

Meetkunde en lineaire algebra
Tweede semester

Tibo Fordeyn

Inhoudsopgave

1	Naam van hoofdstuk	2
1.1	Voortbrengend	2
1.2	deelruimten	3
2		4

Hoofdstuk 1

Naam van hoofdstuk

1.1 Voortbrengend

Voorbeeld 1.1.1

uit ruimte $V = \mathbb{R}^{3x}$ standaardruimte:

$$B = [1, x, x^2, x^3].$$

We zeggen

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2.$$

We zeggen

$$B' = (1, 1 - x, 2x^2 - 3, x^3 - x^2 + x).$$

We controleren of dit een nieuwe basis is: We kijken of de vectoren lineair onafhankelijk en voortbrengend zijn. (theoretisch)

We kunnen ook kijken of de determinant van de matrix verschillend is van nul. Als we de oude elementen kunnen schrijven in functie van de nieuwe kun je de oud vervangen door een lineaire combinatie van de nieuwe, maar dat is veel werk, dus je kunt kijken of ze lineair onafhankelijk zijn.

Verduidelijking of addendum 1.1.1 niet vergeten

In een n-dimensionale ruimte, als je een verzameling S met n elementen hebt die lineair onafhankelijk zijn, dan weet je al dat de verzameling S voortbrengend is. JE CONTROLEERT 1 VAN DE 2.

Dus je stelt de matrix, dit is een bovendriehoeksmatrix. En je zult direct zien dat de determinant verschillend is van nul.

Voorbeeld 1.1.2

Beschouw:

$$P(x) = -2 + 3x + 5x^3.$$

(in die ruimte)

We weten gemakkelijk de coördinaten tov de oude basis:

$$(-2, 0, 3, 5).$$

We willen nu de nieuwe coördinaten voor den nieuwe ruimte.

We weten

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}.$$

Je vind:

$$d' = 5, c' = \frac{5}{2}, b' = -2, a' = \frac{7}{2}.$$

conrole

$$a'e'_1 + b'e'_2 + c'e'_3 + d'e'_4 = P(x).$$

$$\frac{7}{2}1 - 2(x-1) + \frac{5}{2}(2x^2-3) + 5(x^3-x^2+x) = -2 + 3x + 5x^3.$$

klopt volgens hennie

1.2 deelruimten

We bekijken of je een nieuwe deelruimte verkrijgt als je de bewerking gaat uitvoeren.

Voorbeeld 1.2.1

$$V_F, V_1 \text{ en } V_2.$$

doorsnede

$$V_1 \cap V_2 = [v \in V | v \in V_1 \text{ en } v \in V_2].$$

is dus de vraag.

- unie: $V_1 \cup V_2 = \{v \in V | v \in V_1, \forall v \in V_2\}$

Is geen deelruimte.

Herinnering 1.2.1 dimensiestelling

$$V_2, V_1.$$

geld voor eindig dimensionale grote ruimten.

Voorbeeld 1.2.2

als grote ruimte $\mathbb{R}^{3 \times 3}$

symmetrische 3x3 matrix:

$$\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}.$$

klopt het dat elke 3 bi 3 matrix geschreven kan worden als een symmetrisch en een antisymmetrisch deel. Alle elementen op de hoofddiagonaal moeten in het symmetrisch stuk zitten, en voor alle andere elmenetne

Hoofdstuk 2

Voorbeeld 2.0.1

2 punten

$$P = (P_1, P_2, P_3).$$

$$Q = (Q_1, Q_2, Q_3).$$

Beschouw:

$$\begin{pmatrix} Q_1 - P_1 \\ Q_2 - P_2 \\ Q_3 - P_3 \end{pmatrix}.$$

Je trekt eigenlijk twee plaatsvectoren van elkaar af.

vetoren is de vrije vector die loopt van eindpunt naar begintpunt.

$$\vec{v} = Q - P.$$

$$\iff P + \vec{v} = Q.$$

Er is dus geen puntenruimte als lineaire ruimte. Want het verschil tussen 2 punten is een vector.

Voorbeeld 2.0.2

Beschouw 2 punten:

$$P = (P_1, P_2, P_3).$$

$$Q = (Q_1, Q_2, Q_3).$$

We bekijken $P+Q$:

$$\begin{pmatrix} P_1 + Q_1 \\ P_2 + Q_2 \\ P_3 + Q_3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OR}.$$

We noemen dat punt R, vandaar OR.

Wanneer de som van

$$\begin{cases} P_0, \dots, P_n \in E \\ \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

waarbij

$\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$ levert nieuw punt Q op dat goed gedefinieerd is (onafhankelijk van zelfgemaakte keuzes).

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i P_i.$$

Voorbeeld 2.0.3

Beschouw:

$$\frac{1}{2}P_0 + \frac{1}{3}P_1 + \frac{1}{6}P_2.$$

$$\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Bemerk:

$$P_0 + \frac{1}{3}(P_1 - P_0) + \frac{1}{6}(P_2 - P_0).$$

Bemerk de vectors die het oplevert. Er staat een lineaire combinatie van 2 vectoren, noem deze \vec{v}

$$\vec{v} = \frac{1}{3}(P_0\vec{P}_1) + \frac{1}{6}(P_0\vec{P}_2).$$

algemeen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n \alpha_i P_i &= \alpha_0 P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i. \\ \implies P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (P_i - P_0) &= Q.\end{aligned}$$

Verduidelijking of addendum 2.0.1 Kleine opmerking

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i = 0 \implies \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i = \vec{v}.$$

Voorbeeld 2.0.4

toepassing 1 Rechte bepaald door 2 verschillende punten of 1 punt en een richtingsvector u die kan samenvallen met de vector $P_1\vec{P}_2$. Wanneer is een punt op die rechte gelegen?

$$\iff P_1\vec{P} \text{ moet evenwijdig zijn met } P_1\vec{P}_2.$$

$$\exists t \in \mathbb{R} : P = (1 - t)P_1 + P_2.$$

We zien een baricentrische combinatie.

Verduidelijking of addendum 2.0.2

De meetkundige betekenis van t is de verhouding van de vectoren, als deze positief is, dan hebben de vectoren dezelfde zin. Als t kleiner is dan 1, dan is de lengte van P_1P t keer de lengte van P_1P_2 .

$$P = P_1 + t\vec{u}.$$

Voorbeeld 2.0.5