Analyse III
lesaantekeningen

Fordeyn Tibo

Inhoudstafel

Deel I

Partiële Differentiaalvergelijkingen

I.1 Belangrijke differentiaalvergelijkingen

I.2 Fourierreeksen

I.3 Sturm-Liouvilleproblemen

I.4 Eerste oefenzitting

I.5 Partiële differentiaalvergelijkingen

I.6 Verdere partiële differentiaalvergelijkingen

I.7 Tweede oefenzitting

I.8 Derde oefenzitting

I.9 Laplace trasnformatie

I.10 Inverse Laplacetransformatie

10.1 Gamma functie

Deze zal nodig zijn voor berekening laplace transform van enkele functies

Herrinnering 10.1.1 Gamma functie definitie

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} \, \mathrm{dy}, \forall x > 0.$$

die convergeert.

$$= \Gamma(x).$$

herriner je ook de recursie eigenschap;

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x > 0.$$

Eigenschap: Laplacetransformatie van t^x

$$\mathscr{L}\left\{t^x\right\} = \frac{\Gamma(x+1)}{p^{x+1}}, x > -1.$$

We weten al dat deze bestaat, maar nu willen we bewijzen dat het daaraan gelijk is.

Bewijs 10.1.1:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{x-1} \, \mathrm{du} = p^x \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{x-1} \, \mathrm{dt}.$$

we substitueren dus $u = pt, du = pdt$

$$\iff p^x \mathscr{L}\left\{t^{x-1}\right\}.$$

$$\implies \Gamma(x+1) = p^{x+1} \mathscr{L}\left\{t^x\right\}.$$

$$\implies \mathscr{L}\left\{t^x\right\} = \frac{\Gamma(x+1)}{p^{x+1}}, x \in \mathbb{N}.$$

Nu berekenen voor niet natuurlijke waarden

Bewijs 10.1.2: Bijzondere waarden

Stelling:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$$u = x^2, \sqrt{u} = x, du = 2xdx.$$

We gaan die gamma functie nu soort van kwadrateren, eerst met x als integratieveranderlijke en daarna met y als integratieveranderlijke.

$$\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \text{ dx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \text{ dy}.$$

We gaan dit zien als een dubbele integraal over heel $\mathbb{R}^2$.

$$\iff \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \text{ dx dy}.$$

we transformeren naar poolcoördinaten, anders kun je dit niet uitrekenen. Vergeet de jacobiaan niet $J = r$.

$$\left(\Gamma(\frac{1}{2})\right)^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2} \text{ dr} = 2\pi \frac{-e^{-r^2}}{2}|_0^{\infty} = \pi.$$

$$\implies \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Met deze waarde berekent te hebben kunnen we dit nu voor veel meer waarden gebruiken.

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

$$\mathscr{L}\left\{\sqrt{t}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

10.2 Inverse Laplacetransformatie

$$\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(p) \iff f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}.$$

er zijn twee specifieke gevallen die we zullen bekijken; rationale functies en convolutiestelling

10.2.1 Rationale functies

Herrinner je deze drie functies

$$\mathscr{L}\left\{e^{bt}t^n\right\} = \frac{n!}{(p-b)^{n+1}}.$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{bt}\sin\left(at\right)\right\} = \frac{a}{(p-b)^2+a^2}.$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{bt}\cos\left(at\right)\right\} = \frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}.$$

Die kunnen we gebruiken om gemakkelijk de volgende inverse transformaties te doen;

$$\implies \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-b)^n}\right\} = \frac{e^{bt}t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\implies \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a}{(p-b)^2+a^2}\right\} = e^{bt}\sin\left(at\right).$$

$$\implies \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}\right\} = e^{bt}\cos\left(at\right).$$

10.2.2 Convolutiestelling

Stelling: Convolutiestelling

$$F(p) = G(p)H(p).$$

waarbij je van G en H de inverse laplace transformatie op de een of andere manier (met bijvoorbeeld bovenstaande functies) kunt berekenen, dan;

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = g * h(t) = \int_0^t g(u)h(t-u)\,\mathrm{du}.$$

Dat kan moeilijk uit te rekenen zijn.

10.2.3 Voorbeelden

Voorbeeld 10.2.1

$$F(p) = \frac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)^2(p+1)}.$$

Kan die functie een laplace transformatie zijn? Denk aan eerste asymptotische eigenschap voor we zelfs beginnen aan de vraag.

$$\text{Gr(teller)} > \text{Gr(noemer)}.$$

dus het kan

$$F(p) = \frac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)^2(p+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p+1}.$$

In analyse I zagen we methode om dit snel te berekenen.

$$C = \lim_{p \to -1} \frac{p^2 - 2p + 3}{(p-1)^2} = \frac{3}{2}.$$

Idee of vraag 10.2.1

De reden dat je voor C naar min één gaat, het is duidelijk dat die voor 1 niet even gemakkelijk te vinden is, maar ik weet niet exact waarom we min één gebruiken, je moet analyse I cursus nog eens bovenhalen.

$$B = \lim_{p \to 1} \frac{p^2 - 2p + 3}{p+1} = 1.$$

voor A moeten we eerst nog de afgeleide brekenen. Ik neem het over van de slides want geen zin in.

$$A = \lim_{p \to 1} \frac{d}{dp}\left(\frac{p^2 - 2p + 3}{p+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

we weten

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\} = e^{at}.$$

en

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^2}\right\} = te^{at}.$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t) = -\frac{1}{2}e^t + te^t + \frac{3}{2}e^{-t}.$$

Voorbeeld 10.2.2

$$F(p) = \frac{p^2+p-4}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}.$$

we zien direct dat de laplace transform zal bestaan.

gelukkig staat de noemer ontbonden

$$F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+5}.$$

die kwadratische factor in de noemer heeft geen reële nulputnen dus die blijft staan als kwadratische factor, in de teller staat dan lineaire factor.

$$B = \lim_{p\to 1} \frac{p^2+p-4}{p^2+2p+5} = -\frac{1}{4}.$$

$$A = \lim_{p\to 1} \frac{d}{dp}(\ldots) = \frac{1}{2}.$$

Voor C en D is de formule iets ingewikkelder. Je kunt $p = 0$ of $p = 1$ invullen en op die manier een stelsel krijgen om ze gemakkelijk te vinden. Ik denk dat dat kan ben eigenlijk niet zeker, als je tijd te veel hebt kun je het eens nagaan

$$C = -\frac{1}{2}, D = -\frac{1}{4}.$$

$$\frac{-\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}}{p^2+2p+5} = \frac{-\frac{1}{2}p - \frac{1}{4}}{(p+1)^2+2^2}.$$

op die manier splits je die breuk **en dan zie je dat je gemakkelijk cosinus en sinus laplace transform kunt gebruiken.**

$$\mathscr{L}\{e^{bt}\cos(at)\} = \frac{p-b}{(p-t)^2+a^2}.$$

$$\mathscr{L}\{e^{bt}\sin(at)\} = \frac{a}{(p-b)^2a^2}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{4}te^t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{8}e^{-t}\sin(2t).$$

Opmerking 10.2.1

Dus ik hoop dat je goed inziet; er stond vanboven die $\frac{1}{4}$ maar vanonder die twee in het kwadraat dus we nemen $a = 2$ en dan wordt er gedeeld door 8 bij die laatste term. En je ziet dat $b = -1$, daarvan komt de e^{-t}. Zelfde voor de derde term. Niet moeilijk.

Voorbeeld 10.2.3

$$F(p) = \frac{1}{p\sqrt{p+a}}.$$

$$F(p) = \frac{1}{p\sqrt{p+a}} = \frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{pa}}.$$

die van $\frac{1}{p}$ weten we $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{p}$, maar de wortel is moeilijk. We weten

$$\mathscr{L}\{\frac{1}{\sqrt{t}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

$$\iff \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{p}}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{p+a}}\} = \frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}.$$

We hebben van beide functies de inverse laplace transform, nu moeten we een convolutie integraal uitrekenen in het t-domein.

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{p\sqrt{p+a}}\} = 1 * \frac{e^{-at}}{\sqrt{\pi t}}.$$

De convolutie is niet zomaar uit te rekenen, we moeten een substitutie uitvoeren. Dit zal vaak gebeuren bij convoluties.

$$au = y^2, a \text{ du} = 2y \text{ dy}.$$

$$\sqrt{u} = \frac{y}{\sqrt{a}}, u = t \implies y = \sqrt{at}.$$

$$= \int_0^t \frac{e^{-au}}{\sqrt{\pi u} \text{ du}}.$$

$$\implies \frac{2}{\sqrt{a\pi}} \int_0^{\sqrt{at}} e^{-y^2} \text{ dy}.$$

Addendum 10.2.1 Errorfunctie!

Deze functie is gedefinieerd als de error functie of erf functie

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \text{ dt}.$$

we kunnen de oplossing herschrijven;

$$\iff \frac{1}{\sqrt{a}} \text{ erf}(\sqrt{at}).$$

Voorbeeld 10.2.4

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{(p^2+1)}\sqrt{p}\}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{(p^2+1)}\sqrt{p}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{p^2+1}\} * \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{p}}\}.$$

$$\sin(t) * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\sin(u)}{\sqrt{t-u}} \text{ du}.$$

dit is een integraal die blijkbaar niet echt uitgeerkend kan worden. Ze geeft mee dat dat vaak voorkomt bij de convolutie-stelling.

10.3 Differentiaalvergelijkingen oplossen met Laplace transformatie

10.3.1 Constante coefficienten

Hoe dit gebeurt is vrij voordehandliggend stel gegeven een lineaire differentiaalvergelijking met constante coefficienten en BV

$$Y(p) = \mathscr{L}\left\{y(t)\right\}.$$

$$\mathscr{L}\left\{y'(t)\right\} = pY(p) - y(0+) = pY(p) - y_0.$$

algemeen;

$$\mathscr{L}\left\{y^{(k)}(t)\right\} = p^k Y(p) - p^{k-1}y_0 - p^{k-2}y_1 - \ldots - y_{k-1}, k = 1, \ldots, n.$$

$$\mathscr{L}\left\{a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n y(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(p).$$

We berekenen $Y(p)$ en daarna

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{Y(p)\right\}.$$

Voorbeeld 10.3.1

$$\begin{cases} y^{(3)}(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2 e^t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2 \end{cases}.$$

$$\mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = Y(p).$$

$$\mathscr{L}\left\{y'(t)\right\} = pY(p) - y(0+) = pY(p) - 1.$$

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)\right\} = p\left(pY(p) - 1\right) = 0.$$

$$\mathscr{L}\left\{y^{(3)}(t)\right\} = p\left(p^2 Y(p) - p\right) + 2.$$

dan laplace transform van het rechterlid; verschuivingseigenschap

$$\mathscr{L}\left\{t^2 e^t\right\} = \frac{2}{(p-1)^3}.$$

$$\iff \mathscr{L}\left\{y^{(3)}(t)\right\} - 3\mathscr{L}\left\{y''(t)\right\} + 3\mathscr{L}\left\{y'(t)\right\} - \mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{t^2 e^t\right\}.$$

alles invullen

$$\iff \left(p^3 - 3p^2 + 3p - 1\right)Y(p) - p^2 + 3p - 1 = \frac{2}{(p-1)^3}.$$

$$\iff \left(p-1\right)^3 Y(p) - p^2 + 3p - 1 = \frac{2}{(p-1)^3}.$$

merk op dat dat de karakteristieke veelterm is die nu in p geschreven staat.

$$\implies Y(p) = \frac{p^2 - 3p + 1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6}.$$

splitsen in partieelbreuken veruit het meeste werk.

$$\iff \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{(p-1)^3} + \frac{2}{(p-1)^6}.$$

$$\implies y(t) = e^t - te^t - \frac{1}{2}t^2 e^t + \frac{1}{60}t^5 e^t.$$

Als je dit vergelijkt met het probleem normaal oplossen, stelsel opstellen en oplossen, beginvoorwaarden invullen. Veel meer rekenwerk. Dat heeft dus vooral te maken met het feit dat er beginvoorwaarden gegeven zijn. Geen stap met AO.

Voorbeeld 10.3.2
In dit probleem hebben we voorwaarden die in het punt één gegeven zijn.

$$\begin{cases} y^{(3)}(x) - 3y''(x) + 4y(x) = 0 \\ y(1) = 0, y'(1) = e^2, y''(1) = 4e^2 \end{cases}.$$

wat we zullen doen is de verschuivingseigenschap van onafhankelijke veranderlijken gebruiken zodat de beginvoorwaarden wel in nul terechtkomen.

$$t = x - 1.$$

$$y(x) = y(t+1) = z(t).$$

We kunnen zeggen dat de afgeleiden onveranderd kunnen blijven.Extreem makkelijke substitutie dus.

$$\implies \begin{cases} z^{(3)}(t) - 3z''(t) + 4z(t) = 0 \\ z(0) = 0, z'(0) = e^2, z''(0) = 4e^2 \end{cases}.$$

Opmerking 10.3.1

Het rekenwerk wordt niet gedaan in de les, je kan dit later nog aanvullen als je tijd over hebt. Maar het is vrij eenvoudig ziet er analoog uit en voorbeeld 2.2.2

$$z(t) = e^2 t e^{2t}.$$

$$t = x - 1.$$

$$\implies y(x) = e^2(x-1)e^{2(x-1)} = (x-1)e^{2x}.$$

Voorbeeld 10.3.3
Nu bekijken we een **algemene oplossing** van niet-homogene differentiaalvergelijking

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4e^{2t}.$$

In principe kun je best met de karakterstieke veelterm werken voor de homogene. Dus we zullen beginnen met de karakteristieke

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

$$\implies y_h = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

Voor de particuliere kunnen we wel Laplace transformaties gebruiken. we zullen zelf beginvoorwaarden kiezen!!

$$y_p(0) = y_p'(0) = 0.$$

$$\implies \mathscr{L}\left\{y_p^{(k)}(t)\right\} = p^k Y(p).$$

laplacetransformatie van wat er in het rechterlid staat gedeeld door die karakteristieke met p's.

$$\iff Y(p) = \frac{\mathscr{L}\left\{4e^{2t}\right\}}{p^2 - 3p + 2}.$$

de volgende stap, het splitsen in partieelbreuken, zal het meeste werk vragen

$$\iff \frac{4}{(p-2)^2(p-1)} = \frac{4}{(p-2)^2} - \frac{4}{p-2} + \frac{4}{p-1}.$$

$$\Longrightarrow y_p(t) = 4te^{2t} - 4e^{2t} + 4e^t.$$

$$\Longrightarrow y(t) = 4te^{2t} + c_1e^{2t} + c_2e^t.$$

je moet denken dat er nu eigenlijk andere c_1, c_2 staan dan in de hmogene, er moet nu zogezegd vier worden agetrokken en vier wroden bijgeteld respectievelijk. Het is daarom dat we die andere delen van die particuliern niet opschrijven, ze worden als het ware opgeslokt.

10.3.2 Niet-constante coefficientn

Wat als we dit zouden doen met niet-constante coefficienten?

$$\mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = Y(p).$$

$$\mathscr{L}\left\{a_0(t)y(t)\right\} = \ldots.$$

We gaan een transformatie moeten doen om van een differentiaalvergelijking naar een andere differentiaalvergelijking te gaan.

$$\mathscr{L}\left\{ty(t)\right\} = -\frac{dY}{dp}.$$

$$\mathscr{L}\left\{t^2y(t)\right\} = \frac{dY}{dp^2}.$$

natuurlijk is het niet per se zinvol om een diffvergelijking tweede orde te transformeren naar tweede orde of hoger. **Het is dus belangrijk dat $a_i(t)$ veeltermen zijn van een graad strikt kleiner dan de orde van de oorspronkelijke differentiaalvergelijking.**

Voorbeeld 10.3.4 (Toepassen op differentiaalvergelijking van bessel)

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0.$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

we zin dit want $J_0'(0) = 0$

We berekenen $Y(p) = \mathscr{L}\left\{y(t)\right\}$ en zoeken daaruit de Maclaurinreeks voor $J_0(t)$

$$ty''(t) + y'(t) + ty(t) = 0.$$

$$\mathscr{L}\left\{y(t)\right\} = Y(p).$$

$$\mathscr{L}\left\{ty(t)\right\} = -Y'(p) \cdot \mathscr{L}\left\{y'(t)\right\} = pY(p) - y(0).$$

$$\mathscr{L}\left\{y''(t)\right\} = p\left(pY(p) - 1\right) - y'(0).$$

in dit geval hebben we $y'(0) = 0$, maar ook als we een andere waarde zuden geven $y'(0) = \alpha$, dan gaat die in de differentiaalvergelijking niet voorkomen, we moeten namelijk hieronder nog de afgeleide berekenen en van teken veranderen.

$$\mathscr{L}\left\{ty''(t)\right\} = -\left(p^2Y(p) - p\right)' = -2Y(p) - p^2Y'(p) + 1.$$

We krijgen nu

$$-2pY(p) - p^2Y'(p) + 1 + pY(p) - 1 - Y'(p) = 0.$$

$$\Longleftrightarrow -(p^2+1)Y'(p) - py(p) = 0.$$

kunnen we oplosse nmet scheiding an de veranderlijken

$$\Longleftrightarrow \frac{y'(p)}{y(p)} = -\frac{p}{p^2+1}.$$

$$\Longrightarrow \ln|Y(p)| = -\frac{1}{2}\ln|p^2+1| + A.$$

$$y(p) = C\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

nu moeten we nog C bepalen. **We bepalen K met de tweede asymptotische eigenschap**

$$\lim_{p\to\infty} pY(p) = \lim_{t\to 0} f(t).$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{p\to\infty} pY(p) = \lim_{p\to\infty} \frac{Cp}{\sqrt{1+p^2}} = C.$$

We zien dat die limiet naar één gaat daarom is he gelijk aan C, we vinden dan met de BVW

$$C = 1 = y(0+).$$

$$\Longrightarrow \mathscr{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Opmerking 10.3.2 We krijgen dezelfde oplossing met of zonder opleggen van die voorwaarde

Die BVW $y(0) = 1$ hebben we gebruikt bij het opstellen van de transformaties en we gebruiken die hier nog eens met tweede asymptotische eigenschap. Tweede voorwaarde $y'(0) = \alpha$ gaan we verder niet gebruiken.
Wat je ook kiest voor α, je oplossing blijft dus gelijk door die afgeleide.

Nu gaan we dit nog in een reeks ontwikkeling. De limiet voor p naar oneindig van een laplace transformatie moet bestaan. We moeten het dus ontwikkelen in machten van $\frac{1}{p}$, anders kunnen we er niets mee aanvangen

Idee of vraag 10.3.1

Waarom?

we starten van deze reeks die we gebruiken die gezien is in analyse II.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^k.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{p}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\frac{1}{p^{2k}}.$$

we berekenen de inverse laplace transformatie van beide kanten

$$\Longrightarrow J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{p^{2k+1}}\}.$$

we gebruiken de eigenschap

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

we nemen ook die $(2k)!$ dan pas kunnen we de inverse laplace transform gebruiken

$$\Longrightarrow J_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}, R = \infty.$$

zo vinden we de maclauren reeks. Herzie nog eens de eerdere hoofdstukken hierover.

10.3.3 Stelsels differentiaalvergelijkingen

Voorbeeld 10.3.5

Met de techniek van vroeger waarbij we met eigenwaarden en eigenvectoren werken moest dit stelsel eerst omgezet worden naar stelsel van vier eerste orde vergelijking voor we het konden oplossen. Met laplace transformatie zal dat niet nodig zji

$$\begin{cases} y_1'' + y_2' + 3y_1 = 15e^{-t} \\ y_2'' - 4y_1' + 3y_2 = 15\sin(2t) \end{cases}.$$

$$y_1(0) = 35, y_1'(0) = -48, y_2(0) = 27, y_2'(0) = -55.$$

$$\mathscr{L}\{y_1(t)\} = Y_1(p).$$

$$\mathscr{L}\{y_2(t)\} = Y_2(p).$$

we krijgen in het p-domein;

$$\begin{cases} \mathscr{L}\{y_1'(t)\} = pY_1(p) - 35 \\ \mathscr{L}\{y_1''(t)\} = p^2Y_1(p) - 35p + 48 \\ \mathscr{L}\{y_2'(t)\} = pY_2(p) - 27 \\ \mathscr{L}\{y_2''(t)\} = p^2Y_2(p) - 27p + 55 \end{cases}.$$

we vullen in

$$\begin{cases} p^2Y_1(p) - 35p + 48 + pY_2(p) - 27 + 3Y_1(p) = \frac{15}{(1+p)} \\ p^2Y_2(p) - 27p + 55 - 4(pY_1(p) - 35) + 3Y_2(p) = \frac{30}{(p^2+4)} \end{cases}.$$

of vereenvoudigd herschreven

$$\begin{cases} (p^2+3)Y_1(p) + pY_2(p) = \frac{15}{p+1} + 35p - 21 \\ -4Y_1(p) + (p^2+3)Y_2(p) = \frac{30}{p^2+4} + 27p - 195 \end{cases}.$$

veel schrijfwerk, maar niet echt moeilijk. Pas op van rekenfouten, hoop dat ze dit soort dingen niet vragen op het examen, check het nog wel.
Splitsen in partieelbreuken

$$\begin{cases} Y_1(p) = \frac{30p}{p^2+1} - \frac{45}{p^2+9} + \frac{3}{p+1} + \frac{2p}{p^2+4} \\ Y_2(p) = \frac{30p}{p^2+9} - \frac{60}{p^2+1} - \frac{3}{p+1} + \frac{2}{p^2+4} \end{cases}.$$

we vinden uiteindelijk

$$\begin{cases} y_1(t) = 30\cos(t) - 15\sin(3t) + 3e^{-t} + 2\cos(2t) \\ y_2(t) = 30\cos(3t) - 60\sin(t) - 3e^{-t} + \sin(2t) \end{cases}.$$

10.3.4 Veralgemening stelsels

Definitie 10.3.1: Algemeen normaalstelsel

We willen deze methode veralgemenen voor een algemeen normaalstelsel met constante matrix A.

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + \vec{F}(t), \vec{X}(0) = \vec{X}_0.$$

$$X(p) = \mathscr{L}\{\vec{X}(t)\} \iff \text{Transformatie.}$$

$$F(p) = \mathscr{L}\{\vec{F}(t)\} \iff \text{Elementsgewijs.}$$

$$pX(p) - \vec{X}_0 = AX(p) + F(p).$$

$$(PI - A)X(p) = \vec{X}_0 + F(p).$$

$$\implies X(p) = (pI - A)(\vec{X}_0 + F(p)).$$

algemene formule die gebruik kan worden om het stelsel op te lossen in het p-domein.

- We zoeken de laplace transformatie van de kolom van de niet-homogene bijdrage.
- Als we die kunnen inverteren kunnen we zeggen dat de oplossing daardoor kan gegeven worden

Idee of vraag 10.3.2

Deze laatste veralgemening heb ik niet goed gesnapt maar er ook nog niet goed over nagedacht, check ff of het belangrijk is en bekijk het nog eens.

10.4 Lineaire tijdsinvariante systemen

Definitie 10.4.1: Lineair tijdsinvariant systeem

gedefinieerd als een afbeelding van een functie u;

$$u : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \mapsto y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}.$$

$$u(t) \implies y(t).$$

deze is lineair als uit $u_1(t) \implies y_1(t)$ en $u_2(t) \implies y_2(t)$ volgt dat;

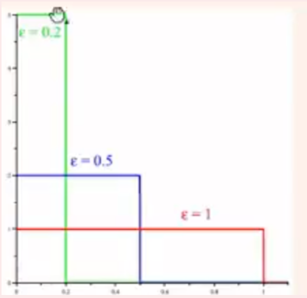
$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \implies c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

waar die constanten natuurlijk dezelfde zouden zijn.
het is tijdsinvariant als de respons niet afhangt van het startogenblik

$$u(t - \tau) \implies y(t - \tau).$$

verschuivinig van ingang speelt enkel een rol bij verschuiving uitgang.

Definitie 10.4.2: Delta-functie



dit is een rechthoek met breedte ϵ, omwille van hoe het domein wordt geschreven, en hoogte $\frac{1}{\epsilon}$

$$h_\epsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, t \in [0, \epsilon) \\ 0, t \notin [0, \epsilon) \end{cases} .$$

integraal van dei functie is altijd één de laplace getransformeerde is

$$\mathscr{L}\left\{h_\epsilon(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{\frac{u(t) - u(t-\epsilon)}{\epsilon}\right\} = \frac{1 - e^{-p\epsilon}}{\epsilon p}.$$

de delta functie is de veralgemeende functie;

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0+} h_\epsilon(t).$$

hierbij laten we dus die epsilon naar nul gaan.

Eigenschap: Eigenschap van delta functie
De oneigenlijke integraal is nog steeds gelijk aan één

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\mathrm{dt} = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\epsilon(t) = 1.$$

Eigenschap:
De laplace transform van de delta functie

$$\mathscr{L}\left\{\delta(t)\right\} = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1 - e^{-p\epsilon}}{\epsilon p} = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{Pe^{p\epsilon}}{p} = 1.$$

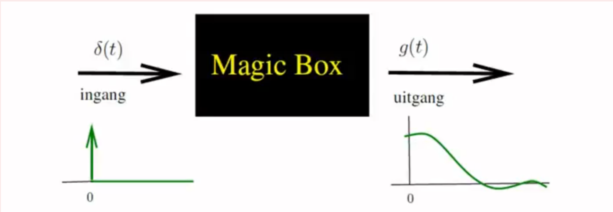
Definitie 10.4.3: Impulsrespons

dit is de respons wanneer we aan de ingang een impuls aanleggen de impulsresponsie g is de respons op ingang δ

$$\delta(t) \implies g(t).$$

overdrachtsfunctie

$$G(p) = \mathscr{L}\left\{g(t)\right\}.$$



Stelling: convolutie eigenschap
Als je de respons kent op de delta functie, dan ken je de respons op elke ingang. Formeel; Voor een willekeurig

ingangssignaal $u(t)$ van een lineair tijdsinvariant systeem met impulsresponsie $g(t)$ geldt

$$u(t) \implies g * u(t).$$

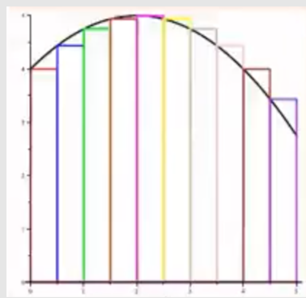
Bewijs 10.4.1:

Beschouw het ingangssignaal $u(t)$ op het interval $[0,t]$ opgedeeld in N deelintervallen

$$[0,\Delta T],[\Delta T,2\Delta T],\ldots,[(N-1)\Delta T,N\Delta T=t].$$

op $[k\Delta T,(k+1)\Delta T]$ wordt het ingangssignaal benaderd door het constant signaal

$$u(k\Delta T),k=0,\ldots.$$



$$h_{\Delta T}(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta T},t\in[0,\Delta t)\\ 0,\ \text{anders}\end{cases}.$$

$$u_k(t)=u(k\Delta T)\Delta T h_{\Delta T}(t-k\Delta T).$$

vermenigvuldigen met ΔT zodanig dat de hoogte één wordt. Dan verschuiven en vermenigvuldigen, zie figuur

$$\iff \begin{cases}u(k\Delta T),t\in[k\Delta T,(k+1)\Delta T]\\ 0,\ \text{anders}\end{cases}.$$

We kunnen zeggen dat $h_{\Delta T}$ een benadering is van de diract impuls, dus de respons is bij benadering

$$h_{\Delta T}(t) \implies g(t).$$

- Omwille van tijdsvariantie

$$h_{\Delta T}(t-k\Delta T) \implies g(t-k\Delta T).$$

  bijgevolg is het een blokje dat begint op $k\Delta T$ ipv positie nul. Bijgeolg is het een benadernig van dirac funtie rond $k\Delta T$

- Omwille van lineariteit

$$u(t)\approx\sum_{k=0}^{N-1}u_k(t) \implies \sum_{k=0}^{N-1}u(k\Delta T)g(t-k\Delta T)\Delta T.$$

$$\approx\int_0^t g(t-s)u(s)ds.$$

  voor $N\to+\infty$ (en daarmee $\Delta T\to 0+$) worden benaderingen beter.

$$\iff u*g(t)=g*u(t).$$

Stelling:
Convolutie in het tijdsdomein is product in het p-domein; bijgevolg wordt de uitgang in het p-domein dus de uitgan van lineair tijdsinvariant systeem met ingang $u(t)$ is;

$$Y(p) = G(p)U(p).$$

de uitgang is het product van het overdrachtsfunctie maal de ingang in p-domein. Vandaar de naam overdrachtsfunctie; **verband in het p-domein ingang en uitgang.**

Beschouw

$$\begin{cases} \vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\vec{X}(t) + Du(t) \end{cases}.$$

waarbij $\vec{X}(t) \in \mathbb{R}^n$ de toestandsvariebelen op tijdstip t beschrijft, $u(t) \in \mathbb{R}$ ingangsfunctie op tijdstip t (aansturen) . $y(t) \in \mathbb{R}$ uitgangsfunctie op tijdstip t (signalen die in praktijk gemeten worden) .

Definitie 10.4.4: interne stabiliteit

een dynamisch systeem beschreven door

$$\begin{cases} \vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\vec{X}(t) + Du(t) \end{cases}.$$

is intern stabiel voor $u = 0$ alle oplossingen naar nul convergeren.

Eigenschap:
het systeem is intern stabiel asa alle eigenwaarden van een A strikt negatief reëel deel hebben.

Eigenschap:
Het systeem is intern stabiel asa voor elke ingangsfunctie $u(t)$ die begrensd is op $[0, +\infty)$, elke oplossing $\vec{X}(t)$ eveneens begrensd is op dat interval.

Voorbeeld 10.4.1 (Impulsresponsie voor intern stabiele dynamische systemen)
er is ee ngroot verschil met de statische setting; de uitgang werd daar enkel bepaald door ingang, bij dynamisch systeem wordt uitgang bepaald door ingang en initiële condities
daarom bekijken we de impulsresponsie als, de respons van een systeem in rust, met aan de ingang een delta functie.

$$\begin{cases} \vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + B\delta(t), \vec{X}(0) = \vec{0} \\ y(t) = C\vec{X}(t) + D\delta(t) \end{cases}.$$

Voor $h > 0$

$$\vec{X}(h) - \vec{X}(0) = \int_0^h \vec{X}'(t)\mathrm{dt}.$$

$$\iff \int_0^h A\vec{X}(t)\mathrm{dt} + \int_0^h B\delta(t)\mathrm{dt} = \int_0^h A\vec{X}(t)\mathrm{dt} + B.$$

$$h \to 0+ \implies \vec{X}(0+) - \vec{X}(0) = B.$$

$$\implies \vec{X}(0+) = B.$$

dus de impuls passeert en we hebben nieuwe initiële conditie B.

Voorbeeld 10.4.2

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + B\delta(t).$$

algemene oplossing in termen van matrix exponentiële

$$\vec{X}(t) = e^{At}\vec{X}(0-) + \int_{0-}^{t} e^{A(t-s)}B\delta(s)\,\mathrm{ds}.$$

die 0- isnet voor de puls in de delta functie verschijnt wanneer we dit nu proberen te evalueren na de puls;

$$\vec{X}(0+) = B.$$

net na passeren van de impuls is de waarde B.
We kunnen de impulsresponsie berekenen door systeem te beschouwen zonder input

$$\begin{cases} \vec{X}'(t) = A\vec{X}(t), \vec{X}(0) = B \\ y(t) = C\vec{X}(t) + D\delta(t) \end{cases}.$$

heeft als oplossing **de impulsresponsie in het tijdsdomein**

$$g(t) = Ce^{At}B + D\delta(t).$$

we kunnen deze omzetten in het p-domein

$$\begin{cases} pX(p) - B = AX(p) \\ Y(p) = CX(p) + D \end{cases}.$$

$$\Longrightarrow Y(p) = C(pI - A)^{-1}B + D.$$

de overdrachtsfunctie wordt gegeven door

$$G(p) = \mathscr{L}\{g(t)\}.$$

$$\Longleftrightarrow C(pI - A)^{-1}B + D.$$

Stelling: Algemene oplossing
Tijdsdomein

$$\begin{cases} \vec{X}'(t) = A\vec{X}(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\vec{X}(t) + Du(t) \end{cases}.$$

In het p-domein;

$$\begin{cases} pX(p) - \vec{X}(0) = AX(p) + BU(p) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p) \end{cases}.$$

wat halen we hieruit De uitgang wordt de overdrachtsfunctie maal de ingang + die c keer ... maal initiële condities.

$$Y(p) = G(p)U(p) + C(pI - A)^{-1}\vec{X}(0).$$

een systeem met initiël condities nul; dan valt de uitgang weg, dan wordt de uigang bepaald door de ingang en wordt de mapping lineair tijdsinvariant.

- $\vec{X}(0) = 0$ afbeelding **uniek, lineair, tijdsinvariant**

$$Y(p) = G(p)U(p) \iff y(t) = g * u(t).$$

- Intern stabiel systeem; alle eigenwaarden van A liggen in open linker half vlak dan gaat elke term overenkomen met een functie in het tijdsdomein die exponentiëel naar nul convergeert. Kijk goed nar de

$$C(pI-A)^{-1}.$$

de tweede term gaat slechts overgangsverschijnselen beschrijven!!

Idee of vraag 10.4.1

Wat zijn die overgangsverschijnselen precies?

10.5 Andere interpretatie

Stelling:
stel je legt een ingang aan

$$u(t)=\gamma e^{zt}, \gamma \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{cases} \vec{X}'(t)=A\vec{X}(t)+Bu(t) \\ y(t)=C\vec{X}(t)+Du(t) \end{cases}.$$

dan heeft het systeem een PO

$$y(t)=G(z)\gamma e^{zt}.$$

$$G(p)=C(pI-A)^{-1}B+D.$$

Bewijs 10.5.1:

stel

$$\vec{X}(t)=Xe^{zt}, u(t)=\gamma e^{zt}.$$

$$y(t)=Ye^{zt}, X \in \mathbb{C}^n, Y \in \mathbb{C}.$$

je krijgt

$$(zI-A)Xe^{zt}=B\gamma e^{zt}.$$

$$Ye^{zt}=CXe^{zt}+D\gamma e^{zt}.$$

$$\implies Y=C(zI-A)^{-1}B\gamma+D\gamma=G(z)\gamma.$$

hieruit volgt

- $$u(t)=\gamma e^{zt}, \gamma>0, z \in \mathbb{R} \implies y(t)=G(z)=\gamma e^{zt}.$$

  particuliere oplossing is een kopie van het signaal vermenigvuldigd met $G(z)$!!

- $$u(t)=\gamma e^{\imath\omega t}, \gamma>0, \omega>0 \implies y(t)=G(\imath\omega)\gamma e^{\imath\omega t}.$$

  je kan dit expanderen met goniometrische functies. Nu nemen we van de signalen het reële deel

  $$u(t)=\mathbb{R}(\gamma e^{i\omega t}=\gamma\cos(\omega t)=\gamma\cos(\omega t).$$

  $$\implies y(t)=\mathbb{R}(G(\imath\omega)\gamma e^{\imath\omega t}).$$

we kunnen dit nu polair voorstellen

$$G(z) = |G(z)|e^{i\phi(z)}.$$

$$u(t) = \gamma \cos\left(\omega t\right) \implies y(t) = |G(i\omega)|\gamma \cos\left(\omega t + \phi(i\omega)\right).$$

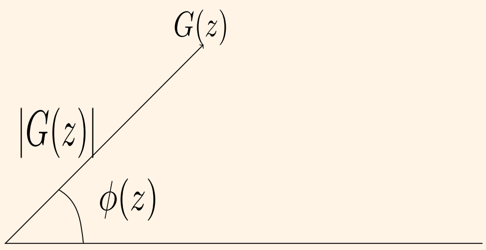


Figure I.10.1: In polaire vorm weergegeven

stel dat je het systeem periodiek aandrijft

$$u(t) = \gamma \cos\left(\omega t\right).$$

gamma de amplitude en omega de frequentie, er bestaat een evenwichtsoplossingoplossing

$$y(t) = |G(\imath\omega)|\gamma \cos\left(\omega t + \phi(\imath\omega)\right).$$

$$G = |G|e^{\imath\phi}.$$

die modulus bepaalt de amplitude en er is een faseverschuiving $\phi(\imath\omega)$
die interne stabiliteit is van belang, want dan wordt di een evenwichtsoplossing.

Opmerking 10.5.1

Alles hierna vind ik zo abstract, kan niet nuttig zijn voor het examen. Ik heb het niet opgeschreven. Dit is enkel laatste deel v lineaire tijdsinvariante systemen. Daarna weer wel.

de modulus gaat iets zeggen over versterken of verzwakken, argument gaat iets zeggen over de faseverschuiving.

Voorbeeld 10.5.1
Neem $c \neq 0$ en uitwendige kracht

$$u(t) = \cos\left(\omega t\right), \omega = 1.$$

we hebben

$$G(\imath) = -\frac{1}{c}\imath = \frac{1}{c}e^{-\frac{\pi}{2}\imath}.$$

volgens de voorgaande stelling is er ee nevenwichtsoplossing waarvoor geldt

$$y_e(t) = |G(\imath)| \cos\left(t + \pi(\imath)\right).$$

$$\iff \frac{1}{c}\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{c}\sin\left(t\right).$$

je merkt dat als c kleinerwordt, de amplitude stijgt. Dat heeft te maken met het feit dat de amplitude voor $c = 0$ lineair toeneemt met de tijd
controle

$$Y(p) = G(p)U(p).$$

$$\iff \frac{1}{p^2+cp+1}\frac{p}{p^2+1}.$$

$$\implies \frac{1}{c(p^2+1)} - \frac{1}{c(p^2+cp+1)}.$$

terugtarnsformeren naar het tijdsdomein

$$y(t) = \frac{\sin(t)}{c} - \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases}.$$

die uitdrukking kun je met matlab berekenen. Voor verschillende waarden van c enkele gekke functies. **Wat je zult zien zijn allemaal exponentiële termen die uitsterven met de tijd.**

I.11 Fourier transformaties

11.1 Definitie

er bestaat een complexe vorm van fuorierreeksen. We gebruiken de standaard fourierreeks van een periodieke functie $f(t)$ periode T

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right).$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\mathrm{dt}, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\mathrm{dt}, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

we stellen hierin

$$\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) = \frac{e^{\frac{2\pi k\imath t}{T}} + e^{\frac{-2\pi k\imath t}{T}}}{2}.$$

$$\sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) = \frac{e^{\frac{2\pi k\imath t}{T}} - e^{\frac{-2\pi k\imath t}{T}}}{2}.$$

$$\Longrightarrow f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\frac{2\pi k\imath t}{T}}.$$

waarbij

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{\frac{-2\pi k\imath t}{T}}\mathrm{dt}.$$

de α_k complexe getalen en een som vanaf $-\infty$.
een harmonische functie is van de vorm

$$a\cos(\omega t + \phi) = a\cos(2\pi st + \phi) = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right).$$

waarbij

- ω hoekfrequentie, circulaire frequentie, of pulsatie
- ϕ de fase
- a de amplitude
- s de frequentie
- T de periode

een fourierreeks is dus een ontbbinding van periodieke functies f met periode T in harmonische basisfuncties met frequenties $s_k = k\frac{1}{T}, k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f(t) \sim \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{\imath 2\pi s_k t} + \alpha_{-k} e^{-\imath 2\pi s_k t}.$$

stel $\alpha_k = |\alpha_k| e^{\imath\phi_k}$ waarbij $\alpha_{-k} = \overline{\alpha_k}$

$$f(t) \sim \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| e^{\imath\phi_k} e^{\imath 2\pi s_k t} + |\alpha_k| e^{-\imath\phi_k} e^{-\imath 2\pi s_k t}.$$

$$\Longrightarrow f(t) \sim \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|\alpha_k| \cos\left(2\pi s_k t + \phi_k\right).$$

je ontbindt f in een startcomponent en een sinusoïdale component waarvan de frequentie veelvouden zijn van de basisfrequenties. Grootte wordt bepaald door de modulus, de fase wordt bepaald door het argument. **Alle informatie zit in de coefficiënt**.

11.1.1 De transformatie

we zetten de stap naar een niet periodieke functie;

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

$$T \longrightarrow +\infty, \omega_k = \frac{2\pi}{T}k, \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

we vertrekken van de complexe vorm van de fourier reeks

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{\imath\omega_k t}.$$

$$\alpha_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\xi) e^{-\imath\omega_k \xi} d\xi.$$

$$\Longrightarrow f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega_k t}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\xi) e^{-\imath\omega_k \xi} d\xi \Delta\omega.$$

Neem nu periode naar oneindig $T \longrightarrow +\infty$, alle ω_k komen dichter bij elkaar te liggen en $\Delta\omega = 0$ **Je krijgt de fourier transformatie**

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\imath\omega t} F(\omega) d\omega.$$

En de inverse fourier transformatie

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\imath\omega t} f(t) \mathrm{dt}.$$

wij gaan altijd werken met een variant waar we ω vervangen;

$$\omega = 2\pi s.$$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi} \mathrm{dt}.$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{2\pi} \mathrm{ds}.$$

Definitie 11.1.1: Fourier transformatie

$$\mathscr{F}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi\imath ts}\mathrm{dt}.$$

inverse fourier transformatie;

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{2\pi\imath ts}ds.$$

Stelling: Bestaansvoorwaarde
Zij $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ een stuksgewijze continue functie waarvoor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\mathrm{dt} < \infty.$$

Dan bestaat de fourier getransformeerde van f.

11.2 Terminologie en interpretatie

de inverse transformatie voldoet

$$f(t) = \int_{-\infty}^{0} F(s)e^{2\pi\imath ts}ds + \int_{0}^{+\infty} F(s)e^{2\pi\imath ts}ds.$$

$$\iff \int_{0}^{+\infty} \left(F(s)e^{2\pi\imath ts} + F(-s)e^{-2\pi\imath ts}\right)ds.$$

we kunnen **F in polaire vorm schrijven**

$$F(s) = |F(s)|e^{i\phi(s)}, s \in \mathbb{R}.$$

we gebruiken eigenschap complexe getallen;

$$F(-s) = \overline{F(s)} = |F(s)|e^{-\imath\phi(s)}.$$

hieruit vind je

$$f(t) = \int_{0}^{+\infty} 2|F(s)|\cos\left(2\pi ts + \phi(s)\right).$$

Herrinnering 11.2.1

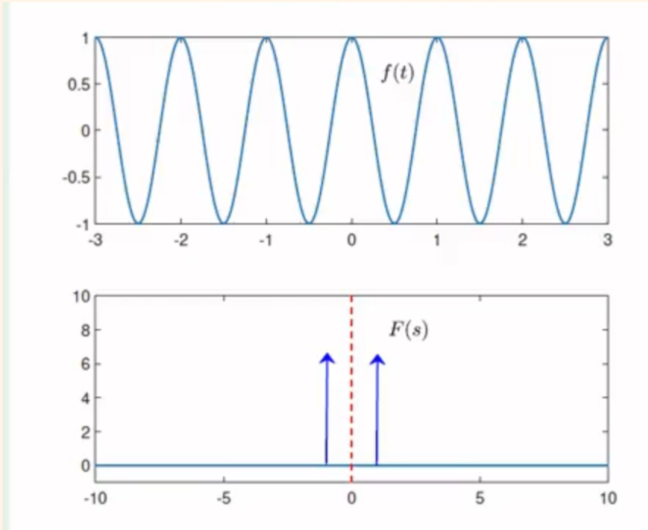
bemerk dat deze uitdrukking gelijk is aan die van een complexe fourierreeks.

$$f(t) \sim \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|\alpha_k|\cos\left(2\pi s_k t + \phi_k\right).$$

we hebben een continuüm aan frequenties waardoor de som vervangen wordt door een integraal!

- Fouriertransform beschrijft ontbinding van een functie in harmonische basisfuncties
- Het is mogelijk dat er een continuüm van frequenties voorkomt, niet gewoon een discrete verzameling.

¿anneer je een functie definieert $\cos\left(2\pi t\right)$ in $[-l, l]$ en erbuiten nul, dan zie je goven die als je ze naar de limiet neemt uitkomen op deze dirac-deltas;



$$\mathscr{F}\left\{\cos\left(2\pi t\right)\right\} = \frac{\delta(s-1)+\delta(s+1)}{2}.$$

laten we dit controleren, dit is een belangrijk te begrijpen concept. Inverse fourier transform;

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{\imath 2\pi^2} ds.$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\delta(s-1)}{2} + \frac{\delta(s+1)}{2}\right) e^{\imath 2\pi st} ds.$$

$$\iff \frac{1}{2}e^{\imath 2\pi t} + \frac{1}{2}e^{-i2\pi t}.$$

$$\implies \cos\left(2\pi t\right).$$

11.3 Voorbeelden en eigenschappen

11.4 De bemonsteringsstelling

Definitie 11.4.1: Bandbegrensd

Een functie $f(t)$ is bandbegrensd als er een getal s_c bestaat zodanig dat $|F(s)| = 0$ voor $s > s_c$. Het kleinste getal s_c wordt de afsnijfrequentie genoemd. Dus een functie die nul wordt buiten een bepaald interval.

Stelling: Bemonsteringsstelling
Elke bandbegrensde functie kan perfect geconstrueerd worden uitgaande van de functiewaarden

$$f(k\tau), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

op voorwaarde

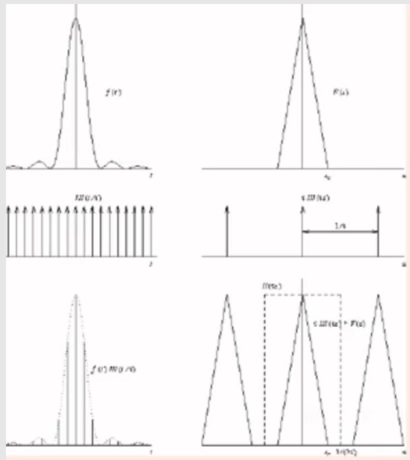
$$\tau < \frac{1}{2s_c}.$$

waar s_c de afsnijfrequentie. ook

$$2\tau < \frac{1}{s_c}.$$

bemerk hierbij dat de periode geiljk is aan $\frac{1}{s_c} = T$.

Bewijs 11.4.1: Bemonsteringsstelling



de bemonstering, in het tijdsdomein f vermenigvuldigen met een impulstrein geevalueerd in $\frac{t}{\tau}$, zo is de afstand tussen twee pulsen τ.

$$g(t) = f(t)III(\frac{t}{\tau}).$$

zie onderaan links. Als je t vervangt door $\frac{t}{\tau}$ dan wordt in het fourierdomein vermenigvuldigd met τ in amplitude en impulstrein.

$$G(s) = \mathscr{F}\left\{g(t)\right\} = \tau III(\tau s) * F(s).$$

Dat wil nu zeggen dat de impulsen nu een afstand hebben $\frac{1}{\tau}$. Zoals ik eigenlijk hierboven schreef. vermenigvuldigen in tijdsdomein is convolueren in s domein.

$$\tau \int_{-\infty}^{+\infty} III(\tau(s-u))F(u)\mathrm{du}.$$

$$\iff \int_{-\infty}^{+\infty} III(\tau s - v)F(\frac{v}{\tau})dv.$$

$$\iff \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau s - v - k)F(\frac{v}{\tau})dv.$$

I.12 Oefenzittingen 4 en 5

Deel II

Examenvoorbereiding

II.1 Strategie en ideeën

II.2 Alle te kennen bewijzen

II.3 Oud examenvragen