Analyse III lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

INHOUDSTAFEL

1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

We zullen PDV's later omzetten naar gewone differentiaalvergelijkingen, daarom moeten we drie vormen herhalen.

- differentiaalvergelijkingen constante coefficiënten
- Differentiaalvergelijking van Euler
- Differentiaalvergelijking van Bessel

En de gamma functie komt ook aan bod voor herhaling.

1.1 Differentiaalvergelijking constante coefficienten

Stelling: oplossen met karakteristieke veelterm

$$a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0.$$

We vinden de karakteristieke vergelijking

$$\rho(\nu) = a_0\nu^2 + a_1\nu + a_2.$$

met mogelijke oplossingen

$$\begin{cases} \nu_1 \neq \nu_2 \in \mathbb{R} \implies y(x) = c_1e^{\nu_1 x} + c_2e^{\nu_2 x} \\ \nu_1 = \nu_2 \implies y(x) = c_1e^{\nu_1 x} + c_2xe^{\nu_1 x} \\ \nu_{1,2} = \alpha \pm \beta i \implies y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{cases}.$$

Opmerking 1.1.1 ν in plaats van λ

Lambda krijgt later een andere betekenis, daarom nu.

Voorbeeld 1.1.1

$$y'' = \lambda y.$$

waarbij lambda geïnterpreteerd wordt als een parameter

$$p(\nu) = \nu^2 - \lambda.$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \implies \nu_1 = \nu_2 \implies y(x) = c_1 + c_2x \\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \implies \nu_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \implies y(x) = c_1e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{\lambda}x} \\ \lambda \in \mathbb{R}^- \implies \nu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i \implies y(x) = c_1\cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{-\lambda}x) \end{cases}.$$

Herrinnering 1.1.1 Hyperbolische functies

Merk op dat de hyperboligsche functies lineaire combinaties zijn van die exponentiële functies dus als lambda positief is vinden we ook

$$y(x) = d_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda} x\right) + d_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda} x\right).$$

1.2 Euler

Stelling: Differentiaalvergelijking van Euler

$$x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 x y = 0.$$

We lossen dit op voor $x > 0$ met transformatie

$$y(x) = z(t), t = \ln(x).$$

of ook

$$x = e^t.$$

we krijgen bijgevolg

$$z''(t) + (a_1 - 1) z((t) + a_2 z(t) = 0.$$

de karakteristieke veelterm wordt

$$p(\nu) = \nu^2 + (a_1 - 1)\nu + a_2.$$

- $\nu_1 \neq \nu_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1 e^{\nu_1 t} + c_2 e^{\nu_2 t}.$$

$$\implies y(x) = c_1 x^{\nu_1} + c_2 x^{\nu_2}.$$

- $\nu_1 = \nu_2 \in \mathbb{R}$

$$z(t) = c_1 e^{\nu t} + c_2 t e^{\nu t}.$$

$$\implies y(x) = c_1 x^{\nu_1} + c_2 \ln(x) x^{\nu_1}.$$

- $\nu_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$$z(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos\left(\beta t\right) + c_2 e^{\alpha t} \sin\left(\beta t\right).$$

$$\implies y(x) = c_1 x^{\alpha} \cos\left(\beta \ln(x)\right) + c_2 x^{\alpha} \sin\left(\beta \ln(x)\right).$$

Opmerking 1.2.1 Voor $x < 0$

Voer een transformatie uit $x = -u$

1.3 De gammafunctie

Definitie 1.3.1: gamma functie

Gammafunctie voor $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du.$$

We zien dat het domein $\mathbb{R}^+$ is. Natuurlijk gebruiken we de gamma functie vooarl omwille van de fundamentele eigenschap

Eigenschap: Recursiebetrekking
Recursie eigenschap gamma functie

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs 1.3.1: Bewijs recursie eigenschap

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Bewijs;

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^x du.$$

partiele integratie

$$-u^x e^{-u}|_0^\infty + \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

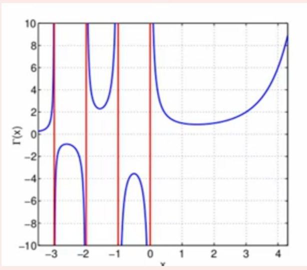
Opmerking 1.3.1

$$\lim_{u\to 0} u^x e^{-u} = \lim_{u\to\infty} u^x e^{-u} = 0.$$

hieruit vinden we dat die term nul wordt

$$\iff \int_0^{+\infty} e^{-u} x u^{x-1} du.$$

Definitie 1.3.2: Definitie van de gammafunctie op $\mathbb{R}$



$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} du, x > 0 \\ \frac{\Gamma(x+1)}{x}, x < 0 \land |x| \notin \mathbb{N} \end{cases}.$$

We maken gebruik van die recursiebetrekking om uit te breiden voor negatieve getallen. Het is belangrijk voor later dat we ook negatieve inputs kunnen geven. De manier waarop je dus rekent is dat je in breukvorm telkens een getal binnen het domein krijgt door een negatief getal kleiner dan één te nemen in absolute waarde, en dan vervolgens wanneer je hier voorbij gaat gebruik je de daarvoor berekende recursie.

Gaat niet $\forall x$, voor $x \in \mathbb{N}$ lukt dat niet want je kan $\Gamma(0)$ niet berekenen. Je ziet dus hoe die ”lijn van recursie” niet opgaat. We zien dat dus als de vertikale asymptoten op de grafiek.

Eigenschap: Gammafunctie en faculteiten
Gammafunctie is een uitbreiding van de faculteitenfunctie

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

kan bewezen worden via inductie, je kunt makkelijk eerst nul beschouwen en zien dat dat gelijk is aan één.

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-t}|_0^{\infty} = 1 = 0!.$$

indien de bewering geldig is voor n, is ze ook geldig voor n+1.

Herrinnering 1.3.1 onthoud de volgende eigenschap

Recursiebetrekking

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

1.4 Differentiaalvergelijking van Bessel

Definitie 1.4.1: differentiaalvergelijking van Bessel

Orde p (positieve parameter, niet echt de orde)

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0.$$

met $p \geq 0$

Eerste oplossing

van deze differentiaalvergelijking is via reeksontwikkeling voor p.

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}.$$

Idee of vraag 1.4.1

waarbij C_k voldoet aan de recursiebetrekking die we vinden door in te vullen in differentiaalvergelijking.

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0.$$

$$x^2\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right)'' + x\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right)' + (x^2 - p^2)\left(\sum_{k=0}^{\infty} C_1 x^{k+p}\right) = 0.$$

door C_k te schrijven laat ik het somteken even weg

$$\left(C_k x^{k+p}\right)' = (k+p)C_k x^{k+p-1}.$$

$$\left(C_k x^{k+p}\right)'' = (k+p)(k+p-1)C_k x^{k+p-2}.$$

$$C_k = \frac{-C_{k-2}}{k(k+2p)}, k \text{ even }, C_k = 0, k \text{ oneven.}$$

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+p}}{k!\Gamma(p+k+1)2^{2k+p}}.$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

waaruit dus blijkt

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Eigenschap: Afgeleide relatie

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x).$$

stel

$$f(x) = x^n J_n(x).$$

$$f'(x) = n x^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x).$$

volgens de eigenschap geldt ook

$$f'(x) = x^n J_{n-1}(x).$$

$$\implies n x^{n-1} J_n(x) + x^n J_n'(x) = x^n J_{n-1}(x).$$

Hieruit volgt

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x).$$

Eigenschap: Afgeleide relatie

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left[x^{-n} J_n(x)\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$g(x) = x^{-n} J_n(x).$$

$$g'(x) = -n x^{-n-1} J_n(x) + x^{-n} J_n'(x).$$

$$g'(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x).$$

$$\implies J_n'(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x).$$

Bewijs 1.4.1: Bewijs van afgeleide relatie

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right].$$

Tel de twee vergelijking uit voorgaande eigenschappen op;

$$J_n'(x) + J_n'(x) = \left(J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x)\right) + \left(-J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)\right).$$

dit simplificeren dan volgt direkt het gestelde.

Voorbeeld 1.4.1 (Bessel differentiaalvergelijking vb)

Idee of vraag 1.4.2

$$J_0'(x) = -J_1(x).$$

- Afgeleide relatie

$$J_n'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\right].$$

- Relatie J_{-n} en J_n

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

$$\implies J_0'(x) = \frac{1}{2}\left[J_{-1}(x) - J_1(x)\right].$$

$$\implies J_{-1}(x) = (-1)^1 J_1(x) = -J_1(x).$$

Hieruit volgt direkt het gestelde.

Tweede oplossing

-p is de tweede oplossing, dus we zoeken een oplossing met

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^{k-p}.$$

$$B_k = \frac{-B_{k-2}}{k(k-2p)}.$$

voor k even en nul voor k oneven.

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k-p}}{k!\Gamma(-p+k+1)2^{2k-p}}, p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0.$$

Opmerking 1.4.1 Lineair onafhankelijke oplossingen

- $J_p(x)$ is Besselfunctie van de eerste soort orde p
- $J_p(x), J_{-p}(x)$ is een funcamenteel stel voor $p \notin \mathbb{N} \wedge p \neq 0$
- indien het wel een natuulijk getal of nul is, kan aangetoond worden : $J_{-n}(x) = \lim_{p \to n} J_{-p}(x) = (-1)^n J_n(x)$

Bijgevolg moeten we een moeilijkere vorm gebruiken als we de reeksontwikkeling direct willen berekenen.

Besselfunctie van de tweede soort

Definitie 1.4.2: Besselfuncties van de tweede soort

Gedefinieerd als volgt;

$$Y_p(x) = \begin{cases} \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, p \notin \mathbb{N} \land p \neq 0 \\ \lim_{p\to 0} \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, p = 0 \\ \lim_{p\to n} \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}, p = n \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Waar we dus die cotangens moeten beschouwen als coefficient voor J_p en die $\frac{-1}{\sin(\ldots)}$ als coefficient van J_{-p}

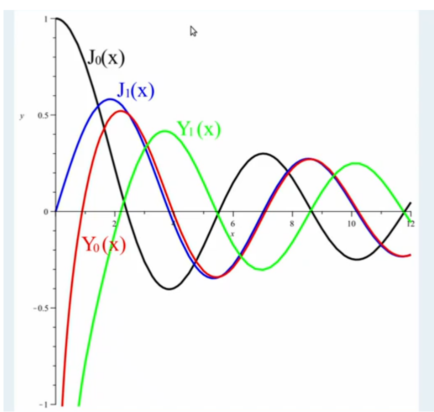
Idee of vraag 1.4.3

Dus drie keer dezelfde functie met een limiet naar niet gedefinieerde plaatsen, maar ik snap totaal niet waar de functie vandaan komt en hoe we dit bewijzen. Check de cursus vanaf je die eindelijk krijgt en vraag anders aan prof

Eigenschap:
Een fundamenteel stel voor $p \geq 0$:

$$\{J_p(x), Y_p(x)\}.$$

Eigenschap:
De Besselfunctie van de tweede soort $Y_p(x)$ zijn onbegrensd in een omgeving van $x = 0$



1.5 Gewijzigde differentiaalvergelijking van Bessel

Definitie 1.5.1: Gewijzigde Besselvergelijking

Gewijzigde Besselvergelijking van orde p

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0.$$

met $p \geq 0$ een parameter

Eerste soort

Reeksontwikkeling rond een regulier singulier punt;

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^{k+p}.$$

$$C_k = \frac{C_{k-2}}{k(k+2p)}.$$

We vinden

$$I_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+p}}{k!\Gamma(p+k+1)2^{2k+p}}.$$

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

$I_p(x)$ is de gewijzigde Besselfunctie van de eerste soort en orde p.

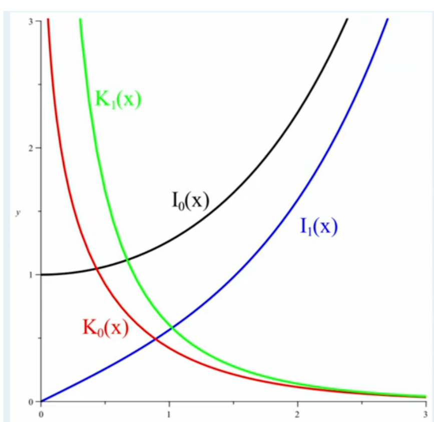
Tweede soort

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(x) - I_p(x)}{\sin(p\pi)}.$$

Eigenschap:
Fundamenteel stel voor $\forall p \geq 0$

$$\{I_p(x), K_p(x)\}.$$

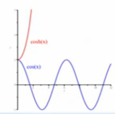
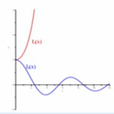
Eigenschap:
Voor gewijzigde Besselfuncties van de tweede soort geldt ze zijn onbegrensd in een omgeving $x = 0$



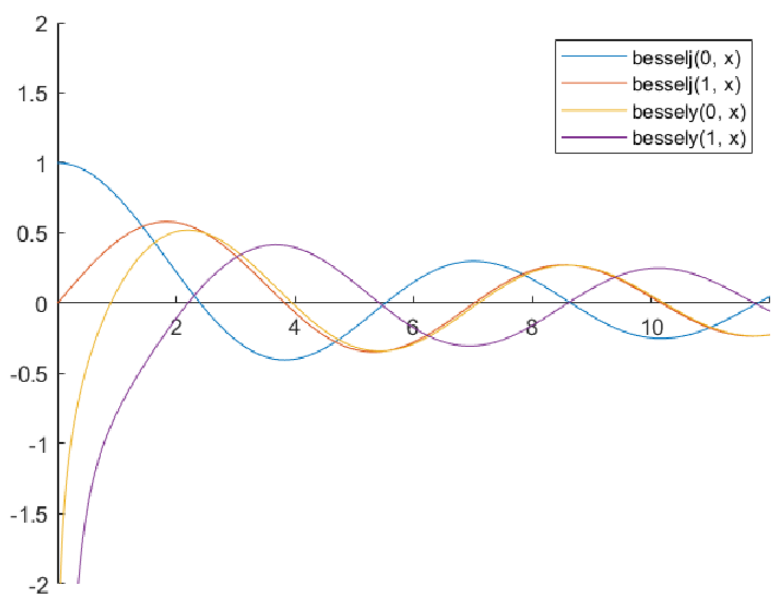
Opmerking 1.5.1 De grafieken

Zorg vooral dat je de grafieken direct in je hoofd hebt, dat zijn de belangrijkste om te onthouden

Stelling: verschillen hyperbolische hyperb vs Besselfuncties
Dit is zowat het belangrijkste van dit hele deel

Trigo- en hyper- functies	Besselfuncties
Differentiaalvergelijking	
$y''(x) + y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$ $y''(x) - y(x) = 0$ $y(x) = c_1 \cosh(x) + c_2 \sinh(x)$	$x\,y''(x) + y'(x) + x\,y(x) = 0$ $y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$ $x\,y''(x) + y'(x) - x\,y(x) = 0$ $y(x) = c_1 I_0(x) + c_2 K_0(x)$
Reeksontwikkelingen	
$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$
Grafieken, nulpunten, begrensdheid, orthogonaliteit	
	

overzicht van functies;



2 Fourierreeksen

We willen een functie f benaderen op een interval $[a,b]$ door middel van lineaire combinatie goniometrische functies.

2.1 Inleidend

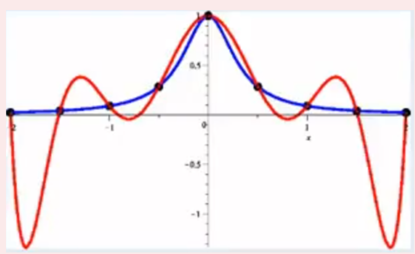
Definitie 2.1.1: Het interpolatiecriterium

Kies N punten $x_j \in [a,b]$ en eis dat $g(x_j) = f(x_j), j =, 1, \ldots, N$ Met andere woorden er wordt in essentie enkel geëist dat de doelfunctie in enkele punten exact samenvalt. Dan wordt een veelterm bepaald.
lineair stelsel;

$$\sum_{i=1}^{n} c_i g_i(x_j) = f(x_j), j = 1, 2, \ldots, N.$$

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1) & g_2(x_1) & \ldots & g_N(x_1) \\ g_1(x_2) & g_2(x_2) & \ldots & g_N(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_1(x_N) & g_2(x_N) & \ldots & g_n(x_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix}.$$

kwaliteit hangt af van keuzes interpolatiepunten, veelterminterpolatie geeft grote fouten.



Dan is er het minimaxcriterium; Het minimaxcriterium is dus vooral lastig omdat het moeilijk uit te werken is.

$$\max \left\{ |f(x) - g(x)|, x \in [a,b] \right\}.$$

minimaliseren van een maximum wordt een zadelpunt probleem genoemd. Zie fig2.1. Je probeert eigenlijk het minimum van een maximum te nemen.

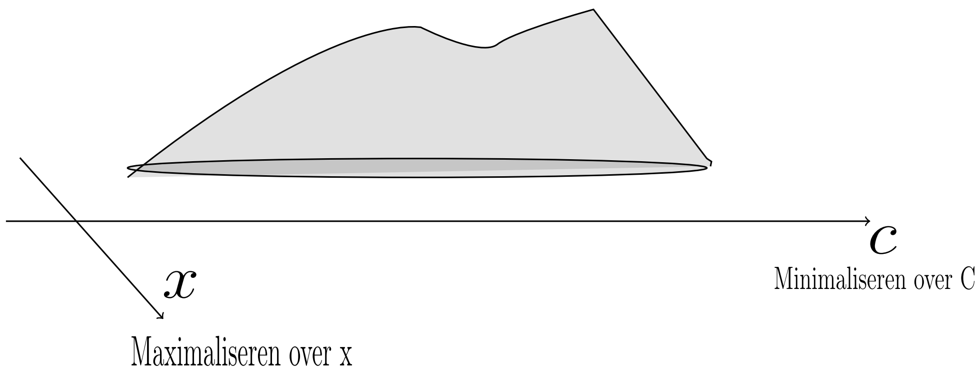


Figure 2.1: zadelpuntprobleem

Dan komen we bij dit criterium om een compromis te sluiten.

Definitie 2.1.2: Kleinste kwadratencriterium

Bepaal $c_i, i = 1, 2, \ldots, N$ zodat

$$\int_a^b w(x)(f(x) - g(x))^2 dx.$$

minimaal is met $x(x) > 0$

Eerste observatie is dat we de norm vinden door de wortel te nemen van die integraal.

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b w(x) f(x)^2 dx}.$$

voldoet aan voorwaarden voor de norm

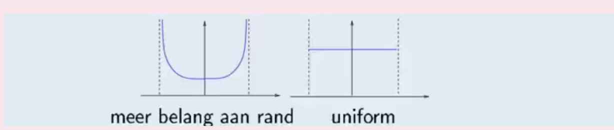
We kunnen het cireterium dus interpreteren als

$$||f - g||^2.$$

We zoeken een g die het dichtst aansluit bij f.

Opmerking 2.1.1 Belang van $w(x)$

deze laat ons toe om bepaalde functies in het interval meer of minder prioriteit te geven



2.2 Benaderingsprobleem uitwerken

$$I = \int_a^b w(x) \left\{ f(x) - \sum_{i=1}^{N} c_i g_i(x) \right\}^2 \mathrm{dx} = \sigma(c_1, c_2, \ldots, c_N).$$

de fout zal een getal zijn dat afhangt van de coefficienten. We moeten die dan zo kiezen dat we een minimum krijgen.

De nodig voorwaarde voor een minimum

$$\frac{\partial \sigma}{\partial c_j} = 0, j = 1, 2, \ldots, N.$$

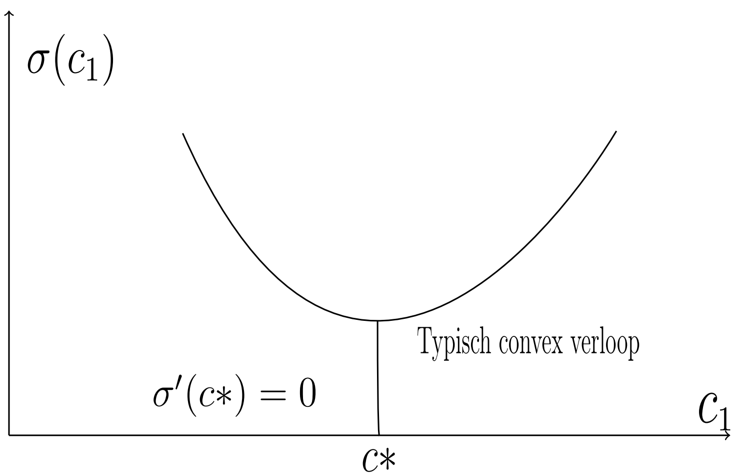


Figure 2.2: één veranderlijke

dit is hoe het eruit zou zien **voor één coefficient** c_1 fig 2.2.
Voor meerdere veranderlijken, fig 2.3;

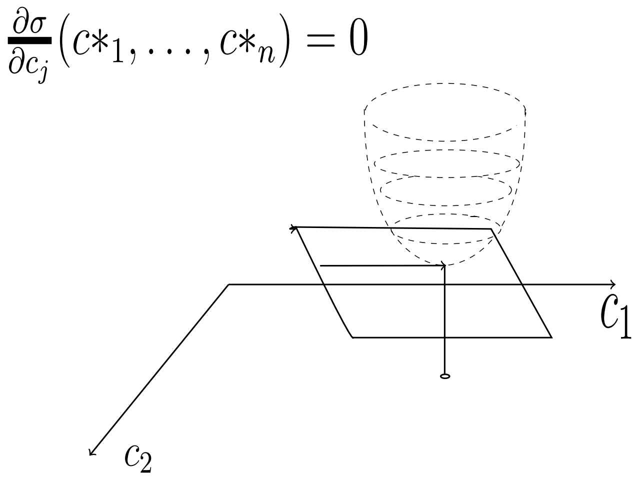


Figure 2.3: meerdereveranderlijken

We werken dit uit en krijgen;

$$(-2)\int_a^b w(x)\left(f(x)-\sum_{i=1}^{N}c_i g_i(x)\right)g_j(x)dx=0.$$

of

$$\sum_{i=1}^{N}c_i(g_i,g_j)_w=\left(f,g_j\right)_w, j=1,2,\ldots,N.$$

Dit kunnen we in stelselvorm schrijven om het duidelijker te maken

$$\begin{pmatrix}(g_1,g_1)_w & (g_1,g_2)_w & \ldots & (g_1,g_N)_w\\ (g_2,g_1)_w & \ldots & \ldots & (g_2,g_N)_w\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (g_N,g_1)_w & \ldots & \ldots & (g_N,g_N)_w\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,g_1)_w\\ (f,g_2)_w\\ \vdots\\ (f,g_N)_w\end{pmatrix}.$$

2.3 Intermezzo; over orthogonaliteit

Definitie 2.3.1: Orthogonaliteit van functies

Twee functies $f,g\in\mathbb{R}$ zijn orthogonaal op $[a,b]$ als

$$\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

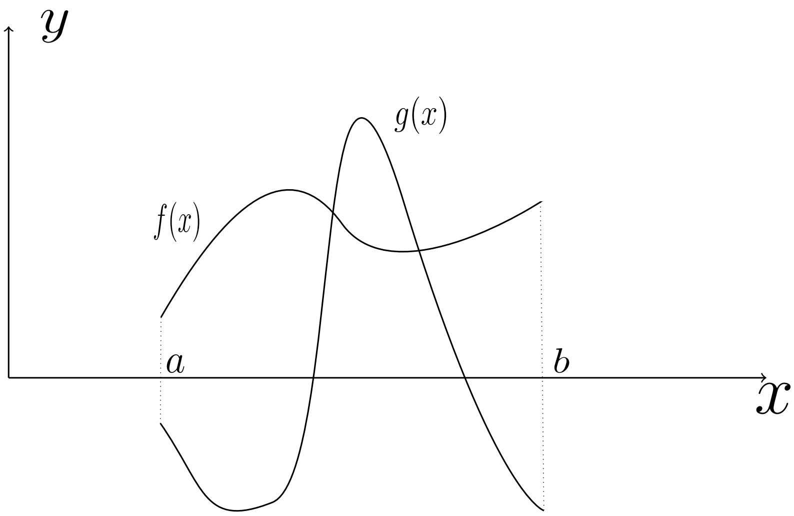


Figure 2.4: Orthogonale functies

Kies n equidistante punten $\in [a,b]$

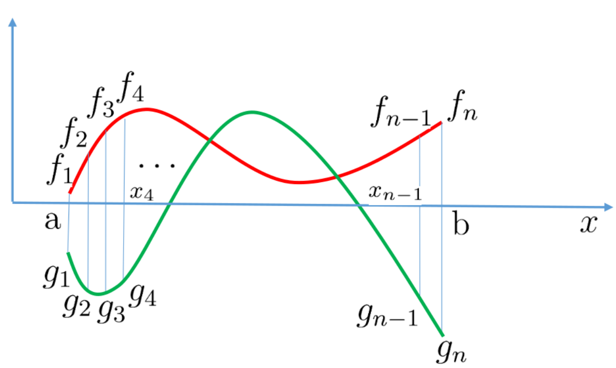
$$a = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b.$$

tussenafstand

$$h = \frac{b-a}{n-1}.$$

zeg

$$f_i = f(x_i), g_i = g(x_i), i = 1, \ldots, n.$$



benadering van de integraal

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \approx h(f_1g_1 + f_2g_2 + \ldots + f_{n-1}g_{n-1}).$$

kan dus benaderd worden door

$$f_1g_1 + \ldots + f_{n-1}g_{n-1} = 0.$$
$$\iff F^TG = 0.$$

Definitie 2.3.2: Orthogonaal tov gewichtsfunctie

Twee reele functies f, g zijn orthogonaal op $[a,b]$ tov gewichtsfunctie w, $w(x) > 0$ voor $x \in (a,b)$

$$\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx = 0.$$

2.4 Belang orthogonaliteit

We gebruiken orthogonaliteit voor het makkelijker uitwerken van dit inwendig product.

$$\int_a^b g_i(x)g_j(x)dx = 0, i \neq j.$$

Als dat gebeurt zullen alle elementen die niet op diagonaal staan wegvallen!

Herrinnering 2.4.1

$$\begin{pmatrix} (g_1,g_1)_w & (g_1,g_2)_w & \dots & (g_1,g_N)_w \\ (g_2,g_1)_w & \dots & \dots & (g_2,g_N)_w \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (g_N,g_1)_w & \dots & \dots & (g_N,g_N)_w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,g_1)_w \\ (f,g_2)_w \\ \vdots \\ (f,g_N)_w \end{pmatrix}.$$

We komen dan direct uit

$$c_i = \frac{(f,g_i)_w}{(g,g_i)_w} = \frac{\int_a^b w(x)f(x)g(x)\mathrm{dx}}{\int_a^b w(x)g_i(x)^2\mathrm{dx}}, i = 1,2,\dots,N.$$

Voorbeeld 2.4.1 (benaderen)
We gaan een functie f benaderen op een interval $[a,b]$ door een lineaire combinatie van basisfuncties

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{N} c_i g_i(x).$$

$$\begin{cases} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \end{cases}.$$

We gaan een fout karakteriseren met een kleinste kwadratenfunctie met een gewicht $w(x)$

$$\int_a^b w(x)\left(f(x) - g(x)\right)^2 dx.$$

dit willen we minimaliseren

er zijn voorwaarden mogelijk voor een perfecte match. Stel dat de basisfuncties **orthogonaal zijn tov elkaar op $[a,b]$ tov $w(x)$.** In dat geval is de uitdrukking voor optimale coefficienten eenvoudig (de te minimaliseren formule.)

$$c_i = \frac{\int_a^b w(x)f(x)g_i(x)dx}{\int_a^b w(x)\left(g_i(x)\right)^2 dx}.$$

2.5 Trigonometrische orthogonaliteit

stel $w(x) = 1$ en $[a,b] = [-\pi,\pi]$ we krijgen trigonometrische orthogonaliteit

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(lx)dx = \begin{cases} 0, k \neq l \\ \pi, k = l \neq 0 \\ 2\pi, k = l = 0 \end{cases}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(lx)dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\sin(lx) = \begin{cases} 0, k \neq l, k = l = 0 \\ \pi, k = l \neq 0 \end{cases}.$$

Definitie 2.5.1: Trigonometrische veelterm

Gedefinieerd als

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Opmerking 2.5.1 !!!

Wat we nu zullen doen is praten over trigonometrische veelterm benaderingen, als aanknopingspunt voor Fourier reeksen in het stuk hierna! Kijk goed naar de voorwaarden en waar ze vandaan komen, dat is wat belangrijk is in dit deel.

Stelling: Kleinste kwadraten trigonometrische veelterm

- stel we gaan f benaderen op $[-\pi,\pi]$ en we kiezen $w(x) = 1$; benaderen door

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

  met

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx = 0.$$

  minimaal!

- Basisfuncties $\{1, \cos(x), \sin(x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx)\}$ voldoen aan

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot g_i(x) g_j(x) dx = 0, i \neq j.$$

  aka ze zijn orthogonaal!

-
$$a_0 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot f(x)}{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{dx}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

-
$$a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

- $$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\left(kx\right)dx.$$
  $$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Eigenschap: Orthogonaliteitseigenschap van J_0
De besselfuncties van de eerste soort voldoen aan de orthogonaliteitseigenschap

$$\int_0^1 xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)\mathrm{dx} = 0.$$

Als

- $\alpha \wedge \beta$ verschillende positieve nulpunten zijn van $J_0(x)$ **en** J_0'

Corollarium of verklaring:
Dit volgt uit;

$$\int_0^1 xJ_0(\alpha x)J_0(\beta x)\mathrm{dx} = \frac{\beta J_0(\alpha)J_0'(\beta) - \alpha J_0(\beta)J_0'(\alpha)}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

als

$$\alpha \neq \beta.$$

En dat is praktisch waar het bewijs uit handboek naartoe werkt.

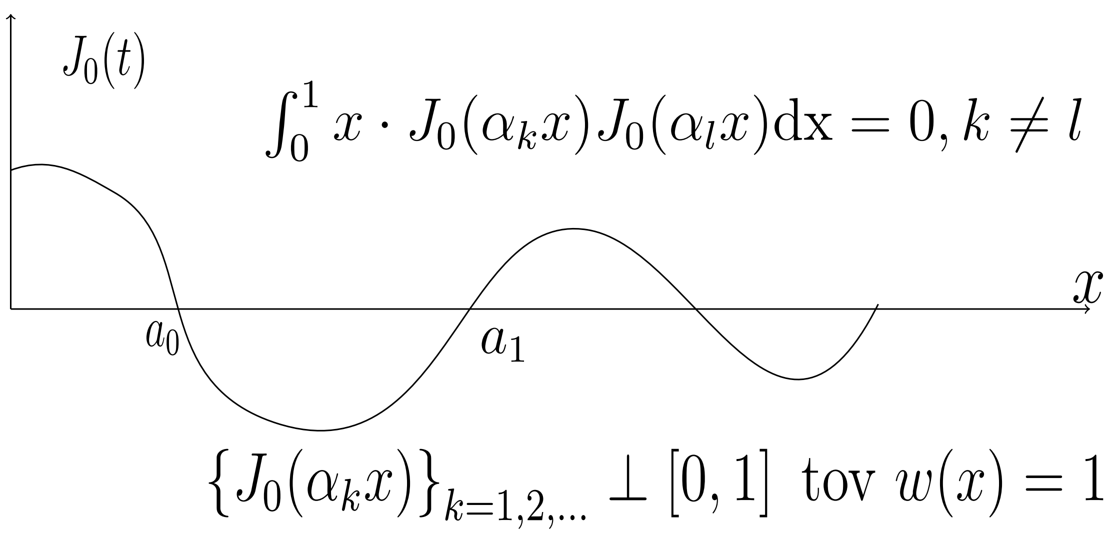


Figure 2.5: Bessel

Wat is hiervan een belangrijke implicatie? Stel we hebben $f(x)$, voorwaarden

- $[0, 1]$, interval kiezen

- $J_0(\alpha_1 x), J_0(\alpha_2 x)\ldots$, gescaleerde besselfuncties als basisfuncties
- Kleinste kwadraten criterium met $w(x) = x$

$$\Longrightarrow \int_0^1 x(f(x) - g(x))^2 dx, \text{ minimaal.}$$

Opmerking 2.5.2 Wat betekent dit?

We gaan $f(x)$ benaderen door

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} a_k J_0(\alpha_k x).$$

Algemeen moet je een stelsel oplossen om de a_k te vinden, maar omwille van de orthogonaliteit **vinden we een goede match!**

$$a_k = \int_0^1 x f(x) J_0(\alpha_k x) dx \cdot \frac{1}{\int_0^1 x\,(J_0(\alpha_k x))^2\,dx}.$$

Dit is een eenvoudige uitdrukking voor coefficienten.

Voorbeeld 2.5.1 (Met afgeleiden)

$$J_0(\beta_0 x), J_0(\beta_1 x), \ldots.$$

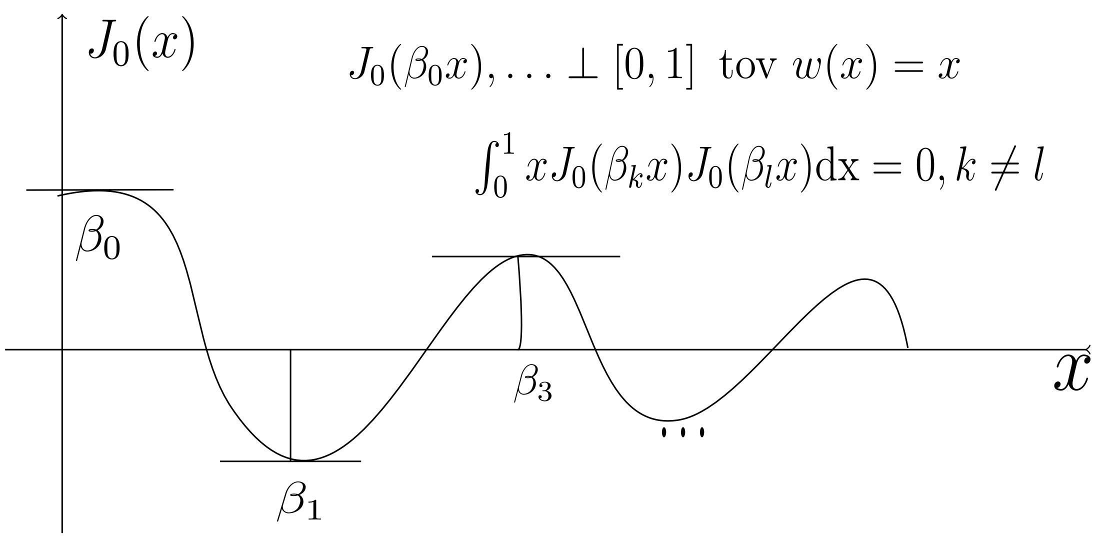


Figure 2.6: besselafgeleid

Als we hier nu f willen benadern hebben we enkele ingrediënten nodig;

- $[0, 1]$

- $\{J_0(\beta_0 x), J_0(\beta_1 x), \dots\}$
- We kiezen kleinste kwadratencrieterium met $w(x) = x$

$$\int_0^1 x(f-g)^2 \mathrm{dx}.$$

Dit is opnieuw een perfecte match. Alle functies zijn ortthogonaal op 0,1 tov x de gewichtsfunctie.

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k J_0(\beta_k x).$$

$$a_k = \frac{\int_0^1 f(x) J_0(\beta_k x) \mathrm{dx}}{\int_0^1 x (J_0(\beta_k x))^2 \mathrm{dx}}.$$

Eigenschap: Eigenschap van minder belang
Eigenschap die wordt bewezen in de cursus in verband met producten van besselfuncties met zichzelf; nuttig voor vinden expliciete uitdrukking noemer voor uitdrukking coefficienten.

$$\int_0^1 x\left(J_0(\lambda x)\right)^2 \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\left(J_0'(\lambda)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(J_0(\lambda)\right)^2.$$

2.6 Fourierreeksen

We doen dus wat we in het vorig deel besproken hebben, $f(x) \in [-\pi, \pi]$ met basisfuncties

$$g(x) = \begin{cases} 1 \\ \cos(x) \sin(x) \\ \cos(nx) \sin(nx) \\ \vdots \end{cases}.$$

met kleinste kwadratencriterium $w(x) = 1$. Dit betekent dat we de volgende fout minimaliseren;

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx.$$

Normaal moeten we dus een stelsel oplossen, maar we krijgen een match (dit is gewoon herhaling van het vorig deel).

Definitie 2.6.1: Kleinste kwadraten trigonometrische veelterm

$$g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{dx}, k = 1, \dots, n.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \mathrm{dx}, k = 1, \dots, n.$$

Opmerking 2.6.1 of ook

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

met

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \mathrm{dx}, k = 0, \ldots, n.$$

Definitie 2.6.2: Een fourierreeks

gedefinieerd als

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Eigenschap: Integraal over periodieke functie
$f(x)$ een periodieke functie met periode T en f integreerbaar;

$$\int_0^T f(x) \mathrm{dx} = \int_\alpha^{\alpha+T} f(x) \mathrm{dx}.$$

Stel we willen een fourier reeks maken van een functie met periode T, we gebruiken een transformatie;

$$\phi(y) = f(x), x = \frac{yT}{2\pi}.$$

$$\iff \phi(y + 2\pi) = f(\frac{yT}{Z\pi} + T).$$

$$\iff f(\frac{yT}{2\pi}) = f(x) = \phi(y).$$

Nu heeft ϕ periode 2π

Definitie 2.6.3: Fourierreeks van functie met periode T

$f(x+T) = f(x), \forall x$

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(\frac{2\pi kx}{T}) + b_k \sin(\frac{2\pi kx}{T})\right).$$

met

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\frac{2\pi kx}{T}) \mathrm{dx}.$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\frac{2\pi kx}{T}) \mathrm{dx}.$$

Dit volgt uit de substitutie $\phi(y) = f(x), x = \frac{yT}{2\pi}$.

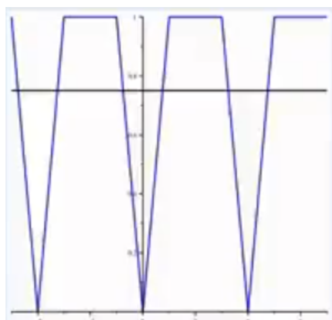
Opmerking 2.6.2 Basis pulsatie

Als je $k = 1$ stelt, dan staat bij a_k een basis pulsatie $\frac{2\pi}{T}$ en alle frequenties die voorkomen in die expansie zijn veelvouden van die basisfrerquentie.

Voorbeeld 2.6.1 (Beschouw)
$f(x)$ periodieke uitbreiding van

$$g(x) = \begin{cases} x, 0 \leq x < 1 \\ 1, 1 \leq x < 3 \\ 4 - x, 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Dit is een even functie en heeft periode $T = 4$. Ziet er als volgt uit;



Het is een even functie, fourierreeks herleidt tot cosinusreeks

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right).$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{\pi k x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x)\mathrm{dx} = \frac{3}{2}.$$

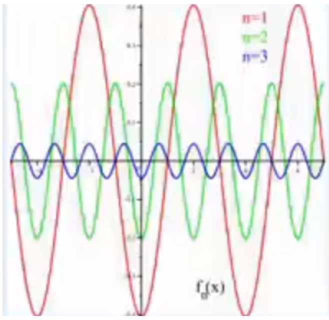
Dit is de gemiddelde waarde.

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right)\mathrm{dx} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{T}\right)\mathrm{dx}.$$

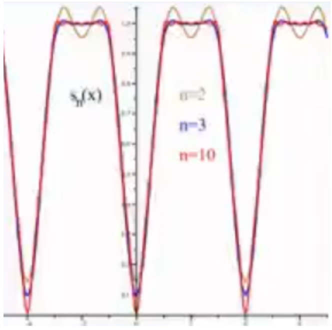
$$\Longleftrightarrow \int_0^1 x \cos\left(\frac{\pi k x}{2}\right)\mathrm{dx} + \int_1^2 \cos\left(\frac{\pi k x}{2}\right)\mathrm{dx}.$$

De fundamentele trilling $f_1(x)$ gegeven door

$$f_1(x) = a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{4}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$



De hogere harmonischen worden ook weergegeven; f_i bevatten gewon hogere termen!! Dit is fundamenteel om te begrijpen;



Dat is wat je krijgjt wanneer je

$$s_3(x) = \sum_{k=0}^{3} f_k(x).$$

2.7 Convergentie van fourier reeksen

Definitie 2.7.1: Stuksgewijs continue functie

$f(x)$ is een stuksgewijze continue functie op $[a,b]$ indien f continu is op $[a,b]$ of een eindig aantal discontinuïteiten heeft en in elk punt van $[a,b]$ de linker- en rechterlimiet bestaan.
In a bestaat de rechtelimiet in b de linkerlimiet. Om het met middelbare termen uit te drukken, functie met enkel perforaties als discontinuiteiten of geen discontinuiteiten.

Definitie 2.7.2: Stuksgewijze effen functie

$f(x)$ is stuksgewijze effen op $[a,b]$ indien f, f' continu zijn op $[a,b]$ of een eindig aantal discontinuiteiten hebben in alle punten $x_0 \in [a,b]$. De linker- en rechterlimieten van al deze punten moeten dan bestaan voor zowel f als f'.
Om het simpel uit te drukken; **Effen functie is een functie die stuksgewijze continu is en haar afgeleide is ook stuksgewijze continu.** Denk ik.

$$f(x_0+) = \lim_{h\to 0+} f(x_0+h), f(x_0-) = \lim_{h\to 0-} f(x_0+h).$$

$$f'(x_0+) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0+)}{h}, f'(x_0-) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Stelling: Fourrierreeks effen functies
Indien $f(x)$ stuksgewijze effen is op $[-\pi,\pi]$ convergeert de fourierreeks puntsgewijze tot

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}, x \in (-\pi,\pi).$$

$$\frac{f((-\pi)+)+f(\pi-)}{2}.$$

Laten we bespreken wat deze stelling betekent;

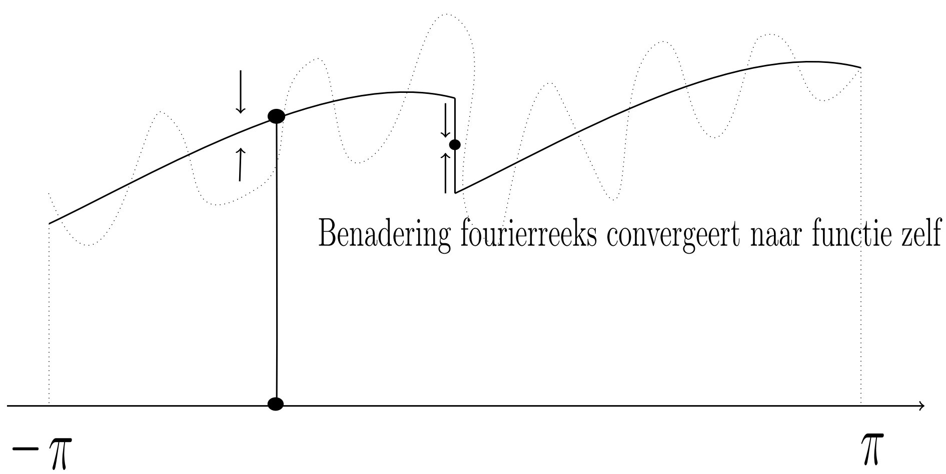


Figure 2.7: effen

Opmerking 2.7.1 Wat kunnen we zeggen over de randpunten?

Op de rand zal de fourierreeks op de discontinuiteit convergeren naar het gemiddelde van de rechter en linkerlimiet!!

Waarom dit zo is kunnen we verder illustreren.

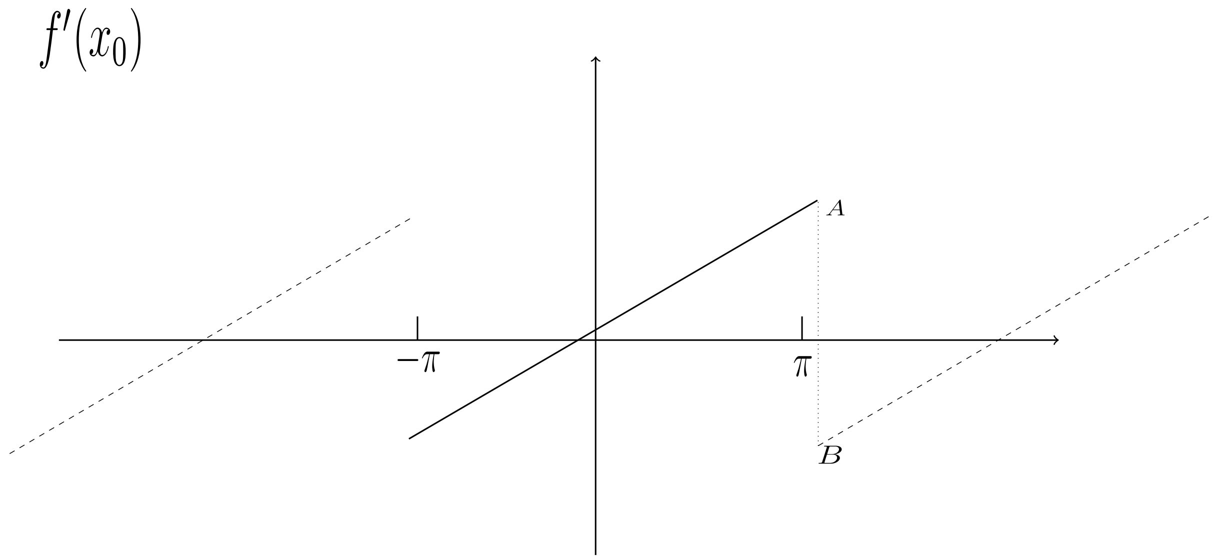


Figure 2.8: discontinuconv

A is de linkerlimiet, B de rechterlimiet. Dat is precies wat er in de steling staat, gemiddelde van die twee.

3 Eerste oefenzitting

3.1 Video

De video gelinkt bij deze oz vond ik echt prachtig, gaf goede meetkundige inzichten die ik totaal niet opmerkte toen ik eerst met de leerstof bezig was. Bekijk het opnieuw als je dit in blok terugleest en zaken vergeten bent.

3.2 Tutorial

3.3 Voorbereidende oefeningen

3.4 Oefeningen

Vraag 1

Dit is een oefening die in de les gemaakt werd en niet in de oefenzitting zou staan. Eigenwaardenprobleem periodieke vorm

$$y'' = \lambda y.$$

$$\begin{cases} y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{cases}.$$

- $\lambda = 0$

$$y(x) = Ax + B.$$

$$-A\lambda + B = A\lambda + B.$$

$$y'(x) = A.$$

$$A = A.$$

$$-A\pi = A\pi \implies A = 0.$$

$$\phi_0(x) = 1, \lambda_0 = 0.$$

- $\lambda < 0$

$$y(x) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

$$y'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right).$$

$$\implies \phi_n(x) = A_n\cos\left(nx\right) + B_n\sin\left(nx\right).$$

$$\begin{cases} A\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \mp B\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) = A\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) + B\sin\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \\ A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) + B\sqrt{\lambda}\cos\left(\lambda\pi\right) = -A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) + B\sqrt{-\lambda}\cos\left(\sqrt{-\lambda}\pi\right) \end{cases}.$$

$$\implies \begin{cases} 2B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\ 2A\sqrt{-\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \end{cases}.$$

$$\implies \begin{cases} B\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \\ A\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0 \end{cases} .$$

Opmerking 3.4.1

We beschouwen de nuloplossing waar A en B gelijk zijn aan nul niet!!

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi\right) = 0.$$
$$\iff \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n = 1, 2, \ldots.$$
$$x_n = n^2.$$

Opmerking 3.4.2

Vaak ga je voorwaarden vinden zodat je a in functie van b kunt schrijven of omgekeerd, maar in dit geval niet. We vinden hier een dubbele eigenwaarden, dit is he enige probleem waarbij dit voorkomt.

Idee of vraag 3.4.1 Vraag na

Is dit een juiste representatie van de oplossing van de oefening?