Analyse III
lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

INHOUDSTAFEL

1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

We zullen PDV's later omzetten naar gewone differentiaalvergelijkingen, daarom moeten we drie vormen herhalen.

- differentiaalvergelijkingen constante coefficiënten
- Differentiaalvergelijking van Euler
- Differentiaalvergelijking van Bessel

En de gamma functie komt ook aan bod voor herhaling.

1.1 Differentiaalvergelijking constante coefficienten

Stelling: oplossen met karakteristieke veelterm

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

We vinden de karakteristieke vergelijking

$$\rho(\nu) = a_0 \nu^2 + a_1 \nu + a_2.$$

met mogelijke oplossingen

$$\begin{cases} \nu_1 \neq \nu_2 \in \mathbb{R} \implies y(x) = c_1 e^{\nu_1 x} + c_2 e^{\nu_2 x} \\ \nu_1 = \nu_2 \implies y(x) = c_1 e^{\nu_1 x} + c_2 x e^{\nu_1 x} \\ \nu_{1,2} = \alpha \pm \beta i \implies y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}.$$

Opmerking 1.1.1 ν in plaats van λ

Lambda krijgt later een andere betekenis, daarom nu.

Voorbeeld 1.1.1

$$y'' = \lambda y.$$

waarbij lambda geïnterpreteerd wordt als een parameter

$$p(\nu) = \nu^2 - \lambda.$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \implies \nu_1 = \nu_2 \implies y(x) = c_1 + c_2 x \\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \implies \nu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \implies y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \\ \lambda \in \mathbb{R}^- \implies \nu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i \implies y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x) \end{cases}.$$

Herrinnering 1.1.1 Hyperbolische functies

Merk op dat de hyperboligsche functies lineaire combinaties zijn van die exponentiële functies dus als lambda positief is vinden we ook

$$y(x) = d_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right) + d_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

1.2 Euler

Stelling: Differentiaalvergelijking van Euler

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2xy = 0.$$

We lossen dit op voor $x > 0$ met transformatie

$$y(x) = z(t), t = \ln(x).$$

of ook

$$x = e^t.$$

we krijgen bijgevolg

$$z''(t) + (a_1 - 1)z((t) + a_2z(t) = 0.$$

de karakteristieke veelterm wordt

$$p(\nu) = \nu^2 + (a_1 - 1)\nu + a_2.$$

- $\nu_1 \neq \nu_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1e^{\nu_1 t} + c_2e^{\nu_2 t}.$$

$$\implies y(x) = c_1x^{\nu_1} + c_2x^{\nu_2}.$$

- $\nu_1 = \nu_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1e^{\nu t} + c_2te^{\nu t}.$$

$$\implies y(x) = c_1x^{\nu_1} + c_2\ln(x)x^{\nu_1}.$$

- $\nu_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$$z(t) = c_1e^{\alpha t}\cos\left(\beta t\right) + c_2e^{\alpha t}\sin\left(\beta t\right).$$

$$\implies y(x) = c_1x^{\alpha}\cos\left(\beta\ln(x)\right) + c_2x^{\alpha}\sin\left(\beta\ln(x)\right).$$

Opmerking 1.2.1 Voor $x < 0$

Voer een transformatie uit $x = -u$

1.3 De gammafunctie

Definitie 1.3.1: gamma functie

Gammafunctie voor $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x-1}du.$$

We zien dat het domein $\mathbb{R}^+$ is. Natuurlijk gebruiken we de gamma functie vooarl omwille van de fundamentele eigenschap

Eigenschap: Recursiebetrekking
Recursie eigenschap gamma functie

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs 1.3.1: Bewijs recursie eigenschap

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs;

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^x du.$$

partiele integratie

$$-u^x e^{-u}|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u}xu^{x-1}du.$$

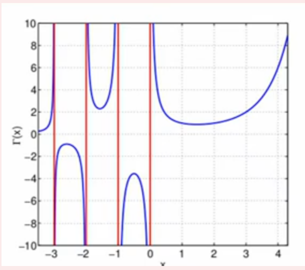
Opmerking 1.3.1

$$\lim_{u\to 0} u^x e^{-u} = \lim_{u\to\infty} u^x e^{-u} = 0.$$

hieruit vinden we dat die term nul wordt

$$\iff \int_0^{+\infty} e^{-u}xu^{x-1}du.$$

Definitie 1.3.2: Definitie van de gammafunctie op $\mathbb{R}$



$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{x-1}du, x > 0 \\ \frac{\Gamma(x+1)}{x}, x < 0 \wedge |x| \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

We maken gebruik van die recursiebetrekking om uit te breiden voor negatieve getallen. Het is belangrijk voor later dat we ook negatieve inputs kunnen geven. De manier waarop je dus rekent is dat je in breukvorm telkens een getal binnen het domein krijgt door een negatief getal kleiner dan één te nemen in absolute waarde, en dan vervolgens wanneer je hier voorbij gaat gebruik je de daarvoor berekende recursie.

Gaat niet $\forall x$, voor $x \in \mathbb{N}$ lukt dat niet want je kan $\Gamma(0)$ niet berekenen. Je ziet dus hoe die "lijn van recursie" niet opgaat. We zien dat dus als de vertikale asymptoten op de grafiek.

Eigenschap: Gammafunctie en faculteiten
Gammafunctie is een uitbreiding van de faculteitenfunctie

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

kan bewezen worden via inductie, je kunt makkelijk eerst nul beschouwen en zien dat dat gelijk is aan één.

1.4 Differentiaalvergelijking van Bessel

Definitie 1.4.1: differentiaalvergelijking van Bessel

Orde p (positieve parameter, niet echt de orde)

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0.$$

met $p \geq 0$

Eerste oplossing

van deze differentiaalvergelijking is via reeksontwikkeling voor p.

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}.$$

Idee of vraag 1.4.1

waarbij C_k voldoet aan de recursiebetrekking die we vinden door in te vullen in differentiaalvergelijking. Als ooit blijkt dat dit relevant is moet je hier nog eens naar kijken, want ik was niet helemaal mee wat betreft $J_p(x)$ enz

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0.$$

$$x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right)'' + x\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right)' + (x^2 - p^2)\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right) = 0.$$

door C_k te schrijven laat ik het somteken even weg

$$\left(C_k x^{k+p}\right)' = (k+p)C_k x^{k+p-1}.$$

$$\left(C_k x^{k+p}\right)'' = (k+p)(k+p-1)C_k x^{k+p-2}.$$

$$C_k = \frac{-C_{k-2}}{k(k+2p)}, k \text{ even }, C_k = 0, k \text{ oneven}.$$

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{k!\Gamma(p+k+1)2^{2k+p}}.$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

waaruit dus blijkt

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Tweede oplossing

-p is de tweede oplossing, dus we zoeken een oplossing met

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{k-p}.$$

$$B_k = \frac{-B_{k-2}}{k(k-2p)}.$$

voor k even en nul voor k oneven.

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-p}}{k!\Gamma(-p+k+1)2^{2k-p}}, p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0.$$

Opmerking 1.4.1 Lineair onafhankelijke oplossingen

- $J_p(x)$ is Besselfunctie van de eerste soort orde p
- $J_p(x), J_{-p}(x)$ is een funcamenteel stel voor $p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0$
  indien het wel een natuulijk getal of nul is, kan aangetoond worden want dan kun je J_{-n} als volgtvinden.
- $J_{-n}(x) = \lim_{p\to n} J_{-p}(x) = (-1)^n J_n(x)$