

Legyen  $X$  egy halmaz. Az  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  halmazrendszeret  $\sigma$ -algebrának nevezzük, ha

1.  $X \in \mathcal{A}$ ,
2.  $\overline{A} = X \setminus A \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}$ ,
3.  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ , ha  $A_i \in \mathcal{A}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ).

Ekkor az  $(X, \mathcal{A})$  rendezett párt mérhető térnak, az  $\mathcal{A}$  elemeit mérhető halmazoknak nevezzük.

A  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  függvényt mértéknak nevezzük az  $(X, \mathcal{A})$  mérhető téren, ha  $\mu(\emptyset) = 0$  és

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

minden  $A_i \in \mathcal{A}$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) diszjunkt rendszerre. Ekkor  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ -t mértéktérnek,  $\mu(A)$ -t az  $A$  mértékének nevezzük.

Legyen  $X$  egy halmaz,  $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $\nu: \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$  és  $\mu$  a  $\nu$ -höz tartozó külső mérték.  $B \subset X$  pontosan akkor  $\mu$ -mérhető, ha

$$\nu(A) \geq \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \quad \forall A \in \mathcal{H}. \quad (1)$$

Az (1) szükségessége triviálisan teljesül.

Ha  $X$  egy halmaz és  $A \subset X$ , akkor az

$$I_A: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad I_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt az  $A$  karakteristikus függvényének nevezzük.

Legyen  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  mértéktér és  $g, f, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}_b$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) mérhető függvények. Ha  $g$  integrálható és  $|f_n| \leq g \ \forall n \in \mathbb{N}$ -re, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu.$$

A mérték folytonossága a következő miatt igaz:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{i+1} \setminus A_i) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})). \end{aligned} \quad (2)$$

A koszinusz és szinusz függvények hányadosát *kotangensnek* nevezzük, azaz

$$\operatorname{ctg}(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$