Analyse III lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

INHOUDSTAFEL

1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

We zullen PDV's later omzetten naar gewone differentiaalvergelijkingen, daarom moeten we drie vormen herhalen.

- differentiaalvergelijkingen constante coefficiënten
- Differentiaalvergelijking van Euler
- Differentiaalvergelijking van Bessel

En de gamma functie komt ook aan bod voor herhaling.

1.1 Differentiaalvergelijking constante coefficienten

Stelling: oplossen met karakteristieke veelterm

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

We vinden de karakteristieke vergelijking

$$\rho(\nu) = a_0 \nu^2 + a_1 \nu + a_2.$$

met mogelijke oplossingen

$$\begin{cases} \nu_1 \neq \nu_2 \in \mathbb{R} \implies y(x) = c_1 e^{\nu_1 x} + c_2 e^{\nu_2 x} \\ \nu_1 = \nu_2 \implies y(x) = c_1 e^{\nu_1 x} + c_2 x e^{\nu_1 x} \\ \nu_{1,2} = \alpha \pm \beta i \implies y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}.$$

Opmerking 1.1.1 ν in plaats van λ

Lambda krijgt later een andere betekenis, daarom nu.

Voorbeeld 1.1.1

$$y'' = \lambda y.$$

waarbij lambda geïnterpreteerd wordt als een parameter

$$p(\nu) = \nu^2 - \lambda.$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \implies \nu_1 = \nu_2 \implies y(x) = c_1 + c_2 x \\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \implies \nu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \implies y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x} \\ \lambda \in \mathbb{R}^- \implies \nu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}\, i \implies y(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda} x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda} x\right) \end{cases}.$$

Herrinnering 1.1.1 Hyperbolische functies

Merk op dat de hyperboligsche functies lineaire combinaties zijn van die exponentiële functies dus als lambda positief is vinden we ook

$$y(x) = d_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right) + d_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

1.2 Euler

Stelling: Differentiaalvergelijking van Euler

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2xy = 0.$$

We lossen dit op voor $x > 0$ met transformatie

$$y(x) = z(t), t = \ln(x).$$

of ook

$$x = e^t.$$

we krijgen bijgevolg

$$z''(t) + (a_1 - 1)z((t) + a_2z(t) = 0.$$

de karakteristieke veelterm wordt

$$p(\nu) = \nu^2 + (a_1 - 1)\nu + a_2.$$

- $\nu_1 \neq \nu_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1e^{\nu_1 t} + c_2e^{\nu_2 t}.$$
$$\implies y(x) = c_1x^{\nu_1} + c_2x^{\nu_2}.$$

- $\nu_1 = \nu_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1e^{\nu t} + c_2te^{\nu t}.$$
$$\implies y(x) = c_1x^{\nu_1} + c_2\ln(x)x^{\nu_1}.$$

- $\nu_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$$z(t) = c_1e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right) + c_2e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right).$$
$$\implies y(x) = c_1x^{\alpha}\cos\left(\beta\ln(x)\right) + c_2x^{\alpha}\sin\left(\beta\ln(x)\right).$$

Opmerking 1.2.1 Voor $x < 0$

Voer een transformatie uit $x = -u$

1.3 De gammafunctie

Definitie 1.3.1: gamma functie

Gammafunctie voor $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x-1}du.$$

We zien dat het domein $\mathbb{R}^+$ is. Natuurlijk gebruiken we de gamma functie vooarl omwille van de fundamentele eigenschap

Eigenschap: Recursiebetrekking
Recursie eigenschap gamma functie

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs 1.3.1: Bewijs recursie eigenschap

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs;

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^x du.$$

partiele integratie

$$-u^x e^{-u}|_0^\infty + \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

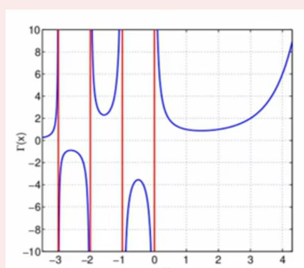
Opmerking 1.3.1

$$\lim_{u\to 0} u^x e^{-u} = \lim_{u\to\infty} u^x e^{-u} = 0.$$

hieruit vinden we dat die term nul wordt

$$\iff \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

Definitie 1.3.2: Definitie van de gammafunctie op $\mathbb{R}$



$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du, x > 0 \\ \frac{\Gamma(x+1)}{x}, x < 0 \wedge |x| \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

We maken gebruik van die recursiebetrekking om uit te breiden voor negatieve getallen. Het is belangrijk voor later dat we ook negatieve inputs kunnen geven. De manier waarop je dus rekent is dat je in breukvorm telkens een getal binnen het domein krijgt door een negatief getal kleiner dan één te nemen in absolute waarde, en dan vervolgens wanneer je hier voorbij gaat gebruik je de daarvoor berekende recursie.

Gaat niet $\forall x$, voor $x \in \mathbb{N}$ lukt dat niet want je kan $\Gamma(0)$ niet berekenen. Je ziet dus hoe die ”lijn van recursie” niet opgaat. We zien dat dus als de vertikale asymptoten op de grafiek.

Eigenschap: Gammafunctie en faculteiten
Gammafunctie is een uitbreiding van de faculteitenfunctie

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

kan bewezen worden via inductie, je kunt makkelijk eerst nul beschouwen en zien dat dat gelijk is aan één.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-t}|_0^{\infty} = 1 = 0!.$$

indien de bewering geldig is voor n, is ze ook geldig voor n+1.

Herrinnering 1.3.1 onthoud de volgende eigenschap

Recursiebetrekking

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

1.4 Differentiaalvergelijking van Bessel

Definitie 1.4.1: differentiaalvergelijking van Bessel

Orde p (positieve parameter, niet echt de orde)

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0.$$

met $p \geq 0$

Eerste oplossing

van deze differentiaalvergelijking is via reeksontwikkeling voor p.

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}.$$

Idee of vraag 1.4.1

waarbij C_k voldoet aan de recursiebetrekking die we vinden door in te vullen in differentiaalvergelijking.

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0.$$

$$x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right)'' + x\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right)' + (x^2 - p^2)\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right) = 0.$$

door C_k te schrijven laat ik het somteken even weg

$$\left(C_k x^{k+p}\right)' = (k+p)C_k x^{k+p-1}.$$

$$\left(C_k x^{k+p}\right)'' = (k+p)(k+p-1)C_k x^{k+p-2}.$$

$$C_k = \frac{-C_{k-2}}{k(k+2p)}, k \text{ even }, C_k = 0, k \text{ oneven.}$$

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{k!\Gamma(p+k+1)2^{2k+p}}.$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

waaruit dus blijkt

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Eigenschap: Afgeleide relatie

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x).$$

stel

$$f(x) = x^n J_n(x).$$
$$f'(x) = n x^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x).$$

volgens de eigenschap geldt ook

$$f'(x) = x^n J_{n-1}(x).$$
$$\implies n x^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x).$$

Hieruit volgt

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x).$$

Eigenschap: Afgeleide relatie

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$g(x) = x^{-n} J_n(x).$$
$$g'(x) = -n x^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J_n'(x).$$
$$g'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$
$$\implies J_n'(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x).$$

Bewijs 1.4.1: Bewijs van afgeleide relatie

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right].$$

Tel de twee vergelijking uit voorgaande eigenschappen op;

$$J_n'(x) + J_n'(x) = \left(J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)\right) + \left(-J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)\right).$$

dit simplificeren dan volgt direkt het gestelde.

Voorbeeld 1.4.1 (Bessel differentiaalvergelijking vb)

Idee of vraag 1.4.2

$$J_0'(x) = -J_1(x).$$

- Afgeleide relatie
$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right].$$
- Relatie J_{-n} en J_n
$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

$$\implies J_0'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{-1}(x) - J_1(x)\right].$$
$$\implies J_{-1}(x) = (-1)^1 J_1(x) = -J_1(x).$$

Hieruit volgt direkt het gestelde.

Tweede oplossing

-p is de tweede oplossing, dus we zoeken een oplossing met

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{k-p}.$$

$$B_k = \frac{-B_{k-2}}{k(k-2p)}.$$

voor k even en nul voor k oneven.

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-p}}{k!\Gamma(-p+k+1)2^{2k-p}}, p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0.$$

Opmerking 1.4.1 Lineair onafhankelijke oplossingen

- $J_p(x)$ is Besselfunctie van de eerste soort orde p
- $J_p(x), J_{-p}(x)$ is een funcamenteel stel voor $p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0$
- indien het wel een natuulijk getal of nul is, kan aangetoond worden : $J_{-n}(x) = \lim_{p\to n} J_{-p}(x) = (-1)^n J_n(x)$

Bijgevolg moeten we een moeilijkere vorm gebruiken als we de reeksontwikkeling direct willen berekenen.

Besselfunctie van de tweede soort

Definitie 1.4.2: Besselfuncties van de tweede soort

Gedefinieerd als volgt;

$$Y_p(x) = \begin{cases} \frac{J_p(x)\cos\left(p\pi\right) - J_{-p}(x)}{\sin\left(p\pi\right)}, p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0 \\ \lim_{p\to 0} \frac{J_p(x)\cos\left(p\pi\right) - J_{-p}(x)}{\sin\left(p\pi\right)}, p = 0 \\ \lim_{p\to n} \frac{J_p(x)\cos\left(p\pi\right) - J_{-p}(x)}{\sin\left(p\pi\right)}, p = n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Waar we dus die cotangens moeten beschouwen als coefficient voor J_p en die $\frac{-1}{\sin\left(\dots\right)}$ als coefficient van J_{-p}

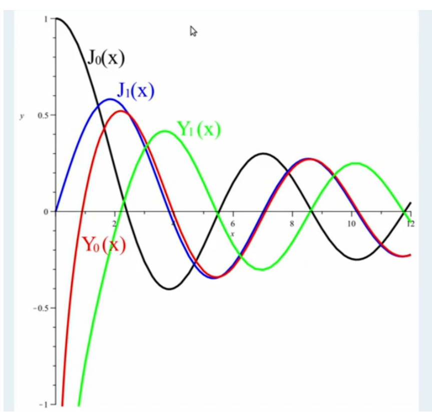
Idee of vraag 1.4.3

Dus drie keer dezelfde functie met een limiet naar niet gedefinieerde plaatsen, maar ik snap totaal niet waar de functie vandaan komt en hoe we dit bewijzen. Check de cursus vanaf je die eindelijk krijgt en vraag anders aan prof

Eigenschap:
Een fundamenteel stel voor $p \geq 0$:

$$\left\{J_p(x), Y_p(x)\right\}.$$

Eigenschap:
De Besselfunctie van de tweede soort $Y_p(x)$ zijn onbegrensd in een omgeving van $x = 0$



1.5 Gewijzigde differentiaalvergelijking van Bessel

Definitie 1.5.1: Gewijzigde Besselvergelijking

Gewijzigde Besselvergelijking van orde p

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0.$$

met $p \geq 0$ een parameter

Eerste soort

Reeksontwikkeling rond een regulier singulier punt;

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p}.$$

$$C_k = \frac{C_{k-2}}{k(k+2p)}.$$

We vinden

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+p}}{k!\Gamma(p+k+1)2^{2k+p}}.$$

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

$I_p(x)$ is de gewijzigde Besselfunctie van de eerste soort en orde p.

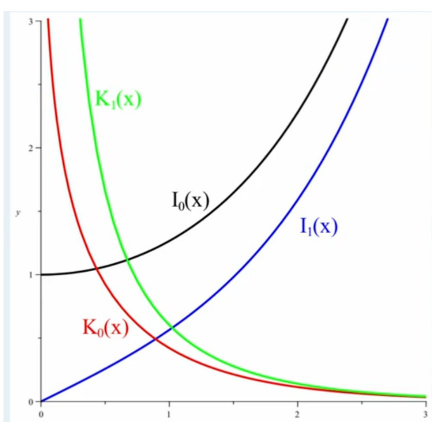
Tweede soort

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin(p\pi)}.$$

Eigenschap:
Fundamenteel stel voor $\forall p \geq 0$

$$\{I_p(x), K_p(x)\}.$$

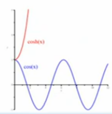
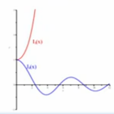
Eigenschap:
Voor gewijzigde Besselfuncties van de tweede soort geldt ze zijn onbegrensd in een omgeving $x = 0$



Opmerking 1.5.1 De grafieken

Zorg vooral dat je de grafieken direct in je hoofd hebt, dat zijn de belangrijkste om te onthouden

Stelling: verschillen hyperbolische hyperb vs Besselfuncties
Dit is zowat het belangrijkste van dit hele deel

Trigo- en hyper- functies	Besselfuncties
Differentiaalvergelijking	
$y''(x) + y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ $y''(x) - y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cosh(x) + c_2 \sinh(x)$	$x\,y''(x) + y'(x) + x\,y(x) = 0$ $y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$ $x\,y''(x) + y'(x) - x\,y(x) = 0$ $y(x) = c_1 I_0(x) + c_2 K_0(x)$
Reeksontwikkelingen	
$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$ $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}$
Grafieken, nulpunten, begrensdheid, orthogonaliteit	
	

2 Fourierreeksen

We willen een functie f benaderen op een interval $[a,b]$ door middel van lineaire combinatie goniometrische functies.

2.1 Inleidend

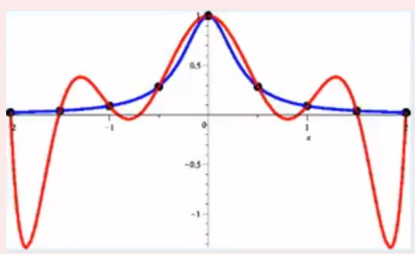
Definitie 2.1.1: Het interpolatiecriterium

Kies N punten $x_j \in [a,b]$ en eis dat $g(x_j) = f(x_j), j =, 1, \dots, N$ Met andere woorden er wordt in essentie enkel geëist dat de doelfunctie in enkele punten exact samenvalt. Dan wordt een veelterm bepaald.
lineair stelsel;

$$\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(x_j) = f(x_j), j = 1, 2, \dots, N.$$

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \dots & g_N(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \dots & g_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_N) & g_2(x_N) & \dots & g_n(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

kwaliteit hangt af van keuzes interpolatiepunten, veelterminterpolatie geeft grote fouten.



Dan is er het minimaxcriterium; Het minimaxcriterium is dus vooral lastig omdat het moeilijk uit te werken is.

$$\max\left\{|f(x) - g(x)|, x \in [a,b]\right\}.$$

minimaliseren van een maximum wordt een zadelpunt probleem genoemd. Zie fig2.1

Dan komen we bij dit criterium om een compromis te sluiten.

Definitie 2.1.2: Kleinste kwadratencriterium

Bepaal $c_i, i = 1, 2, \dots, N$ zodat

$$\int_a^b w(x)(f(x) - g(x))^2 dx.$$

minimaal is met $x(x) > 0$

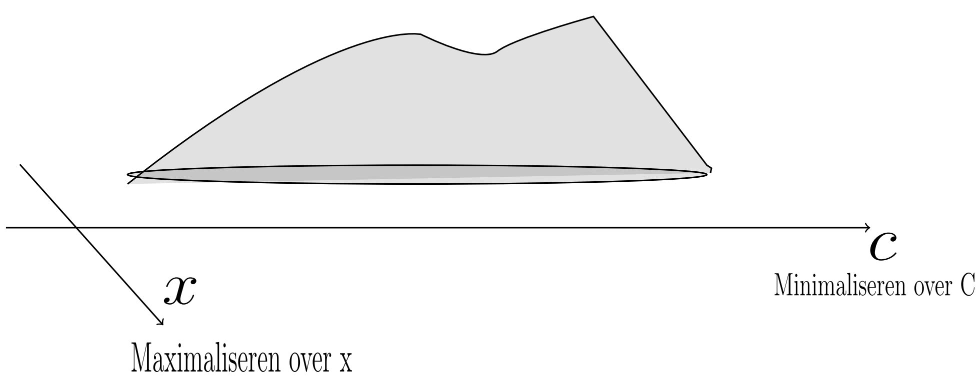


Figure 2.1: zadelpuntprobleem