Informatieoverdracht en -verwerking lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

Inhoudstafel

Deel I

Informatietheorie

I.1 Discrete informatiebronnen

1.1 Hoeveelheid informatie

We hebben een discrete bron en die bron genereeert discrete antwoorden. We stoppen die in een **bronalfabet.**

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Er zijn n mogelijke antwoorden. **n mogelijke symbolen.** Combinatie uit gekozen symbolen **is de boodschap.**

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

waarschijnlijkheden van alle symbolen. Als elk symbool een gelijke kans heeft, dan is **de hoeveelheid informatie H van een boodschap met lengte l**

$$H = \log\left(n^l\right) = l \cdot \log(n).$$

Opmerking 1.1.1 Binaire logaritme

Met log het binaire logaritme.

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}.$$

Definitie 1.1.1: Claude Shannon

Hoeveelheid informatie in symbool a_i

$$H(a_i) = \log\left(\frac{1}{p_i}\right) \cdot \frac{\mathrm{bit}_i}{\text{symbool } a_i}.$$

Stelling: Gemiddelde hoeveelheid informatie in een alfabet A
In bit per symbool;

$$H(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i).$$

Addendum 1.1.1

Hoeveelheid informatie wordt vaak ”entropie” genoemd.

$$S = k_B \log(\Omega).$$

Beide zijn een maat voor onzekerheid of wanorde. Ik denk niet dat het echt veel dieper gaat dan dat.

Stelling: Gemiddelde hoeveelheid informatie van een boodschap met lengte l
In bit per boodschap, boodschap lengte l;

$$H(M) = -l \sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i).$$

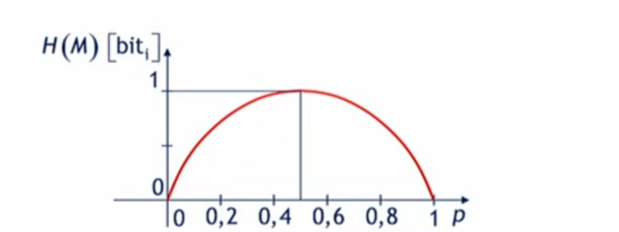
Het is **gemiddeld**, niet vergeten.

Voorbeeld 1.1.1 (Binair alfabet)

- Symbool 1; student geslaagd $p = 0.8$
- Symbool 0; student niet geslaag $1 - p = 0.2$

Hoeveel informatie zal er gemiddeld zijn als de student zijn resultaat meldt?

$$H(M) = -(0.8 \cdot \log(0.8) + 0.2 \cdot \log(9.2)).$$
$$= \dots.$$



die curve is dus de hoeveelheid informatie van een binaire bron en is een zeer belangrijke curve.

Stelling: Hoeveelheid informatie bron

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log(p_i) \text{ bit /symbool.}$$

Stelling: Maximale hoeveelheid informatie van een bron

$$\max H(A) = \log(n).$$

Stelling: Informatiedebiet $H_t(A)$ en transmissiedebiet $r_s(A)$ bron
gedefinieerd als

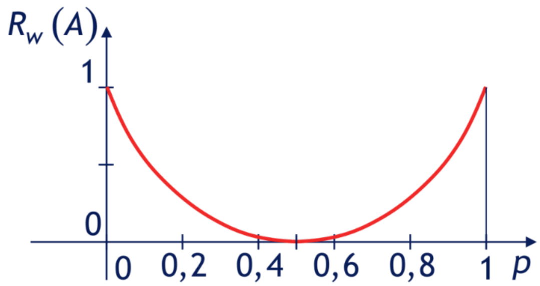
$$H_t(A) = \frac{1}{t} \cdot H(A)\text{bit}_i/\text{s} = r_s(A) \cdot H(A)\text{bit}_i/\text{s}.$$

Dus de hoeveelheid informatiedebiet van onze bron is de hoeveelheid informatie van de bron maal het transmissiedebiet in symbolen per seconde.

Stelling: Waarschijnlijkheidsredundantie van de bron
Eigenschap van de bron, ideaal willen we nul hebben. Dan hebben we $100R_w(A)$ gedefinieerd als;

$$R_w(A) = 1 - \frac{H(A)}{\max H(A)}.$$

We bekijken deze grafiek waarschijnlhijkheidsredundantie van een binaire bron



$$R_w = 1 - \frac{H(A)}{\max H(A)}.$$

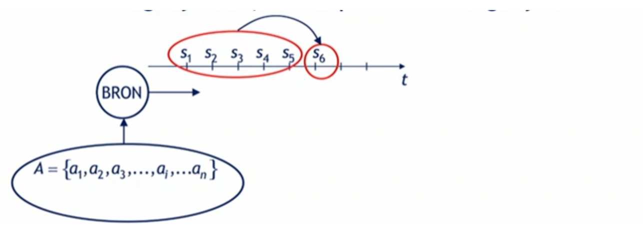
Opmerking 1.1.2 Verschillen tussen bit_i en bit

- bit_i is een binary unit
  - Eenheid van hoeveelheden informatie
  - Betekenis in informatietheorie
  - Enkel voor 'kenners'
  - Het subscript wijst uitdrukkelijk op betekenis 'hoeveelheid van informatie' voor deze cursus
- bit is een binary digit
  - Eenheid van aantal binaire symbolen
  - Zegt **niets** over de hoeveelheid informatie! want dat hangt dus af van die kansen, is er veel waarschijnlijkheidsredundantie of niet?

Addendum 1.1.2 Ascii code

ascii code bestaat uit 7 bits. Als je een bron hebt die zoveel ascii code genereert, dan hangt het dus af van de kansen van die symbolen wat de hoeveelheid informatie van die bron is! In functie van de kansen hoeft dat niet 7bit_i informatie te zijn! Dat is dus het belangrijk verschil.

We hebben niet alleen waarschijnlijkheidsredundantie, ook afhankelijkheidsredundantie. In een Engelse tekst na 'th' komt bijna altijd 'e'. Implementatie van die ideeën zorgen voor gereduceerde hoeveelheid informatie.



$$S = \{s_{n-k}, s_{n-k+1}, \ldots, s_{n-1}\}.$$

Die grote S is de toestand, het geheugen dat de k vorige symbolen omvat. De kleine s is een symbool.

Opmerking 1.1.3

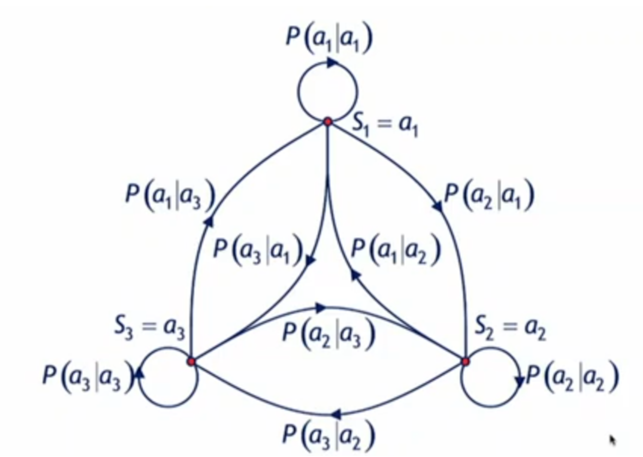
Die laatste n in A is **niet dezelfde n** als s_n want die n wijst naar een tijdstip, die in A wijst naar een totaal aantal. Ze zegt dat ze het express zo schreef om je wakker te houden lol

$$P(s_n | s_{n-k}, s_{n-k+1}, \ldots, s_{n-1}).$$

dit is dus een kans op tijdstip n die afhangt van alle symbolen die hieraan vooraf gingen. Dan is er een nieuwe toestand

$$S_j = \ldots.$$

Als we vervolgens al die toestanden bekijken krijgen we een Markov-keten. Een markov keten van orde k moduleert een systeem waar k tijdstippen van belang zijn.



dit is een tekening voor een bron met drie symbolen en de kansen enzo. Is eigenlijk een beetje zoals een graaf is niet moeilijk ofzo.

We willen de hoeveelheid informatie bepalen van onze bron met geheugen. Een verband vinden tussen s_1, s_2. Neem $s_1 = a_1$

$$H(s_2|s_1 = a_1) = -\sum_{s_2=a_1}^{a_n} P(s_2|s_1 = a_1) \cdot \log(P(s_2|s_1 = a_1)).$$

hiermee kwantificeer je; hoeveel extra informatie levert s_2 op? en nu kun je dit uitbreiden over alle mogelijke a_i

$$H(_2|s_1) = -\sum_{s_1=a_1}^{a_n} P(s_1 = a_i) \cdot \left(\sum_{s_2=a_1}^{a_n} P(s_2|s_1 = a_i) \cdot \log(P(s_2|s_1 = a_i)) \right).$$

$$\Longleftrightarrow -\sum_{s_1=a_1}^{a_n}\sum_{s_2=a_1}^{a_n} P(s_1)\cdot P(s_2|s_1)\cdot \log\left(P(s_2|s_1)\right).$$

$$\Longleftrightarrow -\sum_{s_1=a_1}^{a_n}\sum_{s_2=a_1}^{a_n} P(s_1,s_2)\cdot \log\left(P(s_2|s_1)\right).$$

Stelling: Hoeveelheid informatie voor een paar van symbolen

$$H(s_1,s_2) = H(s_1) + H(s_2|s_1).$$

Op die manier kun je dat dus ook uitbreiden. Het is de informatie van mijn eerste symbool plus de extra informatie van hetgene daarvoor ...
De belangrijkste conclusie van deze les wordt;

$$H(s_1,s_2) \leq H(s_1) + H(s_2).$$

Afhankelijkheidsredundantie reduceert de informatie van een bron. Net als waarschijnlijkheidsredundantie.
Dan snel terugkomen op

$$H(M) = -l\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log\left(p_i\right)\text{bit}_i/\text{boodschap}.$$

dit is enkel geldig als er geen afhankelijkheidsredundantie is. Want anders krijg je een kleinere hoeveelheid informatie. Dat is logisch want de verrassing is kleiner.

Herrinnering 1.1.1 Waarschijnlijkheidsredundantie

Ongelijke kansen voor individuele symbolen

$$R_w(A) = 1 - \frac{H(A)}{\max H(A)}.$$

Stelling: Afhankelijkheidsredundantie met geheugen
Opeenvolgende symbolen beinvloeden mekaars waarschijnlijkheid

$$R_a(A) = 1 - \frac{H_g(A)}{H(A)}.$$

waar H_g de hoeveelheid informatie met geheugen

Stelling: Totale redundantie

$$R_t(A) = 1 - \frac{H_g(A)}{\max H(A)}.$$

$$1 - (1 - R_a(A))\cdot(1 - R_w(A)).$$

$$\Longleftrightarrow 1 - R_t(A) = (1 - R_a(A))\cdot(1 - R_w(A)).$$

I.2 Broncodering

Voor broncodering definiëren we een aantal nieuwe alfabetten, we hebben al

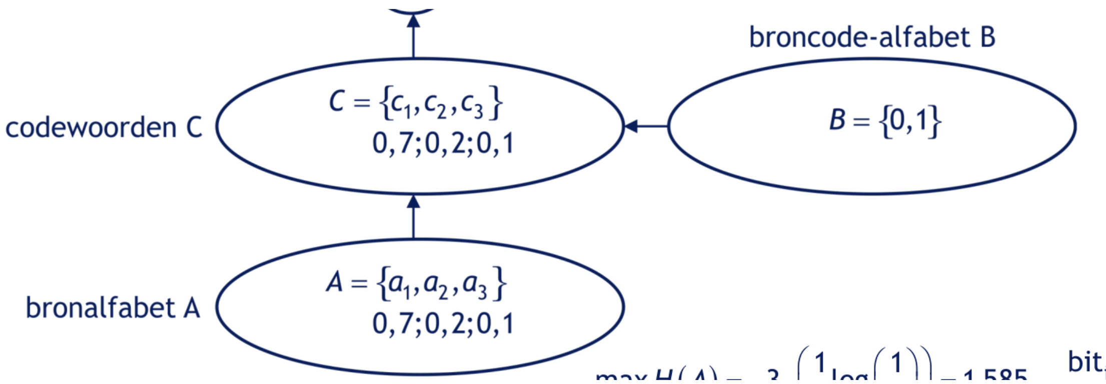
$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\}.$$

met bijhorende kansen $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n$ We definiëren nu

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_r\} \rightarrow C = \{c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n\}.$$

$$A \rightarrow C.$$

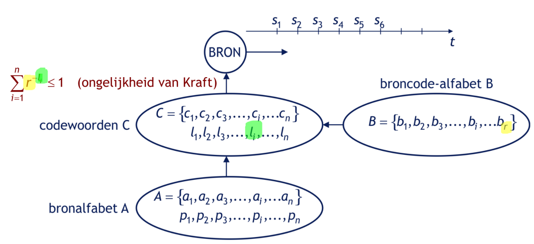
B het broncode alfabet en C de codewoorden.



Stelling: Ongelijkheid van Kraft
Voorwaarde voor het bestaan van direct decodeerbare code;

$$\sum_{i=1}^{n} r^{-l_i} \leq 1.$$

noodzakelijk maar geen voldoende voorwaarde



Stelling: Broncoderingstheorema

Broncoderingstheorema; wat is de kortst mogelijke gemiddelde lengte l die ik kan verzinnen voor een bepaalde bron met een bepaalde hoeveelheid informatie. L gemiddelde codewoordlengte

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot l_i.$$

Dus in functie van de hoeveelheid informatie heb je meer of minder bits nodig om die bron voor te stellen.

$$L \cdot \log(r) \geq H(A) \iff \frac{H(A)}{\log(r)} \leq L.$$

Opmerking 2.0.1 Log

Die $\log(r)$ staat daar nu omdat we het algemeen zien.$H(A)$ staat in bit informatie, dus daar staat impliciet een log. In dit geval heeft L ook twee symbolen in broncode alfabet, maar kan ook uit andere symbolen te staan. Als $r = 2$ dan valt die log weg.
Dus die log is enkel een schaling om te veralgemenen naar niet-binaire alfabetten. Bvb kleuren, zou ze vrage op examen om te zien of je het snapt.

I.3 Oefenzitting één

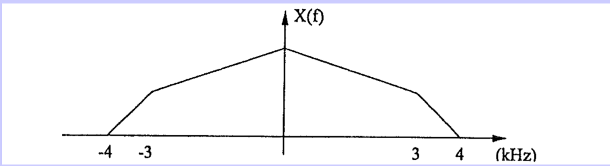
I.4 Oefenzitting twee

Vraag 1: Oefening 4

Een continue informatiebron genereert een analoog signaal $X(f)$. Dit signaal wordt bemonsterd aan drie verschillende snelheden

- $0.5 \cdot f_{Nyquist}$
- $f_{Nyquist}$
- $2 \cdot f_{Nyquist}$

Teken het frequentiespectrum $X(f)$ na bemonstering voor elk geval. Kan het originele signaal geconstrueerd worden?



Deel II

Informatietransmissie

II.1 Discrete transmissiekanalen

Kanaalmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nm} \end{pmatrix}.$$

Definitie 1.0.1

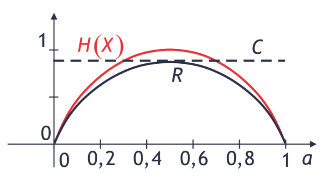
$$p(x_i) = p_i.$$

Voorbeeld 1.0.1 (Binair symmetrisch kanaal)

1.1 Capaciteit van een discreet kanaal

Capaciteit is de maximale gemiddlede hoeveelheid informatie die door een kanaal kan overgedragen worden.

$$C = \max_{p(x)} R \max_{p(x)} [H(X) - H(X|Y)].$$



We gaan redundantie toevoegen om foutloos te kunnendoorsturen.
Makkeljke manier om redundantie toe te voegen is een repetitiecode toe te voegen. We gan nu gewoon de repetitie code moeten uitrekenen.
reken zelf eens de fouten uit met de matrices. Kan één fout detecteren en corrigeren, twee fouten detecteren maar niet corrigeren.