Extra fourier, laplace en z transforms

Tibo Fordeyn

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Fourier transforms

fourier transforms zijn onderdeel van de laplace transforms. Fourier transforms zoeken sinusoidale functies, laplace zoekt sinusoidale en exponentiële.

$$\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Voorbeeld 1.0.1

$$y(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}.$$

$$f(t) = y(a - |t|).$$

a is een constante functie en t is dus een absolutewaardefunctie. We zien dat deze functie overal nul is behalve wanneer:

$$a - |t| > 0 \iff |t| < a.$$

We noemen dit een blokgolf functie.

Aangezien de functie overal nul is behalve van min a naar a, integreren we niet over gans $\mathbb{R}$

$$\mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega) = \int_{-a}^{a} 1 \cdot e^{-i\omega t}dt.$$

In het interval waar we wel over integreren is f 1, dus we kunnen gewoon 1 schrijven als f.

$$\iff \mathscr{F}\left[f(t)\right](\omega) = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-a}^{a}.$$

$$\iff \frac{e^{-i\omega a}}{-i\omega} - \frac{e^{i\omega a}}{-i\omega}.$$

$$\iff \frac{1}{i\omega}\left[e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}\right].$$

$$\implies 2a\frac{\sin(a\omega)}{a\omega}.$$

Voorbeeld 1.0.2

Beschouw:

$$f(t) = e^{-|t|}.$$

We willen de fourier transform van f.

$$\mathcal{F}\left[e^{-|t|}\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

Een absolute waarde splits je altijd op.

$$\mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{t} \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

Limiet nemen voor de oneigenlijke integraal.

$$\iff \lim_{p\to\infty} \int_{-p}^{0} e^{t(1-i\omega)} dt + \int_{0}^{p} e^{-t(1+i\omega)} dt.$$

$$\iff \lim_{p\to\infty} \left[\frac{e^{t(1-i\omega)}}{1-i\omega}\right]_{-p}^{0} + \left[\frac{e^{-t(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)}\right]_{0}^{p}.$$

$$\implies \frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{-(1+i\omega)}.$$

$$\implies \frac{2}{1-i\omega}.$$

1.1 fourier voor afgeleiden van functies

Je wilt waarschijnlijk eens de voorwaarden voor een functie om fourier transformeerbaar te zijn bekijken.

1.2 AFGELEIDE FORMULE

1. f continu over gans $\mathbb{R}$
2. f' Stuksgewijs continu over elke periode
3. f fourier transformeerbaar
4. $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$

dan geldt:

$$\mathcal{F}\left[f'(t)\right](\omega) = i\omega \hat{f}(\omega).$$

Definition 1.2.1: Algemeen

Als

1. $f^{(k-1)}$ continu is op gans $\mathbb{R}$
2. $f^{(k)}$ stuksgewijs continu op elk interval
3. $f^{(k-1)}$ moet fourier transformeerbaar
4. $\lim_{t\to\infty} f^{(k-1)}(t) = 0$

Dan

$$\mathcal{F}\left[f^{(k)}(t)\right](\omega) = (i\omega)^{k} \cdot \mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega).$$

1.3 Verder toepassingen oplossen

Voorbeeld 1.3.1
Beschouw:

$$q(t) = \begin{cases} e^t, t < 0 \\ -e^{-t}, t > 0 \end{cases} .$$

$$\mathscr{F}\left[q(t)\right](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) \cdot e^{-i\omega t} dt.$$

Herinnering 1.3.1 Andere functie
De functie $e^{-|t|}$ hebben we alreeds fourier getransfomeerd.

$$\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right](\omega) = \frac{2}{1 - i\omega}.$$

Stel $f(t) = e^{-|t|}$

$$q(t) = f'(t).$$

en

$$\mathscr{F}\left[f^{(k)}(t)\right](\omega) = (i\omega)^k \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

$$\iff \mathscr{F}\left[q(t)\right](\omega) = (i\omega) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

$$\implies \mathscr{F}\left[q(t)\right](\omega) = (i\omega) \cdot \frac{2}{1 - i\omega}.$$

$$\implies Q(\omega) = \frac{2i\omega}{1 - i\omega}.$$

Voorbeeld 1.3.2
Beschouw:

$$y'' + y = 0.$$

$$\mathscr{F}\left[y"\right](\omega) + \mathscr{F}\left[y\right](\omega) = \mathscr{F}\left[0\right](\omega).$$

$$(i\omega)^2 \mathscr{F}\left[y\right](\omega) + \mathscr{F}\left[y\right](\omega) = 0.$$

$$\mathscr{F}\left[y\right](\omega) = 0.$$

$$y = 0.$$

we vinden geen sinus en cosinus als oplossingen, want sinus en cosinus zijn niet foutier transformeerbaar. (de voorwaarde $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ is niet voldaan.)