Analyse III
lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

INHOUDSTAFEL

1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

2 Fourierreeksen

3 Sturm-Liouvilleproblemen

4 Eerste oefenzitting

5 Partiële differentiaalvergelijkingen

5.1 Inleiding

$$F\left(\phi(x_1,\ldots,x_n),\frac{\partial\phi}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\phi}{\partial x_n},\ldots,\frac{\partial^k\phi}{\partial_1\partial x_n^{k-1}},\frac{\partial^k\phi}{\partial x_n^k}\right)=0.$$

in onze toepassingen zal de orde vooral twee zijn.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \iff \textbf{Golfvergelijking}\,.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2\frac{\partial u}{\partial t} \iff \textbf{Diffusievergelijking}\,.$$

we noemen die driedimensionaal. Bestaat ook in één of twee dimensies.
Oplossingen van pde's kunnen nog algemene functies bevatten.

Definitie 5.1.1: Classificatie

$$a(x,y)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+b(x,y)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+c(x,y)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+F(x,y,\phi,\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y})=0.$$

We kunnen deze vergelijkingen classificeren; elliptisch hyperbolisch of parabolisch. Drichlet Neumann of gemengde rvw.

$$\textbf{Elliptisch} \iff b^2(x,y)<4a(x,y)\cdot c(x,y),\forall(x,y)\in D.$$

$$\textbf{Hyperbolisch} \iff b^2(x,y)>4a(x,y)c(x,y),\forall(x,y)\in D.$$

$$\textbf{Parabolisch} \iff b^2(x,y)=4a(x,y)c(x,y),\forall(x,y)\in D.$$

randvoorwaarden

$$\textbf{Drichlet randvoorwaarde;} \iff \phi(x,y)=g(x,y),\forall(x,y)\in\partial D.$$

$$\textbf{Neumann randvoowaarde;} \iff \frac{\partial\phi}{\partial n}(x,y)=g(x,y),\forall(x,y)\in\partial D.$$

$$\textbf{Gemengde randvoowaarden;} \iff \frac{\partial\phi}{\partial n}(x,y)+\sigma(x,y)\phi(x,y)=g(x,y),\forall(x,y)\in\partial D.$$

Als $g(x,y)=0,(x,y)\in\partial D$ dan zeggen we dat dit homogene rvw zijn.

Opmerking 5.1.1

$\frac{\partial\phi}{\partial n}$ is de richtingsafgeleide van ϕ in de richting vd normaalvector op de rand!

Voorbeeld 5.1.1 (Inleidend voorbeeld)

We hebben een één-dimensionale golfvergelijking als voorbeeld van wat een pdv is.

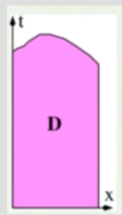
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, 0 \leq x \leq L, t \geq 0.$$

hier is $u(x,t)$ de uitwijking van trillende snaar in functie van positie en tijd. We zien dat **dit een hyperbolische vergelijking is**. rvw;

$u(0,t) = u(L,t) = 0$ **; Drichlet, homogeen** .

$u(x,0) = f(x)$**; Drichlet, niet-homogeen** .

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$ **; Neumann, niet-homogeen** .



5.2 Scheiding der veranderlijken

Voorbeeld 5.2.1 (Eén dimensionale golfvergelijking)
Probleem; bereken de vertikale uitwijking $u(x,t)$ van een snaar met lengte π, die aan de uiteinden wordt vastgehouden. Beginuitwijking $f(x)$ krijgt en losgelaten wordt met beginsnelheid $g(x)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0.$$

$$u(0,t) = 0, t \geq 0 \wedge u(\pi,t) = 0, t \geq 0.$$

aan de twee uiteinden is er **geen** uitwijking voor alle t positief!

$$u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq \pi \wedge \frac{\partial x}{\partial t}(x,0) = g(x), 0 \leq x \leq \pi.$$

info over beginuitwijking en beginsnelheid!

We gebruiken scheiding der veranderlijken

1. Oplossing zal van de vorm zijn;

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Dus we veronderstellen dat de functie die we zoeken kan geschreven worden als een functie van uitwijking vermenigvuldigd met een functie van de tijd. Hiermee kunnen we verder door dit in te vullen.

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2}X(x)T'(t).$$

$$\iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \lambda.$$

We hebben het nu kunnen herschrijven waar we iets hebben enkel van x afhankelijk en enkel van t afhankelijk. We introduceren een constante lambda want kies een willekeurige x of t, het resultaat moet hetzelfde zijn!!

Opmerking 5.2.1

Zodat dit echt duidelijk is, het komt er dus op neer dat die lambda daar mag staan omdat als je twee delen hebt in functie van verschillende variabelen die gelijk zijn, dan moeten die per definitie gelijk zijn aan een constante die we dus hier λ noemen.

2. Herschrijven als gewone dv;

$$X''(x) = \lambda X(x).$$
$$T'(t) = \lambda a^2 T(t).$$

we passen toe homogene rvw

$$u(0,t) = 0, t \geq 0 \implies X(0)T(t) = 0, t \geq 0 \implies X(0) = 0.$$
$$u(\pi,t) = 0, t \geq 0 \implies X(\pi)T(t) = 0, t \geq 0 \implies X(\pi) = 0.$$

Opmerking 5.2.2 Niet homogene rvw

Bemerk als je dit op de niet homogene rvw 4 en 5 probeert dat dit nergens op slaat. **We passen deze scheiding dus enkel toe op de homogene rvw en nooit op niet-homogene rvw.**

3. De volgende stap is nu om een Sturm-liouvilleprobleem op te lossen; Omwille van de rvw zal het x-probleem sturm-liouville worden en niet het t-probleem.

Opmerking 5.2.3 Geen t sturm-liouvilleprobleem

Zelfs als er voorwaarden voor de tijd zouden staan zou dat nog niet het Sturm-liouvilleprobleem opleveren. We krijgen twee voorwaarden op hetzelfde tijdstip wat dus alsnog niet zou lukken. Je moet twee voorwaarden hebben op twee verschillende tijdstippen wat **niet kan**, nooit zal gebeuren.

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda \cdot 1 \cdot X(x) \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Opmerking 5.2.4 Gewichtsfunctie

Die $\cdot 1 \cdot$ factor representeert hier de gewichtsfunctie $w(x)$.

We kunnen dit oplossen, is met een sinus en cosinus, cosinus voldoet niet aan rvw zogezegd dus die gaat wegvallen en dan krijg je;

$$\implies \lambda_n = -n^2, n = 1, 2, \ldots.$$

en hier hebben we dus

$$\phi_n(x) = X_n(x) = \sin\left(nx\right).$$

En dit was in het vorige deel al eerder opgelost dus daarom wordt er niet in detail gegaan, maar je weet het wel nog.

4. We lossen nu het tijdsprobleem op.

$$T_n''(t) = \lambda_n a^2 T_n(t) \implies T_n''(t) + n^2 a^2 T_n(t) = 0.$$

We lossen enkel op voor waarden van λ die eigenwaarden zijn, het heeft geen zin om voor alle lambdas op te lossen omdat je dan die oplossing zou moeten vermenigvuldigen met de nulfunctie (aangezien anders die lambda geen opl is van het x probleem) en dat is nutteloos.

$$\iff p(\nu) = \nu^2 + n^2a^2 = 0 \implies \nu_{1,2} = \pm nai.$$

$$\implies T_n(t) = A_n \sin\left(nat\right) + B_n \cos\left(nat\right).$$

5. We moeten opnieuw proberen te vermenigvuldigen. Van elke λ_n hebben we enerzijds een functie en een oplossing van het overeenkomstig t probleem.

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t).$$

Voldoet aan de golfvergelijking en de homogene rvw, dus ook

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(nx\right)\left(A_n \sin\left(nat\right) + B_n \cos\left(nat\right)\right).$$

6. Nu moeten we A_n en B_n bepalen zodat ze voldoen aan de niet-homogene rvw.

- eerste rvw;

$$u(x,0) = f(x).$$

$$\iff u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(nx\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x) = f(x).$$

$$\iff B_n = \frac{\int_a^b r(x)\phi_n(x)f(x)\mathrm{dx}}{\int_a^b r(x)\phi_n^2(x)\mathrm{dx}}.$$

$$\iff \frac{\int_0^{\pi} 1\cdot\sin\left(nx\right)f(x)\mathrm{dx}}{\int_0^{x} 1\cdot\sin^2\left(nx\right)\mathrm{dx}}.$$

$$\implies \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin\left(nx\right)\mathrm{dx}.$$

- tweede rvw;

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(nx\right)\left(naA_n \cos\left(nat\right) - naB_n \sin\left(nat\right)\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} naA_n \sin\left(nx\right) = g(x).$$

$$\iff naA_n = \frac{2}{\pi}g(x)\sin\left(nx\right)\mathrm{dx}.$$

$$\implies A_n = \frac{2}{\pi na}\int_0^{\pi} g(x)\sin\left(nx\right)\mathrm{dx}.$$

Voorbeeld 5.2.2 (Andere rvw)
Stel we kiezen een voorbeeld waarbij

$$f(x) = \sin\left(mx\right), g(x) = 0.$$

Dus een begin uitwijking onder de vorm van een sinus en geen beginsnelheid.

We zien dat alle A_n gelijk zijn aan nul omdat $g(x) = 0$. Wat B_n betreft;

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin\left(nx\right)\mathrm{dx}.$$

$$\iff \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(mx\right)\sin\left(nx\right)\mathrm{dx}.$$

die zijn orthogonaal tov $w(x) = 1$. Enige die hier niet nul is is $m = n$.

$$\implies u(x,t) = \sin\left(mx\right)\cos\left(mat\right).$$

Opmerking 5.2.5 Consistent met de vorm van de algemene oplossing

Dit is dus de vorm die we eerder vermeldden voor de één-dimensionale golfvergelijking daar is deze oplossing dus mee consistent.

$$\sin\left(nx\right)\sin\left(nat\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(n(x-at)\right) - \cos\left(n(x+at)\right)\right).$$

$$\sin\left(nx\right)\cos\left(nat\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(n(x-at)\right) + \sin\left(n(x+at)\right)\right).$$

Het is de som van een linkslopende en een rechtslopende golf.

Voorbeeld 5.2.3 (Eén dimensionale warmtevergelijking)
Een geïsoleerde staaf lengte L heeft een initiële temperatuursverdeling

$$f(x), 0 \le x \le L.$$

Deze staaf wordt ogenblikkelijk in een omgeving gebracht van $0C$. **Het linkeruiteinde wordt op 0C gehouden terwijl het rechteruiteinde warmte verliest evenredig met de temperatuur.** Gevraagd is temperatuursverloop $u(x,t)$

Differentiaalvergelijking;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial u}{\partial t}, 0 \le x \le L, t \ge 0.$$

initiële temperatuursverdeling;

$$u(x,0) = f(x), 0 \le x \le L.$$

Linkeruiteinde op 0C;

$$u(0,t) = 0, t \ge 0.$$

Rechteruiteinde verliest warmte evenredig (h) met temperatuur;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -hu(L,t), t \ge 0.$$

We kiezen dat minteken voor die h omdat het verlies van temperatuur zou zijn, maar is goed om h positief te hebben.

1. Scheiding der veranderlijken

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

$$X''(x)T(t) = a^2X(x)T'(t).$$

$$\iff \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{a^2T'(t)}{T(t)} = \lambda.$$

$$X''(x) = \lambda X(x), T'(t) = \frac{\lambda}{a^2}T(t).$$

2. Toepassen op homogene rvw

$$X(0)T(t) = 0, t \geq 0 \implies X(0) = 0.$$

dit is een drichlet randvoorwaarde

$$X'(L)T(t) = -hX(L)T(t), t \geq 0 \implies X'(L) + hX(L) = 0.$$

dit is een gemengde rvw. Andere rvw zijn niet-homogeen dus geen scheiding der veranderlijken mogelijk om daarop toe te passen.

3. Het x probleem is een sturm-liouvilleprobleem, we lossen het op

$$X''(x) = \lambda X(x).$$

$$X(0) = 0.$$

$$X'(L) + hX(L) = 0.$$

is al aan bod gekomen vorig hoofdstuk

$$\iff \lambda_n = -\frac{\mu_0^2}{L^2}, \tan\left(\mu_n\right) = -\frac{\mu_n}{hL}.$$

$$\implies \phi_n(x) = X_n(x) = \sin\left(\frac{\mu_0 x}{L}\right), n = 1, 2, \ldots.$$

4. Overeenkomstig probleem in de tijd

$$T_n'(t) = \frac{\lambda_n}{a^2} T_n(t) \implies T_n'(t) + \frac{\mu_n^2}{L^2 a^2} T_n(t) = 0.$$

We stellen karakteristieke veelterm op

$$p(\nu) = \nu + \frac{\mu_n^2}{L^2 a^2}.$$

We vinden dalende exponentiële functie

$$\implies T_n(t) = A_n \exp\left(-\frac{\mu_0^2 t}{L^2 a^2}\right).$$

5. Oplossen van het randvwprobleem

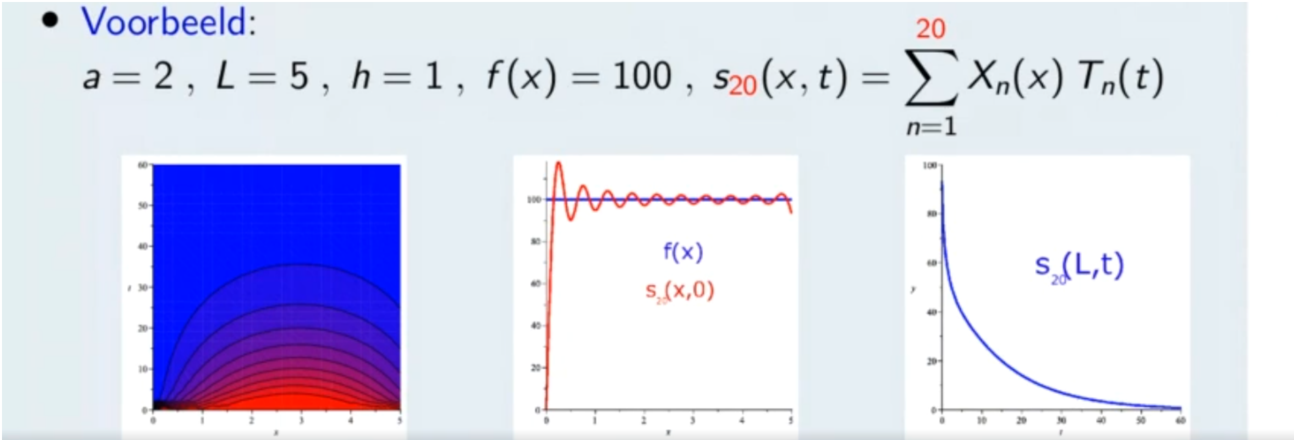
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-\frac{\mu_n^2 t}{L^2 a^2}\right) \sin\left(\frac{\mu_n x}{L}\right).$$

6. Niet-homogene randvoorwaarden gebruiken voor het bepalen van de coefficienten

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\mu_0 x}{L}\right) = f(x).$$

$$\implies A_n = \frac{\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\mu_0 x}{L}\right) \mathrm{dx}}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{\mu_0 x}{L}\right) \mathrm{dx}}.$$

We kunnen dit nu concreet maken door een paar getallen in te vullen;



de tweede figuur is een controlefiguur, die twee moeten met elkaar overeenkomen wat niet perfect is, maar je ziet dat het in de buurt komt en je ziet links een gibbs-verschijnsel.

Addendum 5.2.1 Geisoleerde want

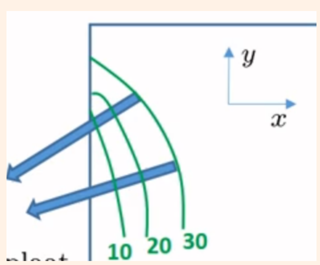
Bij een plaat in aanwezigheid van thermische geleiding en in evenwichtstoestand wordt **warmtestroom bepaald door min de gradiënt van de temperatuur.** De warmtestroom loopt dus altijd van hoge naar lage temperatuur.

$$q \sim -\nabla u(x,u).$$

We kunnen drie situaties beschrijven;

1. De rand koelen, warmte onttrekken van de wand

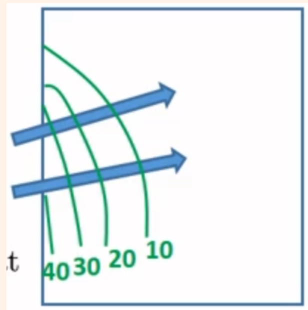
$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0.$$



2. De rand opwarmen, warmte toevoegen aan de plaat

$$\frac{\partial u}{\partial x} < 0.$$

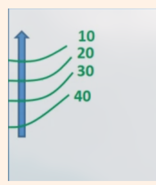
Addendum 5.2.1 Geisoleerde want



3. Het tussengeval is zeer belangrijk, geen interactie;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

We noemen de rand **geïsoleerd**



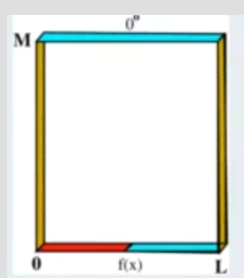
De warmtestroom gaat in de limiet evenwijdig lopen met de wand. We verplaatsen ons isotherm en temperatuur blijft lokaal constant. **Wanneer een bepaalde wand geïsoleerd is dan komen de isothermen loodrecht toe op die wand.**

5.3 Laplace vergelijking

Eigenlijk is dit nog een beejte hetzelfde onderwerp, maar we zullen nu de twee dimensies laplace vergelijking gebruiken. Is zeer belangrijk.

Voorbeeld 5.3.1

We willen de temperatuursverdeling $u(x, y)$ kennen in een dunne plaat van breedte L en hoogte M. Deze plaats is geïsoleerd aan zijwanden $x = 0$ en $x = L$.
Bovenaan wordt temperatuur 0C gehouden, onderaan is de temperatuur $f(x)$



We schrijven de laplace diffvergelijking op in twee dimensies;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq M.$$

We veronderstellen hier dat we het lang genoeg laten lopen en dat er dus geen invloed meer is van de tijd. Anders was het in drie dimensies. geisoleerd aan zijwanden;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, 0 \leq y \leq M.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = 0, 0 \leq y \leq M.$$

boven en onderkant resp.;

$$u(x, M) = 0, 0 \leq x \leq L.$$

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L.$$