Informatieoverdracht en -verwerking lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

INHOUDSTAFEL

Deel I

Informatietheorie

I.1 Discrete informatiebronnen

1.1 Hoeveelheid informatie

We hebben een discrete bron en die bron genereeert discrete antwoorden. We stoppen die in een **bronalfabet.**

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Er zijn n mogelijke antwoorden. **n mogelijke symbolen.** Combinatie uit gekozen symbolen **is de boodschap.**

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

waarschijnlijkheden van alle symbolen. Als elk symbool een gelijke kans heeft, dan is **de hoeveelheid informatie H van een boodschap met lengte l**

$$H = \log\left(n^l\right) = l \cdot \log(n).$$

Opmerking 1.1.1 Binaire logaritme

Met log het binaire logaritme.

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(2)}.$$

Definitie 1.1.1: Claude Shannon

Hoeveelheid informatie in symbool a_i

$$H(a_i) = \log\left(\frac{1}{p_i}\right) \cdot \frac{\text{bit}_i}{\text{symbool } a_i}.$$

Stelling: Gemiddelde hoeveelheid informatie in een alfabet A
In bit per symbool;

$$H(A) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i).$$

Addendum 1.1.1

Hoeveelheid informatie wordt vaak ”entropie” genoemd.

$$S = k_B \log(\Omega).$$

Beide zijn een maat voor onzekerheid of wanorde. Meer informatie is meer onzekerheid en wanorde. In de cursus zeggen ze zo van ”we gaan er niet dieper op in” maar volgens mij gaat het letterlijk niet veel dieper dan dit.

Stelling: Gemiddelde hoeveelheid informatie van een boodschap met lengte l
In bit per boodschap, boodschap lengte l;

$$H(M) = l\sum_{i=1}^{n} p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right) = -l\sum_{i=1}^{n} p_i \log(p_i).$$

ik schrijf het gewoon twee keer uit om direct duidelijk te maken waar dat minteken vandaan komt.

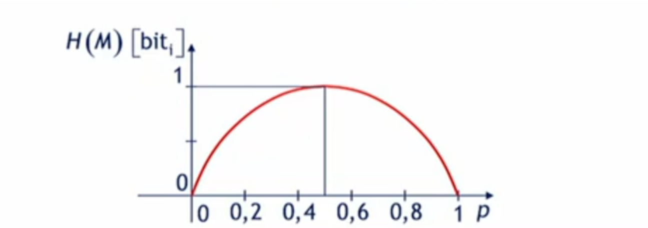
Het is **gemiddeld**, niet vergeten.

Voorbeeld 1.1.1 (Binair alfabet)

- Symbool 1; student geslaagd $p = 0.8$
- Symbool 0; student niet geslaag $1 - p = 0.2$

Hoeveel informatie zal er gemiddeld zijn als de student zijn resultaat meldt?

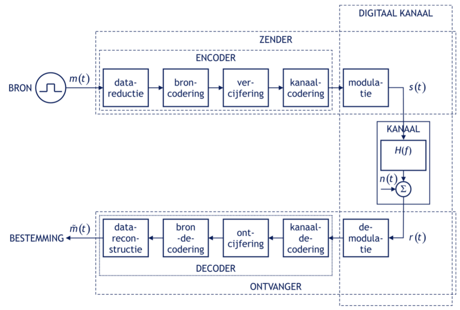
$$H(M) = -(0.8 \cdot \log(0.8) + 0.2 \cdot \log(9.2)).$$
$$= \ldots.$$



die curve is dus de hoeveelheid informatie van een binaire bron en is een zeer belangrijke curve.

1.2 Informatieoverdracht

Een boodschap is een groep opeenvolgende symbolen. **De zender van discrete informatiebronnen levert een bitstroom.** We noemen een bitstroom een digitaal signaal.



Stelling: Maximale hoeveelheid informatie van een bron

$$\max H(A) = \log(n).$$

Definitie 1.2.1: Informatiedebiet

Het informatiedebiet H_t van discreten informatiebron is geleverde hoeveelheid informatie per tijdseenheid

$$H_t(A) = \frac{H(A)}{t}\ \text{bit}_i/s.$$

Stelling: Informatiedebiet $H_t(A)$ en transmissiedebiet $r_s(A)$ bron gedefinieerd als

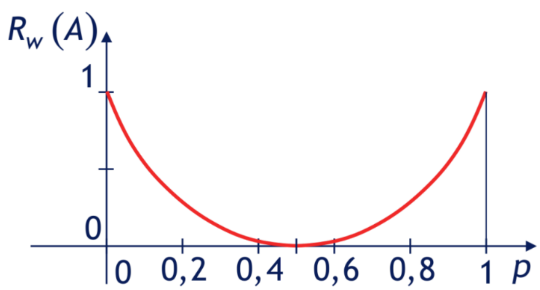
$$H_t(A) = \frac{1}{t} \cdot H(A)\text{bit}_i\text{/s} = r_s(A) \cdot H(A)\text{bit}_i\text{/s}.$$

Dus de hoeveelheid informatiedebiet van onze bron is de hoeveelheid informatie van de bron maal het transmissiedebiet in symbolen per seconde.

Stelling: Waarschijnlijkheidsredundantie van de bron **zonder geheugen**
Eigenschap van de bron, ideaal willen we nul hebben. Dan hebben we 100% waarschijnlijkheidsredundantie.
$R_w(A)$ gedefinieerd als;

$$R_w(A) = 1 - \frac{H(A)}{\max H(A)}.$$

We bekijken deze grafiek waarschijnlhijkheidsredundantie van een binaire bron



Dus gewoon zodat het duidelijk is, $R_w(A|p = 0.5) = 0$, omdat dan $H(A) = \max H(A)$ wat logisch is; entropie is maximaal dus geen voorspelbaarheid, geen overbodige informatie. Uitkomsten zijn willekeurig en onafhankelijk. Je moet je dus bedenken dat alle symbolen dezelfde kans hebben. Met overbodige informatie bedoel ik extra informatie over de kansen die nu niet nodig is.

$$R_w = 1 - \frac{H(A)}{\max H(A)}.$$

Opmerking 1.2.1 Verschillen tussen bit$_i$ en bit

- bit$_i$ is een binary unit
  - Eenheid van hoeveelheden informatie
  - Betekenis in informatietheorie
  - Enkel voor 'kenners'
  - Het subscript wijst uitdrukkelijk op betekenis 'hoeveelheid van informatie' voor deze cursus

Opmerking 1.2.1 Verschillen tussen bit_i en bit

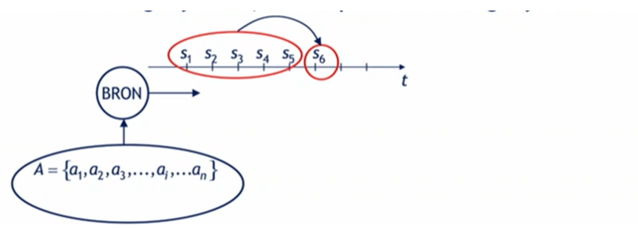
- bit is een binary digit
  - Eenheid van aantal binaire symbolen
  - Zegt **niets** over de hoeveelheid informatie! want dat hangt dus af van die kansen, is er veel waarschijnlijkheidsredundantie of niet?

1.3 Bronnen met geheugen

Addendum 1.3.1 Ascii code

ascii code bestaat uit 7 bits. Als je een bron hebt die zoveel ascii code genereert, dan hangt het dus af van de kansen van die symbolen wat de hoeveelheid informatie van die bron is! In functie van de kansen hoeft dat niet 7bit_i informatie te zijn! Dat is dus het belangrijk verschil.

We hebben niet alleen waarschijnlijkheidsredundantie, ook afhankelijkheidsredundantie. In een Engelse tekst na 'th' komt bijna altijd 'e'. Implementatie van die ideeën zorgen voor gereduceerde hoeveelheid informatie.



$$S = \{s_{n-k}, s_{n-k+1}, \ldots, s_{n-1}\}.$$

Die grote S is de toestand, het geheugen dat de k vorige symbolen omvat. De kleine s is een symbool.

Opmerking 1.3.1

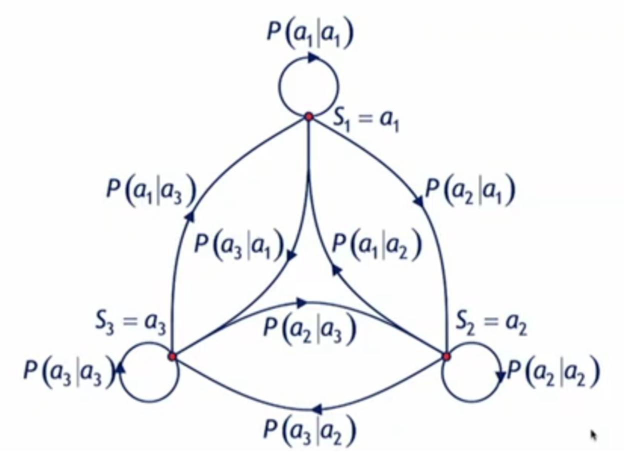
Die laatste n in A is **niet dezelfde n** als s_n want die n wijst naar een tijdstip, die in A wijst naar een totaal aantal. Ze zegt dat ze het express zo schreef om je wakker te houden lol

$$P(s_n | s_{n-k}, s_{n-k+1}, \ldots, s_{n-1}).$$

dit is dus een kans op tijdstip n die afhangt van alle symbolen die hieraan vooraf gingen. Dan is er een nieuwe toestand

$$S_j = \ldots.$$

Als we vervolgens al die toestanden bekijken krijgen we een Markov-keten. Een markov keten van orde k moduleert een systeem waar k tijdstippen van belang zijn.



dit is een tekening voor een bron met drie symbolen en de kansen enzo. Is eigenlijk een beetje zoals een graaf is niet moeilijk ofzo.

Opmerking 1.3.2

voor een eerste-orde markov-keten, overgang van symbool s_1 naar s_2

$$H(s_1, s_2) = H(s_1) + H(s_2|s_1).$$

en **een brond met geheugen heeft lagere entropie dan een bron zonder geheugen dus**

$$H(s_1, s_2) \leq H(s_1) + H(s_2).$$

waarbij

$$H(s_2|s_1) = -\sum_{s_1=a_1}^{a_n} \sum_{s_1=a_1}^{a_n} P(s_1) \cdot P(s_2|s_1) \cdot \log(P(s_1|s_1)) = -\sum_{s_1=a_1}^{a_n} P(s_1, s_2) \cdot \log(P(s_2|s_1)).$$

Dit uitgelegd uit de les; We willen de hoeveelheid informatie bepalen van onze bron met geheugen. Een verband vinden tussen s_1, s_2. Neem $s_1 = a_1$

$$H(s_2|s_1 = a_1) = -\sum_{s_2=a_1}^{a_n} P(s_2|s_1 = a_1) \cdot \log(P(s_2|s_1 = a_1)).$$

hiermee kwantificeer je; hoeveel extra informatie levert s_2 op? en nu kun je dit uitbreiden over alle mogelijke a_i

$$H(s_2|s_1) = -\sum_{s_1=a_1}^{a_n} P(s_1 = a_i) \cdot \left(\sum_{s_2=a_1}^{a_n} P(s_2|s_1 = a_i) \cdot \log(P(s_2|s_1 = a_i)) \right).$$

$$\iff -\sum_{s_1=a_1}^{a_n} \sum_{s_2=a_1}^{a_n} P(s_1) \cdot P(s_2|s_1) \cdot \log(P(s_2|s_1)).$$

$$\iff -\sum_{s_1=a_1}^{a_n} \sum_{s_2=a_1}^{a_n} P(s_1, s_2) \cdot \log(P(s_2|s_1)).$$

Stelling: Hoeveelheid informatie voor een paar van symbolen

$$H(s_1, s_2) = H(s_1) + H(s_2|s_1).$$

Op die manier kun je dat dus ook uitbreiden. Het is de informatie van mijn eerste symbool plus de extra informatie van hetgene daarvoor …

De belangrijkste conclusie van deze les wordt;

$$H(s_1, s_2) \leq H(s_1) + H(s_2).$$

Afhankelijkheidsredundantie reduceert de informatie van een bron. Net als waarschijnlijkheidsredundantie.
Dan snel terugkomen op

$$H(M) = -l \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log\left(p_i\right) \mathrm{bit}_i/\mathrm{boodschap}.$$

dit is enkel geldig als er geen afhankelijkheidsredundantie is. Want anders krijg je een kleinere hoeveelheid informatie. Dat is logisch want de verrassing is kleiner.

Herrinnering 1.3.1 Waarschijnlijkheidsredundantie

Ongelijke kansen voor individuele symbolen

$$R_w(A) = 1 - \frac{H(A)}{\max H(A)}.$$

Stelling: Afhankelijkheidsredundantie met geheugen
Opeenvolgende symbolen beinvloeden mekaars waarschijnlijkheid

$$R_a(A) = 1 - \frac{H_g(A)}{H(A)}.$$

waar H_g de hoeveelheid informatie met geheugen

Stelling: Totale redundantie

$$R_t(A) = 1 - \frac{H_g(A)}{\max H(A)}.$$

$$1 - (1 - R_a(A)) \cdot (1 - R_w(A)).$$

$$\iff 1 - R_t(A) = (1 - R_a(A)) \cdot (1 - R_w(A)).$$

I.2 Broncodering

Voor broncodering definiëren we een aantal nieuwe alfabetten, we hebben al

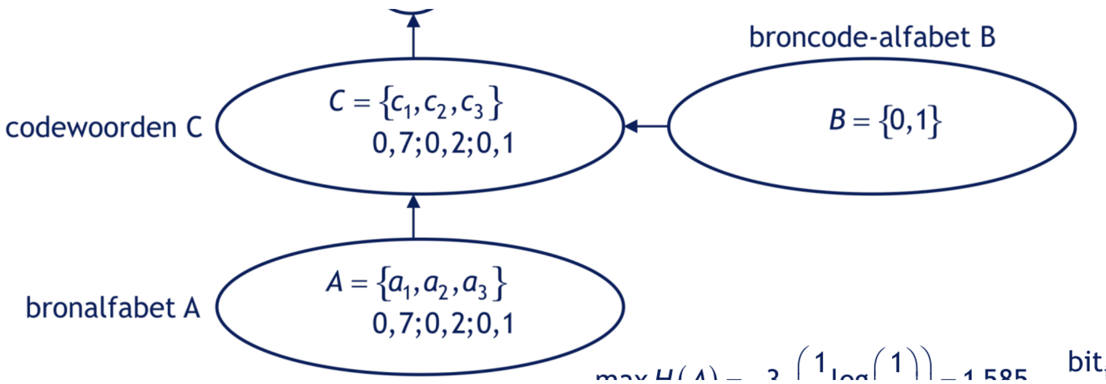
$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\}.$$

met bijhorende kansen $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n$ We definiëren nu

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_r\} \to C = \{c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n\}.$$

$$A \to C.$$

B het broncode alfabet en C de codewoorden.



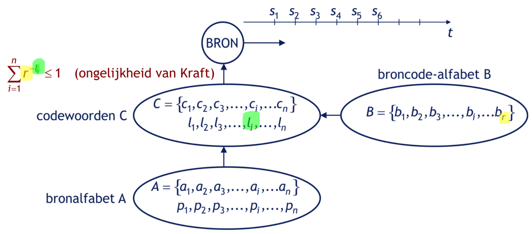
Eigenschap: Goede broncodering
Eigenschappen goede broncodering;

- Niet-singulier; als geen twee codes eenzelfde codewoord hebben
- Ondubbelzinnig als een opeenvolging van codewoorden nog steeds singulier is
- Direct decodeerbaar als (ze ondubbelzinnig decodeerbaar is en) elk codewoord gedecodeerd kan worden zonder te wachten op het vorige codewoord. Geen enkel codewoord mag het begin vormen van een ander codewoord!

Stelling: Ongelijkheid van Kraft
Voorwaarde voor het bestaan van direct decodeerbare code;

$$\sum_{i=1}^{n} r^{-l_i} \leq 1.$$

noodzakelijk maar geen voldoende voorwaarde direct decodeerbare code



Stelling: Broncoderingstheorema
Broncoderingstheorema; wat is de kortst mogelijke gemiddelde lengte l die ik kan verzinnen voor een bepaalde bron met een bepaalde hoeveelheid informatie. L gemiddelde codewoordlengte

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot l_i.$$

Dus in functie van de hoeveelheid informatie heb je meer of minder bits nodig om die bron voor te stellen.

Opmerking 2.0.1

Verwar $L = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i$ de **gemiddelde codewoordlengte** niet met **de gemiddelde lengte van de codewoorden** = $\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{n}$ want dat is natuurlijk niet hetzelfde.

Stelling: relatie $H(A)$ en L
Voor de verzameling van codewoorden $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ met symbolen uit het broncode alfabet $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ die voldoen aan gelijkheid van Kraft, geldt

$$L \cdot \log(r) \geq H(A) \iff \frac{H(A)}{\log(r)} \leq L.$$

met r de hoeveelheid informatie per symbool in het bronalfabet.

Opmerking 2.0.2 Log

Die $\log(r)$ staat daar nu omdat we het algemeen zien.$H(A)$ staat in bit informatie, dus daar staat impliciet een log. In dit geval heeft L ook twee symbolen in broncode alfabet, maar kan ook uit andere symbolen te staan.
Als $r = 2$ dan valt die log weg.
Dus die log is enkel een schaling om te veralgemenen naar niet-binaire alfabetten. Bvb kleuren, zou ze vrage op examen om te zien of je het snapt.

Bewijs 2.0.1:

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \log(p_i).$$

en

$$L \cdot \log(r) = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i \log(r).$$

optellen;

$$\iff H(A) - L \cdot \log(r) = -\sum_{i=1}^{n} \left(p_i \log(p_i) + p_i l_i \log(r)\right).$$

rekenregels logaritmen;

$$\iff \sum_{i=1}^{n} p_i \log\left(\frac{1}{p_i \cdot r^{l_i}}\right).$$

rekenregels logaritmen;

$$\iff \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{p_i \cdot r^{l_i}}\right)}{\ln(2)}.$$

we weten

$$a > 0 \implies \ln(a) \leq a - 1.$$

dus

$$\iff \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \ln\left(\frac{1}{p_i \cdot r^{l_i}}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \left(\frac{1}{p_i \cdot r^{l_i}} - 1\right).$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} r^{-l_i} - 1 \iff \text{Kraft}.$$

En we hadden in de stelling staan dat de broncode moest voldoen aan de stelling van kraft

$$\implies H(A) - L \cdot \log(r) \leq 0.$$

bewezen.

De gemiddelde codewoordlengte L kan nooit kleiner zijn dan de gemiddelde hoeveelheid informatie per symbool. L is minimaal als

$$p_i = r^{-l_i} \iff l_i = -\log_i(p_i).$$

$$\implies L = \frac{H(A)}{\log(r)}.$$

kan enkel als $-\log(p_i)$ een geheel getal is, l_i is een geheel aantal symbolen.

$$\sum_{i=1}^{n} r^{-l_i} = 1.$$

Ideale aanpassing tussen informatiebron en broncodering. efficiëntie is grootst als codewoordlengte minimaal is.

Stelling: Efficiëntie van broncodering

$$e = \frac{H(A)}{L \cdot \log(r)}.$$

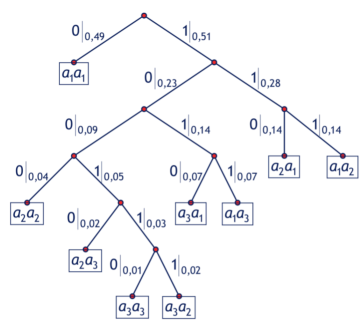
Stelling: Huffman codering
Direct decodeerbare code zodat L minimaal is voor een bronalfabet A.

- Rangschik de symbolen in A volgens afnemende waarschijnlijkheid
- Herleid A naar een nieuw bronalfabet A_1 met $(n-1)$ symbolen door de twee minst waarschijnlijke

bronsymbolen samen te voegen.

- Rangschik opnieuw volgens afnemende waarschijnlijkheid
- Voeg opnieuw de twee minst waarschijnlijke bronsymbolen samen.
- **Blijf dit doen tot je een bronalfabet bekomet met twee symbolen.** Hieraan ken je 0 en 1 toe respectievelijk.

$a_1\ a_1$	$p = (p_1)^2 = 0,49$	code = 0	$l'_1 = 1$
$a_1\ a_2$	$p = p_1 \cdot p_2 = 0,14$	111	$l'_2 = 3$
$a_2\ a_1$	$p = 0,14$	110	$l'_3 = 3$
$a_1\ a_3$	$p = p_1 \cdot p_3 = 0,07$	1011	$l'_4 = 4$
$a_3\ a_1$	$p = 0,07$	1010	$l'_5 = 4$
$a_2\ a_2$	$p = (p_2)^2 = 0,04$	1000	$l'_6 = 4$
$a_2\ a_3$	$p = p_2 \cdot p_3 = 0,02$	10010	$l'_7 = 5$
$a_3\ a_2$	$p = 0,02$	100111	$l'_8 = 6$
$a_3\ a_3$	$p = (p_3)^2 = 0,01$	100110	$l'_9 = 6$



De Huffman boom eindigt altijd in een kans gelijk aan één.

Opmerking 2.0.3 Efficiëntie

Het gaat uiteindelijk dan om wat de efficiëntie is van die code. Je moet weten dat dit niet enkel afhangt van de broncodering die je kiest. Je kunt Huffman perfect volgen en lager uitkomen of exact op één uitkomen afhankelijk van hoe de p_i tjes eruitzien.

Op het examen krijg je een boom waar je drie symbolen hebt. **Splits in drie.**

Definitie 2.0.1: Compressieverhouding

De verhouding van het gemiddeld aantal bit nodig per symbool uit het bronalfabet zonder broncodering t.o.v. het gemiddeld aantal bit nodig per symbool met broncodering.

Stelling: Looplengte codering van zwart-witbeelden
Bereken de gemiddelde lengte van de rij als volgt;

- Onderstel dat je je bevindt in een eerste wit beeldpunt
- Een overgang van k witte beeldpunten naar een zwart beeldpunt is te beschouwen als $k-1$ overgangen wit naar wit gevolgd door een overgang naar zwart.
- We noteren de kans op k dergelijke overgangen als
$$P_k(0) = P(0|0)^{k-1} \cdot P(1|0).$$

geometrische kansverdeling. nu zitten we dus in een zwart beeldpunt na een rij witte beeldpunten.

- Nu $(k-1)$ overgangen zwart naar zwart gevolgd door een overgang zwart naar wit

$$P_k(1) = P(1|1)^{k-1} \cdot P(0|1).$$

we weten ook

$$P(1|0) + P(0|0) = 1.$$

- Gemiddelde lengte van een rij witte beeldpunten

$$\overline{k(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(0|0)^{k-1} \cdot P(1|0) = \frac{1}{P(1|0)}.$$

Herrinnering 2.0.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

en analoog voor zwarte beeldpunten

$$\overline{k(1)} = \frac{1}{P(0|1)}.$$

Dus waar het op neerkomt is informatiebronnen met één symbool vervangen door een rij die getallen genereert, In de praktijk begrens je k en stel je grote waarden voor als sommen van kleinere waarden.
We kunnen Huffman bomen maken met variabele lengte groepjes en daar de kansen van berekenen. We zullen deze formules gebruiken om markov-ketens te kunnen aanvullen. **Ze staan niet op het formularium**

Als er een compressiemethode is, dan moet je die in een standaard gieten. Anders kunnen mensen met een andere standaard niet decomprimeren.

Voorbeeld 2.0.1 (Gegeven k0 en k1)

$$\overline{k(0)}100 \wedge \overline{k(1)} = 20.$$

geef looplengte-codering en hoeveelheid informatie.

$$\overline{k(0)} = 100 = \frac{1}{P(1|0)} \rightarrow P(1|0) = 0.01 \rightarrow P(0|0) = 0.99.$$

$$\overline{k(1)} = 20 = \frac{1}{P(0|1)} \rightarrow P(0|1) = 0.05 \rightarrow P(1|1) = 0.95.$$

$$P(0) = \frac{5}{6} \rightarrow P(1) = \frac{1}{6}.$$

dus

$$H(s_1) = -P(0) \cdot \log(P(0)) - P(1) \cdot \log(P(1)).$$
$$= 0.65 \text{ bit}_i/s.$$

en dan de hoeveelheid informatie voor twee pixels samen zou je berekenen als;

$$H(s_2|s_1) = -P(0) \cdot P(1|0) \log(P(1|0)) - P(0) \cdot P(0|0) \log(P(0|0)) - P(1)P(0|1) \log(P(0|1)) - P(1)P(1|1) \log(P(1|1)).$$

$$= 0.115 \text{ bit}_i/s.$$

dan

$$H(s_1|s_2) = H(s_1) + H(s_2|s_1) = 0.765.$$

Opmerking 2.0.4 Examen

Zorg dat je teruggaat en die voorbeelden in de cursus kunt narekenen want dat zijn typische examenvragen. Zorg dat je altijd de juiste formules gebruikt en dit uitbundig oefent

Addendum 2.0.1 Lempel-ziv broncodering

Het nadeel van huffman codering is; je moet de kansen kennen. éAnders werkt de codering niet. Lempel-ziv is een manier om die variabele groepjes te maken en teksten te doorlopen zodat het gewoon werkt ig.

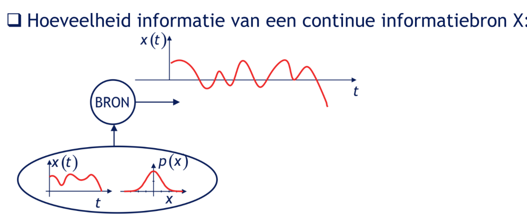
I.3 Oefenzitting één

I.4 Continue informatiebronnen

4.1 Zonder geheugen

Hoeveelheid inforamtie continu gedefinieerd;

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot \log(x)\, \mathrm{dx}.$$



we zullen twee soorten bronnen

1. Bronnen die amplitudebegrensd zijn.
2. Bronnen die niet amplitudebegrensd zijn (algemeen theoretisch), maar we noemen dat bronnen die vermogenbegrensd zijn.

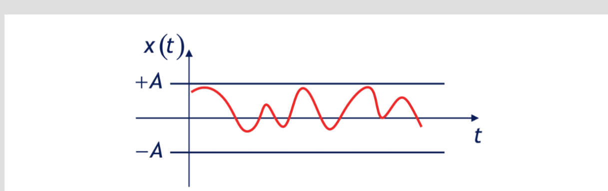
bij discrete bronnen hebben we nooit over vermogen gepraat, nu wel omdat bronnen met kans op grote amplitudes meer vermogen vragen en soms niet praktisch zijn (denk ik).

Stelling: Gemiddeld vermogen van een continue bron

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\, \mathrm{dx}.$$

vermogen is amplitude gekwadrateerd met een constante schaling van de weerstand (kans op die amplitude).

Voorbeeld 4.1.1 (Maximale hoeveelheid amplitudebegrensde bron)



amplitudebegrensde bron met uniforme kansverdeling.

$$p(x) = \frac{1}{2A}, |x| \leq A.$$

$$H(X) = -\int p(x)\log\left(p(x)\right)\,\mathrm{dx}.$$
$$\iff -\int_{-A}^{A} \frac{1}{2A}\log\left(\frac{1}{2A}\right)\,\mathrm{dx}.$$
$$\implies \log(2A).$$

ofzo (niet de meest duidelijke les vandaag)

Stelling: Waarschijnlijkheidsredundantie continue bronnen
Voor amplitudebeperking " als ik een amplitudebeperkte bron heb, die niet de uniforme kansidichtheidsfunctie volgt, maar een andere functie, hoeveel redundantie zit er op mijn bron?"

$$R_W(X) = 1 - \frac{H(X)}{\log(2A)}.$$

We vergelijken met de **amplitude beperkte optimale bron!** De gaussische verdeling ofzo van daarnet denk ik. Voor vermogenbeperking

$$R_W(X) = 1 - \frac{H(X)}{\log\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)}.$$

We vergelijken met de **vermogen beperkte bron.**

Definitie 4.1.1: Informatievermogen P_H

Het informatievermogen P_H van een continue informatiebron X met stochastisch uigangssignaal x, is het vermogen van een Gaussisch signaal dat een even grote hoeveelheid informatie levert als het stochastisch signaal x (met een vermogen gelijk aan P_X).

Stel je hebt een gaussische bron met vermogen $\sigma^2 = P_H$
Hoeveelheid informatie geiljk voor beide

$$H(X) = \log\left(\sqrt{2\pi e P_H}\right).$$

het informatievermogen dat de Gaussische bron nodig heeft;

$$P_H = \frac{1}{2\pi e}\cdot 2^{2H(X)}.$$

Opmerking 4.1.1 Examen

Dit geeft ons een metriek om uit te rekenen hoe efficiënt een bron is, en ze zegt dat zoiets op het examen wordt gevraagd.

Voorbeeld 4.1.2 (Toepassen)
Informatievermogen bepalen van amplitudebegrensde ideale bron

$$P_H = \frac{1}{2\pi e}\cdot 2^{2H(X)}.$$

we weten

$$H(X) = \log(2A)\ \mathrm{bit}_i/\mathrm{bemonstering}.$$

die amplitude begrensde bron stellen we gelijk aan de hoeveelheid informatie van een virtuele gaussische bron.

$$H(X) = \log\left(\sqrt{2\pi e P_H}\right).$$

$$P_H = \frac{(2A)^2}{2\pi e} = 0.234A^2.$$

” als je zo veel $\log(2A)$ informatie wilt doorsturen met een gaussische bron, heb je $0.234A^2$ relatieve watt ofzo nodig. Maar we sturen het door met een amplitudebegrensde uniforme bron;

$$P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\ \mathrm{dx} = \int_{-A}^{A} x^2 \frac{1}{2A}\ \mathrm{dx} = \frac{A^2}{3} = 0.333A^2.$$

Dus ingenieurs ”kunnen dertig procent minder verbruiken als ze hun amplitudes gaussisch verdeeld zoouden kiezen”. Me niet vragen of dat echt ergens op slaat, want is dit het enige dat je daarvoor in rekening brengt? Ik ben niet echt mee. Ben het gaan vragen snap het nog altijd niet.

4.2 Met geheugen

Een analoog signaal is een spectrum, we willen tijdsverloop, afhankelijkheidsredundantie modelleren, we gaan dat doen met een **frequentiespectrum**. Niet met markov-ketens.

Herrinnering 4.2.1 Fourier reeks

Voor periodische signalen

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(2\pi \nu f_0 t\right) + b_n \sin\left(2\pi \nu f_0 t\right)\right), f_0 = \frac{1}{T_0}.$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\cos\left(2\pi\nu f_0 t\right)\ \mathrm{dt}.$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\sin\left(2\pi\nu f_0 t\right)\ \mathrm{dt}.$$

dan in de cursus en slides wordt er een mega ding gemaakt over complexe fourier reeksen, ik kan niet inzien hoe het iets uitmaakt voor het begrijpen van het vak. Check het in analyse, maar negeer het hier.
Uiteindelijke formule

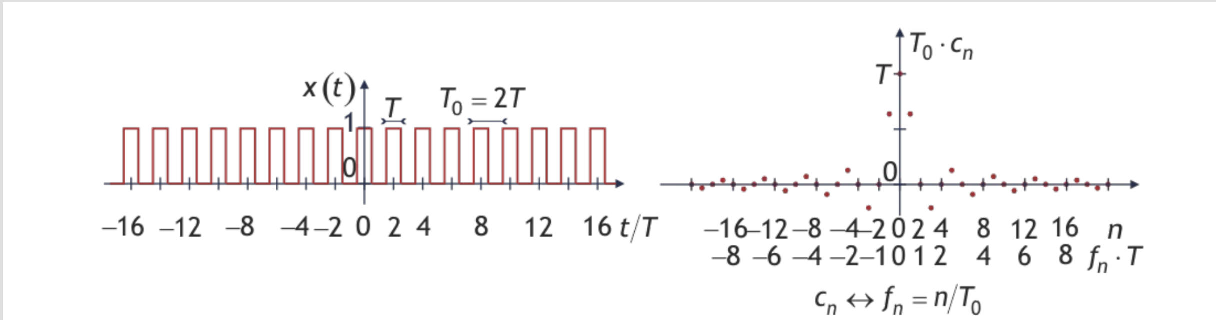
$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{j2\pi f_n t}.$$

waar

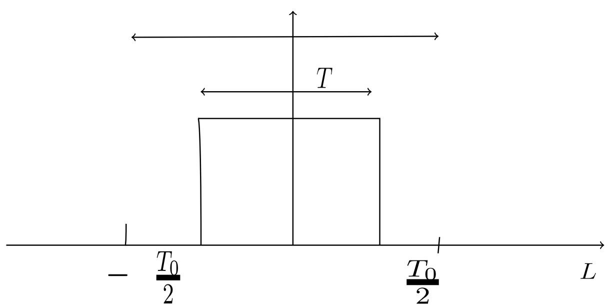
$$f_n = n \cdot f_0 = \frac{n}{T_0}.$$

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-j2\pi f_n t}\ \mathrm{dt}.$$

Voorbeeld 4.2.1 (Oneindige pulstrein)
We zullen dit bekijken op een oneindige pulstrein;



$$C_n = f(n f_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} X(t) e^{-j2\pi\nu f_0 t}\, dt.$$



$$\iff \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt.$$

$$\iff \frac{1}{T_0}\frac{1}{-j2\pi n f_0}\left[e^{-j2\pi n f_0 \frac{T}{2}} - e^{-j2\pi n f_0 \frac{T}{2}}\right].$$

$$\iff \frac{T}{T_0}\frac{\sin\left(\pi f_n T\right)}{n f_n T}.$$

we schrijven de afleiding om hier te raken bij deze uitdrukking voor de coefficienten.

$$c_n = \frac{1}{T_0}\cdot T \frac{\sin\left(n f_n T\right)}{\pi f_n T}.$$

Wat geven die coefficienten? De discrete punten in het spectrum als functie van $n f_0$. c is een functie van discrete frequentie.

Opmerking 4.2.1 Wat als T_0 groter wordt?

Hoe groter de periode hoe kleiner de stapjes. n wordt meegeschaald met T_0. f_n wordt meer en meer continu.

4.3 Les 17 oktober

Het feit dat we de bandbreedte van een analoog signaal kunnen beperken, daardoor kunnen we een analoog signaal perfect zonder verlies digitaal voorstellen.
Reëel periodisch signaal x in functie van de tijd;

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j2n\pi f_0 t}.$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi f_n t}.$$

We kunnen het periodisch signaal dus omzetten in een **discreet spectrum**.

Eigenschap: Van tijd naar spectrum
Als iets periodisch is in tijd dan is het spectrum discreet!

periosisch in tijd is discreet in spectrum. Deze eigenschap is duaal, als het discreet is in tijd is het periodisch in spectrum. Bemonsteren of signaal digitaliseren gaat het discreet maken in tijd.
We kunnen werken met $x_n = c_n \cdot T_0$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi\pi f_n t} f_0.$$

$$x_n = \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi f_n t} \text{ dt}.$$

in de limiet wordt de periode oneindig. We krijgen de fourier transformatie (als ik het geod begrijp)

Definitie 4.3.1: Fourier transform

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df.$$

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{X(f)\right\}.$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \text{ dt}.$$

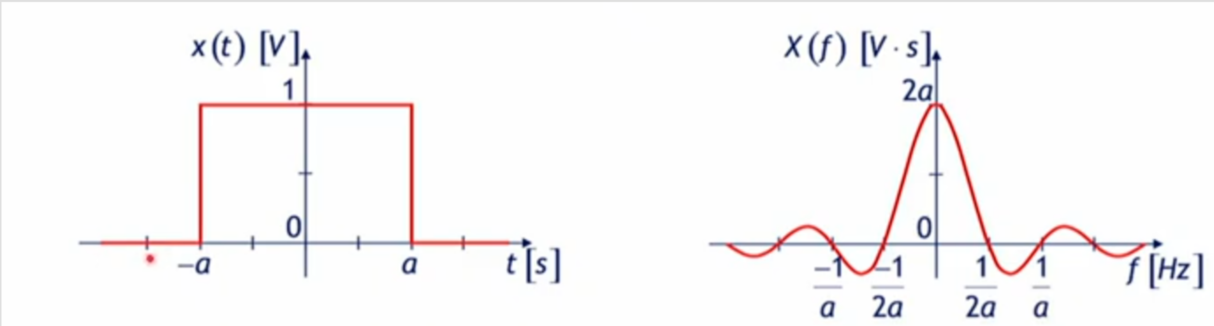
$$X(f) = \mathscr{F}\left\{x(t)\right\}.$$

dus wat is een fourier transformatie; van een continu functie in tijd naar een continu functie in frequentie, in spectrum, te gaan.

Eigenschap: Eigenschap van het spectrum
Reëel in het ene domein complex toegevoegd in het andere domein.

Bestaat onder voorwaarden, maar we gaan onze tijd niet besteden aan uitzonderingen en ze niet bespreken.

Voorbeeld 4.3.1 (rechthoekige puls)



$$x(t) = 1, |t| \leq a.$$

$$X(f) = \frac{2\sin(2\pi f a)}{2\pi f} = \frac{2a\sin(2\pi f a)}{2\pi f a}.$$

Opmerking 4.3.1

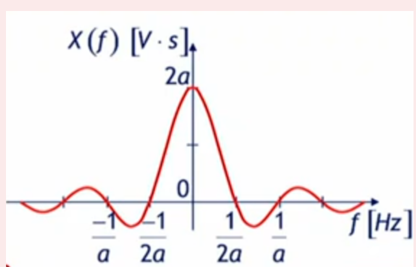
We werken met negatieve tijd omdat dan de integraal beter uitkot, het is een puur wiskundige beslissing, en dat lijkt me zeer logisch dus als je je ooit zorgen maakt over negatieve frequenties en blablabla, stop

Een pulsduur 2a, heeft een eerste nulpunt op $\frac{1}{2a}$. Dat betekent als je de puls langer maakt, dan komt je eerste nulpunt **op een kleinere frequentie**.

Definitie 4.3.2: Absolute bandbreedte B

De absolute bandbreedte B van een signaal $x(t)$ is het gedeelte $(f_2 - f_1)$ van de positieve frequentie as waarbij het frequentiespectrum $X(f)$ nul is buiten het interval

$$f_1 < f < f_2, f_1 \wedge f_2 \in \mathbb{R}_0^+.$$



De moeilijkheden met de definitie zijn

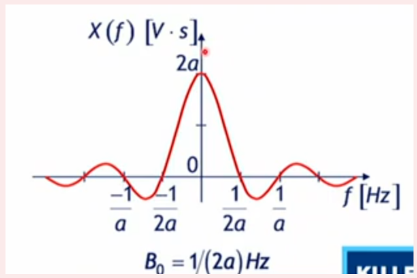
- Als je een signaal hebt dat niet nul wordt bij heel kleine positieve frequenties, dan neem je $f_1 = 0Hz$
- Niet toepasbaar op $\frac{\sin(x)}{x}$ want die wordt nooit nul.

die definitie is niet heel toepasbaar voor praktische signalen.

Definitie 4.3.3: Nul-tot-nul bandbreedte

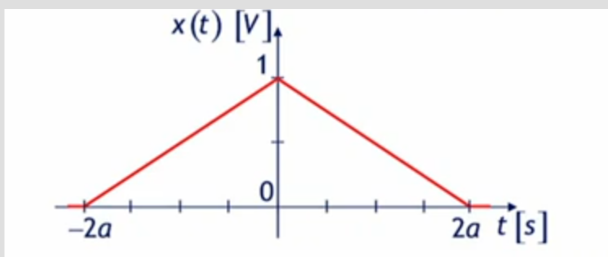
De nul-tot-nul badbreedte B_0 van een signaal $x(t)$ is het gedeelte van $(f_2 - f_1)$ van de positieve frequentie-as

- f_0 frequentie waarbij $|X(f)|$ minimaal
- $$f_1 < f_0 < f_2.$$
  met die f_1, f_2 de nulpunten dichtst bij f_0



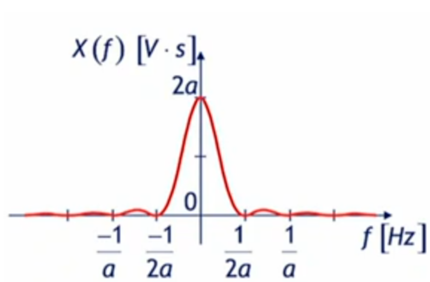
Als de pulsduur groter wordt, dan wordt de bandbreedte kleiner. En die bandbreedte is gegeven door een constante over de pulsduur Δt

Voorbeeld 4.3.2 (Driehoekige puls)



$$x(t) = \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right), |t| \leq 2a.$$

en nul voor alle andere waarden. Driehoekige puls is convolutie van twee rechthoekige pulsen, herrinner je dat.



spectrrum rechthoekige puls vermenigvuldigd met spectrum rechthoekige puls. Wat is een vermenigvuldiging van het spectrum?

$$X(f) = 2a\left[\frac{\sin(2\pi f a)}{2\pi f a}\right]^2.$$

die sinc tot de tweede macht dus. de nul-tot-nul bandbreedte wordt

$$B_0 = \frac{1}{2a} = \frac{2}{\Delta t}.$$

Opmerking 4.3.2 Minder rimpeling

er is minder rimpeling, maar van wat gaat het ten koste? De hoeveelheid informatie die je kan doorsturen wordt gehalveerd, de puls is dubbel zo lang!!

Je kunt betere pulsen bedenken, maar die zijn complexer. **Dus hoe geavanceerder de technologie wordt, en hoe beter de rekenkracht van digitale processoren, hoe betere pulsen je kunt maken met betere spectrale eigenschappen.** Je moet eigenlijk gewoon de schalingseigenschap onthouden; **als een puls groter wordt in tijd, wordt het in frequentiedomein compacter.**

I.5 Digitaliseren continue informatiebronnen

We gaan analoge signaleren digitaliseren. Digitaliseren heeft geen verlies, discreet maken van monsters geeft wel verlies aan signaal. Vandaag;

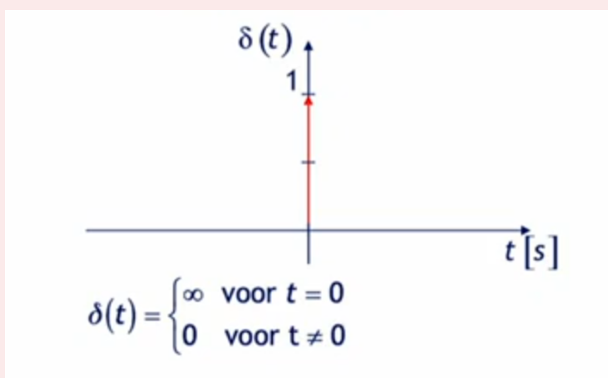
- Hoeveel monsters hebben we nodig om in digitalisatie niets te verliezen?
- Hoeveel kwantisatieniveaus hebben we nodig om het verlies te herleiden zodat het niet hoorbaar is voor het menselijk oor?

5.1 Bemonsteren

$$x_s(t) = x(t) \cdot x_\delta(t).$$

x "sample" van t is het originele signaal maal $x_\delta(t)$. $x_\delta(t)$ is een dirac-delta-impulstrein.

Definitie 5.1.1: Dirac-delta of impulsfunctie



een mes gwn

Eigenschap: Integraal dirac-delta

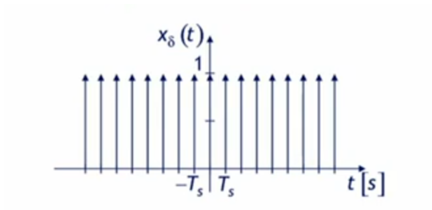
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\ \mathrm{dt} = 1.$$

Eigenschap: zeer eigenschap diract delta
Het bemonsteren is eigenlijk de "zeef" eigenschap.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - t_0)\ \mathrm{dt} = x(t_0).$$

We gaan stap voor stap bemonsteren. we maken een diractrein. Periodes zijn discreet in de tijd.

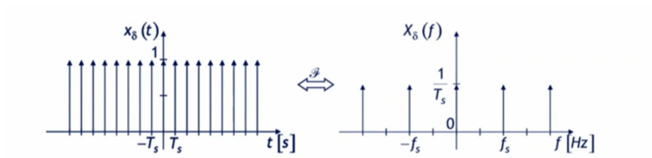
$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k \cdot T_s).$$



fourier transformatie;

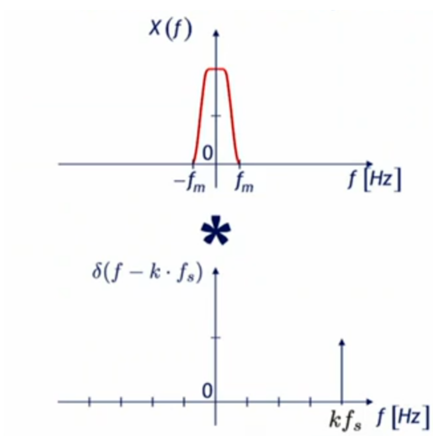
$$X_\delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k \cdot f_s).$$

Als je iets hebt dat periodisch en discreet is in het ene domein, is het dat ook in het andere domein



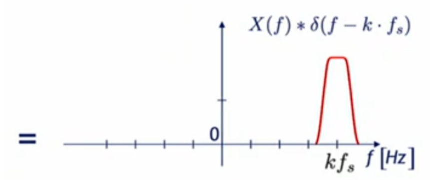
$$f_s = \frac{1}{T_s}.$$

vermenigvuldigen in tijdsdomein is convolutie in frequentiedomein. We kijken nu wat de convolutie van een spectrum met een dirac-delta is.



$$X(f) \cdot \delta(f - k \cdot f_s) = X(f - k \cdot f_s).$$

we krijgen gewoon het spectrum verplaatst!!!!!! Volgens de zeef-eigenschap. Eerder een schuif-eigenschap.



We krijgen door te bemonsteren in tijd, oneindig veel kopiën in frequentie. Convolutie van een spectrum met een dirac delta

$$X_\delta(f) = \mathscr{F}\left\{x(t)x_\delta(t)\right\}.$$
$$\iff \mathscr{F}\left\{x(t)\right\} * \mathscr{F}\left\{x_\delta(t)\right\}.$$
$$\iff X(f) * X_\delta(f).$$
$$\iff X(f) * \left[\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(f - k\cdot f_\delta)\right].$$
$$\iff \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k \cdot f_s).$$

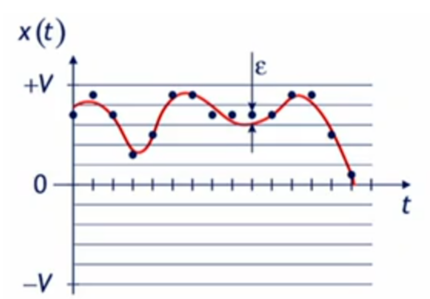
Stelling: Nyquist; hoe snel bemonsteren?
Nu weten we hoe snel te bemonsteren, we willen een frequentiedomein dat niet met spectrum overlappen, dan krijg je distortie. Als ze niet overlappen kun je een laagdoorlaatfilter bouwen.

$$f_s \geq 2f_m.$$

als dit geldt is reconstructie mogelijk.

5.2 Kwantisatie

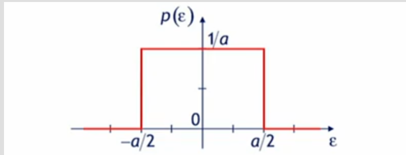
We hebben punten berekent, maar hoe moeten we ze in bits omzetten.



- analoog bereik $2V$
- grootte intervallen a
- aanatl intervallen of aantal niveaus K
- Discreet bereik:
$$2V - a = (K-1)a.$$
- Afwijking analoog-discreet monster, de 'fout'
$$-\frac{a}{2} \leq \epsilon \leq \frac{a}{2}.$$

dit kwantiseren geeft een **kwantisatieruis**.

Voorbeeld 5.2.1 (Kwantisatieruis berekenen)



we zeggen dat de kansdichtheidsfunctie uniform is. Dit is niet per se zo, maar we gaan er hier van uit.

gemiddelde vermogen kwantisatieruis

$$E(\epsilon^2) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \epsilon^2 p(\epsilon) d\epsilon = \frac{a^2}{12}.$$

Stelling: Pieksignaal ruisverhouding
meet natuurlijk de hoeveelheid ruis tov de piek van het signaal, $+V$ op de screenshot hier wat hoger. Niet een zeer realistisch beeld.

- (Piek) Amplitudeverhouding

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = \frac{V}{a\sqrt{12}} = \frac{a \cdot K \cdot \sqrt{12}}{2a} = \sqrt{3}K.$$

- Vermogenverhouding (eigenlijk gewoon hetzelfde, amplitude kwadraat is vermogen $A^2 = V$)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_s = 3K^2.$$

- In dB

$$\left(\frac{S}{N}\right)_v = 10 \cdot \log\left(3k^2\right).$$

$$\iff 10 \cdot \log(3) + 10 * 2\log(K).$$

Stelling: gemiddelde-signaal ruisverhouding

- Gemiddelde signaalvermogen

$$P = \sum_{l=1}^{\frac{K}{2}} (a_i)^2 \cdot P(a_i) = \sum_{l=1}^{\frac{K}{2}} \left(a(i - \frac{1}{2})\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{K}{2}}.$$

$$\implies \frac{a^2}{12}(K^2 - 1).$$

- Vermogenverhouding

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\frac{1}{12}\left(K^2 - 1\right) a^2}{\frac{a^2}{12}} = (K^2 - 1).$$

niet te veel nadenken over de wiskunde

Op het examen, leid af wat gevraagd wordt en kies de juiste functie.

5.3 Les 24 oktober (laatste vervolg van dit stuk)

De gemiddelde signaal tot ruis verhouding was gegeven door

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\frac{1}{12}\left(K^2-1\right)a^2}{\frac{a^2}{12}} = (K^2-1).$$

- We hebben verondersteld dat onze ruis uniform verdeeld is
- we hebben verondersteld dat onze amplitudes in het signaal uniform verdeeld zijn.

we hebben gezien

- We hebben gezien continu in tijd naar continu in frequentie (tijdsdomein → frequentiedomein)

$$x(t) \rightarrow X_n.$$

- we hebben continu in tijd gezien naar $X(f)$

$$x(t) \rightarrow X(f).$$

We hebben x discreet gemaakt maar de transformatie nog niet gezien.

Voorbeeld 5.3.1 (herhaling)
toepassen fourier op een cosinus

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_x t\right) = \frac{A}{2}\left\{e^{j2\pi f_x t} + e^{-j2\pi f_x t}\right\}.$$

$$X(f) = \frac{A}{2}\left(\delta(f-f_x)+\delta(f+f_x)\right).$$

we maken de continue discreet met de dirac delta. Reële even functies → symmetrisch in spectrum.

I.6 Oefenzitting twee

I.7 Digitale signalen

periodisch in tijd wordt discreet in frequentie x_n

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_n e^{j2\pi f_n t} f_0.$$

$$x_n = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi f_n t} \text{ dt}.$$

met

$$f \longrightarrow f_n = n f_0.$$

$$df \longrightarrow f_0; X(f) \longrightarrow x_n.$$

dat is nu hoe de discretisering eruit ziet. staat op formularium;

Type	Tijd	Spectrum
Fourier-transformatie	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi f t} df$	$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$
Fourier-reeks	$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_n e^{+j2\pi f_n t} f_0$	$x_n = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt$
Discrete Fourier-transformatie	$x[k] = \sum_{n=-\frac{K-1}{2}}^{\frac{K-1}{2}} X[n] e^{j2\pi \frac{nk}{K}}$	$X[n] = \sum_{k=-\frac{K-1}{2}}^{\frac{K-1}{2}} x[k] e^{-j2\pi \frac{nk}{K}} \frac{1}{K}$
Discrete Tijd Fourier-Transformatie	$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k}$

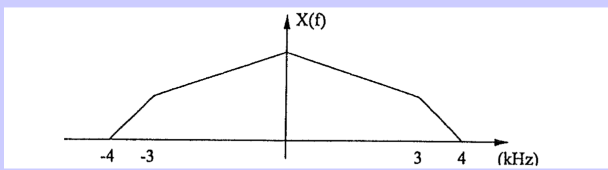
I.8 Oefenzitting drie

Vraag 1: Oefening 4

Een continue informatiebron genereert een analoog signaal $X(f)$. Dit signaal wordt bemonsterd aan drie verschillende snelheden

- $0.5 \cdot f_{Nyquist}$
- $f_{Nyquist}$
- $2 \cdot f_{Nyquist}$

Teken het frequentiespectrum $X(f)$ na bemonstering voor elk geval. Kan het originele signaal geconstrueerd worden?



Deel II

Informatietransmissie

II.1 Discrete transmissiekanalen

II.2 Vierde oefenzitting

Vraag 2: Vierde vraag

- Beschouw de discrete informatiebron 'gooien met de dobbesteen', en het discrete transmissiekanaal met als ingang de bovenkant van de dobbelsteen en als uitgang de onderkant. Wat zijn H(X), H(Y—X), R en de capaciteit van dit kanaal? Hint: De som van de ogen op overstaande zijden van de dobbelsteen is altijd gelijk aan 7.
- Idem voor het kanaal met als ingang de bovenkant van de dobbelsteen en als uitgang de voorkant.