Analyse III lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

INHOUDSTAFEL

1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

2 Fourierreeksen

3 Sturn-Liouvilleproblemen

Dit zijn problemen die het algebraïsche eigenwaardeprobleem veralgemenen naar ruimtes van functies.

Herrinnering 3.0.1 Symmetrisch eigenwaardeprobleem

$$A\vec{E} = \lambda\vec{E}.$$

Is symmetrisch als A symmetrisch is; $A = A^T$

- Alle eigenwaarden zijn reëel. $\forall \lambda_i \in \sigma(A) : \lambda \in \mathbb{R}$
- Eigenvectoren horend bij verschillende eigenwaarden staan onderling loodrecht op elkaar.
- Er zijn n onafhankelijke eigenvectoren die een basis opspannen.

$$\implies \forall \vec{X} \in \mathbb{R}^n : \vec{X} = \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{E}_i.$$

Of elke vector in de ruimte kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de eigenvectoren van A. Dat is immers wat het betekent als ze een ruimte opspannen.

3.1 Het eigenwaardeprobleem in de ruimte

Definitie 3.1.1: Operator

- $C^2([a,b],\mathbb{C})$ is de ruimte van functies f van $[a,b]$ naar $\mathbb{C}$ met f,f',f" continu
- Operator L op $C^2([a,b],\mathbb{C})$ wordt gedefinieerd als;
  - Het domein van de operator, genoteerd $D(L)$ is de verzameling van functies die voldoen aan randvoorwaarden van de vorm

    $$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + a_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0.$$

    $$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

  - De actie van de operator wordt beschreven door

    $$Ly = a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x).$$

    $$\forall y \in D(L).$$

We kunnen nu een eigenwaardeprobleem definiëren dat analoog is aan het probleem bij matrices.

Definitie 3.1.2: Eigenwaardeprobleem van L

Bepaal oplossingen van $Ly = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0$ Dit betekent concreet; We voeren de L operator uit op y en willen dat dit wordt afgebeeld op een veelvoud; We zoeken $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor diffvergelijking

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = \lambda y(x).$$

met randvoorwaarden

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + \alpha_4 y'(b) = 0.$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

Waarvoor deze diffvergelijking met die randvoorwaarden een **niet-triviale oplossing heeft.**

Voorbeeld 3.1.1 (Functies die interval $[0, \pi]$ afbeelden op complexe vlak)

$$\begin{cases} D(L) = \left\{ y \in C^2([0,\pi], \mathbb{C}) : y(0) = 0, y(\pi) = 0 \right\} \\ Ly = y \end{cases}.$$

$$Ly = \lambda y, y \neq 0, y \in D(L).$$

We zoeken een functie van y zodanig dat de tweede afgeleide van y gelijk is aan λy

$$\rightarrow y''(x) = \lambda y.$$

Opmerking 3.1.1

Het feit dat y tot $D(L)$ behoort betekent dat $y(0) = 0 \wedge y(\pi) = 0$

$$\implies \begin{cases} y''(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Eigenschap:
Als $\phi_i(x)$ een eigenfunctie is horend bij eigenwaarde λ_i dan is elke functie $c\pi_i(x), c \neq 0$ ook een eigenfunctie horend bij λ_i

Eigenschap:
Eigenfunctie $\phi_i(x), i = 1, \ldots, n$ horend bij verschillende eigenwaarden $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ zijn lineair onafhankelijk op $[a, b]$

3.2 Symmetrische eigenwaardeproblemen

We bepalen het inwendig product van functies als

$$(y_1, y_2) = \int_a^b \overline{y_1(x)} y_2(x) \mathrm{d}x.$$

Dus de inntegraal van a tot b van de complex toegevoegde van y_1 maal y_2

We beschouwen nu opnieuw een eigenwaardeprobleem

$$Ly = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0.$$

$$\iff a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = \lambda y(x).$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + a_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Definitie 3.2.1: Definitie van zelftoegevoegde operator

L is zelftoegevoegd als

$$(y_1, Ly_2) = (Ly_1, y_2), \forall y_1, y_2 \in D(L).$$

$$\equiv \int_a^b \overline{y_1} L y_2 dx = \int_a^b \overline{(Ly_1)} y_2 dx.$$

Voor alle y_1, y_2 die voldoen aan

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(b) + \alpha_3 y'(a) + a_4 y'(b) = 0 \\ \beta_1 y(a) + \beta_2(b) + \beta_3 y'(a) + \beta_4 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Als L zelftoegevoegd is, dan is het eigenwaardeprobleem symmetrisch.

We hebben nu enkele eigenschappen die analoog zijn aan eigenschappen met symmetrische matrices.

Bewijs 3.2.1:

Stelling:
De eigenwaarden van een symmetrisch eigenwaardeprobleem zijn reëel

Veronderstel dat $\lambda \in \mathbb{C}$ een eigenwaarde is en ϕ de bijhorende eigenfucntie. L is zelftoegevoegd dus geldt

$$(\phi, L\phi) = (L\phi, \phi).$$

Uit $L\phi = \lambda\phi$ volgt;

Idee of vraag 3.2.1

$$\lambda \int_a^b |\phi(x)|^2 \mathrm{dx} = \int_a^b \overline{(\lambda\phi(x))}\phi(x)\mathrm{dx} = \overline{\lambda} \int_a^b |\phi(x)|^2 \mathrm{dx}.$$

Snap niet heel goed hoe dit bewijs in elkaar valt, op welke manier de twee vorige stellingen leiden tot dit tussenresultaat

$$\lambda(\phi, \phi) = \overline{\lambda}(\phi, \phi).$$

$$\iff 0 = (\lambda - \overline{\lambda})(\phi, \phi) = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b |\phi(x)|^2 \mathrm{dx}.$$

$$\phi \neq 0 \implies \lambda = \overline{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eigenfuncties kunnen steeds reëel gekozen worden en in wat volgt kiezen we ze ook $\in \mathbb{R}$

Eigenschap:
eigenfuncties $\phi_n(x), \phi_m(x)$ horend bij verschillende eigenwaarden λ_n en λ_m van een symmetrisch eigenwaardeprobleem zijn orthogonaal over het interval $[a,b]$ tov gewichtsfunctie $w(x) = 1$;

$$\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)\mathrm{dx} = 0.$$

Dit is de direkte veralgemening van de eigenvectoren die orthogonaal zijn bij verschillende eigenwaarden voor symmetrische matrices.

Bewijs 3.2.2: Bewijs van die orthogonaliteit

Er geldt

$$(L\phi_n, \phi_m) = (\phi_n, L\phi_m).$$
$$\lambda_n(\phi_n, \phi_m) = \lambda_m(\phi_n, \phi_m).$$

en vermits $\lambda_n \neq \lambda_m$

$$(\phi_n, \phi_m) = \int_a^b \overline{\phi_n(x)}\phi_m(x)\mathrm{dx} = 0.$$

Vermits de eigenfuncties reëel zijn kan $\overline{\phi_n}$ door ϕ_n vervangen worden.

Eigenschap: Eigenfuncties die een basis vormen
Onderstel dat het eigenwaardeprobleem symmetrisch is en bovendien L normaal is (dwz;)

$$a_0(x) \neq 0, \forall x \in [a,b].$$

Dan zijn er oneindig veel reële eigenwaarden $\lambda_n, n = 0, 1, \dots$ zodat

$$|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| \wedge \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty.$$

voor een stuksgewijze effen functie f op $[a,b]$ geldt;

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x).$$

waarbij

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)\mathrm{dx}}{\int_a^b \phi_n(x)^2\mathrm{dx}}.$$

Dus hiermee wordt getoond hoe het idee van eigenvectoren die een basis opspannen voor de originele basis is veralgemeend! De eigenfuncties spannen een basis op voor $f(x)$. Om even iets dieper in te gaan op die uitdrukking voor de coefficienten;

$$f(x)\phi_j(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x)\phi_j(x).$$

Dit is 0 wanneer $\phi_n(x) \neq \phi_j(x)$

$$\implies f(x)\phi_j(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(x)\phi_j(x) = a_j\int_a^b \phi_j(x)^2\mathrm{dx}.$$

Dus vorm het om en voila, magie.
Dit stuk kan worden afgesloten door een parallel te trekken tussen de twee contexten rond symmetrische problemen. **Voorwaarde syummetrie;**

$$< y_1, Ly_2 > = < Ly_1, y_2 > \forall y_1, y_2 \in D(L).$$

voor vectoren;

$$< x_1, Ax_2 > = < Ax_1, x_2 >, \forall x_1, x_2.$$
$$x_1^T Ax_2 = (Ax_1)^T x_2 = x_1^T A^T x_2, \forall x_1, x_2.$$
$$\iff A = A^T.$$

Dus het is analoog, we kunnen drie eigenschappen extraheren

- reële eigenwaarden in beide gevallen
- orthogonaliteit eigenvectoren of eigenfuncties
- eigenvectoren of eigenfuncties volgen een basis

3.3 Klasse symmetrische problemen

3.3.1 eerste voorbeeld

Voorbeeld 3.3.1 (Klasse symmetrische problemen)

$$Ly = \lambda y, .$$

$\lambda \in \mathbb{C}, y \in D(L), y \neq 0$

Stel

1. Operator L van de vorm
$$Ly = \frac{d}{\mathrm{dx}}\left(p(x)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right) + q(x).$$
$$\iff p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x).$$
Dus de tweede coefficient is de afgeleide van de eerste. en wat in het voorbeeld kader staat is compacte notatie.
2. Stel dat de randvoorwaarden gescheiden zijn (rvw waarin enkel a/b voorkomt)
$$\alpha_1 y(a) + \alpha_3 y'(a) = 0.$$
$$\beta_2 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0.$$
of periodieke rvw
$$y(a) = y(b).$$
$$y'(a) = y'(b).$$
met $p(a) = p(b)$

Om terug te komen op dat vorige voorbeeld

Voorbeeld 3.3.2 (Functies die interval $[0, \pi]$ afbeelden op complexe vlak)

$$\begin{cases} D(L) = \left\{ y \in C^2([0,\pi], \mathbb{C}) : y(0) = 0, y(\pi) = 0 \right\} \\ Ly = y \end{cases}.$$

$$Ly = \lambda y, y \neq 0, y \in D(L).$$
$$\to y''(x) = \lambda y.$$
$$\implies \begin{cases} y''(x) = \lambda y(x) \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases}.$$

Hebben we te maken met een symmetrisch probleem?

$$Ly = 1y''(x) + 0y'(x) + 0y(x) \iff a_0 = 1, a_1 = 0.$$

Als je kijkt naar de vorm van de operator zie je dat deze juist is. Als je kijkt naar de rvw, in de eerste komt enkel nul voor in de tweede enkel pi. **Gescheiden rvw.** $\implies$ we hebben te maken met een symmetrisch probleem, dus reële eigenwaarden. Laten we deze berekenen.

- $\lambda = 0$

  $$y''(x) = 0 \iff y(x) = c_1 + c_2 x.$$

  De algemene oplossing is een veelterm van de eerste graad. rvw gebruiken;

  $$y(x) = 0.$$

  Enkel de nuloplossing voldoet, triviale oplossing die niets zegt.

- $\lambda > 0$ Oplossing zal ofwel een combinatie zijn van exponentiëlen

  $$\begin{cases} \exp\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\ \exp\left(-\sqrt{\lambda}x\right) \end{cases}.$$

  of combinatie van hyperbolische functies (dus evident zijn die twee hetzelfde maarja)

  $$y(x) = c_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

  als we hierop de rvw gebruiken

  $$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \implies c_1 = 0.$$
  $$c_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0.$$

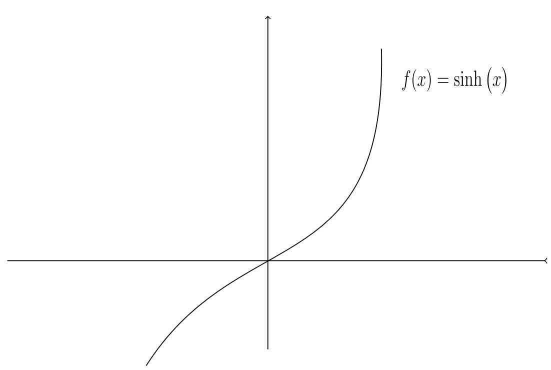
  

  Figure 3.1: sinh

  Die functie heeft geen positieve nulpunten dus wederom nuloplossing.

- $\lambda < 0$:
$$y(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$
Moet met matlab bekeken worden maar mij niet vragen hoe. rvw
$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0 \implies c_2 = 0.$$
$$c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = 0.$$
wow eindelijk een oplossing.
$$\sqrt{-\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \ldots \to \lambda_n = -n^2.$$
$$\implies X_n(x) = c_2 \sin\left(nx\right).$$
Dan voldoe je aan diffvergelijking en rvw. Oneindig veel eigenfunctie $\sin\left(nx\right)$ en dus op constante na!

3.3.2 Visualisatie van deze eigenfunctie

$$y''(x) = \lambda y, y(0) = 0, y(\pi) = 0.$$
$$\phi_n(x) = \sin\left(nx\right) n = 1, 2, \ldots.$$

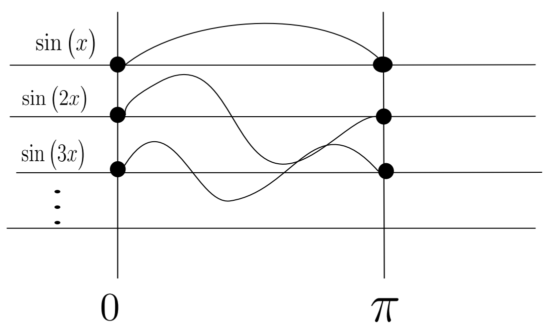


Figure 3.2: eigenfuncties

dit komt neer op een fouriersinusreeks van oneven uitbreiding van f
$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(nx\right), a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin\left(nx\right) \mathrm{dx}.$$
dit is de fouriersinusreeks van oneven uitbreiding f op $[-\pi, \pi]$

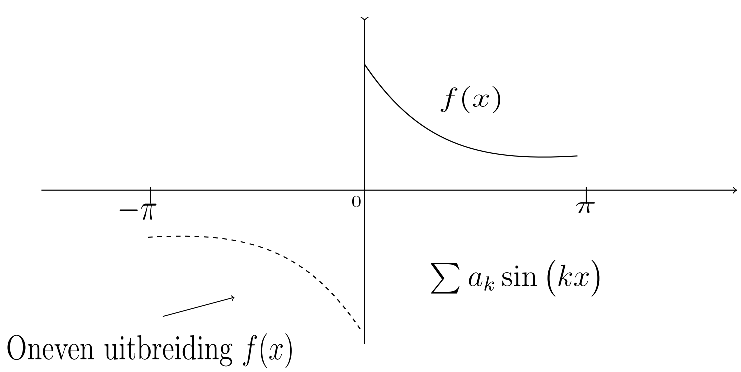


Figure 3.3: Uitbreiding

Een fouriersinusreeks kunnen we ook interpreteren als expansie van de functie in de oplossingen van dit eigenwaardeprobleem.

3.3.3 tweede voorbeeld

Voorbeeld 3.3.3 (Actie is hetzelfde)

$$y''(x) = \lambda y(x).$$
$$y'(0) = 0.$$
$$y'(L) = L.$$

Het verschil is dat we hier te maken hebben met afgeleiden als rvw.

- $\lambda = 0 : y(x) = c_1 + c_2 x, y'(x) = c_2$
  $$y'(0) = y'(L) = c_2 = 0 \implies \lambda_0 = 0.$$
  is een eigenwaarde; $\phi_0(x) = 1$ **Alle constante functies zijn eigenfuncties.**
- $\lambda > 0$
  $$y(x) = c_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda} x\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda} x\right).$$
  $$y'(x) = c_1 \sqrt{\lambda} \sinh\left(\sqrt{\lambda} x\right) + \sqrt{\lambda} \cosh\left(\sqrt{\lambda} x\right).$$
  de randvoorwaarde zegt nu dat de afgeleide in nul nul moet zijn.
  $$\rightarrow c_1 \sqrt{\lambda} \cdot 0 + c_2 \sqrt{\lambda} \cdot 1 = 0 \implies c_2 = 0.$$
  De weede randvoorwaarde zegt dat de afgeleide in het punt L nul moet zijn.
  $$\rightarrow c_1 \sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda} L\right) = 0.$$
  sinh heeft voor een positief element geen enkel nulpunt. We kunnen enkel aan deze rvw voldoen als $c_1 = 0$. Er blijft niets meer over.
- $\lambda < 0$
  $$y(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda} x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda} x\right).$$

  Opmerking 3.3.1

  Lambda is negatief daarom de min lambda onder de wortel, snap wel nog niet helemaal waarom dat precies mag

  $$y'(x) = -c_1 \sqrt{-\lambda} \sin\left(\sqrt{-\lambda} x\right) + c_2 \sqrt{-\lambda} \cos\left(\sqrt{-\lambda} x\right).$$
  We vullen de rvw in
  $$\begin{cases} y'(0) = c_2 \sqrt{-\lambda} = 0 \implies c_2 = 0 \\ -c_1 \sqrt{-\lambda} \sin\left(\sqrt{-\lambda} L\right) = 0 \end{cases}.$$
  We hebben een uitweg, er staat een sinus.
  $$\sqrt{-\lambda} L = n\pi, n = 1, 2, \ldots.$$
  $$\implies \lambda_n = \frac{-n^2 \pi^2}{L^2}, n = 1, 2, \ldots.$$
  voor de eigenfuncties kijken we naar wat overblijft.
  $$\phi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

We hadden de eigenfuncties ook makkelijk kunnen bepalen door na te denken over het probleem.

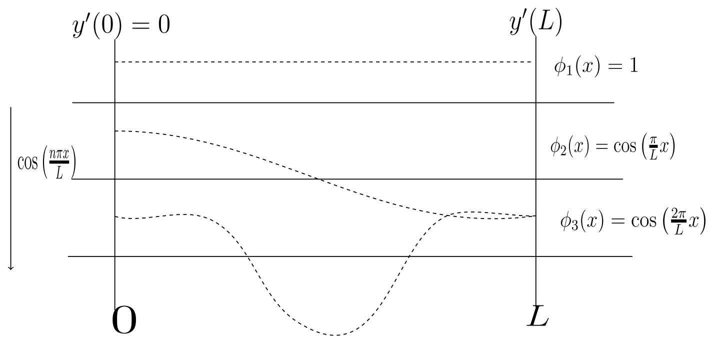


Figure 3.4: visualisatie-van-oplossing

Voorbeeld 3.3.4 (Laatste voorbeeld)

$$y''(x) = \lambda y(x).$$
$$y(0) = 0.$$
$$hy(L) + y'(L) = 0, (h, L > 0).$$

- $\lambda = 0$
$$y(x) = c_1 + c_2 x, y'(x) = c_2.$$
$$y(0) = c_1 = 0.$$
$$hy(L) + y'(L) = hc_1 + hc_2 L + c_2 = 0 \implies c_1 = c_2 = 0.$$
dit is geen eigenwaarde, triviaal
- $\lambda > 0:$
$$y(x) = c_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$
$$y'(x) = \sqrt{\lambda}\left(c_1 \sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right) + c_2 \cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$
$$\iff y(0) = c_1 = 0.$$
$$hy(L) + y'(L) = hc_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda}L\right) + \sqrt{\lambda}c_2 \cosh\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0.$$
$$\implies c_1 = c_2 = 0.$$
opnieuw triviaal geen eigenwaarde.
- $\lambda < 0:$
$$y(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$
$$y'(x) = \sqrt{-\lambda}\left(-c_1 \sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\right).$$
$$y(0) = c_1 = 0.$$
$$hy(L) + y'(L) = hc_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}L\right) + \sqrt{-\lambda}c_2 \cos\left(\sqrt{-\lambda}L\right) = 0.$$
Waarom is deze uitdrukking nul?
$$c_2\left[h \cdot \sin\left(\sqrt{-\lambda}L\right) + \sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}L\right)\right] = 0.$$

ofwel is $c_2 = 0$ maar dan enkel triviale oplossing. Andere mogelijkheid is dat de tweede factor nul is (tussen vierkante haakjes).

$$\iff \sin\left(\sqrt{-\lambda}L\right) = \frac{\sqrt{-\lambda}L}{hL}\cos\left(\sqrt{-\lambda}L\right).$$

$$\iff \tan\left(\sqrt{-\lambda}L\right) = -\frac{\sqrt{-\lambda}L}{hL}.$$

we substitueren $\sqrt{-\lambda}L = \mu$

$$\iff \tan\left(\mu\right) = -\frac{\mu}{hL}.$$

met h en L gegeven constanten. Deze vergelijking heeft oneindig veel oplossingen.

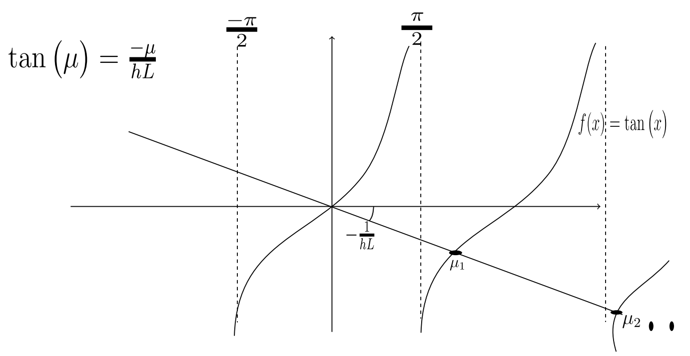


Figure 3.5: tangens

We hebben oneindig veel oplossingen μ_i

$$\lambda_n = \frac{-\mu n^2}{L^2}, n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Voor de eigenfuncties

$$\phi_n(1) = \sin\left(\sqrt{-\lambda_n}x\right) = \sin\left(\frac{\mu_n x}{L}\right).$$

1. Orthogonaliteitseigenschap

$$\int_0^L \sin\left(\frac{\mu_n x}{L}\right)\sin\left(\frac{\mu_m x}{L}\right)\mathrm{dx} = 0, n \neq m.$$

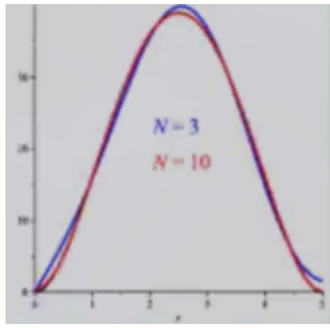
   We weten dat dit moet voldaan zijn omdat we te maken hebben met een symmetrisch probleem. tov $w(x) = 1$. Je kan dit aantonen met inverse formules simpson, maar doe toch maar niet.

2. Convergentie eigenschap

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\mu_n x}{L}\right).$$

   waar

$$a_n = \frac{\int_0^L \sin\left(\frac{\mu_n x}{L} f(x)\mathrm{dx}\right)}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{\mu_n x}{L}\right)\mathrm{dx}}.$$



Dit probleem zal later nog belangrijk zijn voor warmtevergelijking, dus zorg dat je dit goed herhaalt.

3.3.4 Periodieke rvw

Voorbeeld 3.3.5 (Dubbele eigenwaarden)
Nu hebben we te maken met periodieke rvw.

$$y''(x) = \lambda y(x).$$

$$y(\pi) = y(\pi).$$

$$y'(-\pi) = y'(\pi).$$

met Ly van de vorm

$$Ly = p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x).$$

waarbij

$$p(x) = 1, q(x) = 0.$$

Dus afg. coeff 1 is gelijk aan coeff 0. We kunnen zoeken naar **reële eigenwaarden**

- $\lambda = 0$

$$y(x) = Ax + B.$$

$$-A\lambda + B = A\lambda + B.$$

$$y'(x) = A.$$

$$A = A.$$

$$-A\pi = A\pi \implies A = 0.$$

$$\phi_0(x) = 1, \lambda_0 = 0.$$

- $\lambda < 0$

$$y(x) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

$$y'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

$$\implies \phi_n(x) = A_n\cos(nx) + B_n\sin(nx).$$

$$\begin{cases} A\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \mp B\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \\ A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) + B\sqrt{\lambda}\cos(\lambda\pi) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) + B\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \end{cases}.$$

$$\implies \begin{cases} 2B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\ 2A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \end{cases}.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\ A\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \end{cases}.$$

We beschouwen de nuloplossing waar A en B gelijk zijn aan nul niet

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \ldots.$$

$$x_n = n^2.$$

Opmerking 3.3.2

Vaak ga je voorwaarden vinden zodat je a in functie van b kunt schrijven of omgekeerd, maar in dit geval niet. We vinden hier een dubbele eigenwaarde, dit is he enige probleem waarbij dit voorkomt.

3.4 Sturn-Liouvilleproblemen

Definitie 3.4.1: Sturn-Liouvilleprobleem

Gegeven een functie r die voldoet aan $r(x) > 0, x \in [a,b]$ zoeken we waarden van $\lambda \in \mathbb{C}$ waarvoor de differentiaalvergelijking

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x).$$

met randvoorwaarden

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_3 y'(a) = 0.$$

$$\beta_2 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

een niet-triviale oplossing heeft.

De tweede coefficient is de afgeleide van de eerste. Het is een direkte veralgemening van het symmetrische eigenwaardeprobleem.

Opmerking 3.4.1

λ noemen we een eigenwaarde van het Sturn-Liouvilleprobleem $y(x)$ de overeenkomstige eigenfunctie

Eigenschap:
De eigenwaarden van een Sturn-Liouvilleprobleem zijn reëel.

Eigenschap:
Eigenfuncties $\phi_n(x) \wedge \phi_m(x)$ horend bij verschillende eigenwaarden λ_n en λ_m van een Sturn-Liouvilleprobleem zijn orthogonaal over het interval $[a,b]$ ten opzichte van de gewichtsfunctie $w(x) = r(x)$

$$\Longleftrightarrow \int_a^b r(x)\phi_n(x)\phi_m(x)\mathrm{dx} = 0.$$

In andere woorden worden eigenschappen van ervoor behouden en dit is eigenlijk al vrij uitgebreid eerder besproken. Maar nu geldt orthogonaliteit tov r.
Voor verdere uitwijding hieromtrent. We weten dat L een zelftoegevoegde operator is

$$\left(\phi_n, L\phi_m\right) = \left(L\phi_n, \phi_m\right).$$

ϕ_m is een eigenfunctie dus we kunnen zeggen dat

$$L\phi_m = \lambda_m r(x)\phi_m(x).$$

$$L\phi_n = \lambda_n r(x)\phi_n(x).$$

Daardoor verschijnt $r(x)$ ook in orthogonaliteitseigenschap.

Eigenschap:
Met behulp van eigenfuncties kun je een basis vormen. Voor een stuksgewijze effen functie $f(x)$ op $[a,b]$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x).$$

waarbij

$$a_n = \frac{\int_a^b r(x)f(x)\phi_n(x)\mathrm{dx}}{\int_a^b r(x)\phi_n(x)^2}.$$

onder bepaalde voorwaarden zoals dat L normaal is $p(x) \neq 0, x \in [a,b]$

3.4.1 compacte notatie

Die operator L kan ook compact genoteerd worden. op dit moment staat het dus als volgt;

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x).$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_3 y'(a) = 0.$$

$$\beta_2 y(b) + \beta_4 y'(b) = 0.$$

we kunnen ook L noteren;

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(p(x)\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right).$$

daar kun je de kettingregel op toepassen en de vergelijking terugvinden. Deze notatie ga je terugzien in slides en cursus.

3.4.2 Logica achter ontbinding

$$f(x)\phi_k(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x)\phi_k(x).$$

$$\int_a^b r(x)f(x)\phi_k(x)\mathrm{dx} \approx \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b r(x)\phi_n(x)\phi_k(x)\mathrm{dx}.$$

Het enige dat zal overblijven is $n = k$, dat is de enige term die blijft.

$$a_k \int_a^b r(x)\phi_k(x)^2\mathrm{dx}.$$

$$\implies a_k = \frac{\int_a^b r(x)f(x)\phi_k(x)\mathrm{dx}}{\int_a^b r(x)\phi_k(x)^2\mathrm{dx}}.$$

zeer gelijkaardige redenering als eerder.

3.4.3 Voorbeeld

Voorbeeld 3.4.1

$$xy''(x) + y'(x) = \lambda \frac{1}{x} y(x).$$

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y(e) = 0 \end{cases}.$$

Zoals het nu in de slides staat is alles genoteerd zodat L zelftoegevoegde vorm is.

- $\lambda = 0$ **opgelost met matlab, weet nog niet hoe dat moet**

  $$y(x) = c_1 + c_2 \ln(x).$$

  we gebruiken de rvw, geven ze in

  $$c_1 = 0 \wedge c_2 = 0.$$

  we vinden dus de triviale oplossing
- $\lambda > 0$

  $$y(x) = c_1 \cdot x^{\sqrt{\lambda}} + c_2 \cdot x^{-\sqrt{\lambda}}.$$

  we geven opnieuw rvw in en vinden enkel de triviale oplossing

  $$c_1 = 0 \wedge c_2 = 0.$$
- $\lambda < 0$

  $$y(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{-\lambda}\ln(x)\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}\ln(x)\right).$$

  en als we hier de rvw invullen

  $$c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \implies c_1 = 0.$$

  tweede rvw;

  $$c_2 \sin\left(\sqrt{-\lambda}\ln(e)\right) = 0.$$

  we zeggen $c_2 \neq 0$ dan met het argument van de sinus nul zijn.

  $$\sqrt{-\lambda} = n\pi \implies \lambda_n = -n^2\pi^2.$$

  $$\implies \phi_n(x) = \sin\left(n\pi \ln(x)\right).$$

Belangrijk om te beseffen dit is een standaard sturn-liouvilleprobleem dus alle eigenschappen moeten gelden.

$$\int_1^e \sin\left(n\pi\ln(x)\right)\sin\left(m\pi\ln(x)\right)\mathrm{dx} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(nt\right)\sin\left(mt\right)\mathrm{dt} = 0, n \neq m.$$

met substitutie

Stelling: Transformatie
Willekeurig eigenwaardeprobleem gegeven

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = \lambda y(x).$$

met gescheiden randvoorwaarden

1. $a_0'(x) = a_1(x)$ symmetrisch eigenwaardeprobleem, eigenfuncties orthogonaal tegenover gewichtsfunctie $w(x) = 1$

2. $a_0'(x) \neq a_1(x)$ **dan doe je een transformatie tot**

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x).$$

waarbij

$$p(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right).$$

$$q(x) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)} p(x).$$

$$r(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)}.$$

Indien $r(x) > 0$: sturn liouvilleprobleem! Eigenfuncties orthogonaal tov $w(x) = r(x)$

4 Eerste oefenzitting