Analyse III lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

Inhoudstafel

1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen **2**

2 Fourierreeksen **3**

3 Sturn-Liouvilleproblemen **4**

3.1 Het eigenwaardeprobleem in de ruimte 4
3.2 Symmetrische eigenwaardeproblemen 5
3.3 Klasse symmetrische problemen 8
Visualisatie van deze eigenfunctie — 10

4 Eerste oefenzitting **12**

1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

We zullen PDV's later omzetten naar gewone differentiaalvergelijkingen, daarom moeten we drie vormen herhalen.

- differentiaalvergelijkingen constante coefficiënten
- Differentiaalvergelijking van Euler
- Differentiaalvergelijking van Bessel

En de gamma functie komt ook aan bod voor herhaling.

1.1 Differentiaalvergelijking constante coefficienten

Stelling: oplossen met karakteristieke veelterm

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

We vinden de karakteristieke vergelijking

$$\rho(v) = a_0 v^2 + a_1 v + a_2.$$

met mogelijke oplossingen

$$\begin{cases} v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R} \implies y(x) = c_1 e^{v_1 x} + c_2 e^{v_2 x} \\ v_1 = v_2 \implies y(x) = c_1 e^{v_1 x} + c_2 x e^{v_1 x} \\ v_{1,2} = \alpha \pm \beta i \implies y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}.$$

Opmerking 1.1.1 v in plaats van λ

Lambda krijgt later een andere betekenis, daarom nu.

Voorbeeld 1.1.1

$$y'' = \lambda y.$$

waarbij lambda geïnterpreteerd wordt als een parameter

$$p(v) = v^2 - \lambda.$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \implies v_1 = v_2 \implies y(x) = c_1 + c_2 x \\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \implies v_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \implies y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x} \\ \lambda \in \mathbb{R}^- \implies v_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} i \implies y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x) \end{cases}.$$

Herrinnering 1.1.1 Hyperbolische functies

Merk op dat de hyperboligsche functies lineaire combinaties zijn van die exponentiële functies dus als lambda positief is vinden we ook

$$y(x) = d_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right) + d_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

1.2 Euler

Stelling: Differentiaalvergelijking van Euler

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2xy = 0.$$

We lossen dit op voor $x > 0$ met transformatie

$$y(x) = z(t), t = \ln(x).$$

of ook

$$x = e^t.$$

we krijgen bijgevolg

$$z''(t) + (a_1 - 1)z((t) + a_2z(t) = 0.$$

de karakteristieke veelterm wordt

$$p(\nu) = \nu^2 + (a_1 - 1)\nu + a_2.$$

- $\nu_1 \neq \nu_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1e^{\nu_1 t} + c_2e^{\nu_2 t}.$$

$$\implies y(x) = c_1x^{\nu_1} + c_2x^{\nu_2}.$$

- $\nu_1 = \nu_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1e^{\nu t} + c_2te^{\nu t}.$$

$$\implies y(x) = c_1x^{\nu_1} + c_2\ln(x)x^{\nu_1}.$$

- $\nu_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$$z(t) = c_1e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right) + c_2e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right).$$

$$\implies y(x) = c_1x^{\alpha}\cos\left(\beta\ln(x)\right) + c_2x^{\alpha}\sin\left(\beta\ln(x)\right).$$

Opmerking 1.2.1 Voor $x < 0$

Voer een transformatie uit $x = -u$

1.3 De gammafunctie

Definitie 1.3.1: gamma functie

Gammafunctie voor $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x-1}du.$$

We zien dat het domein $\mathbb{R}^+$ is. Natuurlijk gebruiken we de gamma functie vooarl omwille van de fundamentele eigenschap

Eigenschap: Recursiebetrekking
Recursie eigenschap gamma functie

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs 1.3.1: Bewijs recursie eigenschap

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs;

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^x du.$$

partiele integratie

$$-u^x e^{-u}|_0^\infty + \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

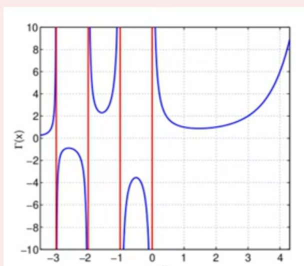
Opmerking 1.3.1

$$\lim_{u\to 0} u^x e^{-u} = \lim_{u\to\infty} u^x e^{-u} = 0.$$

hieruit vinden we dat die term nul wordt

$$\iff \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

Definitie 1.3.2: Definitie van de gammafunctie op $\mathbb{R}$



$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du, x > 0 \\ \frac{\Gamma(x+1)}{x}, x < 0 \wedge |x| \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

We maken gebruik van die recursiebetrekking om uit te breiden voor negatieve getallen. Het is belangrijk voor later dat we ook negatieve inputs kunnen geven. De manier waarop je dus rekent is dat je in breukvorm telkens een getal binnen het domein krijgt door een negatief getal kleiner dan één te nemen in absolute waarde, en dan vervolgens wanneer je hier voorbij gaat gebruik je de daarvoor berekende recursie.
Gaat niet $\forall x$, voor $x \in \mathbb{N}$ lukt dat niet want je kan $\Gamma(0)$ niet berekenen. Je ziet dus hoe die "lijn van recursie" niet opgaat. We zien dat dus als de vertikale asymptoten op de grafiek.

Eigenschap: Gammafunctie en faculteiten
Gammafunctie is een uitbreiding van de faculteitenfunctie

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

kan bewezen worden via inductie, je kunt makkelijk eerst nul beschouwen en zien dat dat gelijk is aan één.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-t}|_0^{\infty} = 1 = 0!.$$

indien de bewering geldig is voor n, is ze ook geldig voor n+1.

Herrinnering 1.3.1 onthoud de volgende eigenschap

Recursiebetrekking

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

1.4 Differentiaalvergelijking van Bessel

Definitie 1.4.1: differentiaalvergelijking van Bessel

Orde p (positieve parameter, niet echt de orde)

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0.$$

met $p \geq 0$

Eerste oplossing

van deze differentiaalvergelijking is via reeksontwikkeling voor p.

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}.$$

Idee of vraag 1.4.1

waarbij C_k voldoet aan de recursiebetrekking die we vinden door in te vullen in differentiaalvergelijking.

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0.$$

$$x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right)'' + x\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right)' + (x^2 - p^2)\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right) = 0.$$

door C_k te schrijven laat ik het somteken even weg

$$\left(C_k x^{k+p}\right)' = (k+p)C_k x^{k+p-1}.$$

$$\left(C_k x^{k+p}\right)'' = (k+p)(k+p-1)C_k x^{k+p-2}.$$

$$C_k = \frac{-C_{k-2}}{k(k+2p)}, k \text{ even }, C_k = 0, k \text{ oneven}.$$

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{k!\Gamma(p+k+1)2^{2k+p}}.$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

waaruit dus blijkt

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Eigenschap: Afgeleide relatie

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x).$$

stel

$$f(x) = x^n J_n(x).$$

$$f'(x) = n x^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x).$$

volgens de eigenschap geldt ook

$$f'(x) = x^n J_{n-1}(x).$$

$$\implies n x^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x).$$

Hieruit volgt

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x).$$

Eigenschap: Afgeleide relatie

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$g(x) = x^{-n} J_n(x).$$

$$g'(x) = -n x^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J_n'(x).$$

$$g'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$\implies J_n'(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x).$$

Bewijs 1.4.1: Bewijs van afgeleide relatie

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right].$$

Tel de twee vergelijking uit voorgaande eigenschappen op;

$$J_n'(x) + J_n'(x) = \left(J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)\right) + \left(-J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)\right).$$

dit simplificeren dan volgt direkt het gestelde.

Voorbeeld 1.4.1 (Bessel differentiaalvergelijking vb)

Idee of vraag 1.4.2

$$J_0'(x) = -J_1(x).$$

- Afgeleide relatie

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right].$$

- Relatie J_{-n} en J_n

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

$$\Longrightarrow J_0'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{-1}(x) - J_1(x)\right].$$

$$\Longrightarrow J_{-1}(x) = (-1)^1 J_1(x) = -J_1(x).$$

Hieruit volgt direkt het gestelde.

Tweede oplossing

-p is de tweede oplossing, dus we zoeken een oplossing met

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{k-p}.$$

$$B_k = \frac{-B_{k-2}}{k(k-2p)}.$$

voor k even en nul voor k oneven.

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-p}}{k!\Gamma(-p+k+1)2^{2k-p}}, p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0.$$

Opmerking 1.4.1 Lineair onafhankelijke oplossingen

- $J_p(x)$ is Besselfunctie van de eerste soort orde p
- $J_p(x), J_{-p}(x)$ is een funcamenteel stel voor $p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0$
- indien het wel een natuulijk getal of nul is, kan aangetoond worden : $J_{-n}(x) = \lim_{p \to n} J_{-p}(x) = (-1)^n J_n(x)$

Bijgevolg moeten we een moeilijkere vorm gebruiken als we de reeksontwikkeling direct willen berekenen.

Besselfunctie van de tweede soort

Definitie 1.4.2: Besselfuncties van de tweede soort

Gedefinieerd als volgt;

$$Y_p(x) = \begin{cases} \frac{J_p(x)\cos\left(p\pi\right) - J_{-p}(x)}{\sin\left(p\pi\right)}, p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0 \\ \lim_{p \to 0} \frac{J_p(x)\cos\left(p\pi\right) - J_{-p}(x)}{\sin\left(p\pi\right)}, p = 0 \\ \lim_{p \to n} \frac{J_p(x)\cos\left(p\pi\right) - J_{-p}(x)}{\sin\left(p\pi\right)}, p = n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Waar we dus die cotangens moeten beschouwen als coefficient voor J_p en die $\frac{-1}{\sin\left(...\right)}$ als coefficient van J_{-p}

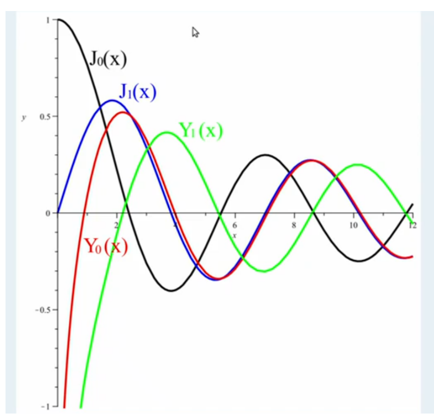
Idee of vraag 1.4.3

Dus drie keer dezelfde functie met een limiet naar niet gedefinieerde plaatsen, maar ik snap totaal niet waar de functie vandaan komt en hoe we dit bewijzen. Check de cursus vanaf je die eindelijk krijgt en vraag anders aan prof

Eigenschap:
Een fundamenteel stel voor $p \geq 0$:

$$\left\{J_p(x), Y_p(x)\right\}.$$

Eigenschap:
De Besselfunctie van de tweede soort $Y_p(x)$ zijn onbegrensd in een omgeving van $x = 0$



1.5 Gewijzigde differentiaalvergelijking van Bessel

Definitie 1.5.1: Gewijzigde Besselvergelijking

Gewijzigde Besselvergelijking van orde p

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0.$$

met $p \geq 0$ een parameter

Eerste soort

Reeksontwikkeling rond een regulier singulier punt;

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p}.$$

$$C_k = \frac{C_{k-2}}{k(k+2p)}.$$

We vinden

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+p}}{k!\Gamma(p+k+1)2^{2k+p}}.$$

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

$I_p(x)$ is de gewijzigde Besselfunctie van de eerste soort en orde p.

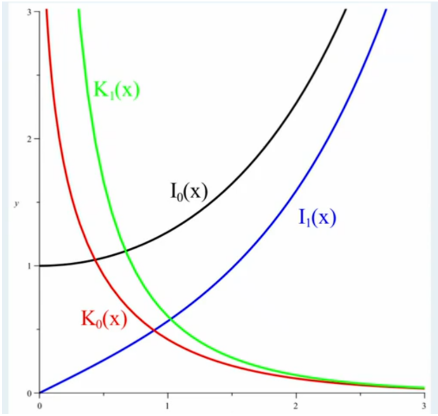
Tweede soort

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin(p\pi)}.$$

Eigenschap:
Fundamenteel stel voor $\forall p \geq 0$

$$\left\{I_p(x), K_p(x)\right\}.$$

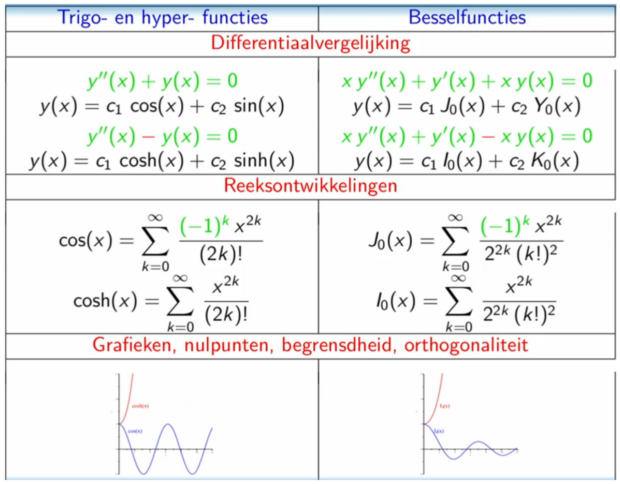
Eigenschap:
Voor gewijzigde Besselfuncties van de tweede soort geldt ze zijn onbegrensd in een omgeving $x = 0$



Opmerking 1.5.1 De grafieken

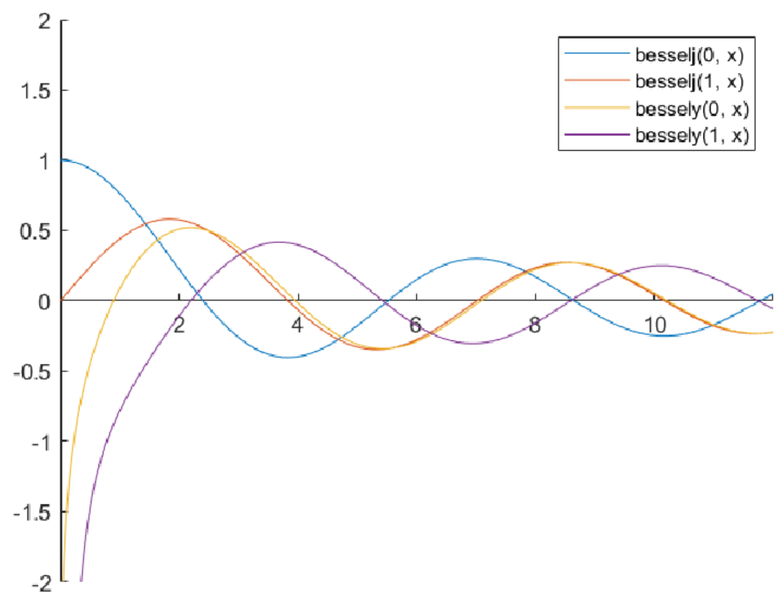
Zorg vooral dat je de grafieken direct in je hoofd hebt, dat zijn de belangrijkste om te onthouden

Stelling: verschillen hyperbolische hyperb vs Besselfuncties
Dit is zowat het belangrijkste van dit hele deel



Trigo- en hyper- functies	Besselfuncties
Differentiaalvergelijking	
$y''(x) + y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ $y''(x) - y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cosh(x) + c_2 \sinh(x)$	$x\,y''(x) + y'(x) + x\,y(x) = 0$ $y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$ $x\,y''(x) + y'(x) - x\,y(x) = 0$ $y(x) = c_1 I_0(x) + c_2 K_0(x)$
Reeksontwikkelingen	
$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$
Grafieken, nulpunten, begrensdheid, orthogonaliteit	

overzicht van functies;



2 Fourierreeksen

We willen een functie f benaderen op een interval $[a,b]$ door middel van lineaire combinatie goniometrische functies.

2.1 Inleidend

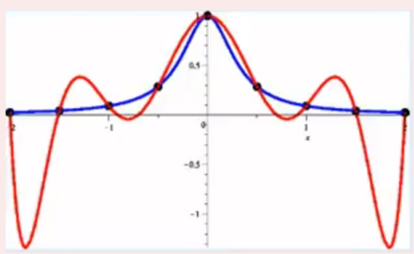
Definitie 2.1.1: Het interpolatiecriterium

Kies N punten $x_j \in [a,b]$ en eis dat $g(x_j) = f(x_j), j =, 1, \ldots, N$ Met andere woorden er wordt in essentie enkel geëist dat de doelfunctie in enkele punten exact samenvalt. Dan wordt een veelterm bepaald.
lineair stelsel;

$$\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(x_j) = f(x_j), j = 1, 2, \ldots, N.$$

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \ldots & g_N(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \ldots & g_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_N) & g_2(x_N) & \ldots & g_n(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

kwaliteit hangt af van keuzes interpolatiepunten, veelterminterpolatie geeft grote fouten.



Dan is er het minimaxcriterium; Het minimaxcriterium is dus vooral lastig omdat het moeilijk uit te werken is.

$$\max \{|f(x) - g(x)|, x \in [a,b]\}.$$

minimaliseren van een maximum wordt een zadelpunt probleem genoemd. Zie fig2.1. Je probeert eigenlijk het minimum van een maximum te nemen.

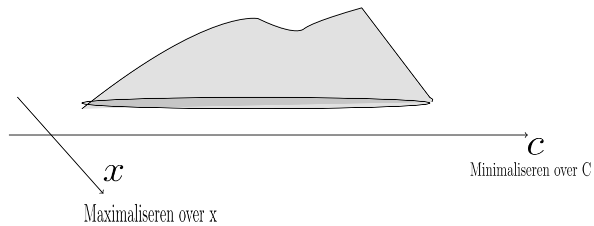


Figure 2.1: zadelpuntprobleem

Dan komen we bij dit criterium om een compromis te sluiten.

Definitie 2.1.2: Kleinste kwadratencriterium

Bepaal $c_i, i = 1,2,\ldots,N$ zodat

$$\int_a^b w(x)(f(x)-g(x))^2 dx.$$

minimaal is met $x(x) > 0$

Eerste observatie is dat we de norm vinden door de wortel te nemen van die integraal.

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b w(x)f(x)^2 dx}.$$

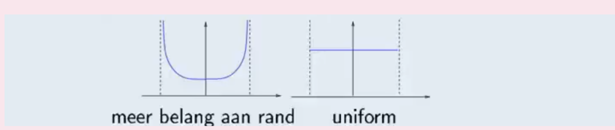
voldoet aan voorwaarden voor de norm
We kunnen het cireterium dus interpreteren als

$$||f-g||^2.$$

We zoeken een g die het dichtst aansluit bij f.

Opmerking 2.1.1 Belang van $w(x)$

deze laat ons toe om bepaalde functies in het interval meer of minder prioriteit te geven



2.2 Benaderingsprobleem uitwerken

$$I = \int_a^b w(x)\left\{f(x) - \sum_{i=1}^{N} c_i g_i(x)\right\}^2 \mathrm{dx} = \sigma(c_1, c_2, \ldots, c_N).$$

de fout zal een getal zijn dat afhangt van de coefficienten. We moeten die dan zo kiezen dat we een minimum krijgen.
De nodig voorwaarde voor een minimum

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c_j} = 0, j = 1,2,\ldots,N.$$

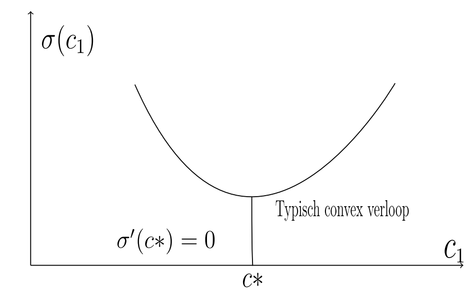


Figure 2.2: één veranderlijke

dit is hoe het eruit zou zien **voor één coefficient** c_1 fig 2.2.
Voor meerdere veranderlijken, fig 2.3;

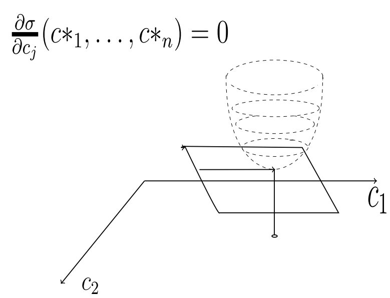


Figure 2.3: meerdereveranderlijken

We werken dit uit en krijgen;

$$(-2)\int_a^b w(x)\left(f(x) - \sum_{i=1}^{N} c_i g_i(x)\right) g_j(x)dx = 0.$$

of

$$\sum_{i=1}^{N} c_i (g_i, g_j)_w = \left(f, g_j\right)_w, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Dit kunnen we in stelselvorm schrijven om het duidelijker te maken

$$\begin{pmatrix} (g_1, g_1)_w & (g_1, g_2)_w & \ldots & (g_1, g_N)_w \\ (g_2, g_1)_w & \ldots & \ldots & (g_2, g_N)_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_N, g_1)_w & \ldots & \ldots & (g_N, g_N)_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, g_1)_w \\ (f, g_2)_w \\ \vdots \\ (f, g_N)_w \end{pmatrix}.$$

2.3 Intermezzo; over orthogonaliteit

Definitie 2.3.1: Orthogonaliteit van functies

Twee functies $f, g \in \mathbb{R}$ zijn orthogonaal op $[a, b]$ als

$$\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

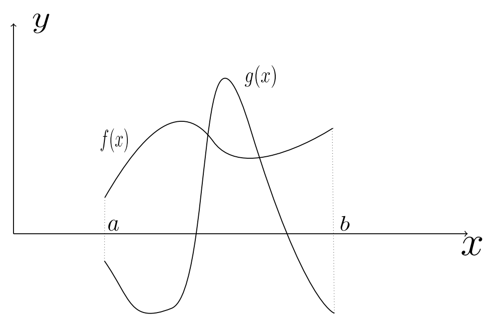


Figure 2.4: Orthogonale functies

Kies n equidistante punten $\in [a, b]$

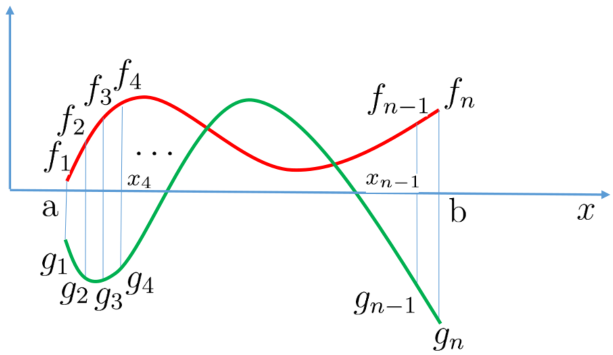
$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b.$$

tussenafstand

$$h = \frac{b-a}{n-1}.$$

zeg

$$f_i = f(x_i), g_i = g(x_i), i = 1, \ldots, n.$$



benadering van de integraal

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \approx h(f_1g_1 + f_2g_2 + \ldots + f_{n-1}g_{n-1}).$$

kan dus benaderd worden door

$$f_1g_1 + \ldots + f_{n-1}g_{n-1} = 0.$$
$$\iff F^TG = 0.$$

Definitie 2.3.2: Orthogonaal tov gewichtsfunctie

Twee reele functies f, g zijn orthogonaal op $[a,b]$ tov gewichtsfunctie w, $w(x) > 0$ voor $x \in (a,b)$

$$\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx = 0.$$

2.4 Belang orthogonaliteit

We gebruiken orthogonaliteit voor het makkelijker uitwerken van dit inwendig product.

$$\int_a^b g_i(x)g_j(x)dx = 0, i \neq j.$$

Als dat gebeurt zullen alle elementen die niet op diagonaal staan wegvallen!

Herrinnering 2.4.1

$$\begin{pmatrix} (g_1,g_1)_w & (g_1,g_2)_w & \dots & (g_1,g_N)_w \\ (g_2,g_1)_w & \dots & \dots & (g_2,g_N)_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_N,g_1)_w & \dots & \dots & (g_N,g_N)_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,g_1)_w \\ (f,g_2)_w \\ \vdots \\ (f,g_N)_w \end{pmatrix}.$$

We komen dan direct uit

$$c_i = \frac{(f,g_i)_w}{(g,g_i)_w} = \frac{\int_a^b w(x)f(x)g(x)\mathrm{dx}}{\int_a^b w(x)g_i(x)^2\mathrm{dx}}, i = 1,2,\dots,N.$$

Voorbeeld 2.4.1 (benaderen)
We gaan een functie f benaderen op een interval $[a,b]$ door een lineaire combinatie van basisfuncties

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{N} c_i g_i(x).$$

$$\begin{cases} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \end{cases}.$$

We gaan een fout karakteriseren met een kleinste kwadratenfunctie met een gewicht $w(x)$

$$\int_a^b w(x)\left(f(x) - g(x)\right)^2 dx.$$

dit willen we minimaliseren

er zijn voorwaarden mogelijk voor een perfecte match. Stel dat de basisfuncties **orthogonaal zijn tov elkaar op** $[a,b]$ **tov** $w(x)$**.** In dat geval is de uitdrukking voor optimale coefficienten eenvoudig (de te minimaliseren formule.)

$$c_i = \frac{\int_a^b w(x)f(x)g_i(x)dx}{\int_a^b w(x)\left(g_i(x)\right)^2 dx}.$$

2.5 Trigonometrische orthogonaliteit

stel $w(x) = 1$ en $[a,b] = [-\pi,\pi]$ we krijgen trigonometrische orthogonaliteit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx = \begin{cases} 0, k \neq l \\ \pi, k = l \neq 0 \\ 2\pi, k = l = 0 \end{cases}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx)dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx) = \begin{cases} 0, k \neq l, k = l = 0 \\ \pi, k = l \neq 0 \end{cases}.$$

Definitie 2.5.1: Trigonometrische veelterm

Gedefinieerd als

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Opmerking 2.5.1 !!!

Wat we nu zullen doen is praten over trigonometrische veelterm benaderingen, als aanknopingspunt voor Fourier reeksen in het stuk hierna! Kijk goed naar de voorwaarden en waar ze vandaan komen, dat is wat belangrijk is in dit deel.

Stelling: Kleinste kwadraten trigonometrische veelterm

- stel we gaan f benaderen op $[-\pi,\pi]$ en we kiezen $w(x) = 1$; benaderen door

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

met

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx = 0.$$

minimaal!

- Basisfuncties $\{1, \cos(x), \sin(x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx)\}$ voldoen aan

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot g_i(x) g_j(x) dx = 0, i \neq j.$$

aka ze zijn orthogonaal!

- $$a_0 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{dx}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

- $$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

- $$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin\left(kx\right) dx.$$
$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Eigenschap: Orthogonaliteitseigenschap van J_0
De besselfuncties van de eerste soort voldoen aan de orthogonaliteitseigenschap

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) \mathrm{dx} = 0.$$

Als

- $\alpha \wedge \beta$ verschillende positieve nulpunten zijn van $J_0(x)$ **en** J_0'

Corollarium of verklaring:
Dit volgt uit;

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) \mathrm{dx} = \frac{\beta J_0(\alpha) J_0'(\beta) - \alpha J_0(\beta) J_0'(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

als

$$\alpha \neq \beta.$$

En dat is praktisch waar het bewijs uit handboek naartoe werkt.

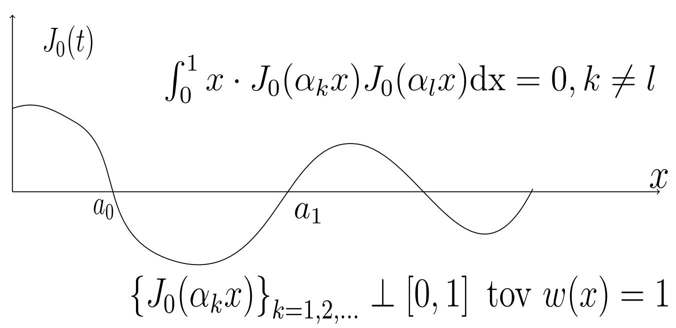


Figure 2.5: Bessel

Wat is hiervan een belangrijke implicatie? Stel we hebben $f(x)$, voorwaarden

- $[0, 1]$, interval kiezen
- $J_0(\alpha_1 x), J_0(\alpha_2 x) \ldots$, gescaleerde besselfuncties als basisfuncties
- Kleinste kwadraten criterium met $w(x) = x$

$$\implies \int_0^1 x(f(x) - g(x))^2 dx, \text{ minimaal.}$$

Opmerking 2.5.2 Wat betekent dit?

We gaan $f(x)$ benaderen door

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} a_k J_0(\alpha_k x).$$

Algemeen moet je een stelsel oplossen om de a_k te vinden, maar omwille van de orthogonaliteit **vinden we een goede match!**

$$a_k = \int_0^1 x f(x) J_0(\alpha_k x) dx \cdot \frac{1}{\int_0^1 x\,(J_0(\alpha_k x))^2\,dx}.$$

Dit is een eenvoudige uitdrukking voor coefficienten.

Voorbeeld 2.5.1 (Met afgeleiden)

$$J_0(\beta_0 x), J_0(\beta_1 x), \ldots.$$

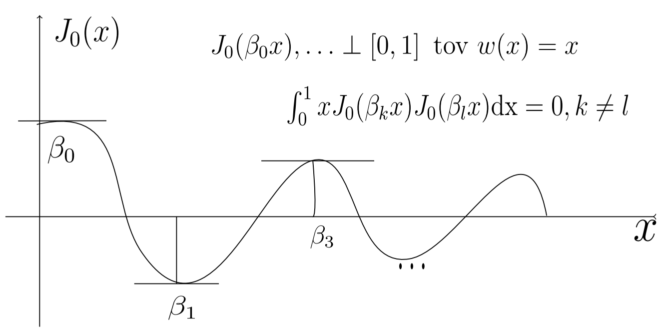


Figure 2.6: besselafgeleid

Als we hier nu f willen benadern hebben we enkele ingrediënten nodig;

- $[0, 1]$
- $\{J_0(\beta_0 x), J_0(\beta_1 x), \ldots\}$
- We kiezen kleinste kwadratencrieterium met $w(x) = x$

$$\int_0^1 x(f-g)^2 \mathrm{dx}.$$

Dit is opnieuw een perfecte match. Alle functies zijn ortthogonaal op 0,1 tov x de gewichtsfunctie.

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k J_0(\beta_k x).$$

$$a_k = \frac{\int_0^1 f(x) J_0(\beta_k x) \mathrm{dx}}{\int_0^1 x (J_0(\beta_k x))^2 \mathrm{dx}}.$$

Eigenschap: Eigenschap van minder belang
Eigenschap die wordt bewezen in de cursus in verband met producten van besselfuncties met zichzelf; nuttig voor vinden expliciete uitdrukking noemer voor uitdrukking coefficienten.

$$\int_0^1 x\,(J_0(\lambda x))^2\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left(J_0'(\lambda)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(J_0(\lambda)\right)^2.$$

2.6 Fourierreeksen

We doen dus wat we in het vorig deel besproken hebben, $f(x) \in [-\pi, \pi]$ met basisfuncties

$$g(x) = \begin{cases} 1 \\ \cos(x)\sin(x) \\ \cos(nx)\sin(nx) \\ \vdots \end{cases}.$$

met kleinste kwadratencriterium $w(x) = 1$. Dit betekent dat we de volgende fout minimaliseren;

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx.$$

Normaal moeten we dus een stelsel oplossen, maar we krijgen een match (dit is gewoon herhaling van het vorig deel).

Definitie 2.6.1: Kleinste kwadraten trigonometrische veelterm

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right).$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{dx}, k = 1, \ldots, n.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\mathrm{dx}, k = 1, \ldots, n.$$

Opmerking 2.6.1 of ook

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right).$$

met

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{dx}, k = 0, \ldots, n.$$

Definitie 2.6.2: Een fourierreeks

gedefinieerd als

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Eigenschap: Integraal over periodieke functie
$f(x)$ een periodieke functie met periode T en f integreerbaar;

$$\int_0^T f(x)\mathrm{dx} = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\mathrm{dx}.$$

Stel we willen een fourier reeks maken van een functie met periode T, we gebruiken een transformatie;

$$\phi(y) = f(x), x = \frac{yT}{2\pi}.$$

$$\iff \phi(y+2\pi) = f(\frac{yT}{Z\pi} + T).$$

$$\iff f(\frac{yT}{2\pi}) = f(x) = \phi(y).$$

Nu heeft ϕ periode 2π

Definitie 2.6.3: Fourierreeks van functie met periode T

$f(x+T) = f(x), \forall x$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\frac{2\pi kx}{T}) + b_k \sin(\frac{2\pi kx}{T})\right).$$

met

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\frac{2\pi kx}{T})\mathrm{dx}.$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2\pi kx}{T})\mathrm{dx}.$$

Dit volgt uit de substitutie $\phi(y) = f(x), x = \frac{yT}{2\pi}$.

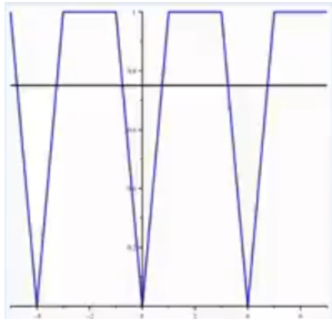
Opmerking 2.6.2 Basis pulsatie

Als je $k = 1$ stelt, dan staat bij a_k een basis pulsatie $\frac{2\pi}{T}$ en alle frequenties die voorkomen in die expansie zijn veelvouden van die basisfrerquentie.

Voorbeeld 2.6.1 (Beschouw)
$f(x)$ periodieke uitbreiding van

$$g(x) = \begin{cases} x, 0 \le x < 1 \\ 1, 1 \le x < 3 \\ 4 - x, 3 \le x \le 4 \end{cases}.$$

Dit is een even functie en heeft periode $T = 4$. Ziet er als volgt uit;



Het is een even functie, fourierreeks herleidt tot cosinusreeks

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right).$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\mathrm{dx} = \frac{3}{2}.$$

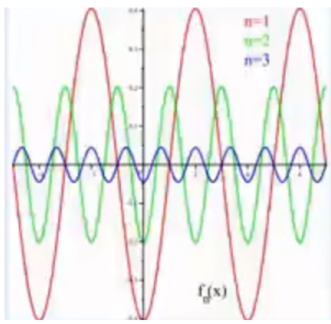
Dit is de gemiddelde waarde.

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)\mathrm{dx} = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)\mathrm{dx}.$$

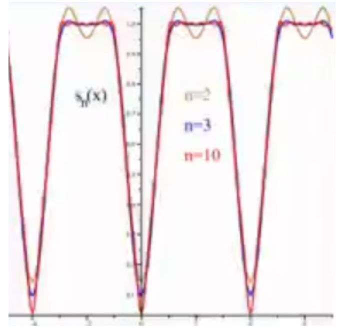
$$\Longleftrightarrow \int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)\mathrm{dx} + \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi kx}{2}\right)\mathrm{dx}.$$

De fundamentele trilling $f_1(x)$ gegeven door

$$f_1(x) = a_1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$



De hogere harmonischen worden ook weergegeven; f_i bevatten gewon hogere termen!! Dit is fundamenteel om te begrijpen;



Dat is wat je krijgjt wanneer je

$$s_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f_k(x).$$

2.7 Convergentie van fourier reeksen

Definitie 2.7.1: Stuksgewijs continue functie

$f(x)$ is een stuksgewijze continue functie op $[a,b]$ indien f continu is op $[a,b]$ of een eindig aantal discontinuïteiten heeft en in elk punt van $[a,b]$ de linker- en rechterlimiet bestaan.
In a bestaat de rechtelimiet in b de linkerlimiet. Om het met middelbare termen uit te drukken, functie met enkel perforaties als discontinuiteiten of geen discontinuiteiten.

Definitie 2.7.2: Stuksgewijze effen functie

$f(x)$ is stuksgewijze effen op $[a,b]$ indien f, f' continu zijn op $[a,b]$ of een eindig aantal discontinuiteiten hebben in alle punten $x_0 \in [a,b]$. De linker- en rechterlimieten van al deze punten moeten dan bestaan voor zowel f als f'. Om het simpel uit te drukken; **Effen functie is een functie die stuksgewijze continu is en haar afgeleide is ook stuksgewijze continu.** Denk ik.

Idee of vraag 2.7.1

Betekent dat dan dat de originele functie geen discontinuiteiten mag bevatten?

$$f(x_0+) = \lim_{h\to 0+} f(x_0+h), f(x_0-) = \lim_{h\to 0-} f(x_0+h).$$

$$f'(x_0+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0+)}{h}, f'(x_0-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Stelling: Fourrierreeks effen functies
Indien $f(x)$ stuksgewijze effen is op $[-\pi,\pi]$ convergeert de fourierreeks puntsgewijze tot

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}, x \in (-\pi,\pi).$$

$$\frac{f((-\pi)+) + f(\pi-)}{2}.$$

Laten we bespreken wat deze stelling betekent;

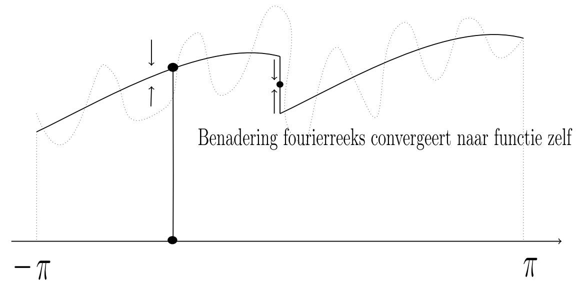


Figure 2.7: effen

Opmerking 2.7.1 Wat kunnen we zeggen over de randpunten?

Op de rand zal de fourierreeks op de discontinuiteit convergeren naar het gemiddelde van de rechter en linkerlimiet!!

Waarom dit zo is kunnen we verder illustreren.

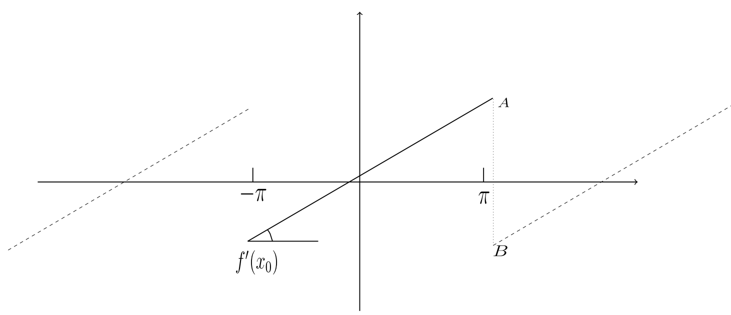


Figure 2.8: discontinuconv

A is de linkerlimiet, B de rechterlimiet. Dat is precies wat er in de steling staat, gemiddelde van die twee.

Voorbeeld 2.7.1
Bepaal de cosinusreeks; Voor $f(x) = x^2, -\pi \leq x \leq \pi$ en bereken aan de hand hiervan;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

en

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

1. Fourier coefficienten bepalen;

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \mathrm{dx} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \mathrm{dx} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos\left(kx\right)\mathrm{dx}.$$

$$\int x^2 \cos\left(kx\right) = x^2 \cdot \frac{\sin\left(kx\right)}{k} - \int \frac{\sin\left(kx\right)}{k} \cdot 2x\mathrm{dx}.$$

Idee of vraag 2.7.2

Dit is waanzinnig nu moet ik dubbele partiele integratie toepassen, dit kan niet de bedoeling zijn???

2.8 Gibbs verschijnsel

fout bij benadering

$$R_n(x) = s_n(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(kx\right)}{k} - \frac{\pi - x}{2}, x \in [0, \pi].$$

Dit komt nog uit een voorbeeld dat ze in het boek waren gestart.

$$R_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(kx\right) + \frac{1}{2} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

bemerk

$$\lim_{x\to 0+} R_n(x) = \frac{\pi}{2}.$$

$$R_n(x) = \frac{\pi}{2} + \int_0^x \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt.$$

Het lokale maximum wordt bereikt door

$$x_n = \frac{\pi}{n+\frac{1}{2}}.$$

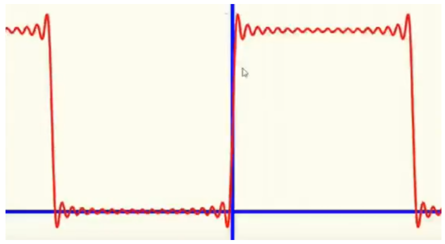
$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Opmerking 2.8.1

Wat er zal gebeuren is dat de overshoot zich meer en meer zal concentreren in de buurt van de discontinuiteit. Maar het hele punt is wel dat je de overshoot niet kwijt kunt raken. Deze convergeert naar een getal groter dan nul.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x_n) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(s\right)}{s} ds \neq 0.$$

Ze werken het voorbeeld uit in de cursus en meer wordt er niet echt gezegd. Dus je moet gewoon weten dat dit bestaat en gebeurt.



2.9 Fourier-Besselreeksen

Definitie 2.9.1: Fourier-Besselreeks

zij $\alpha_k, k = 1, 2, \ldots$ de opeenvolgende positieve nulpunten van $J_0(x)$ en $\beta_0, \beta_k, k = 1, 2, \ldots$ de opeenvolgende positieve nulpunten $J_0'(x)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0(\alpha_k x).$$

waar

$$c_k = \frac{2}{(J_1(\alpha_k))^2} \int_0^1 x f(x) J_0(\alpha_k x) \mathrm{dx}, k = 1, 2, \ldots.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k J_0(\beta_k x).$$

$$d_k = \frac{2}{\left(J_0(\beta_k)\right)^2} \int_0^1 x f(x) J_0(\beta_k x) \mathrm{dx}, k = 0, 1, \ldots.$$

Dit zijn de Fourier-Besselreeksen van eerste en tweede soort resp. van orde 0 van $f(x)$.

Opmerking 2.9.1

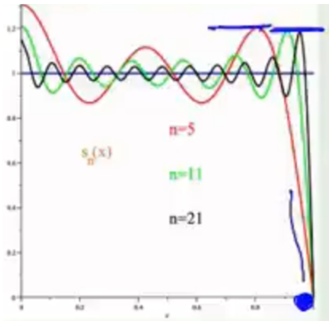
Tweede soort heeft hier te maken met de nulpunten van de afgeleide van J_0, heeft **niets** te maken met besselfuncties van de tweede soort.

Maar zoals ik het zie hadden we dit al eerder in dit hoofdstuk beredeneert in het stuk over orthogonaliteit.

Stelling:
Stel dat $a_1 < a_2 < \ldots$ de positieve nulpunten zijn van $J_0(x)$. Zij $f(x)$ stuksgewijze effen op $[0, 1]$. De fourier-besselreeks van de eerste soort convergeert puntsgewijs tot

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}, \forall x_0 \in (0, 1).$$

Er wordt geen uitspraak gedaan over convergentie op de randpunten, en die is er ook niet altijd.



We krijgen opnieuw een Gibbs-achtig verschijnsel bij volgend voorbeeld;

$$f(x) = 1.$$

De fourier-Besselreeks van de eerste soort;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\alpha_k J_1(\alpha_k)} J_0(\alpha_k x).$$

- $\lim_{n\to\infty} s_n(0) = 1 = f(0) = J_0(\alpha_k)$
- $\lim_{n\to\infty} s_n(1) = 0 \neq f(1)$

Het is niet exact hetzelfde, bij fourierreeksen werd het geinduceerd door discontinuiteiten in de functie, hier heeft het te maken met dat de benadering altijd moet starten vanuit 0 in het punt 1.

3 Sturn-Liouvilleproblemen

Dit zijn problemen die het algebraïsche eigenwaardeprobleem veralgemenen naar ruimtes van functies.

Herrinnering 3.0.1 Symmetrisch eigenwaardeprobleem

$$A\vec{E} = \lambda\vec{E}.$$

Is symmetrisch als A symmetrisch is; $A = A^T$

- Alle eigenwaarden zijn reëel. $\forall\lambda_i \in \sigma(A) : \lambda \in \mathbb{R}$
- Eigenvectoren horend bij verschillende eigenwaarden staan onderling loodrecht op elkaar.
- Er zijn n onafhankelijke eigenvectoren die een basis opspannen.

$$\implies \forall\vec{X} \in \mathbb{R}^n : \vec{X} = \sum_{i=1}^{n} c_i\vec{E}_i.$$

Of elke vector in de ruimte kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de eigenvectoren van A. Dat is immers wat het betekent als ze een ruimte opspannen.

3.1 Het eigenwaardeprobleem in de ruimte

Definitie 3.1.1: Operator

- $C^2([a,b],\mathbb{C})$ is de ruimte van functies f van $[a,b]$ naar $\mathbb{C}$ met f,f',f" continu
- Operator L op $C^2([a,b],\mathbb{C})$ wordt gedefinieerd als;
  - Het domein van de operator, genoteerd $D(L)$ is de verzameling van functies die voldoen aan randvoorwaarden van de vorm

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + a_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0.$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

  - De actie van de operator wordt beschreven door

$$Ly = a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x).$$

$$\forall y \in D(L).$$

We kunnen nu een eigenwaardeprobleem definiëren dat analoog is aan het probleem bij matrices.

Definitie 3.1.2: Eigenwaardeprobleem van L

Bepaal oplossingen van $Ly = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0$ Dit betekent concreet; We voeren de L operator uit op y en willen dat dit wordt afgebeeld op een veelvoud; We zoeken $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor diffvergelijking

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = \lambda y(x).$$

met randvoorwaarden

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0.$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

Waarvoor deze diffvergelijking met die randvoorwaarden een **niet-triviale oplossing heeft.**

Voorbeeld 3.1.1 (Functies die interval $[0, \pi]$ afbeelden op complexe vlak)

$$\begin{cases} D(L) = \left\{ y \in C^2([0,\pi], \mathbb{C}) : y(0) = 0, y(\pi) = 0 \right\} \\ Ly = y \end{cases} .$$

$$Ly = \lambda y, y \neq 0, y \in D(L).$$

We zoeken een functie van y zodanig dat de tweede afgeleide van y gelijk is aan λy

$$\rightarrow y''(x) = \lambda y.$$

Opmerking 3.1.1

Het feit dat y tot $D(L)$ behoort betekent dat $y(0) = 0 \wedge y(\pi) = 0$

$$\implies \begin{cases} y''(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases} .$$

Eigenschap:
Als $\phi_i(x)$ een eigenfunctie is horend bij eigenwaarde λ_i dan is elke functie $c\pi_i(x), c \neq 0$ ook een eigenfunctie horend bij λ_i

Eigenschap:
Eigenfunctie $\phi_i(x), i = 1, \ldots, n$ horend bij verschillende eigenwaarden $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ zijn lineair onafhankelijk op $[a, b]$

3.2 Symmetrische eigenwaardeproblemen

We bepalen het inwendig product van functies als

$$(y_1, y_2) = \int_a^b \overline{y_1(x)} y_2(x) \mathrm{d}x.$$

Dus de inntegraal van a tot b van de complex toegevoegde van y_1 maal y_2

We beschouwen nu opnieuw een eigenwaardeprobleem

$$Ly = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0.$$

$$\iff a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = \lambda y(x).$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + a_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Definitie 3.2.1: Definitie van zelftoegevoegde operator

L is zelftoegevoegd als

$$(y_1, Ly_2) = (Ly_1, y_2), \forall y_1, y_2 \in D(L).$$

$$\equiv \int_a^b \overline{y_1} L y_2 dx = \int_a^b \overline{(Ly_1)} y_2 dx.$$

Voor alle y_1, y_2 die voldoen aan

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + a_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Als L zelftoegevoegd is, dan is het eigenwaardeprobleem symmetrisch.

We hebben nu enkele eigenschappen die analoog zijn aan eigenschappen met symmetrische matrices.

Bewijs 3.2.1:

Stelling:
De eigenwaarden van een symmetrisch eigenwaardeprobleem zijn reëel

Veronderstel dat $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde is en ϕ de bijhorende eigenfucntie. L is zelftoegevoegd dus geldt

$$(\phi, L\phi) = (L\phi, \phi).$$

Uit $L\phi = \lambda\phi$ volgt;

Idee of vraag 3.2.1

$$\lambda \int_a^b |\phi(x)|^2 \mathrm{dx} = \int_a^b \overline{(\lambda\phi(x))}\phi(x)\mathrm{dx} = \overline{\lambda} \int_a^b |\phi(x)|^2 \mathrm{dx}.$$

Snap niet heel goed hoe dit bewijs in elkaar valt, op welke manier de twee vorige stellingen leiden tot dit tussenresultaat

$$\lambda(\phi, \phi) = \overline{\lambda}(\phi, \phi).$$

$$\iff 0 = (\lambda - \overline{\lambda})(\phi, \phi) = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b |\phi(x)|^2 \mathrm{dx}.$$

$$\phi \neq 0 \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eigenfuncties kunnen steeds reëel gekozen worden en in wat volgt kiezen we ze ook $\in \mathbb{R}$

Eigenschap:
eigenfuncties $\phi_n(x), \phi_m(x)$ horend bij verschillende eigenwaarden λ_n en λ_m van een symmetrisch eigenwaardeprobleem zijn orthogonaal over het interval $[a,b]$ tov gewichtsfunctie $w(x) = 1$;

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\mathrm{dx} = 0.$$

Dit is de direkte veralgemening van de eigenvectoren die orthogonaal zijn bij verschillende eigenwaarden voor symmetrische matrices.

Bewijs 3.2.2: Bewijs van die orthogonaliteit

Er geldt

$$(L\phi_n, \phi_m) = (\phi_n, L\phi_m).$$
$$\lambda_n(\phi_n, \phi_m) = \lambda_m(\phi_n, \phi_m).$$

en vermits $\lambda_n \neq \lambda_m$

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_a^b \overline{\phi_n(x)}\phi_m(x)\mathrm{dx} = 0.$$

Vermits de eigenfuncties reëel zijn kan $\overline{\phi_n}$ door ϕ_n vervangen worden.

Eigenschap: Eigenfuncties die een basis vormen
Onderstel dat het eigenwaardeprobleem symmetrisch is en bovendien L normaal is (dwz;)

$$a_0(x) \neq 0, \forall x \in [a,b].$$

Dan zijn er oneindig veel reële eigenwaarden $\lambda_n, n = 0, 1, \dots$ zodat

$$|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| \wedge \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

voor een stuksgewijze effen functie f op $[a,b]$ geldt;

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x).$$

waarbij

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{dx}}{\int_a^b \phi_n(x)^2\mathrm{dx}}.$$

Dus hiermee wordt getoond hoe het idee van eigenvectoren die een basis opspannen voor de originele basis is veralgemeend! De eigenfuncties spannen een basis op voor $f(x)$. Om even iets dieper in te gaan op die uitdrukking voor de coefficienten;

$$f(x)\phi_j(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x)\phi_j(x).$$

Dit is 0 wanneer $\phi_n(x) \neq \phi_j(x)$

$$\implies f(x)\phi_j(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x)\phi_j(x) = a_j \int_a^b \phi_j(x)^2\mathrm{dx}.$$

Dus vorm het om en voila, magie.
Dit stuk kan worden afgesloten door een parallel te trekken tussen de twee contexten rond symmetrische problemen.
Voorwaarde syummetrie;

$$< y_1, Ly_2 >=< Ly_1, y_2 > \forall y_1, y_2 \in D(L).$$

voor vectoren;

$$< x_1, Ax_2 >=< Ax_1, x_2 >, \forall x_1, x_2.$$

$$x_1^T Ax_2 = (Ax_1)^T x_2 = x_1^T A^T x_2, \forall x_1, x_2.$$

$$\iff A = A^T.$$

Dus het is analoog, we kunnen drie eigenschappen extraheren

- reële eigenwaarden in beide gevallen
- orthogonaliteit eigenvectoren of eigenfuncties
- eigenvectoren of eigenfuncties volgen een basis

3.3 Klasse symmetrische problemen

Voorbeeld 3.3.1 (Klasse symmetrische problemen)

$$Ly = \lambda y, .$$

$\lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0$

Stel

1. Operator L van de vorm
$$Ly = \frac{d}{\mathrm{dx}}\left(p(x)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right) + q(x).$$
$$\iff p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x).$$
Dus de tweede coefficient is de afgeleide van de eerste. en wat in het voorbeeld kader staat is compacte notatie.
2. Stel dat de randvoorwaarden gescheiden zijn (rvw waarin enkel a/b voorkomt)
$$\alpha_1 y(a) + \alpha_3 y'(a) = 0.$$
$$\beta_2 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0.$$
of periodieke rvw
$$y(a) = y(b).$$
$$y'(a) = y'(b).$$
met $p(a) = p(b)$

Om terug te komen op dat vorige voorbeeld

Voorbeeld 3.3.2 (Functies die interval $[0, \pi]$ afbeelden op complexe vlak)

$$\begin{cases} D(L) = \left\{y \in C^2([0,\pi], \mathbb{C}) : y(0) = 0, y(\pi) = 0\right\} \\ Ly = y \end{cases}.$$

$$Ly = \lambda y, y \neq 0, y \in D(L).$$
$$\rightarrow y''(x) = \lambda y.$$
$$\implies \begin{cases} y''(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Hebben we te maken met een symmetrisch probleem?

$$Ly = 1y''(x) + 0y'(x) + 0y(x) \iff a_0 = 1, a_1 = 0.$$

Als je kijkt naar de vorm van de operator zie je dat deze juist is. Als je kijkt naar de rvw, in de eerste komt enkel nul voor in de tweede enkel pi. **Gescheiden rvw.** $\implies$ we hebben te maken met een symmetrisch probleem, dus reële eigenwaarden. Laten we deze berekenen.

- $\lambda = 0$
$$y''(x) = 0 \iff y(x) = c_1 + c_2 x.$$
  De algemene oplossing is een veelterm van de eerste graad. rvw gebruiken;
$$y(x) = 0.$$
  Enkel de nuloplossing voldoet, triviale oplossing die niets zegt.

- $\lambda > 0$ Oplossing zal ofwel een combinatie zijn van exponentiëlen
$$\begin{cases} \exp\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\ \exp\left(-\sqrt{\lambda}x\right) \end{cases}.$$
  of combinatie van hyperbolische functies (dus evident zijn die twee hetzelfde maarja)
$$y(x) = c_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$
  als we hierop de rvw gebruiken
$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \implies c_1 = 0.$$
$$c_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0.$$

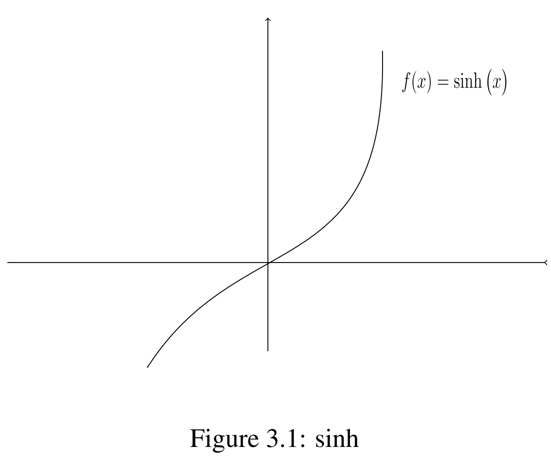


Figure 3.1: sinh

Die functie heeft geen positieve nulpunten dus wederom nuloplossing.

- $\lambda < 0$:

$$y(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

Moet met matlab bekeken worden maar mij niet vragen hoe. rvw

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \implies c_2 = 0.$$
$$c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0.$$

wow eindelijk een oplossing.

$$\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \ldots \to \lambda_n = -n^2.$$
$$\implies X_n(x) = c_2 \sin\left(nx\right).$$

Dan voldoe je aan diffvergelijking en rvw. Oneindig veel eigenfunctie $\sin\left(nx\right)$ en dus op constante na!

3.3.1 Visualisatie van deze eigenfunctie

$$y''(x) = \lambda y, y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$
$$\phi_n(x) = \sin\left(nx\right) n = 1, 2, \ldots.$$

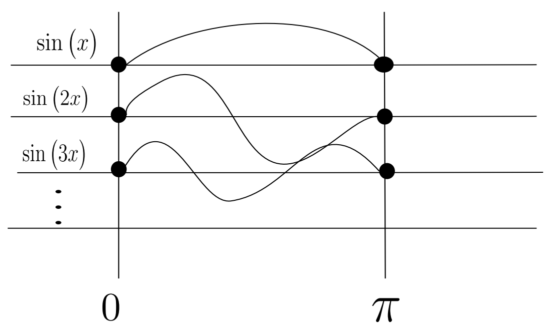


Figure 3.2: eigenfuncties

dit komt neer op een fouriersinusreeks van oneven uitbreiding van f

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(nx\right), a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin\left(nx\right) \mathrm{dx}.$$

dit is de fouriersinusreeks van oneven uitbreiding f op $[-\pi, \pi]$

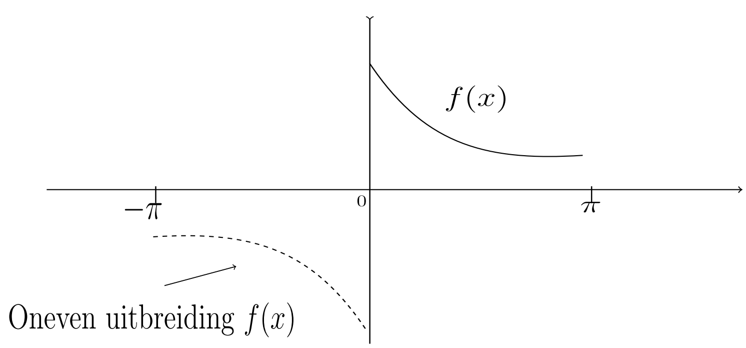


Figure 3.3: Uitbreiding

Deze tekening spreekt voor zich.

4 Eerste oefenzitting

4.1 Videos 1,2 uw

De video gelinkt bij deze oz vond ik echt prachtig, gaf goede meetkundige inzichten die ik totaal niet opmerkte toen ik eerst met de leerstof bezig was. Bekijk het opnieuw als je dit in blok terugleest en zaken vergeten bent.

$$< f(x), g(x) >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx}.$$

welbekende formule;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(kx\right) + b_k \sin\left(kx\right)\right).$$

Optelling van allerlei golven

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\left(kx\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{||\cos\left(kx\right)||^2} < f(x), \cos\left(kx\right) > .$$

Bemerk dat dit er heel erg uitziet als **een inproduct tussen** $f(x)$ **en** $\cos\left(x\right)$ **en dat is exact wat dit is.** Je moet het natuurlijkwel normailiseren.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(kx\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{||\sin\left(kx\right)||^2} < f(x), \sin\left(kx\right) > .$$

Opmerking 4.1.1

Die norm gekwadrateerd is $\frac{1}{\pi}$

Wat we hier hebben is een uitbreiding van f met een som van cosinussen en sinussen van hogere en hogeren frequenties met coefficienten bepaald door het inproduct van f met die bepaalde golf.

Meetkundig beeld

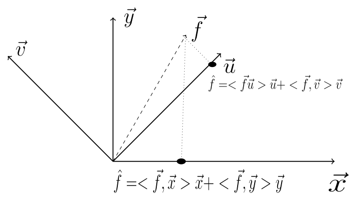


Figure 4.1: fouriermeetkunde

We hebben hier een x,y coordinatensysteem en een uv coordinatensysteem. $\vec{f}$ is de testvector f die we kunnen voorstellen in eender welk orthogonaal systeem.
Merk trouwens op dat als $\vec{x},\vec{y}$ geen eenheidsvectoren waren je zou moeen delen door hun norm. Beschouw x,y,u en v als eenheidsvectoren.
Cosinus en sinus zijn ook orthogonale functies. We kunnen dus die vector f nemen en op die manier projecteren. Dat is exact wat we doen bij een fourier transform.

4.2 Tutorial

4.3 Voorbereidende oefeningen

Vraag 1: Welke van de volgende functies zijn stuksgewijs effen

in $[-1,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1, -1 \leq x < 0 \\ x, 0 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

en

$$g(x) = x^{\frac{2}{3}}.$$

Herrinnering 4.3.1 Stuksgewijs effen

Om het simpel uit te drukken; **Effen functie is een functie die stuksgewijze continu is en haar afgeleide is ook stuksgewijze continu.** Denk ik.

Idee of vraag 4.3.1 Mijn antwoord

Om kort te zijn, f is duidelijk geen stuksgewijs effen functie omwille van de discontinuiteit waarvoor geen uitbreiding mogelijk is.
g is duidelijk wel stuksgewijs effen. Bestaat overal, continu afleidbaar, heeft geen discontinuiteiten.

Vraag 2

Stel de fourierreeks op van de volgende functie

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in \,]-\pi, 0] \\ x, x \in \,]0, \pi] \end{cases} .$$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} x dx \right).$$

$$\iff \frac{1}{\pi}\left(\pi + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

dan

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{dx}.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} 0 \mathrm{dx} + \int_{0}^{\pi} x \cos(kx) \mathrm{dx} \right).$$

$$\iff \frac{1}{\pi}(\pi+).$$

Het lukt me niet om deze integraal uit te rekenen, ben te moe
We vinden

$$f(x) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[(-1)^k - 1\right] \cos(kx)}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin(kx)}{k}.$$

4.4 Oefeningen

Vraag 3

Dit is een oefening die in de les gemaakt werd en niet in de oefenzitting zou staan. Eigenwaardenprobleem periodieke vorm

$$y'' = \lambda y.$$

$$\begin{cases} y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases} .$$

- $\lambda = 0$

$$y(x) = Ax + B.$$

$$-A\lambda + B = A\lambda + B.$$

$$y'(x) = A.$$

$$A = A.$$

$$-A\pi = A\pi \implies A = 0.$$

$$\phi_0(x) = 1, \lambda_0 = 0.$$

- $\lambda < 0$

$$y(x) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

$$y'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

$$\implies \phi_n(x) = A_n\cos(nx) + B_n\sin(nx).$$

$$\begin{cases} A\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \mp B\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \\ A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) + B\sqrt{\lambda}\cos(\lambda\pi) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) + B\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \end{cases}.$$

$$\implies \begin{cases} 2B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\ 2A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \end{cases}.$$

$$\implies \begin{cases} B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\ A\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \end{cases}.$$

Opmerking 4.4.1

We beschouwen de nuloplossing waar A en B gelijk zijn aan nul niet!!

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0.$$

$$\iff \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \ldots.$$

$$x_n = n^2.$$

Opmerking 4.4.2

Vaak ga je voorwaarden vinden zodat je a in functie van b kunt schrijven of omgekeerd, maar in dit geval niet. We vinden hier een dubbele eigenwaarden, dit is he enige probleem waarbij dit voorkomt.

Idee of vraag 4.4.1 Vraag na

Is dit een juiste representatie van de oplossing van de oefening?