Analyse III
lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

INHOUDSTAFEL

Deel I

Partiële Differentiaalvergelijkingen

I.1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

I.2 Fourierreeksen

I.3 Sturm-Liouvilleproblemen

I.4 Eerste oefenzitting

I.5 Partiële differentiaalvergelijkingen

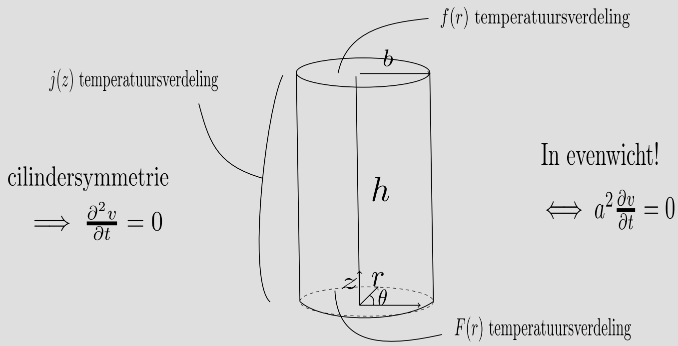
I.6 Verdere partiële differentiaalvergelijkingen

6.1 Cilindrische problemen

Voorbeeld 6.1.1

Gegeven een cilinder straal b hoogte h, temperatuur gegeven op de rand. Wat is de temperatuursverdeling binnen de cilinder als er cilindersymmetrie mag verondersteld worden?
Los het probleem om met de volgende randvoorwaarden voor $v(r,z), 0 \leq r \leq b, 0 \leq z \leq h$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \\ v(r,h) = f(r), 0 \leq r \leq b \\ v(r,0) = F(r), 0 \leq r \leq b \\ v(b,z) = g(z), 0 \leq z \leq h \end{cases}.$$



$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

waarbij die nul er dus komt omwille van het in evenwicht zijn van de cilinder.
bemerk dat de temperatuursverdeling bovenaan en onderaan enkel afhangen van r, die aan de zijkant hangt enkel af van z. Dus in de RVW komt θ niet voor. Dat betekent dat wanneer je de cilinder draait, je geen verandering zal merken aan de rvw. **Hierdoor kunnen we de overeenkomstige term schrappen.**

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

deze functie hangt expliciet af van van r en z.
Om de randvoorwaarden nog eens duidelijk op te schrijven;

$$\begin{cases} v(r,h) = f(r), 0 \leq r \leq b \\ v(r,0) = F(r), 0 \leq r \leq b \\ v(b,z) = g(z), 0 \leq z \leq h \end{cases}.$$

$$r \in [0,b] \wedge z \in [0,h].$$

1. Stel we willen scheiding van veranderlijken toepassen, dan beginnen we met het detecteren van homogene randvoorwaarden. We hebben er hier geen. We zullen moeten splitsen in deelproblemen. **Eerst zullen we het probleem toch even proberen oplossen met scheiding van veranderlijken.**

$$v(r,z) = R(r)Z(z).$$

invullen in differentiaalvergelijking

$$\iff R''(r)Z(z) + \frac{1}{r}R'(r)Z(z) + \frac{1}{r^2}R(r)Z''(z) = 0.$$

nu moeten we dingen scheiden.

$$\iff R''(r)Z(z) + \frac{1}{r}R'(r)Z(z) = -\frac{1}{r^2}R(r)Z''(z).$$

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \frac{-Z''(z)}{Z(z)} = \lambda.$$

$$\implies \begin{cases} R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) = \lambda R(r) \\ Z''(z) = -\lambda Z(z) \end{cases}.$$

$$r \in [0,b], z \in [0,h].$$

we kunnen het eerste probleem herschrijven

$$R''(r) + R'(r) = r\lambda R(r).$$

het eerste probleem staat in zelftoegevoegde vorm. Welke rvw hebben we nodig om te komen tot een sturm-liouvilleprobleem. Het eerste probleem is een singulier probleem omdat de leidende coefficient nul wordt in nul. We moeten dan opleggen dat de functie en de afgeleide begrensd worden. We hebben dus één rvw in het punt b nodig voor het eerste probleem.

Voor het tweede probleem, een regulier probleem, hebben we een rvw nodig in het punt 0 en in h

2. We splitsen op een zodanig manier dat we met één van de twee problemen kunnen verderwerken. **Laten we met het eerste probleem beginnen waarvoor we nu een homogene rvw nodig hebben in r.**

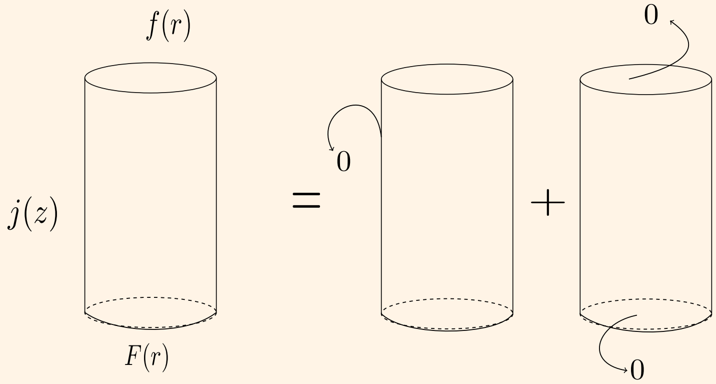
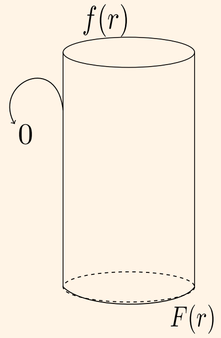


Figure I.6.1: Splitsen in deelproblemen

we splitsen ze op in twee deelproblemen zoals gevisualiseerd hierboven. Waarbij je dus in het eerste deelprobleem $j(z)$ gelijksteld aan nul, en bij de andere twee stel je de temperatuur vanboven en vanonder gelijk aan nul. Ceteris paribus.

3. Deelprobleem 1



$$rR''(r) + R' = \lambda r R(r).$$
$$Z''(z) = -\lambda Z(z).$$
$$v(b, z) = 0.$$
$$R(b)Z(z) = 0.$$
$$\implies R(b) = 0.$$

(a) we krijgen een sturm liouvilleprobleem in r

$$rR'' + R' = \lambda r R(r).$$

met R begrensd. Het is een singulier probleem, dus **R begrensd voor r in de buurt van nul.** En

$$R(b) = 0.$$

zoals eerder bekomen zijn onze twee voorwaarden. We kunnen dit oplossen met de hand

(b) $\lambda \geq 0$ geeft triviale oplossingen

(c) $\lambda < 0$

$$R(r) = c_1 J_0(\sqrt{-\lambda} r) + c_2 Y_0(\sqrt{-\lambda} r).$$

omwille van het begrensd zijn zal de term met $Y_0 = 0$

$$\implies R(r) = c_1 J_0(\sqrt{-\lambda} r).$$

dan de tweede randvoorwaarde zegt

$$J_0(\sqrt{-\lambda} b) = 0.$$
$$\iff \sqrt{-\lambda} b = \alpha_n.$$
$$\implies \lambda_n = -\frac{\alpha_n^2}{b^2}.$$
$$\implies R_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{b} r\right).$$

(d) nu moeten we kijken naar het overeenkomstig z probleem.

$$Z''(z) = \frac{\alpha_n^2}{b^2} Z(z).$$

we kunnen dit met de hand vinden

$$\to Z(z) = A_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{b} z\right) + B_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{b} z\right).$$

(e) Nu stellen we de verschillende deeloplossingen samen

$$\implies v_1(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{b} z\right) + B_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{b} z\right) \right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{b} r\right).$$

(f) Nu nog aan de niet-homogene rvw voldoen om de coefficienten te bepalen.

$$v(r,h) = f(r).$$

$$v(r,0) = F(r).$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot 1 \cdot J_0\left(\frac{\alpha_n}{b} r\right) = F(r).$$

gewichtsfunctie is r.

$$\implies A_n = \frac{\int_0^b rF(r)J_0(\frac{\alpha_n}{b}r)\,\mathrm{d}r}{\int_0^b r\left(J_0(\frac{\alpha_n}{b}r)\right)^2\,\mathrm{d}r}.$$

nu hebben we B_n nog niet bepaald. Daarvoor gebruiken we de tweede rvw

$$v(r,h) = f(r).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{b} h\right) + B_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{b} h\right) \right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{b} r\right) = f(r).$$

dit kunnen we interpreteren als ontbinding van $f(r)$ in eigenfuncties van het SLP van eerder. Daaruit kunnen we een oplossing halen, stel dat je dat hele eerste deel b_n noemt;

$$b_n = \left(A_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{b} h\right) + B_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{b} h\right) \right).$$

dan hebben we nu de volgende uitdrukking

$$b_n = \frac{\int_0^b rf(r)J_0(\frac{\alpha_n}{b}r)\,\mathrm{d}r}{\int_0^b rJ_0^2(\frac{\alpha_n}{b}r)\,\mathrm{d}r}.$$

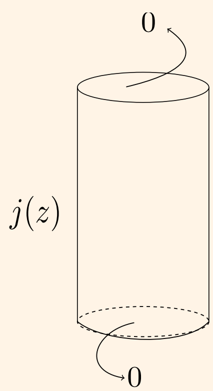
uit die definitie

$$B_n \sinh\left(\frac{\alpha_n}{b} h\right) = b_n - A_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{b} h\right).$$

$$\implies B_n = \frac{b_n - A_n \cosh\left(\frac{\alpha_n}{b} h\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha_n}{b} h\right)}.$$

Dat is de oplossing van deelprbleem 1

4. Deelprobleem 2



dus dat is

$$rR''(r) + R'(r) = \lambda r R(r).$$

$$Z''(z) = -\lambda Z(z).$$

$$\to v(r,h) = 0.$$

$$\to v(r,0) = 0.$$

geeft aanleiding tot

$$R(r)Z(h) = 0, R(r)Z(0) = 0.$$

(a) We lossen het SLP op, **merk op dat dit niet in veranderlijke r is gedefinieerd, maar in z**

$$Z''(z) + 0 \cdot Z'(z) = -\lambda Z(z).$$

met rvw

$$Z(0) = 0, Z(h) = 0.$$

de gewichtsfunctei zal $w(z) = -1$

(b) $\lambda = 0$;

$$Z(z) = c_1 + c_2 z.$$

we gaan de rvw invullen en zien dat enkel de triviale oplossing wordt gevonden

(c) $\lambda > 0$;

$$Z(z) = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda} z\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda} z\right).$$

we vinden door in te vullen dat de tweede term kan geschrapt worden, en dan

$$c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda} h\right) = 0.$$

we willen niet dat $c_1 = 0$, dus we kunnen zeggen dat de sinus nul is;

$$\sqrt{\lambda} h = n\pi, n = 1, 2, \ldots.$$

we houden over

$$\implies \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}.$$

we vinden als eigenfuncties, constante één verondersteld

$$\implies Z_n(z) = \sin\left(\frac{n\pi}{h} z\right).$$

bemerk dat de rvw voldaan zijn.

(d) $\lambda < 0$;

$$Z(z) = c_1 \sinh\left(\sqrt{-\lambda} z\right) + c_2 \cosh\left(\sqrt{-\lambda} z\right).$$

dan uit rvw één zullen we $c_2 = 0$ vinden. Voor de tweede rvw vinden we

$$c_1 \sinh\left(\sqrt{-\lambda} h\right) = 0.$$

dat kan enkel als $c_1 = 0$, dus we vinden enkel de triviale oplossing!!

(e) We bekijken het overeenkomstige r probleem met λ waarde gesubstitueerd. Kan met matlab.

$$rR''(r) + R'(r) = \left(\frac{n^2\pi^2}{h^2}\right) r^2 R(r).$$

Opmerking 6.1.1 Gewijzigde besselvergelijking vinden

vermenigvuldig met r en schuif naar één kant

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \left(\frac{n^2\pi^2}{h^2}\right) r^2R(r) = 0.$$

Dan zie je de gewijzigde besselvergelijking

de algemene oplossing wordt gegeven door

$$R(r) = c_1I_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right) + c_2K_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right).$$

we kunnen ook zeggen dat $r \in [0, b]$. Omwille van de begrensdheid kunnen we de tweede term laten vallen

$$\implies R(r) = c_1I_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right).$$

(f) We brengen alle oplossingen samen en maken een lineaire combinatie. Dan nog voldoen aan de niet-homogene rvw.

$$v_2(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_nI_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right).$$

nu de niet-homogene rvw

$$v_2(b,z) = j(z).$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} A_nI_0\left(\frac{n\pi}{h}b\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right) = j(z).$$

dat is een expansie van oplossingen in dat SLP.

$$A_nI_0\left(\frac{n\pi}{h}b\right) = \int_0^h (-1)j(z)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\,\mathrm{d}r \cdot \frac{1}{\int_0^h (-1)\left(\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)^2\,\mathrm{d}r\right)}.$$

we krijgen een uitdrukking

$$A_n = \frac{1}{I_0\left(\frac{n\pi}{h}z\right)^2}\frac{\int_0^h (-1)j(z)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\,\mathrm{d}r}{\int_0^h (-1)\left(\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)^2\,\mathrm{d}r\right)}.$$

5. We hebben nu een uitdrukking voor de beiden samen, we voegen ze samen en dat is de oplossing van dit probleem.

$$\implies v_1(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\left(\frac{\alpha_n}{b}z\right) + B_n\sinh\left(\frac{\alpha_n}{b}z\right)\right)J_0\left(\frac{\alpha_n}{b}r\right).$$

$$\implies A_n = \frac{\int_0^b rF(r)J_0(\frac{\alpha_n}{b}r)\,\mathrm{d}r}{\int_0^b r\left(J_0(\frac{\alpha_n}{b}r)\right)^2\,\mathrm{d}r}.$$

$$\implies B_n = \frac{b_n - A_n\cosh\left(\frac{\alpha_n}{b}h\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha_n}{b}h\right)}.$$

tweede stuk

$$v_2(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_nI_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right).$$

$$A_n = \frac{1}{I_0\left(\frac{n\pi}{h}z\right)^2}\frac{\int_0^h (-1)j(z)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\,\mathrm{dr}}{\int_0^h (-1)\left(\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)^2\,\mathrm{dr}\right)}.$$

$$\begin{aligned}\implies v(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(&\frac{\int_0^b rF(r)J_0\left(\frac{\alpha_n}{b}r\right)\,\mathrm{dr}}{\int_0^b r\left(J_0\left(\frac{\alpha_n}{b}r\right)\right)^2\,\mathrm{dr}}\cosh\left(\frac{\alpha_n}{b}z\right)\\ &+\frac{b_n - A_n\cosh\left(\frac{\alpha_n}{b}h\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha_n}{b}h\right)}\sinh\left(\frac{\alpha_n}{b}z\right)\Bigg)J_0\left(\frac{\alpha_n}{b}r\right)\\ &+\frac{1}{I_0\left(\frac{n\pi}{h}z\right)^2}\frac{\int_0^h (-1)j(z)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\mathrm{dr}}{\int_0^h (-1)\left(\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)^2\mathrm{dr}\right)}I_0\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right).\end{aligned}$$

Ik dacht ik ga het hier eens volledig schrijven, maar het is echt waanzinnig lang wow. Dan heb ik b_n en A_n in B_n nog niet eens voluit geschreven.

6.2 Vervolg

I.7 Tweede oefenzitting

I.8 Derde oefenzitting

I.9 Laplace trasnformatie

I.10 Inverse Laplacetransformatie