Analyse III lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

Inhoudstafel

1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

2 Fourierreeksen

3 Sturn-Liouvilleproblemen

Dit zijn problemen die het algebraïsche eigenwaardeprobleem veralgemenen naar ruimtes van functies.

Herrinnering 3.0.1 Symmetrisch eigenwaardeprobleem

$$A\vec{E} = \lambda\vec{E}.$$

Is symmetrisch als A symmetrisch is; $A = A^T$

- Alle eigenwaarden zijn reëel. $\forall\lambda_i \in \sigma(A) : \lambda \in \mathbb{R}$
- Eigenvectoren horend bij verschillende eigenwaarden staan onderling loodrecht op elkaar.
- Er zijn n onafhankelijke eigenvectoren die een basis opspannen.

$$\implies \forall\vec{X} \in \mathbb{R}^n : \vec{X} = \sum_{i=1}^{n} c_i\vec{E}_i.$$

Of elke vector in de ruimte kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de eigenvectoren van A. Dat is immers wat het betekent als ze een ruimte opspannen.

3.1 Het eigenwaardeprobleem in de ruimte

Definitie 3.1.1: Operator

- $C^2([a,b],\mathbb{C})$ is de ruimte van functies f van $[a,b]$ naar $\mathbb{C}$ met f,f',f" continu
- Operator L op $C^2([a,b],\mathbb{C})$ wordt gedefinieerd als;
  - Het domein van de operator, genoteerd $D(L)$ is de verzameling van functies die voldoen aan randvoorwaarden van de vorm

    $$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + a_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0.$$

    $$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

  - De actie van de operator wordt beschreven door

    $$Ly = a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x).$$

    $$\forall y \in D(L).$$

We kunnen nu een eigenwaardeprobleem definiëren dat analoog is aan het probleem bij matrices.

Definitie 3.1.2: Eigenwaardeprobleem van L

Bepaal oplossingen van $Ly = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0$ Dit betekent concreet; We voeren de L operator uit op y en willen dat dit wordt afgebeeld op een veelvoud; We zoeken $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor diffvergelijking

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = \lambda y(x).$$

met randvoorwaarden

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0.$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

Waarvoor deze diffvergelijking met die randvoorwaarden een **niet-triviale oplossing heeft.**

Voorbeeld 3.1.1 (Functies die interval $[0, \pi]$ afbeelden op complexe vlak)

$$\begin{cases} D(L) = \left\{y \in C^2([0,\pi], \mathbb{C}) : y(0) = 0, y(\pi) = 0\right\} \\ Ly = y \end{cases}.$$

$$Ly = \lambda y, y \neq 0, y \in D(L).$$

We zoeken een functie van y zodanig dat de tweede afgeleide van y gelijk is aan λy

$$\rightarrow y''(x) = \lambda y.$$

Opmerking 3.1.1

Het feit dat y tot $D(L)$ behoort betekent dat $y(0) = 0 \wedge y(\pi) = 0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y''(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Eigenschap:
Als $\phi_i(x)$ een eigenfunctie is horend bij eigenwaarde λ_i dan is elke functie $c\pi_i(x), c \neq 0$ ook een eigenfunctie horend bij λ_i

Eigenschap:
Eigenfunctie $\phi_i(x), i = 1, \ldots, n$ horend bij verschillende eigenwaarden $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ zijn lineair onafhankelijk op $[a, b]$

3.2 Symmetrische eigenwaardeproblemen

We bepalen het inwendig product van functies als

$$(y_1, y_2) = \int_a^b \overline{y_1(x)} y_2(x) \mathrm{d}x.$$

Dus de inntegraal van a tot b van de complex toegevoegde van y_1 maal y_2

We beschouwen nu opnieuw een eigenwaardeprobleem

$$Ly = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0.$$

$$\iff a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = \lambda y(x).$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + a_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Definitie 3.2.1: Definitie van zelftoegevoegde operator

L is zelftoegevoegd als

$$(y_1, Ly_2) = (Ly_1, y_2), \forall y_1, y_2 \in D(L).$$

$$\equiv \int_a^b \overline{y_1} L y_2 dx = \int_a^b \overline{(Ly_1)} y_2 dx.$$

Voor alle y_1, y_2 die voldoen aan

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + a_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Als L zelftoegevoegd is, dan is het eigenwaardeprobleem symmetrisch.

We hebben nu enkele eigenschappen die analoog zijn aan eigenschappen met symmetrische matrices.

Bewijs 3.2.1:

Stelling:
De eigenwaarden van een symmetrisch eigenwaardeprobleem zijn reëel

Veronderstel dat $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde is en ϕ de bijhorende eigenfucntie. L is zelftoegevoegd dus geldt

$$(\phi, L\phi) = (L\phi, \phi).$$

Uit $L\phi = \lambda\phi$ volgt;

Idee of vraag 3.2.1

$$\lambda \int_a^b |\phi(x)|^2 \mathrm{dx} = \int_a^b \overline{(\lambda\phi(x))}\phi(x)\mathrm{dx} = \overline{\lambda} \int_a^b |\phi(x)|^2 \mathrm{dx}.$$

Snap niet heel goed hoe dit bewijs in elkaar valt, op welke manier de twee vorige stellingen leiden tot dit tussenresultaat

$$\lambda(\phi, \phi) = \overline{\lambda}(\phi, \phi).$$

$$\iff 0 = (\lambda - \overline{\lambda})(\phi, \phi) = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b |\phi(x)|^2 \mathrm{dx}.$$

$$\phi \neq 0 \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eigenfuncties kunnen steeds reëel gekozen worden en in wat volgt kiezen we ze ook $\in \mathbb{R}$

Eigenschap:
eigenfuncties $\phi_n(x), \phi_m(x)$ horend bij verschillende eigenwaarden λ_n en λ_m van een symmetrisch eigenwaardeprobleem zijn orthogonaal over het interval $[a,b]$ tov gewichtsfunctie $w(x) = 1$;

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\mathrm{dx} = 0.$$

Dit is de direkte veralgemening van de eigenvectoren die orthogonaal zijn bij verschillende eigenwaarden voor symmetrische matrices.

Bewijs 3.2.2: Bewijs van die orthogonaliteit

Er geldt

$$(L\phi_n, \phi_m) = (\phi_n, L\phi_m).$$
$$\lambda_n(\phi_n, \phi_m) = \lambda_m(\phi_n, \phi_m).$$

en vermits $\lambda_n \neq \lambda_m$

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_a^b \overline{\phi_n(x)}\phi_m(x)\mathrm{dx} = 0.$$

Vermits de eigenfuncties reëel zijn kan $\overline{\phi_n}$ door ϕ_n vervangen worden.

Eigenschap: Eigenfuncties die een basis vormen
Onderstel dat het eigenwaardeprobleem symmetrisch is en bovendien L normaal is (dwz;)

$$a_0(x) \neq 0, \forall x \in [a,b].$$

Dan zijn er oneindig veel reële eigenwaarden $\lambda_n, n = 0, 1, \ldots$ zodat

$$|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| \wedge \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

voor een stuksgewijze effen functie f op $[a,b]$ geldt;

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x).$$

waarbij

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{dx}}{\int_a^b \phi_n(x)^2\mathrm{dx}}.$$

Dus hiermee wordt getoond hoe het idee van eigenvectoren die een basis opspannen voor de originele basis is veralgemeend! De eigenfuncties spannen een basis op voor $f(x)$. Om even iets dieper in te gaan op die uitdrukking voor de coefficienten;

$$f(x)\phi_j(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x)\phi_j(x).$$

4 Eerste oefenzitting