\lambda > 0$

$$xy''(x) + y'(x) - \lambda xy(x) = 0.$$

we maken een transformatie, ik schrijf het één keer zo omdat het in de slides zo staat maar je moet helemaal niet met zo'n transformatie werken lol

$$y(x) = u(t), t = \sqrt{\lambda}x.$$

$$tu''(t) + u(t) + tu(t) = 0.$$

$$u(t) = c_1 I_0(t) + c_2 K_0(t).$$

$$y(x) = c_1 I_0(\sqrt{\lambda}x) + c_2 K_0(\sqrt{\lambda}x).$$

omwille van het verloop van die functies vinden we opnieuw de triviale oplossing.

- $\lambda < 0$

$$xy''(x) + y'(x) - \lambda xy(x) = 0.$$

$$y(x) = c_1 J_0(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 Y_0(\sqrt{-\lambda}x).$$

opnieuw geen eigenwaarden omwille het verloop van deze functies

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} Y_0(x) = -\infty$
- $J_0(0) = 1$
- $y(0) = 0 \implies c_1 = c_2 = 0$

We vinden geen enkele eigenwaarde terug. Uit de theorie kunnen we halen dat de operator zelftoegevoegd is ook met een singular punt op voorwaarde dat in dat singulier punt y, y' begrensd zijn in omgevend van 0. **Dus dan vanaf hier moet je teruggaan naar de vorige uitwerking van het voorebeeld waar dat wordt opgelegd en dan vind je wel oplossingen.** Ik weet ook niet waarom ze het in deze volgorde doen de videos slaan soms echt nergens op.

4 Eerste oefenzitting

4.1 Videos 1,2 uw

De video gelinkt bij deze oz vond ik echt prachtig, gaf goede meetkundige inzichten die ik totaal niet opmerkte toen ik eerst met de leerstof bezig was. Bekijk het opnieuw als je dit in blok terugleest en zaken vergeten bent.

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

welbekende formule;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Optelling van allerlei golven

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\|\cos(kx)\|^2} \langle f(x), \cos(kx) \rangle.$$

Bemerk dat dit er heel erg uitziet als **een inproduct tussen $f(x)$ en $\cos(x)$ en dat is exact wat dit is.** Je moet het natuurlijk wel normailiseren.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\|\sin(kx)\|^2} \langle f(x), \sin(kx) \rangle.$$

Opmerking 4.1.1

Die norm gekwadrateerd is $\frac{1}{\pi}$

Wat we hier hebben is een uitbreiding van f met een som van cosinussen en sinussen van hogere en hogeren frequenties met coëfficiënten bepaald door het inproduct van f met die bepaalde golf.

Meetkundig beeld

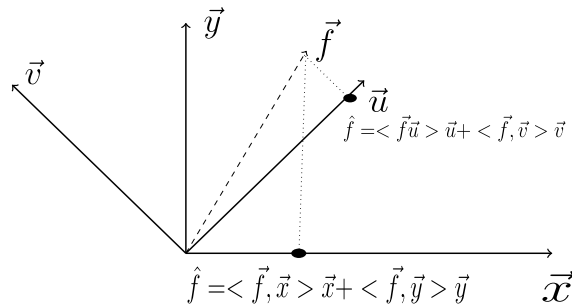


Figure 4.1: fouriermeetkunde

We hebben hier een x, y coördinatensysteem en een u, v coördinatensysteem. \vec{f} is de testvector f die we kunnen voorstellen in een orthogonaal systeem.

Merk trouwens op dat als \vec{x}, \vec{y} geen eenheidsvectoren waren je zou moeten delen door hun norm. Beschouw x, y, u en v als eenheidsvectoren.

Cosinus en sinus zijn ook orthogonale functies. We kunnen dus die vector f nemen en op die manier projecteren. Dat is exact wat we doen bij een Fourier transform.

4.2 Tutorial

4.3 Voorbereidende oefeningen

Vraag 1: Welke van de volgende functies zijn stuksgewijs effen

$$\begin{aligned} &\text{in } [-1, 1] \\ f(x) &= \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &\text{en} \\ g(x) &= x^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

Herrinnering 4.3.1 Stuksgewijs effen

Om het simpel uit te drukken; **Effen functie is een functie die stuksgewijze continu is en haar afgeleide is ook stuksgewijze continu.** Denk ik.

Idee of vraag 4.3.1 Mijn antwoord

Om kort te zijn, f is duidelijk geen stuksgewijs effen functie omwille van de discontinuïteit waarvoor geen uitbreiding mogelijk is.

g is duidelijk wel stuksgewijs effen. Bestaat overal, continu afleidbaar, heeft geen discontinuïteiten.

Vraag 2

Stel de fourierreeks op van de volgende functie

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in]-\pi, 0] \\ x, & x \in]0, \pi] \end{cases}.$$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} x dx \right).$$

$$\iff \frac{1}{\pi} \left(\pi + \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

dan

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \right).$$

$$\iff \frac{1}{\pi} (\pi +).$$

Het lukt me niet om deze integraal uit te rekenen, ben te moe

We vinden

$$f(x) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(-1)^k - 1] \cos(kx)}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin(kx)}{k}.$$

4.4 Oefeningen

5 Partiële differentiaalvergelijkingen

5.1 Inleiding

$$F\left(\phi(x_1, \dots, x_n), \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k \phi}{\partial_1 \partial x_n^{k-1}}, \frac{\partial^k \phi}{\partial x_n^k}\right) = 0.$$

in onze toepassingen zal de orde vooral twee zijn.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \iff \text{Golfvergelijking}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \iff \text{Diffusievergelijking}.$$

we noemen die driedimensionaal. Bestaat ook in één of twee dimensies.

Oplossingen van pde's kunnen nog algemene functies bevatten.

Definitie 5.1.1: Classificatie

$$a(x, y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + F(x, y, \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}) = 0.$$

We kunnen deze vergelijkingen classificeren; elliptisch hyperbolisch of parabolisch. Dirichlet Neumann of gemengde rvw.

$$\text{Elliptisch} \iff b^2(x, y) < 4a(x, y) \cdot c(x, y), \forall (x, y) \in D.$$

$$\text{Hyperbolisch} \iff b^2(x, y) > 4a(x, y)c(x, y), \forall (x, y) \in D.$$

$$\text{Parabolisch} \iff b^2(x, y) = 4a(x, y)c(x, y), \forall (x, y) \in D.$$

randvoorwaarden

$$\text{Dirichlet randvoorwaarde; } \iff \phi(x, y) = g(x, y), \forall (x, y) \in \partial D.$$

$$\text{Neumann randvoorwaarde; } \iff \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y) = g(x, y), \forall (x, y) \in \partial D.$$

$$\text{Gemengde randvoorwaarden; } \iff \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, y) + \sigma(x, y)\phi(x, y) = g(x, y), \forall (x, y) \in \partial D.$$

Als $g(x, y) = 0, (x, y) \in \partial D$ dan zeggen we dat dit homogene rvw zijn.

Opmerking 5.1.1

$\frac{\partial \phi}{\partial n}$ is de richtingsafgeleide van ϕ in de richting vd normaalvector op de rand!

Voorbeeld 5.1.1 (Inleidend voorbeeld)

We hebben een één-dimensionale golfvergelijking als voorbeeld van wat een pdv is. Maar als mijn hersenen werken

denk ik dat we dit vorig jaar al regelmatig hebben gedaan in natuurkunde.

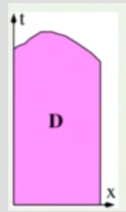
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, 0 \leq x \leq L, t \geq 0.$$

hier is $u(x, t)$ de uitwijking van trillende snaar in functie van positie en tijd. We zien dat **dit een hyperbolische vergelijking is**. rvw;

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 ; \text{Dirichlet, homogeen} .$$

$$u(x, 0) = f(x); \text{Dirichlet, niet-homogeen} .$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x); \text{Neumann, niet-homogeen} .$$



5.2 Scheiding der veranderlijken

Voorbeeld 5.2.1 (Eén dimensionale golfvergelijking)

Probleem; bereken de verticale uitwijking $u(x, t)$ van een snaar met lengte π , die aan de uiteinden wordt vastgehouden. Beginuitwijking $f(x)$ krijgt en losgelaten wordt met beginsnelheid $g(x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0.$$

$$u(0, t) = 0, t \geq 0 \wedge u(\pi, t) = 0, t \geq 0.$$

aan de twee uiteinden is er **geen** uitwijking voor alle t positief!

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq \pi \wedge \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), 0 \leq x \leq \pi.$$

info over beginuitwijking en beginsnelheid!

We gebruiken scheiding der veranderlijken

Oplossing zal van de vorm zijn;

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Dus we veronderstellen dat de functie die we zoeken kan geschreven worden als een functie van uitwijking vermenigvuldigd met een functie van de tijd. Hiermee kunnen we verder door dit in te vullen.

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2} X(x)T''(t).$$

$$\iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

We hebben het nu kunnen herschrijven waar we iets hebben enkel van x afhankelijk en enkel van t afhankelijk. We introduceren een constante λ want kies een willekeurige x of t , het resultaat moet hetzelfde zijn!!

Opmerking 5.2.1

Zodat dit echt duidelijk is, het komt er dus op neer dat die lambda daar mag staan omdat als je twee delen hebt in functie van verschillende variabelen die gelijk zijn, dan moeten die per definitie gelijk zijn aan een constante die we dus hier λ noemen.

Herschrijven als gewone dv;

$$X''(x) = \lambda X(x).$$

$$T'(t) = \lambda a^2 T(t).$$

we passen toe homogene rvw

$$u(0, t) = 0, t \geq 0 \implies X(0)T(t) = 0, t \geq 0 \implies X(0) = 0.$$

$$u(\pi, t) = 0, t \geq 0 \implies X(\pi)T(t) = 0, t \geq 0 \implies X(\pi) = 0.$$

Opmerking 5.2.2 Niet homogene rvw

Bemerk als je dit op de niet homogene rvw 4 en 5 probeert dat dit nergens op slaat. **We passen deze scheiding dus enkel toe op de homogene rvw en nooit op niet-homogene rvw.**