Analyse III
lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

Inhoudstafel

Deel I

Partiële Differentiaalvergelijkingen

I.1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

I.2 Fourierreeksen

I.3 Sturm-Liouvilleproblemen

I.4 Eerste oefenzitting

I.5 Partiële differentiaalvergelijkingen

I.6 Verdere partiële differentiaalvergelijkingen

I.7 Tweede oefenzitting

I.8 Derde oefenzitting

I.9 Laplace trasnformatie

9.1 Definities en eigenschappen

Definitie 9.1.1: Laplace transformatie

Zij f een reële functie op $(0,+\infty)$. Als

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{dt}.$$

convergeert voor een waarde $p \in \mathbb{C}$ dan definieert deze integraal een functie van p die we de laplacetransformatie of Laplace-getransformeerde van $f(t)$ noemen.

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{dt}.$$

$F(p)$ wordt de beeldfunctie genoemd en $f(t)$ de originele functie

Definitie 9.1.2: Convergentieabscis

Als $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}$ bestaat, dan definiëren we de convergentieabscis p_0 als

$$p_0 = \inf\left\{p \in \mathbb{R} \middle| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{dt} \text{ is convergent}\right\}.$$

Dus de infimum waarde p_0 waarvoor de laplace transformatie kan bestaan, de kleinste waarde waarvoor die zal beginnen convergeren. $\forall p < p_0$: divergentie, en dan voor p_0 zelf kan allebei zijn, en erboven convergentie.

Voorbeeld 9.1.1

Voorbeelden van belangrijke laplace getransformeerden

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{at}\mathrm{dt} = \frac{1}{p-a}, p > a = p_0.$$

$$\mathscr{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{p}, p > 0.$$

maar dat is eigenlijk een speciaal geval van de vorige. Laplace transformatie van de heavyside;

$$\mathscr{L}\left\{\text{heavyside}(t)\right\} = \frac{1}{p},\ \text{heavyside}(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}.$$

Voorbeeld 9.1.2 (Laplace transformatie van de sinus)

$$\mathscr{L}\left\{\sin\left(t\right)\right\} = \frac{1}{p^2+1}, p > 0.$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin\left(t\right)\mathrm{dt}.$$

$$\iff -\cos\left(t\right)e^{-pt}|_0^{+\infty} - p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos\left(t\right)\mathrm{dt}.$$

dat eerste stukje gaat naar één en dan nu nog eens partiële integratie

$$\iff 1 - p\left(\sin\left(t\right)e^{-pt}|_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt}\sin\left(t\right)\mathrm{dt}\right).$$

$$1 - p^2F(p) \iff (1+p^2)F(p) = 1.$$

$$\implies F(p) = \frac{1}{1+p^2}.$$

Vrij veel rekenwerk dus. Die van cosinus is vrijwel analoog

$$\mathscr{L}\left\{\cos\left((t)\right)\right\} = \frac{p}{p^2+1}.$$

die gaan we later op andere manier berekenen.

Definitie 9.1.3: Stuksgewijze continue functie

De functie $f(t)$ is stuksgewijs continu op $[0, +\infty)$ als $f(0+)$ bestaat en op elk begrensd deelinterval slechts een eindig aantal punten t_i een discontinuiteit heeft waar $f(t_i+), f(t_i-)$ bestaan.

Definitie 9.1.4: Functie van exponentiele orde

$f(t)$ is van exponentiële orde op $[0, +\infty)$ als $\exists C, \alpha$ zodat $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \forall t > 0$
Dus we moeten $f(t)$ kunnen afschatten met een exponentiële functie.

Voorbeeld 9.1.3
hier een voorbeeld van een functie om af te schatten

$$At^n e^{\alpha t}\cos\left(bt\right), \forall t > 0.$$

exponentiële schat zichzelf af, die cosinus oscilleert en is kleiner dan één dus vervangen door één, voor t^n gebruiken we

$$n\ln(t) \leq nt \implies t^n < e^{nt}.$$

$$|A^n t^n e^{at}\cos\left(bt\right)| < |A|e^{(n+a)t}.$$

De voorwaarden in de stelling zijn voldoende, maar niet nodig.

Stelling: Bestaansvoorwaarde voor laplace getransformeerde
Een functie die stuksgewijze continu is en **van exponentiële orde** op $[0, +\infty)$, heeft een laplace getransformeerde.

Bewijs 9.1.1:

We tonen aan dat $\exists a : \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$ absoluut convergeert $\forall p > a$ Er geldt dat

$$0 \leq |e^{-pt} f(t)| \leq Ce^{(\alpha-p)t}.$$

en

$$\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{p-\alpha}.$$

$$F(p) = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} \text{ bestaat en dus: } \forall p > \alpha \wedge 0 \leq |F(p)| \leq \frac{C}{p-\alpha}.$$

Opmerking 9.1.1 Voldoende, maar niet nodige voorwaarde

Neem

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

deze is niet stuksgewijze continu $\in [0, +\infty)$ door gedrag in oorsprong. maar heeft toch laplace getransformeerde.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{pt}\mathrm{d}t \text{ convergent.}$$

Idee of vraag 9.1.1 Laplace getransfomeerde van $\frac{1}{t}$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{t}\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

Deze functie heeft geen laplace getransformeerde, want bekijk $t = 0$

$$\int_0^a \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(t)|_0^a = +\infty.$$

De rest zou wel kunnen convergeren maar deze singulariteit zorgt ervoor **dat de integraal divergeert.**
Stel dat we $\frac{1}{\sqrt{t}}$ bekijken in $t = 0$

$$\begin{cases} e^{-pt} \sim 1 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \end{cases}.$$

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^a t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t = 2\sqrt{a}.$$

Herrinnering 9.1.1

$$\int t^n \mathrm{d}t = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C.$$

daarom convergeert die, en niet voor $\frac{1}{t}$.

Opmerking 9.1.2 FORMULARIUM

Alle eigenschappen hieronder besproken staan op het formularium dus je moet ze niet echt vanbuiten kennen, gewoon begrijpen zoals ze hier worden beredeneerd. Basisfuncties zoals $\mathscr{L}\{\sin(t)\}$ staan er drie op bij de inverse transformaties.

We gaan eigenschappen gebruiken om makkelijker de transformaties te berekenen

Eigenschap: Eenduidigheid
Als twee functies dezelfde laplace transformatie hebben, dan zijn de functies ook aan elkaar gelijk

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{g(t)\} \implies f(t) = g(t), t \geq 0.$$

behalve in punten van discontinuiteit. Dat heeft te maken met hoe een integraal gedefinieerd is.

Eigenschap: Lineariteit
Dit heeft te maken met het feit dat die transformatie een integraal is

$$\mathscr{L}\{af(t)+bg(t)\} = a\mathscr{L}\{f(t)\}+b\mathscr{L}\{g(t)\}.$$

Enkele voorbeelden;

$$\mathscr{L}\{\cosh(at)\} = \mathscr{L}\{\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2-a^2}.$$

$$\mathscr{L}\{\sinh(at)\} = \mathscr{L}\{\frac{e^{\alpha t}-e^{\alpha t}}{2}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right) = \frac{a}{p^2-a^2}.$$

Eigenschap: Eerste asymptotische eigenschap

$$\lim_{p\to\infty} \mathscr{L}\{f(t)\} = 0.$$

Bewijs 9.1.2:

Bewijs voor een functie die van exponentiële orde is;

$$0 \leq |F(p)| \leq \frac{C}{p-\alpha} \implies 0 \leq \lim_{p\to\infty} |F(p)| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{C}{p-\alpha} = 0.$$

Eigenschap: Verschuivingseigenschap

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = F(p-a).$$

Bewijs 9.1.3:

mbhv eigenschappen van machtsverheffing

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{at}f(t)\mathrm{dt} = \int_0^{+\infty} e^{-(p-a)t}f(t)\mathrm{dt}.$$

Bijvoorbeeld:

$$\mathscr{L}\left\{1\right\} = \frac{1}{p} \implies \mathscr{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{p-a}.$$

Eigenschap: Tweede verschuivingseigenschap
Dit is in het tijdsdomein

$$\mathscr{L}\left\{\text{heavyside}(t-a)f(t-a)\right\} = e^{-ap}F(p).$$

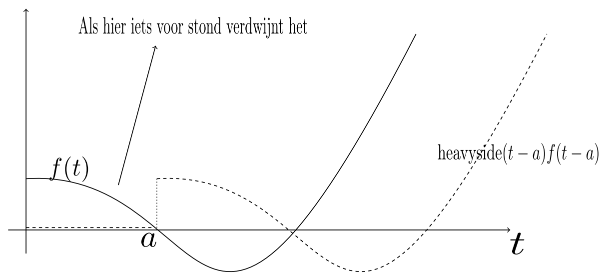


Figure I.9.1: tijdsdomein-verschuiving

Bewijs 9.1.4:

stel

$$g(t) = \text{heavyside}(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0, 0 \leq t < a \\ f(t-a), t \geq a \end{cases}.$$

$$\mathscr{L}\left\{g(t)\right\} = \int_0^a \ldots + \int_a^{+\infty} e^{-pt} f(t-a)\mathrm{dt}.$$

die integraal van nul tot a wordt dus nul. We gebruiken transformatie $u = t - a$

$$\iff \int_0^{+\infty} e^{-p(u+a)} f(u)\mathrm{du} = e^{-ap}F(p).$$

Zorg dat je vooral deze verschuivingseigenschappen goed kent. Een voorbeeld

$$\mathscr{L}\left\{\text{heavyside}(t-a)\right\} = e^{-ap}\mathscr{L}\left\{1\right\} = \frac{e^{-ap}}{p}.$$

Eigenschap: Schaalverandering

$$\mathscr{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a}F(\frac{p}{a}), a > 0.$$

enkel toepassen met positieve a dus.

Bewijs 9.1.5:

$$\mathscr{L}\left\{f(at)\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(at)\mathrm{dt}.$$

substitutie $u = at$

$$\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{pu}{a}} f(u)\mathrm{du}.$$

$$\implies \frac{1}{a}F(\frac{p}{a}).$$

$$\mathscr{L}\left\{\sin\left(t\right)\right\} = \frac{1}{p^2+1}.$$

$$\iff \mathscr{L}\left\{\sin\left(at\right)\right\} = \frac{1}{a}\frac{1}{(\frac{p}{a})^2+1} = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

$$\implies \mathscr{L}\left\{e^{bt}\sin\left(at\right)\right\} = \frac{a}{(p-b)^2+a^2}.$$

Eigenschap: Vermenigvuldigen met t^n

$$\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Als we in het t-domein vermenigvuldigen met een macht van t, dan moeten we in het p-domein zoveel keer afleiden en rekening houden met een tekenwissel.

Bewijs 9.1.6: Bewijs via inductie op n

- $n = 1$

$$\frac{d}{dp}F(p) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp}e^{-pt} f(t)\mathrm{dt} \implies F'(p) = -\int_0^{+\infty} e^{-pt} t f(t)\mathrm{dt}.$$

- $n \longrightarrow n+1$

$$\mathscr{L}\left\{t^{n+1} f(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{t(t^n f(t))\right\} = -\frac{d}{dp}\mathscr{L}\left\{t^n f(t)\right\}.$$

$$\iff -\frac{d}{dp}\left((-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}\right) = (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}F(p)}{dp^{n+1}}.$$

$$\mathscr{L}\left\{t\right\} = -\frac{d}{dp}\mathscr{L}\left\{1\right\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2}.$$

$$\mathscr{L}\left\{t^2\right\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{2}{p^2}.$$

$$\mathscr{L}\left\{t^3\right\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^3}\right) = \frac{6}{p^4}.$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Eigenschap: Deling door t

$$\mathscr{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_p^{+\infty} F(u)\mathrm{du}.$$

Bewijs 9.1.7:

Stel

$$g(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

en

$$G(p) = \mathscr{L}\{g(t)\}.$$

$$\iff f(t) = tg(t) \iff F(p) = -G'(p).$$

$$G'(p) = -\int_a^p F(u)\mathrm{du}.$$

$$\implies G(p) = \int_p^a F(u)\mathrm{du},\ \lim_{p\to\infty} G(p) = 0 \implies a = \infty.$$

$$\implies G(p) = \int_p^\infty F(u)\mathrm{du}.$$

$$\mathscr{L}\{\frac{\sin(t)}{t}\} = \int_p^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u)|_p^\infty.$$

Herrinnering 9.1.2

$$\left(\arctan(p) + \arctan(\frac{1}{p})\right)' = \frac{1}{1+p^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{p^2}} \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) = 0.$$

$$\iff \frac{\pi}{2} - \arctan(p) = \arctan(\frac{1}{p}).$$

Eigenschap: Periodieke functie
stel $f(t)$ een periodieke functie periode T

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-pt} f(t)\mathrm{dt}}{1-e^{-pt}}.$$

Bewijs 9.1.8:

$$F(p) = \int_0^T e^{-pt} f(t)\mathrm{dt} + \int_T^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{dt}.$$

$$\iff \int_0^T e^{-pt} f(t)\mathrm{dt} + \int_0^{+\infty} e^{-p(u+T)} f(u+T)\mathrm{du}.$$

$$\implies \int_0^T e^{-pt} f(t)\mathrm{dt} + e^{-pt} F(p).$$

Voorbeeld 9.1.4 (Pulsfunctie)

$$f(t) = \begin{cases} 1, t \in [0,1] \\ 0, t \in [1,2) \end{cases} .$$

met periode van f $T = 2$

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^2 e^{-pt} f(t)\mathrm{dt}}{1-e^{-2p}}.$$

die integraal van 1 tot 2 gaat nul zijn omdat $f(t)$ nul is op dat interval!

$$\iff \frac{\int_0^1 e^{-pt}\mathrm{dt}}{1-e^{-2p}} = \frac{\frac{1}{p}(1-e^{-p})}{1-e^{-2p}}.$$

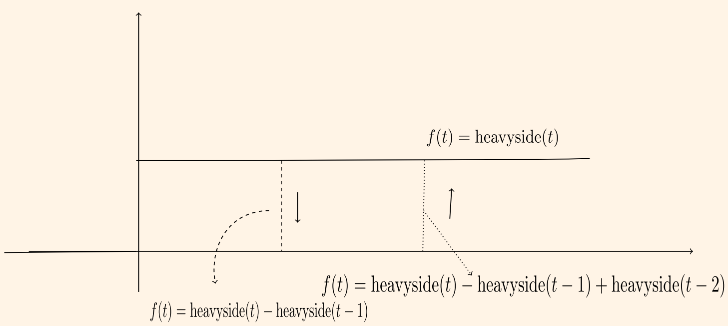
$1 - e^{-2p} = (1-e^{p})(1+e^{p})$

$$\implies \frac{1}{p(1+e^{-p})}.$$

We zouden dit ook anders kunnen doen mbhv heavyside functies.

$$f(t) = \text{heavyside}(t) - \text{heavyside}(t-1) + \text{heavyside}(t-2) - \dots.$$

Probeer je voor te stellen hoe de blokken telkens op elkaar worden geplaatst tot het hetzelfde eindigt.



$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} - \frac{e^{-3p}}{p} + \frac{e^{-4p}}{p} - \dots.$$

$$\iff \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p} + e^{-2p} - e^{-3p} + e^{-4p} - \dots\right) = \frac{1}{p(1+e^{-p})}.$$

meetkundige reeks! zelfde resultaat.

Eigenschap: Transformatie van afgeleide

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0+).$$

Bewijs 9.1.9:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f'(t)\mathrm{dt}.$$

$$\iff e^{-pt} f(t)|_0^{\infty} + p\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{dt}.$$

voor voldoende grote p geldt

$$\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0.$$

daaruit volgt het gestelde

$$\implies pF(p)) - f(0+).$$

$$\mathscr{L}\{\cos(t)\} = p\mathscr{L}\{\sin(t)\} - \sin(0+) = \frac{p}{p^2+1}.$$

omdat $\sin(0) = 0$, en nu kunnen we lijstje volledig maken;

$$\mathscr{L}\{\cos(at)\} = \frac{1}{a}\frac{\frac{p}{a}}{(\frac{p}{a})^2+1} = \frac{p}{p^2+a^2}.$$

$$\mathscr{L}\{e^{bt}\cos(at)\} = \frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}.$$

Eigenschap: Algemene afgeleide eigenschap
Voor twee keer afleiden

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = p\mathscr{L}\{f'(t)\} - f'(0+) = p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+).$$

voor n keer afleiden

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^nF(p) - p^{n-1}f(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+).$$

maar dit staat op het formularium dus je moet het niet vanbuiten kennen.

Eigenschap: Transformatie van een integraal

$$\mathscr{L}\{\int_0^t f(u)\mathrm{du}\} = \frac{F(p)}{p}.$$

Bewijs 9.1.10:

Stel

$$g(t) = \int_0^t f(u)\mathrm{du} \wedge G(p) = \mathscr{L}\{g(t)\}.$$

$$f(t) = g'(t) \implies F(p) = pG(p) - g(0+) = pG(p).$$

dus we maken gewoon gebruik van de afgeleide eigenschap om dit makkelijk aan te tonen.

$$\mathscr{L}\{Si(t)\} = \mathscr{L}\Big\{\int_0^t \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{du}\Big\} = \frac{1}{p}\arctan\Big(\frac{1}{p}\Big).$$
$$\mathscr{L}\{Shi(t)\} = \mathscr{L}\Big\{\int_0^t \frac{\sinh(u)}{u}\mathrm{du}\Big\} = \frac{1}{p}\int_p^{+\infty}\frac{\mathrm{du}}{u^2-1} = \frac{1}{2p}\ln\left(\frac{p+1}{p-1}\right).$$

Eigenschap: Tweede en derde asymptotische eigenschap
Als die limieten bestaan!

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0+).$$

deze eigenschap zegt de limiet voor p naar oneindig van laplace transformatie is nul.

$$\lim_{p\to 0+} pF(p) = f(t).$$

het is niet zeker dat deze bestaan, maar als ze bestaan dan geldt dit.

Bewijs 9.1.11:

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}f'(t)\mathrm{dt} = pF(p) - f(0+).$$

- Neem in de integraal en in het rechterlid de limiet voor $p \longrightarrow \infty$

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) - f(0+) = 0.$$

  dit komt omdat de dalende exponentiële zo sterk zal dalen dat die integraal nul wordt.

- Neem in de integraal en in het rechterlid de limiet $p \longrightarrow 0+$

$$\int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{dt} = \lim_{p\to 0+} pF(p) - f(0+).$$
$$\lim_{t\to\infty} f(t) - f(0+) = \lim_{p\to 0+} pF(p) - f(0+).$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{du} = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{du}.$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{p\to 0+} p\mathscr{L}\{Si(t)\}.$$
$$\lim_{p\to 0+}\arctan\Big(\frac{1}{p}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Besluit:-

- Eenduidigheid; als twee functies dezelfde laplace transform hebben, zijn ze gelijk – behalve op plaatsen waar de functies discontinu zijn.
- Leaneariteit
- Verschuiven met exponentiële
- Verschuiven in tijdsdomein met heavyside
- vermenigvuldigen met t of p $\Longleftrightarrow$ afleiden!
- Delen door t of op $\Longleftrightarrow$ integreren!

- Schaalfactoren
- periodieke functie
- Asymptotisch gedrag

Je moet gewoon weten hoe je elke eigenschap gebruikt.

9.2 Convoluties

Wat doen we met producten van functies? Daarvoor ontbreekt een eigenschap. Daarom de convoluties.

Definitie 9.2.1: Convolutie

$$\int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{du}.$$

$$\equiv f * g.$$

Voorbeeld 9.2.1

$$\sin * \cos(t).$$

$$\iff \int_0^t \sin(t-u)\cos(u)\mathrm{du}.$$

$$\iff \sin(t)\int_0^t \cos^2(u)\mathrm{du} - \cos(t)\int_0^t \cos(u)\sin(u)\mathrm{du}.$$

$$\iff \sin(t)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right) - \cos(t)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t)\right).$$

$$\iff \frac{1}{2}t\sin(t) + \frac{\sin(t)\sin(2t) + \cos(t)\cos(2t) - \cos(t)}{4}.$$

som en verschilformules $\sin(t)\sin(2t) + \cos(t)\cos(2t) = \cos(2t-t) = \cos(t)$ waardoor dat hele stuk wegvalt.

$$\implies \frac{1}{2}t\sin(t).$$

Eigenschap: Commutativiteit

$$f * g(t) = g * f(t).$$

Bewijs 9.2.1:

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{du}.$$

$v = t - u, \mathrm{du} = -\mathrm{dv}$

$$\iff \int_t^0 f(v)g(t-v)(-1)\mathrm{dv}.$$

$$\iff \int_0^t g(t-v)f(t)\mathrm{dv}.$$
$$\implies g * f(t).$$

Eigenschap: Convolutiestelling
Dit is de belangrijke eigenschap die ervoor zorgt dat we convoluties hier gebruiken ig

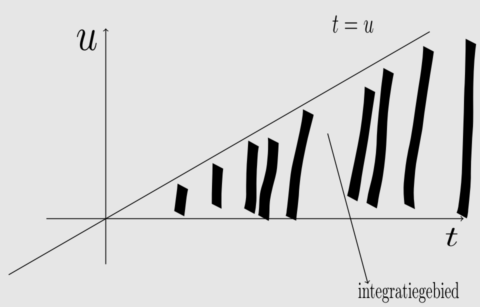
$$\mathscr{L}\left\{f * g(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}\mathscr{L}\left\{g(t)\right\}.$$
$$= F(p)\cdot G(p).$$

merk zeker op dat dit dus een gewoon product is

Bewijs 9.2.2: Belangrijk bewijs convolutiestelling

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-u)g(t)\mathrm{du}.$$
$$\mathscr{L}\left\{f * g(t)\right\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\cdot\left(\int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{du}\right)\mathrm{dt}.$$

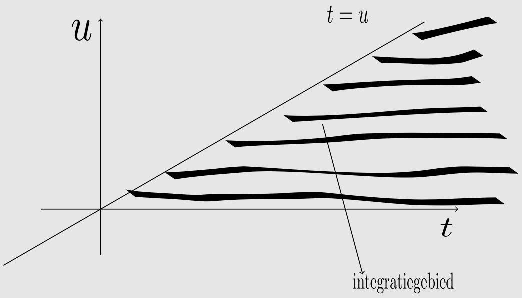
we kunnen dit interpreteren als een dubbele integraal.



$$\iff \int_0^{+\infty}\mathrm{dt}\int_0^t e^{-pt}f(t-u)g(u)\mathrm{du}.$$

we tekenen dit nieuw gebied;

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{du}\int_u^{+\infty} e^{-pt}f(t-u)g(u)\mathrm{dt}.$$



$$\Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{du} \int_u^{+\infty} e^{-pt} f(t-u)\mathrm{dt}.$$

Om de binneste integraal uit te rekenen gebruiken we een substitutie;

$$t-u = v, t = u+v.$$

$$t = u \implies v = 0.$$

$$\implies \int_0^{+\infty} g(u)\mathrm{du} \int_0^{+\infty} e^{-p(u+v)} f(v)\mathrm{dv}.$$

$$\Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-pu} g(u)\mathrm{du} \int_0^{+\infty} e^{-pv} f(v)\mathrm{dv}.$$

We zeggen dat die laatste integraal = $F(p)$, dus de laplace transformatie van kleine f. Links staat de laplace transformatie $G(p)$ van kleine g.

$$\implies \mathscr{L}\{f * g(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} \cdot \mathscr{L}\{g(t)\}.$$

We zagen al dat het convolutie product van sinus t cosinus t gelijk is aan $\frac{1}{2} t \sin(t)$, we gaan daar nu de laplace transform van berekenen.

Voorbeeld 9.2.2

$$\mathscr{L}\{\frac{1}{2} t \sin(t)\}.$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dp}\mathscr{L}\{\sin(t)\} = \frac{p}{(p^2+)^2} = \mathscr{L}\{\sin(t)\} \cdot \mathscr{L}\{\cos(t)\}.$$

9.3 Paar quizvragen uit de les

Vraag 1

Uit eigenschap van delen volgt

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{t}\right\} = \int_p^{+\infty} \mathscr{L}\{1\} \text{ du}.$$

die transformatie bestaat NIET. Onafhankelijk van eigenschappen. Anders zou de eigenschap correct toegepast staan. Rechts staat een divergente oneigenlijke integraal.

Vraag 2

Gegeven

$$F(p) = \frac{p^2+1}{2p^3+6p^2-4}.$$

gevraagd is $f(0+)$

gebruiken de tweede asymptotische eigenschap

$$\lim_{p\to\infty} pF(p) = \lim_{t\to 0+} f(t).$$

we vinden

$$f(0+) = \frac{1}{2}.$$

let erop dat die niet altijd geruikt kunnen worden als die limiet niet bestaat!

I.10 Inverse Laplacetransformatie

10.1 Gamma functie

Deze zal nodig zijn voor berekening laplace transform van enkele functies

Herrinnering 10.1.1 Gamma functie definitie

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1}\,\mathrm{dy}, \forall x > 0.$$

die convergeert.

$$= \Gamma(x).$$

herriner je ook de recursie eigenschap;

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x > 0.$$

Eigenschap: Laplacetransformatie van t^x

$$\mathscr{L}\left\{t^x\right\} = \frac{\Gamma(x+1)}{p^{x+1}}, x > -1.$$

We weten al dat deze bestaat, maar nu willen we bewijzen dat het daaraan gelijk is.

Bewijs 10.1.1:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1}\,\mathrm{du} = p^x \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{x-1}\,\mathrm{dt}.$$

we substitueren dus $u = pt$, $du = pdt$

$$\iff p^x \mathscr{L}\left\{t^{x-1}\right\}.$$

$$\implies \Gamma(x+1) = p^{x+1}\mathscr{L}\left\{t^x\right\}.$$

$$\implies \mathscr{L}\left\{t^x\right\} = \frac{\Gamma(x+1)}{p^{x+1}}, x \in \mathbb{N}.$$

Nu berekenen voor niet natuurlijke waarden

Bewijs 10.1.2: Bijzondere waarden

Stelling:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$$u = x^2, \sqrt{u} = x, du = 2x dx.$$

We gaan die gamma functie nu soort van kwadrateren, eerst met x als integratieveranderlijke en daarna met y als integratieveranderlijke.

$$\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \text{ dx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \text{ dy}.$$

We gaan dit zien als een dubbele integraal over heel $\mathbb{R}^2$.

$$\Longleftrightarrow \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \text{ dx dy}.$$

we transformeren naar poolcoördinaten, anders kun je dit niet uitrekenen. Vergeet de jacobiaan niet $J = r$.

$$\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2} \text{ dr} = 2\pi \frac{-e^{-r^2}}{2}|_0^{\infty} = \pi.$$

$$\Longrightarrow \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Met deze waarde berekent te hebben kunnen we dit nu voor veel meer waarden gebruiken.

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

$$\mathscr{L}\left\{\sqrt{t}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

10.2 Inverse Laplacetransformatie

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(p) \Longleftrightarrow f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}.$$

er zijn twee specifieke gevallen die we zullen bekijken; rationale functies en convolutiestelling

10.2.1 Rationale functies

Herrinner je deze drie functies

$$\mathscr{L}\{e^{bt}t^n\} = \frac{n!}{(p-b)^{n+1}}.$$

$$\mathscr{L}\{e^{bt}\sin(at)\} = \frac{a}{(p-b)^2+a^2}.$$

$$\mathscr{L}\{e^{bt}\cos(at)\} = \frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}.$$

Die kunnen we gebruiken om gemakkelijk de volgende inverse transformaties te doen;

$$\Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-b)^n}\right\} = \frac{e^{bt}t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{(p-b)^2+a^2}\right\} = e^{bt}\sin(at).$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}\right\} = e^{bt}\cos(at).$$

10.2.2 Convolutiestelling

Stelling: Convolutiestelling

$$F(p) = G(p)H(p).$$

waarbij je van G en H de inverse laplace transformatie op de een of andere manier (met bijvoorbeeld bovenstaande functies) kunt berekenen, dan;

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = g * h(t) = \int_0^t g(u)h(t-u)\,\mathrm{du}.$$

Dat kan moeilijk uit te rekenen zijn.

10.2.3 Voorbeelden

Voorbeeld 10.2.1

$$F(p) = \frac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)^2(p+1)}.$$

Kan die functie een laplace transformatie zijn? Denk aan eerste asymptotische eigenschap voor we zelfs beginnen aan de vraag.

$$\text{Gr(teller)} > \text{Gr(noemer)}.$$

dus het kan

$$F(p) = \frac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)^2(p+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p+1}.$$

In analyse I zagen we methode om dit snel te berekenen.

$$C = \lim_{p \to -1} \frac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)^2} = \frac{3}{2}.$$

Idee of vraag 10.2.1

De reden dat je voor C naar min één gaat, het is duidelijk dat die voor 1 niet even gemakkelijk te vinden is, maar ik weet niet exact waarom we min één gebruiken, je moet analyse I cursus nog eens bovenhalen.

$$B = \lim_{p \to 1} \frac{p^2 - 2p + 3}{p+1} = 1.$$

voor A moeten we eerst nog de afgeleide brekenen. Ik neem het over van de slides want geen zin in.

$$A = \lim_{p \to 1} \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2 - 2p + 3}{p+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

we weten

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{at}.$$

en

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^2}\right\} = te^{at}.$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = -\frac{1}{2}e^{t} + te^{t} + \frac{3}{2}e^{-t}.$$

Voorbeeld 10.2.2

$$F(p) = \frac{p^2+p-4}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}.$$

we zien direct dat de laplace transform zal bestaan.

gelukkig staat de noemer ontbonden

$$F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+5}.$$

die kwadratische factor in de noemer heeft geen reële nulputnen dus die blijft staan als kwadratische factor, in de teller staat dan lineaire factor.

$$B = \lim_{p\to 1} \frac{p^2+p-4}{p^2+2p+5} = -\frac{1}{4}.$$

$$A = \lim_{p\to 1} \frac{d}{dp}(\dots) = \frac{1}{2}.$$

Voor C en D is de formule iets ingewikkelder. Je kunt $p = 0$ of $p = 1$ invullen en op die manier een stelsel krijgen om ze gemakkelijk te vinden. Ik denk dat dat kan ben eigenlijk niet zeker, als je tijd te veel hebt kun je het eens nagaan

$$C = -\frac{1}{2}, D = -\frac{1}{4}.$$

$$\frac{-\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}}{p^2+2p+5} = \frac{-\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}}{(p+1)^2+2^2}.$$

op die manier splits je die breuk **en dan zie je dat je gemakkelijk cosinus en sinus laplace transform kunt gebruiken.**

$$\mathscr{L}\{e^{bt}\cos(at)\} = \frac{p-b}{(p-t)^2+a^2}.$$

$$\mathscr{L}\{e^{bt}\sin(at)\} = \frac{a}{(p-b)^2a^2}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{4}te^{t} - \frac{1}{2}e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{8}e^{-t}\sin(2t).$$

Opmerking 10.2.1

Dus ik hoop dat je goed inziet; er stond vanboven die $\frac{1}{4}$ maar vanonder die twee in het kwadraat dus we nemen $a = 2$ en dan wordt er gedeeld door 8 bij die laatste term. En je ziet dat $b = -1$, daarvan komt de e^{-t}. Zelfde voor de derde term. Niet moeilijk.

Voorbeeld 10.2.3

$$F(p) = \frac{1}{p\sqrt{p+a}}.$$

$$F(p) = \frac{1}{p\sqrt{p+a}} = \frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{pa}}.$$

die van $\frac{1}{p}$ weten we $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{p}$, maar de wortel is moeilijk. We weten

$$\mathscr{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

$$\iff \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{p}}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{p+a}}\} = \frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}.$$

We hebben van beide functies de inverse laplace transform, nu moeten we een convolutie integraal uitrekenen in het t-domein.

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{p\sqrt{p+a}}\} = 1 * \frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}.$$

De convolutie is niet zomaar uit te rekenen, we moeten een substitutie uitvoeren. Dit zal vaak gebeuren bij convoluties.

$$au = y^2, a \text{ du} = 2y \text{ dy}.$$

$$\sqrt{u} = \frac{y}{\sqrt{a}}, u = t \implies y = \sqrt{at}.$$

$$= \int_0^t \frac{e^{-au}}{\sqrt{\pi u} \text{ du}}.$$

$$\implies \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^{\sqrt{at}} e^{-y^2} \text{ dy}.$$

Addendum 10.2.1 Errorfunctie!

Deze functie is gedefinieerd als de error functie of erf functie

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \text{ dt}.$$

we kunnen de oplossing herschrijven;

$$\iff \frac{1}{\sqrt{a}} \text{erf}(\sqrt{at}).$$

Voorbeeld 10.2.4

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{(p^2+1)}\sqrt{p}\}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{(p^2+1)}\sqrt{p}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{p^2+1}\} * \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{p}}\}.$$

$$\sin(t) * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\sin(u)}{\sqrt{t-u}} \text{ du}.$$

dit is een integraal die blijkbaar niet echt uitgeerkend kan worden. Ze geeft mee dat dat vaak voorkomt bij de convolutie-stelling.

10.3 Differentiaalvergelijkingen oplossen met Laplace transformatie

Hoe dit gebeurt is vrij voordehandliggend stel gegeven een lineaire differentiaalvergelijking met constante coefficienten en BV

$$Y(p) = \mathscr{L}\{y(t)\}.$$

$$\mathscr{L}\{y'(t)\} = pY(p) - y(0+) = pY(p) - y_0.$$

algemeen;

$$\mathscr{L}\{y^{(k)}(t)\} = p^k Y(p) - p^{k-1}y_0 - p^{k-2}y_1 - \ldots - y_{k-1}, k = 1, \ldots, n.$$

$$\mathscr{L}\{a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} = F(p).$$

We berekenen $Y(p)$ en daarna

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}.$$

Voorbeeld 10.3.1

$$\begin{cases} y^{(3)}(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2 e^t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2 \end{cases}.$$

$$\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(p).$$

$$\mathscr{L}\{y'(t)\} = pY(p) - y(0+) = pY(p) - 1.$$

$$\mathscr{L}\{y''(t)\} = p\left(pY(p) - 1\right) = 0.$$

$$\mathscr{L}\{y^{(3)}(t)\} = p\left(p^2 Y(p) - p\right) + 2.$$

dan laplace transform van het rechterlid; verschuivingseigenschap

$$\mathscr{L}\{t^2 e^t\} = \frac{2}{(p-1)^3}.$$

$$\iff \mathscr{L}\{y^{(3)}(t)\} - 3\mathscr{L}\{y''(t)\} + 3\mathscr{L}\{y'(t)\} - \mathscr{L}\{y(t)\} = \mathscr{L}\{t^2 e^t\}.$$

alles invullen

$$\iff \left(p^3 - 3p^2 + 3p - 1\right) Y(p) - p^2 + 3p - 1 = \frac{2}{(p-1)^3}.$$

$$\iff \left(p-1\right)^3 Y(p) - p^2 + 3p - 1 = \frac{2}{(p-1)^3}.$$

merk op dat dat de karakteristieke veelterm is die nu in p geschreven staat.

$$\implies Y(p) = \frac{p^2 - 3p + 1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6}.$$

splitsen in partieelbreuken veruit het meeste werk.

$$\iff \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6}.$$

$$\implies y(t) = e^t - te^t - \frac{1}{2}t^2 e^t + \frac{1}{60}t^5 e^t.$$

Als je dit vergelijkt met het probleem normaal oplossen, stelsel opstellen en oplossen, beginvoorwaarden invullen. Veel meer rekenwerk. Dat heeft dus vooral te maken met het feit dat er beginvoorwaarden gegeven zijn. Geen stap met AO.

Voorbeeld 10.3.2
In dit probleem hebben we voorwaarden die in het punt één gegeven zijn.

$$\begin{cases} y^{(3)}(x) - 3y''(x) + 4y(x) = 0 \\ y(1) = 0, y'(1) = e^2, y''(1) = 4e^2 \end{cases}.$$

wat we zullen doen is de verschuivingseigenschap van onafhankelijke veranderlijken gebruiken zodat de beginvoorwaarden wel in nul terechtkomen.

$$t = x - 1.$$

$$y(x) = y(t+1) = z(t).$$