# Mechanica II
# Lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

# INHOUDSTAFEL

# 1 Inleidende kinematica

# 2 Samengestelde beweging

## 2.1 Versnelling

- sleepveersnelling
- relatieve versneling
- complementaire versnelling

absolute versnelling volgt uit de afgeleide van absolute snelheid

**Definitie 2.1.1: absolute versnelling**

We definiëren absolute versnelling

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt}.$$
$$\iff \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_A + \vec{r}'_P\right).$$

**Definitie 2.1.2: coriolisversnelling**

$$\vec{a}_{P,cor} = -\vec{a}_{P,compl}.$$
$$\iff -2(\vec{\omega} \times \vec{v}_{P,rel}).$$
$$2(\vec{v}_{P,rel} \times \vec{\omega}).$$

**Opmerking 2.1.1**

Wat is dit? We kunnen zeggen dat de versnelling van een punt P gelijk is aan een sleepversnelling van dat punt. Vernselling dat dat punt zou hebben als het vast zou hangen aan het assenstelsel. Er is een relatieve versnelling $\vec{a}_P$ . Ten slotte komt die complementaire versnelling als er

1. het assenstelsel roteert
2. het punt beschrijft beweging tov dta assenstelsel

Dit wordt geschreven als

$$\vec{a}_{slp,P} + \vec{a}_{rel,P} - a_{cor,P}.$$

als ik kijk vanuit referentie assenstelsel, en je weet dat je punt geen versnelling heeft. Dan moet er een correctieterm komen, dat is wat die coriolis term moet zijn. Je neemt het niet waar, maar het is een correctieterm.

# 3 Dynamica

## 3.1 materiele systemen

**impulswet**

van een puntmassa

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \implies \vec{p} = m\vec{v}.$$

snelheid van het voorwerp gewogen met de massa stelt een hoeveelheid van beweging voor.

**Opmerking 3.1.1**

momentum in het engels niet te verwarren met moment

voor een materiaal syteem

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m\vec{a}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i.$$

gebruik van derde postlaat.

**Stelling:** Formulering van uit het massacentrum

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m\vec{v}_i.$$

**Opmerking 3.1.2**

soort gewogen gemiddelde van alle coordinaten van het systemen en dat geeft het coordinaat van het amssacentrum.

$$\iff \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i\right)\right).$$

neem totale massa en vermenigvuldig met positie coordinaat, dat afleiden naar de tijd geeft het impuls

$$\iff \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = \frac{d\vec{p}_c}{dt}.$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}_c.$$

$$\implies \vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

.

Als de positie van een systeem veranderd, en ook als het massacentrum van het voorwerp veranderd, dat beschrijft de valparabool. Er is een rotatiebeweging bezig rond het massacentrum dat irrelevant is, de valparabool wordt uitgevoerd. dus formulering vanuit het massacentrum;

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}_c = m\vec{a}_c = \frac{d\vec{p}_c}{dt}.$$

**Eindig tijdsinterval**

$$\vec{N} = \int_{t_I}^{t_{II}} \vec{F} dt = \vec{p}_{II} - \vec{p}_I = m\vec{v}_{II} - m\vec{v}_I.$$

Hiervoor moeten we het hebben ove het begrip stoot;

**Opmerking 3.1.3** stoot

We hebben een kracht die werkt over een bepaald tijdsinterval, als we dat integrerenover de tijd, dan krijgen we integraal van de stoot of de integraal van de kracht over tijdsinterval.

Als een kracht heel snel in de tijd evolueert, bijvoorbeeld bij een botsing.

**Voorbeeld 3.1.1** (Voorbeeld stoot)
Gemiddelde kracht maal tijdsinterva moet gelijk zijn aan geleverde stoot, beschouw een auto die tegen muur rijdt zoals afbeeldingn hieroner

$$\vec{N} = \vec{P}_{II} - \vec{P}_I.$$

$$N_x = mv = \ldots = \ldots \text{N}.$$

$$\vec{F}_{\text{gem}} \cdot \Delta t = \int_{t_I}^{t_{II}} \vec{F} dt = \vec{p}_{II} - \vec{p}_I = \vec{N}.$$

$$\iff F_x = \frac{N_x}{\Delta t}.$$

dus je ziet dat een lange voorkant van een auto ervoor zorgt dat de botsing uiteindelijk veel trager gebeurt

**Stelling:** behoud van impuls

$$\vec{p}_{II} - \vec{p}_I = \vec{0}.$$

**Voorbeeld 3.1.2** (Schaatser)

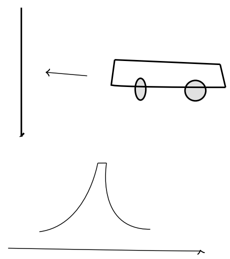
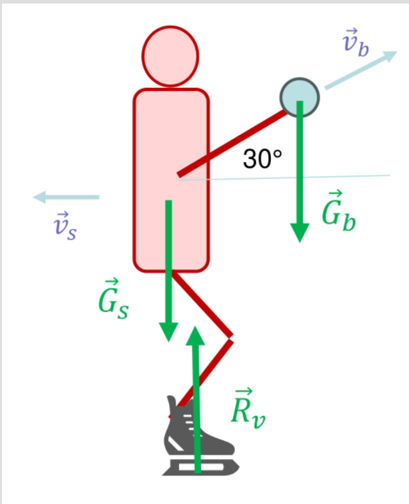


Figure 3.1: auto




stoof geleverd door Gewicht schaatser, impuls reactiekracht van de grond?

$$\vec{N} = \vec{N}_{G_s} + \vec{N}_{G_b} + \vec{N}_{R_v} = \vec{p}_{II} - \vec{p}_I.$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ N_{G_s} + N_{G_b} + N_{R_v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(-v_s) & + m v_b \cos 30° \\ 0 & + m v_b \sin 30° \end{bmatrix}$$

## 3.2 Impulsmoment

**Kennisclip**

**Definitie 3.2.1: De impulsmomentwet**

gedefinieerd als

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} - (\vec{v}_C - \vec{v}_O) \times m\vec{v}_C = \sum \vec{M}_O.$$

De hoeveelheid beweging of het impulsmoment is steeds gedefinieerd met een punt.

$$\vec{L}_0 = \vec{r}_{OC} \times m\vec{v}_C + I_c \omega_c.$$

Dit is het impulsmoment

**Definitie 3.2.2: Niet inertieel assenstelsel**

We definiëren het als vaststaand aan het starre lichaam

$$\vec{L}'_C = I_{C'[x'y'z']} \omega_{C'[x'y'z']}.$$

## 3.3 Impulsmomentwet rond een vast punt

**Definitie 3.3.1**

Dynamische evenwichtvergelijking

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{d\vec{L}_0}{dt}.$$

**Eigenschap:**
Behoud van impulsmoment

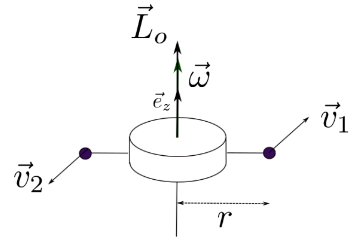
$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0}.$$

$$\vec{L}_{0,II} - \vec{L}_{0,I} = \vec{0}.$$

**Voorbeeld 3.3.1** (Stoel met twee halters)

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O_p} + \vec{L}_{O_{h1}} + \vec{L}_{O_{h2}}.$$

$$L_{O_z} = (I_{b_z} + 2r^2 m)\omega.$$




Voor behoud van impulsmoment rond de z-as

- **Als de straal stijgt moet omega dalen**
- **Als de straal kleiner wordt moet omega groter worden**

**Rond het massacentrum**

Je neemt het totale impulsmoment van het voorwer, je trekt er een moment aan impuls van het massacentrum van af en dan krijg je het impulsmoment rond het massacentrum.

Totale impulsmoment kan ontbonden worden ls impulsmoment van massacentrum plus een relatief impulsmoment tov het massacentrum

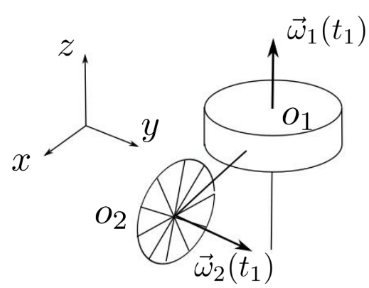
$$\vec{L}_C = \sum \vec{p}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i \times m_i \vec{v}_i'.$$

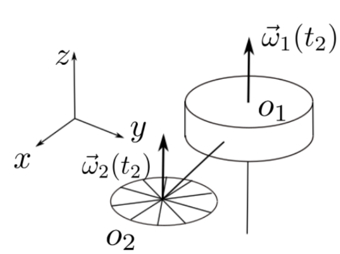
$$\vec{L}_C = \vec{L}_O - \vec{r}_{OC} \times m\vec{v}_C.$$
$$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_{OC} \times m\vec{v}_C.$$

**Voorbeeld 3.3.2** (Demo van stoel)

$$\vec{L}_O(t_1), \vec{L}_O(t_2).$$

resp.



## 3.4 Starre lichamen

Voorwerpenwaavan e weteen dat ze onvervormbaar zijn.

**Impulswet**

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_C}{dt} = m\vec{a}_C.$$

blijft vrijwel onveranderd.

**Impulsmomentwet**

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \times \vec{F}_i = \frac{d\vec{L}_C}{dt}.$$

**Voorbeeld 3.4.1** (Impulsmomentvector)

Bereken het impulsmoment

1. $$\vec{L}' = I_c \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$