

# Analyse III les aantekeningen

Fordeyn Tibo

# INHOUDSTAFEL

<b>1</b>	<b>Belangrijke differentiaalvergelijkingen</b>	<b>2</b>
1.1	Differentiaalvergelijking constante coëfficiënten . . . . .	2
1.2	Euler . . . . .	3
1.3	De gammafunctie . . . . .	3
1.4	Differentiaalvergelijking van Bessel . . . . .	5
1.5	Gewijzigde differentiaalvergelijking van Bessel . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Fourierreeksen</b>	<b>11</b>
2.1	Inleidend . . . . .	11
2.2	Benaderingsprobleem uitwerken . . . . .	13
2.3	Intermezzo; over orthogonaliteit . . . . .	14
2.4	Belang orthogonaliteit . . . . .	16
2.5	Trigonometrische orthogonaliteit . . . . .	17

# 1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

We zullen PDV's later omzetten naar gewone differentiaalvergelijkingen, daarom moeten we drie vormen herhalen.

- differentiaalvergelijkingen constante coëfficiënten
- Differentiaalvergelijking van Euler
- Differentiaalvergelijking van Bessel

En de gamma functie komt ook aan bod voor herhaling.

## 1.1 Differentiaalvergelijking constante coëfficiënten

**Stelling:** oplossen met karakteristieke veelterm

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

We vinden de karakteristieke vergelijking

$$\rho(v) = a_0 v^2 + a_1 v + a_2.$$

met mogelijke oplossingen

$$\begin{cases} v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R} \implies y(x) = c_1 e^{v_1 x} + c_2 e^{v_2 x} \\ v_1 = v_2 \implies y(x) = c_1 e^{v_1 x} + c_2 x e^{v_1 x} \\ v_{1,2} = \alpha \pm \beta i \implies y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}.$$

**Opmerking 1.1.1**  $v$  in plaats van  $\lambda$

Lambda krijgt later een andere betekenis, daarom nu.

### Voorbeeld 1.1.1

$$y'' = \lambda y.$$

waarbij lambda geïnterpreteerd wordt als een parameter

$$p(v) = v^2 - \lambda.$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \implies v_1 = v_2 \implies y(x) = c_1 + c_2 x \\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \implies v_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda} \implies y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x} \\ \lambda \in \mathbb{R}^- \implies v_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda} i \implies y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x) \end{cases}.$$

**Herrinnering 1.1.1** Hyperbolische functies

Merk op dat de hyperbolische functies lineaire combinaties zijn van die exponentiële functies dus als lambda positief is vinden we ook

$$y(x) = d_1 \cosh(\sqrt{\lambda}x) + d_2 \sinh(\sqrt{\lambda}x).$$

## 1.2 Euler

**Stelling:** Differentiaalvergelijking van Euler

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 x y = 0.$$

We lossen dit op voor  $x > 0$  met transformatie

$$y(x) = z(t), t = \ln(x).$$

of ook

$$x = e^t.$$

we krijgen bijgevolg

$$z''(t) + (a_1 - 1)z'(t) + a_2 z(t) = 0.$$

de karakteristieke veelterm wordt

$$p(v) = v^2 + (a_1 - 1)v + a_2.$$

- $v_1 \neq v_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1 e^{v_1 t} + c_2 e^{v_2 t}.$$

$$\implies y(x) = c_1 x^{v_1} + c_2 x^{v_2}.$$

- $v_1 = v_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1 e^{v t} + c_2 t e^{v t}.$$

$$\implies y(x) = c_1 x^{v_1} + c_2 \ln(x) x^{v_1}.$$

- $v_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$$z(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

$$\implies y(x) = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln(x)) + c_2 x^\alpha \sin(\beta \ln(x)).$$

**Opmerking 1.2.1** Voor  $x < 0$

Voer een transformatie uit  $x = -u$

## 1.3 De gammafunctie

**Definitie 1.3.1:** gamma functie

Gammafunctie voor  $x > 0$ :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du.$$

We zien dat het domein  $\mathbb{R}^+$  is. Natuurlijk gebruiken we de gamma functie vooral omwille van de fundamentele eigenschap

**Eigenschap:** Recursiebetrekking  
Recursie eigenschap gamma functie

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

### Bewijs 1.3.1: Bewijs recursie eigenschap

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs;

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^x du.$$

partiele integratie

$$-u^x e^{-u} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

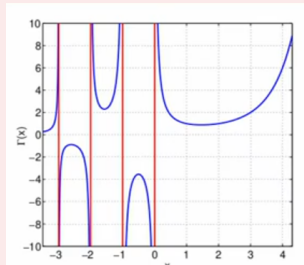
#### Opmerking 1.3.1

$$\lim_{u \rightarrow 0} u^x e^{-u} = \lim_{u \rightarrow \infty} u^x e^{-u} = 0.$$

hieruit vinden we dat die term nul wordt

$$\Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

### Definitie 1.3.2: Definitie van de gammafunctie op $\mathbb{R}$



$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du, & x > 0 \\ \frac{\Gamma(x+1)}{x}, & x < 0 \wedge |x| \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

We maken gebruik van die recursiebetrekking om uit te breiden voor negatieve getallen. Het is belangrijk voor later dat we ook negatieve inputs kunnen geven. De manier waarop je dus rekent is dat je in breukvorm telkens een getal binnen het domein krijgt door een negatief getal kleiner dan één te nemen in absolute waarde, en dan vervolgens wanneer je hier voorbij gaat gebruik je de daarvoor berekende recursie.

Gaat niet  $\forall x$ , voor  $x \in \mathbb{N}$  lukt dat niet want je kan  $\Gamma(0)$  niet berekenen. Je ziet dus hoe die "lijn van recursie" niet opgaat. We zien dat dus als de verticale asymptoten op de grafiek.

**Eigenschap:** Gammafunctie en faculteiten

Gammafunctie is een uitbreiding van de faculteitenfunctie

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

kan bewezen worden via inductie, je kunt makkelijk eerst nul beschouwen en zien dat dat gelijk is aan één.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1 = 0!.$$

 indien de bewering geldig is voor  $n$ , is ze ook geldig voor  $n+1$ .

**Herrinnering 1.3.1** onthoud de volgende eigenschap

Recursiebetrekking

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

## 1.4 Differentiaalvergelijking van Bessel

**Definitie 1.4.1: differentiaalvergelijking van Bessel**

 Orde  $p$  (positieve parameter, niet echt de orde)

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - p^2) y(x) = 0.$$

 met  $p \geq 0$ 
**Eerste oplossing**

 van deze differentiaalvergelijking is via reeksontwikkeling voor  $p$ .

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}.$$

**Idee of vraag 1.4.1**

 waarbij  $C_k$  voldoet aan de recursiebetrekking die we vinden door in te vullen in differentiaalvergelijking.

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - p^2) y(x) = 0.$$

$$x^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p} \right)'' + x \left( \sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p} \right)' + (x^2 - p^2) \left( \sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p} \right) = 0.$$

 door  $C_k$  te schrijven laat ik het somteken even weg

$$\left( C_k x^{k+p} \right)' = (k+p) C_k x^{k+p-1}.$$

$$\left(C_k x^{k+p}\right)'' = (k+p)(k+p-1)C_k x^{k+p-2}.$$

$$C_k = \frac{-C_{k-2}}{k(k+2p)}, k \text{ even}, C_k = 0, k \text{ oneven}.$$

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{k! \Gamma(p+k+1) 2^{2k+p}}.$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

waaruit dus blijkt

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

**Eigenschap:** Afgeleide relatie

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x).$$

stel

$$f(x) = x^n J_n(x).$$

$$f'(x) = n x^{n-1} J_n(x) + x^n J'_n(x).$$

volgens de eigenschap geldt ook

$$f'(x) = x^n J_{n-1}(x).$$

$$\implies n x^{n-1} J_n(x) + x^n J'_n(x) = x^n J_{n-1}(x).$$

Hieruit volgt

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x).$$

**Eigenschap:** Afgeleide relatie

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$g(x) = x^{-n} J_n(x).$$

$$g'(x) = -n x^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J'_n(x).$$

$$g'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$\implies J'_n(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x).$$

#### Bewijs 1.4.1: Bewijs van afgeleide relatie

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)].$$

Tel de twee vergelijking uit voorgaande eigenschappen op;

$$J'_n(x) + J'_n(x) = \left(J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)\right) + \left(-J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)\right).$$

dit simplificeren dan volgt direkt het gestelde.

**Voorbeeld 1.4.1** (Bessel differentiaalvergelijking vb)

**Idee of vraag 1.4.2**

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

- Afgeleide relatie

$$J'_n(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)].$$

- Relatie  $J_{-n}$  en  $J_n$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

$$\Rightarrow J'_0(x) = \frac{1}{2} [J_{-1}(x) - J_1(x)].$$

$$\Rightarrow J_{-1}(x) = (-1)^1 J_1(x) = -J_1(x).$$

Hieruit volgt direct het gestelde.

**Tweede oplossing**

$-p$  is de tweede oplossing, dus we zoeken een oplossing met

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{k-p}.$$

$$B_k = \frac{-B_{k-2}}{k(k-2p)}.$$

voor  $k$  even en nul voor  $k$  oneven.

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-p}}{k! \Gamma(-p+k+1) 2^{2k-p}}, p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0.$$

**Opmerking 1.4.1** Lineair onafhankelijke oplossingen

- $J_p(x)$  is Besselfunctie van de eerste soort orde  $p$
- $J_p(x), J_{-p}(x)$  is een fundamenteel stel voor  $p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0$
- indien het wel een natuurlijk getal of nul is, kan aangetoond worden :  $J_{-n}(x) = \lim_{p \rightarrow n} J_{-p}(x) = (-1)^n J_n(x)$

**Bijgevolg moeten we een moeilijkere vorm gebruiken als we de reeksontwikkeling direct willen berekenen.**

**Besselfunctie van de tweede soort**



**Definitie 1.4.2: Besselfuncties van de tweede soort**

Gedefinieerd als volgt;

$$Y_p(x) = \begin{cases} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, & p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0 \\ \lim_{p \rightarrow 0} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, & p = 0 \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, & p = n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Waar we dus die cotangens moeten beschouwen als coefficient voor  $J_p$  en die  $\frac{-1}{\sin(\dots)}$  als coefficient van  $J_{-p}$

**Idee of vraag 1.4.3**

Dus drie keer dezelfde functie met een limiet naar niet gedefinieerde plaatsen, maar ik snap totaal niet waar de functie vandaan komt en hoe we dit bewijzen. Check de cursus vanaf je die eindelijk krijgt en vraag anders aan prof

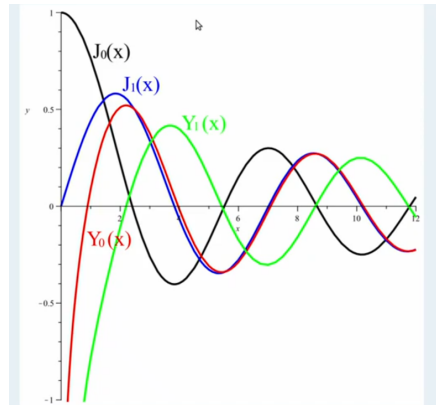
**Eigenschap:**

Een fundamenteel stel voor  $p \geq 0$  :

$$\{J_p(x), Y_p(x)\}.$$

**Eigenschap:**

De Besselfunctie van de tweede soort  $Y_p(x)$  zijn onbegrensd in een omgeving van  $x = 0$



## 1.5 Gewijzigde differentiaalvergelijking van Bessel

**Definitie 1.5.1: Gewijzigde Besselvergelijking**

Gewijzigde Besselvergelijking van orde  $p$

$$x^2 y'' + x y' - (x^2 + p^2) y = 0.$$

met  $p \geq 0$  een parameter

### Eerste soort

Reeksontwikkeling rond een regulier singulier punt;

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p}.$$

$$C_k = \frac{C_{k-2}}{k(k+2p)}.$$

We vinden

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+p}}{k! \Gamma(p+k+1) 2^{2k+p}}.$$

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

$I_p(x)$  is de gewijzigde Besselfunctie van de eerste soort en orde  $p$ .

### Tweede soort

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin(p\pi)}.$$

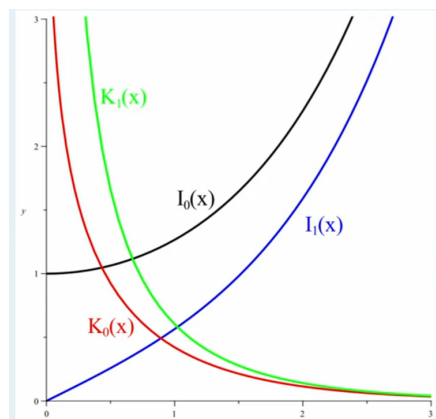
#### Eigenschap:

Fundamenteel stel voor  $\forall p \geq 0$

$$\{I_p(x), K_p(x)\}.$$

#### Eigenschap:

Voor gewijzigde Besselfuncties van de tweede soort geldt ze zijn onbegrensd in een omgeving  $x = 0$

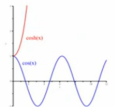
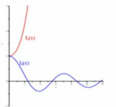


#### Opmerking 1.5.1 De grafieken

Zorg vooral dat je de grafieken direct in je hoofd hebt, dat zijn de belangrijkste om te onthouden

**Stelling:** verschillen hyperbolische hyperb vs Besselfuncties

Dit is zowat het belangrijkste van dit hele deel

Trigo- en hyper- functies	Besselfuncties
Differentiaalvergelijking	
$y''(x) + y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$	$x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0$ $y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$
$y''(x) - y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cosh(x) + c_2 \sinh(x)$	$x y''(x) + y'(x) - x y(x) = 0$ $y(x) = c_1 I_0(x) + c_2 K_0(x)$
Reeksontwikkelingen	
$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$ $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$
Grafieken, nulpunten, begrensdheid, orthogonaliteit	
	

## 2 Fourierreeksen

We willen een functie  $f$  benaderen op een interval  $[a, b]$  door middel van lineaire combinatie goniometrische functies.

### 2.1 Inleidend

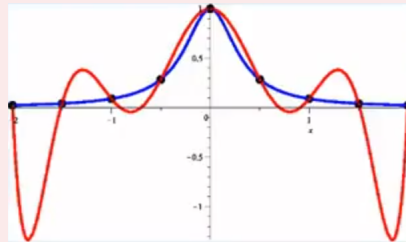
#### Definitie 2.1.1: Het interpolatiecriterium

Kies  $N$  punten  $x_j \in [a, b]$  en eis dat  $g(x_j) = f(x_j), j = 1, \dots, N$ . Met andere woorden er wordt in essentie enkel geëist dat de doelfunctie in enkele punten exact samenvalt. Dan wordt een veelterm bepaald.  
lineair stelsel;

$$\sum_{i=1}^n c_i g_i(x_j) = f(x_j), j = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_N(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \dots & g_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_N) & g_2(x_N) & \dots & g_N(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

kwaliteit hangt af van keuzes interpolatiepunten, veelterminterpolatie geeft grote fouten.



Dan is er het minimaxcriterium; Het minimaxcriterium is dus vooral lastig omdat het moeilijk uit te werken is.

$$\max \{ |f(x) - g(x)|, x \in [a, b] \}.$$

minimaliseren van een maximum wordt een zadelpunt probleem genoemd. Zie fig2.1. Je probeert eigenlijk het minimum van een maximum te nemen.

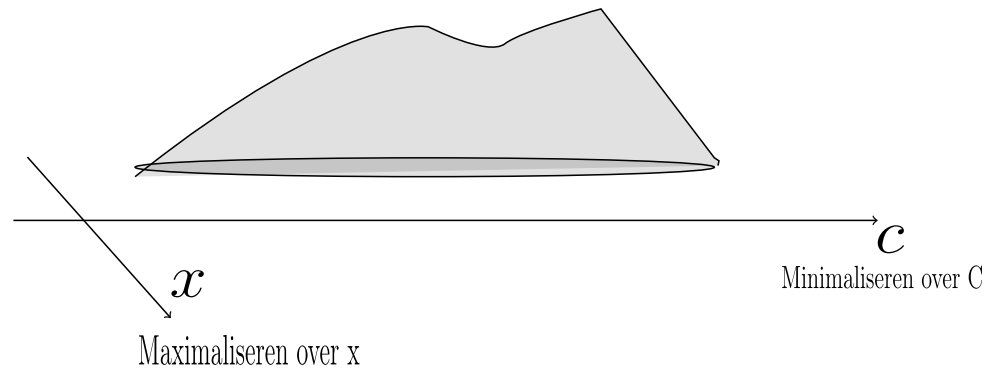


Figure 2.1: zadelpuntprobleem

Dan komen we bij dit criterium om een compromis te sluiten.

**Definitie 2.1.2: Kleinste kwadratencriterium**

Bepaal  $c_i, i = 1, 2, \dots, N$  zodat

$$\int_a^b w(x)(f(x) - g(x))^2 dx.$$

minimaal is met  $w(x) > 0$

Eerste observatie is dat we de norm vinden door de wortel te nemen van die integraal.

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b w(x)f(x)^2 dx}.$$

voldoet aan voorwaarden voor de norm

We kunnen het criterium dus interpreteren als

$$\|f - g\|^2.$$

We zoeken een  $g$  die het dichtst aansluit bij  $f$ .

**Opmerking 2.1.1** Belang van  $w(x)$

deze laat ons toe om bepaalde functies in het interval meer of minder prioriteit te geven



## 2.2 Benaderingsprobleem uitwerken

$$I = \int_a^b w(x) \left\{ f(x) - \sum_{i=1}^N c_i g_i(x) \right\}^2 dx = \sigma(c_1, c_2, \dots, c_N).$$

de fout zal een getal zijn dat afhangt van de coëfficiënten. We moeten die dan zo kiezen dat we een minimum krijgen.

De nodig voorwaarde voor een minimum

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c_j} = 0, j = 1, 2, \dots, N.$$

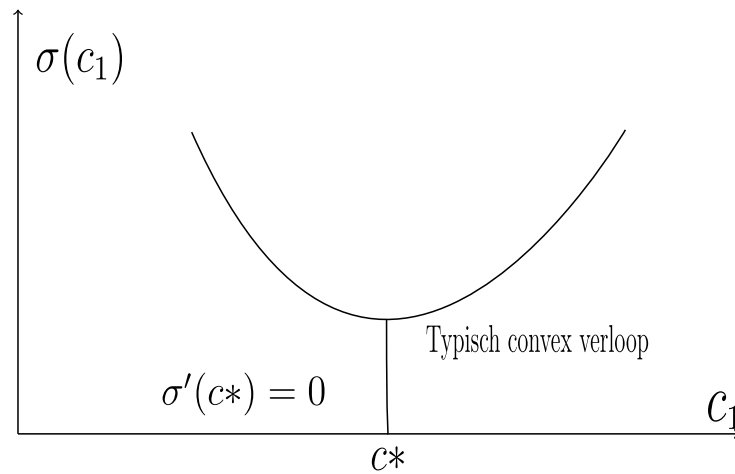


Figure 2.2: één veranderlijke

dit is hoe het eruit zou zien **voor één coëfficiënt**  $c_1$  fig 2.2.

Voor meerdere veranderlijken, fig 2.3;

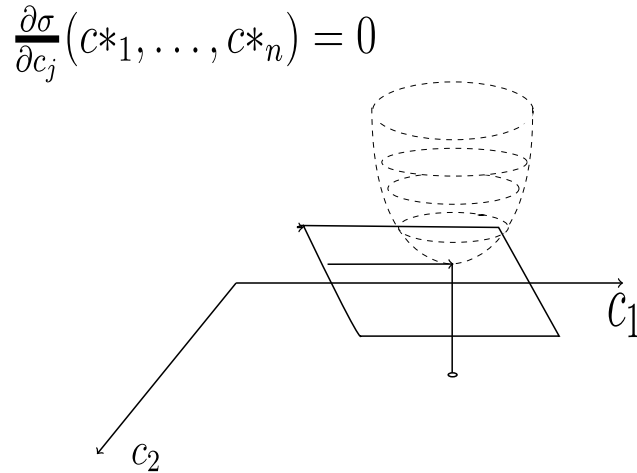


Figure 2.3: meerdereveranderlijken

We werken dit uit en krijgen;

$$(-2) \int_a^b w(x) \left( f(x) - \sum_{i=1}^N c_i g_i(x) \right) g_j(x) dx = 0.$$

of

$$\sum_{i=1}^N c_i (g_i, g_j)_w = (f, g_j)_w, j = 1, 2, \dots, N.$$

Dit kunnen we in stelselvorm schrijven om het duidelijker te maken

$$\begin{pmatrix} (g_1, g_1)_w & (g_1, g_2)_w & \dots & (g_1, g_N)_w \\ (g_2, g_1)_w & \dots & \dots & (g_2, g_N)_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_N, g_1)_w & \dots & \dots & (g_N, g_N)_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, g_1)_w \\ (f, g_2)_w \\ \vdots \\ (f, g_N)_w \end{pmatrix}.$$

## 2.3 Intermezzo; over orthogonaliteit

### Definitie 2.3.1: Orthogonaliteit van functies

Twee functies  $f, g \in \mathbb{R}$  zijn orthogonaal op  $[a, b]$  als

$$\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

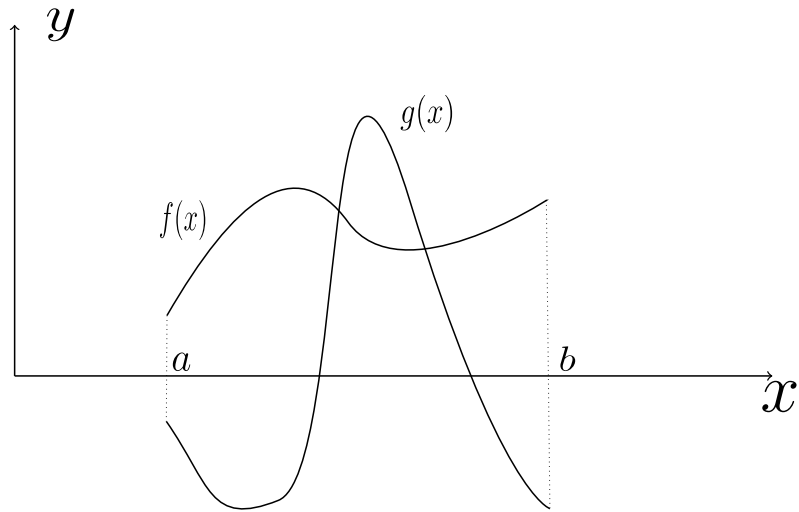


Figure 2.4: Orthogonale functies

Kies  $n$  equidistante punten  $\in [a, b]$

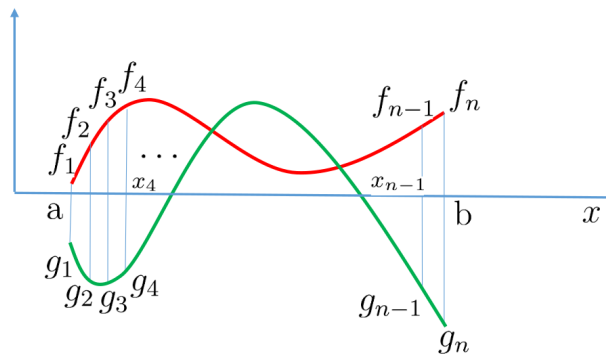
$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b.$$

tussenafstand

$$h = \frac{b-a}{n-1}.$$

zeg

$$f_i = f(x_i), g_i = g(x_i), i = 1, \dots, n.$$



benadering van de integraal

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \approx h(f_1g_1 + f_2g_2 + \dots + f_{n-1}g_{n-1}).$$

kan dus benaderd worden door

$$f_1g_1 + \dots + f_{n-1}g_{n-1} = 0.$$

$$\iff F^T G = 0.$$



**Definitie 2.3.2: Orthogonaal tov gewichtsfunctie**

Twee reële functies  $f, g$  zijn orthogonaal op  $[a, b]$  tov gewichtsfunctie  $w$ ,  $w(x) > 0$  voor  $x \in (a, b)$

$$\int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = 0.$$

**2.4 Belang orthogonaliteit**

We gebruiken orthogonaliteit voor het makkelijker uitwerken van dit inwendig product.

$$\int_a^b g_i(x) g_j(x) dx = 0, i \neq j.$$

Als dat gebeurt zullen alle elementen die niet op diagonaal staan wegvallen!

**Herrinnering 2.4.1**

$$\begin{pmatrix} (g_1, g_1)_w & (g_1, g_2)_w & \dots & (g_1, g_N)_w \\ (g_2, g_1)_w & \dots & \dots & (g_2, g_N)_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_N, g_1)_w & \dots & \dots & (g_N, g_N)_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, g_1)_w \\ (f, g_2)_w \\ \vdots \\ (f, g_N)_w \end{pmatrix}.$$

We komen dan direct uit

$$c_i = \frac{(f, g_i)_w}{(g_i, g_i)_w} = \frac{\int_a^b w(x) f(x) g_i(x) dx}{\int_a^b w(x) g_i(x)^2 dx}, i = 1, 2, \dots, N.$$

**Voorbeeld 2.4.1** (benaderen)

We gaan een functie  $f$  benaderen op een interval  $[a, b]$  door een lineaire combinatie van basisfuncties

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^N c_i g_i(x).$$

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

We gaan een fout karakteriseren met een kleinste kwadratenfunctie met een gewicht  $w(x)$

$$\int_a^b w(x) (f(x) - g(x))^2 dx.$$

dit willen we minimaliseren

er zijn voorwaarden mogelijk voor een perfecte match. Stel dat de basisfuncties **orthogonaal zijn tov elkaar op  $[a, b]$  tov  $w(x)$** . In dat geval is de uitdrukking voor optimale coëfficiënten eenvoudig (de te minimaliseren formule.)

$$c_i = \frac{\int_a^b w(x) f(x) g_i(x) dx}{\int_a^b w(x) (g_i(x))^2 dx}.$$

## 2.5 Trigonometrische orthogonaliteit

stel  $w(x) = 1$  en  $[a, b] = [-\pi, \pi]$  we krijgen trigonometrische orthogonaliteit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \pi, & k = l \neq 0 \\ 2\pi, & k = l = 0 \end{cases}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(lx) dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(lx) dx = \begin{cases} 0, & k \neq l, k = l = 0 \\ \pi, & k = l \neq 0 \end{cases}.$$

### Definitie 2.5.1: Trigonometrische veelterm

Gedefinieerd als

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

**Stelling:** Kleinste kwadraten trigonometrische veelterm

- stel we gaan  $f$  benaderen op  $[-\pi, \pi]$  en we kiezen  $w(x) = 1$ ; benaderen door

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

met

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot (f(x) - g(x))^2 dx = 0.$$

minimaal!

### Idee of vraag 2.5.1 minimaliseren van een integraal

Wat betekent het dat deze integraal minimaal moet zijn?

- Basisfuncties  $\{1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)\}$  voldoen aan

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot g_i(x) g_j(x) dx = 0, i \neq j.$$

aka ze zijn orthogonaal!

•

$$a_0 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

•

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

•

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

**Eigenschap:** Orthogonaliteitseigenschap van  $J_0$

De besselfuncties van de eerste soort voldoen aan de orthogonaliteitseigenschap

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) dx = 0.$$

Als

- $\alpha \wedge \beta$  verschillende positieve nulpunten zijn van  $J_0(x)$  en  $J'_0$

**Corollarium of verklaring:**

Dit volgt uit;

$$\int_0^1 x J_0(\alpha x) J_0(\beta x) dx = \frac{\beta J_0(\alpha) J'_0(\beta) - \alpha J_0(\beta) J'_0(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

als

$$\alpha \neq \beta.$$

En dat is praktisch waar het bewijs uit handboek naartoe werkt.

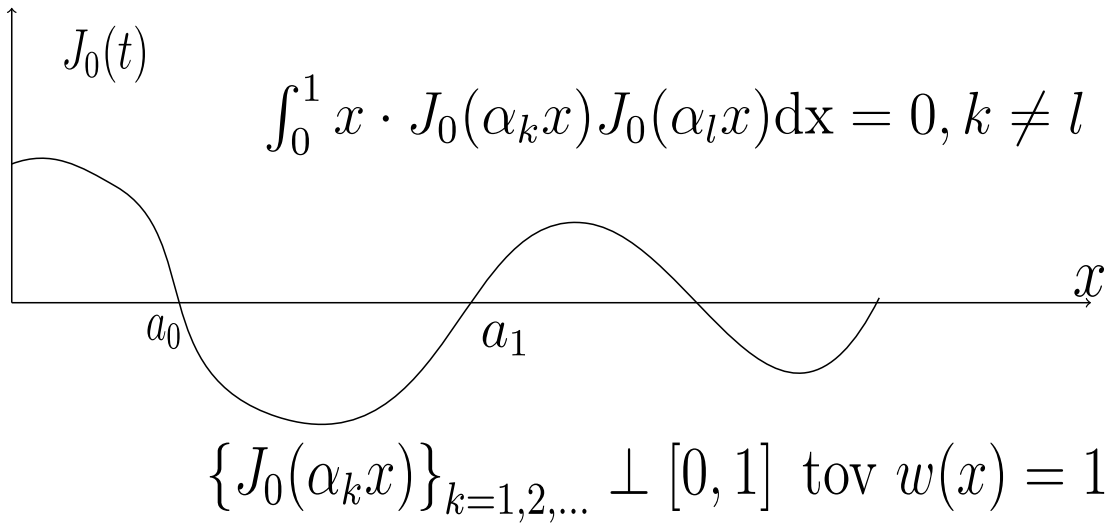


Figure 2.5: Bessel

Wat is hiervan een belangrijke implicatie? Stel we hebben  $f(x)$ , voorwaarden

- $[0, 1]$ , interval kiezen
- $J_0(\alpha_1 x), J_0(\alpha_2 x) \dots$ , gescaalde besselfuncties als basisfuncties
- Kleinste kwadraten criterium met  $w(x) = x$

$$\Rightarrow \int_0^1 x (f(x) - g(x))^2 dx, \text{ minimaal.}$$

**Opmerking 2.5.1** Wat betekent dit?

We gaan  $f(x)$  benaderen door

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^n a_k J_0(\alpha_k x).$$

Algemeen moet je een stelsel oplossen om de  $a_k$  te vinden, maar omwille van de orthogonaliteit **vinden we een goede match!**

$$a_k = \int_0^1 x f(x) J_0(\alpha_k x) dx \cdot \frac{1}{\int_0^1 x (J_0(\alpha_k x))^2 dx}.$$

Dit is een eenvoudige uitdrukking voor coëfficiënten.

**Voorbeeld 2.5.1** (Met afgeleiden)

$$J_0(\beta_0 x), J_0(\beta_1 x), \dots$$

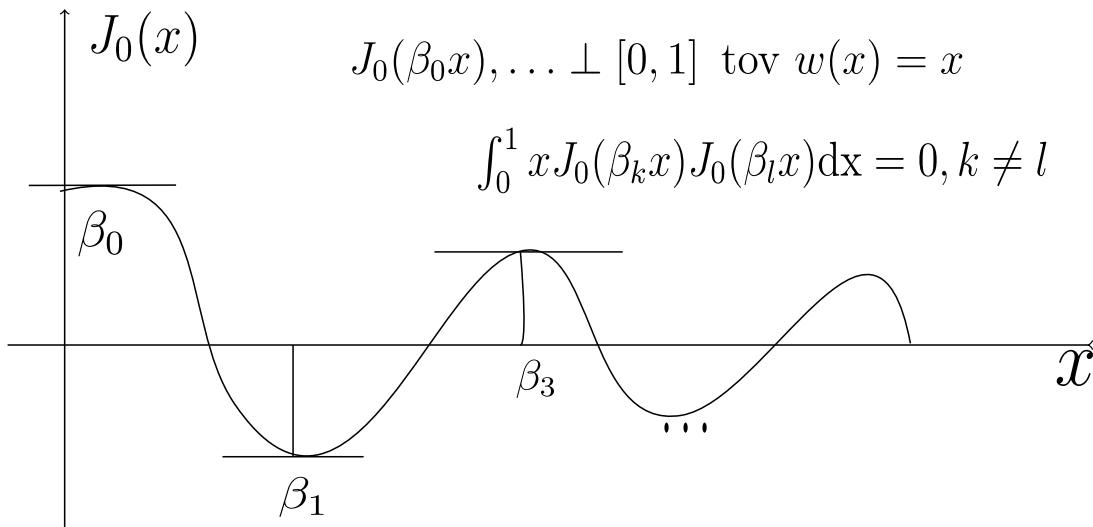


Figure 2.6: besselaafgeleid

Als we hier nu  $f$  willen benadern hebben we enkele ingrediënten nodig;

- $[0, 1]$
- $\{J_0(\beta_0 x), J_0(\beta_1 x), \dots\}$
- We kiezen kleinste kwadratencriterium met  $w(x) = x$

$$\int_0^1 x (f - g)^2 dx.$$

Dit is opnieuw een perfecte match. Alle functies zijn orthogonaal op 0,1 tov x de gewichtsfunctie.

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n a_k J_0(\beta_k x).$$

$$a_k = \frac{\int_0^1 f(x) J_0(\beta_k x) dx}{\int_0^1 x (J_0(\beta_k x))^2 dx}.$$

**Opmerking 2.5.2** Eigenschap van minder belang

Eigenschap die wordt bewezen in de cursus in verband met producten van besselfuncties met zichzelf; nuttig voor vinden expliciete uitdrukking noemer voor uitdrukking coëfficiënten.