1) Integrales

- **Definición**: Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función, definimos que $F : I \to \mathbb{R}$ es una antiderivada o primitiva de f en I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$. Notar que las primitivas <u>no</u> son únicas.

- **Teorema**: Si F es una primitiva de f en I entonces toda primitiva de f en I es de la forma $F(x) + c$, para algún $c \in \mathbb{R}$.

1.a) Integrales indefinidas

- **Definición**: Dado $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$, se llama <u>integral indefinida</u> de f al <u>conjunto de todas las primitivas</u> de f y se denota

$$\int f(x)\ \mathrm{dx}$$

- **Propiedades**:
  - $\int 0\ \mathrm{dx} = c$
  - $\int a \cdot f(x)\ \mathrm{dx} = a \cdot \int f(x)\ \mathrm{dx},\ \ \forall a \in \mathbb{R}$
  - $\int (f \pm g)(x)\ \mathrm{dx} = \int f(x)\ \mathrm{dx} \pm \int g(x)\ \mathrm{dx}$

- **Teorema** (método de sustitución): Sean $f : (d, e) \to \mathbb{R}$ y $g : (a, b) \to (d, e)$ derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d, e), $H(x) = (F \circ g)(x)$ es primitva de $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ en (a, b). Es decir:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{dx} = F(g(x)) + C, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\ y\ \forall x \in (a, b)$$

- **Teorema** (método de integración por partes): Si f' y g' son continuas, entonces

$$\int f(x) \cdot g'(x)\ \mathrm{dx} = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\ \mathrm{dx}$$

o equivalentemente, usando notación de sustitución tal que $u = f(x)$, $v = g(x)$, $\mathrm{du} = f'(x)\ \mathrm{dx}$ y $\mathrm{dv} = g'(x)\ \mathrm{dx}$:

$$\int u \cdot \mathrm{dv} = u \cdot v - \int u \cdot \mathrm{dv}$$

1.b) Integrales definidas

- **Definición**: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$, se define el área encerrada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ por:

$$A = \lim_{\Delta \to 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k \right)$$

Llamaremos a este número la <u>integral definida</u> de f en $[a, b]$ y lo denotaremos por:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$$

- **Observaciones**:
  - Si $a = b$, se define $\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = 0$. Además, se puede probar que $\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{dx}$
  - Se puede extender a la definición a funciones que toman valores positivos y negativos, escribiendo $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y haciendo

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \int_a^b f^+(x)\ \mathrm{dx} - \int_a^b f^-(x)\ \mathrm{dx}$$

  - También se puede extender a funciones continuas en $[a, b]$ salvo un número <u>finito</u> de puntos y siempre que f esté <u>acotada</u> en $[a, b]$.

- **Propiedades**:

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas y continuas, salvo a lo sumo un número finito de puntos. Las siguientes son válidas:

1) Si $f \geq 0$ en [a, b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \geq 0$
2) $\int_a^b c \cdot f(x)\ \mathrm{dx} = c \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx},\ \forall c \in \mathbb{R}$
3) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ \mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \pm \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx}$
4) Si $d \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \int_a^d f(x)\ \mathrm{dx} + \int_d^b f(x)\ \mathrm{dx}$
5) Si $f \leq g$ en $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx}$

- **Teorema** (teorema fundamental del cálculo): Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{dt},\ \forall x \in [a, b]$. Entonces:
  1) F es derivable y $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$. O sea, F es primitiva de f.
  2) Si G es una primitiva de f en $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{dt} = G(b) - G(a) \doteq G(x)|_a^b$$

  (Esta parte se conoce como **Regla de Barrow**)

- **Teorema**: Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ con f continua y g tal que $g(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$ salvo un $c \in [a, b]$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx}$$

- **Teorema** (método de sustitución): Sean $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to [c, d]$ tal que f y g' son continuas en sus respectivos dominios. Entonces si $u = g(x)$ vale que:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \ \mathrm{dx} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \ \mathrm{du}$$

En particular, si F es primitiva de f tenemos que:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \ \mathrm{dx} = F(g(b)) - F(g(a))$$

- **Teorema** (método de integración por partes): Sean f y g derivables en (a, b) y tal que f' y g' tienen a lo sumo un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ y son acotadas. Entonces:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \ \mathrm{dx} = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x) \cdot f'(x) \ \mathrm{dx}$$

Vale de igual manera las sustituciones de $u = f(x)$ y $v = g(x)$ como en el método para las integrales indefinidas.

1.c) Área entre gráficos de funciones

- **Teorema**: Sea f y g funciones acotadas con un número finito de discontinuidades y tales que $f(x) \geq g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$ entonces el área entre los gráficos de f y g (y las rectas $x = a$ y $x = b$) es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \ \mathrm{dx}, \quad \text{ya que } f(x) - g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$$

1.d) Integración de funciones racionales usando fracciones simples

Teniendo $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ vamos a suponer que satisface:

1) $\mathrm{gr}(p) < \mathrm{gr}(q)$

   Si no fuese cierto, podemos dividir $p(x)$ por $q(x)$ y así obtener:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = Q(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

   donde $Q(x)$ es un polinomio fácil de integrar y $r(x)$ es el resto que satisface $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(q)$

2) El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de q es 1.

   Si no fuese cierto, podemos hacer:

$$\begin{aligned}\int \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{p(x)}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0} \\ &= \frac{p(x)}{a_{n\left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \ldots \frac{a_0}{a_n}\right)}} \\ &= \int \frac{\frac{p(x)}{a_n}}{\tilde{q}(x)} = \int \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}\end{aligned}$$

Con $\tilde{q}$ tal que $\widetilde{a_n} = 1$ (es mónico)

Usamos el siguiente teorema para factorizar el polinomio $q(x)$

Teorema: Todo polinomio mónico se puede escribir como producto de polinomios de grado 1 y/o polinomios de grado 2 sin raíces reales. Es decir, vale que:

$$\text{Si } q(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0,$$
$$\Rightarrow q(x) = (x - r_1)\ldots(x - r_k)(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)\ldots(x^2 + \alpha_2 x + \beta_2)$$

Vemos entonces que para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ suponemos $\mathrm{gr}(p) < \mathrm{gr}(q)$ y q mónico. Separamos en casos según la factorización de q:

1) q es producto de polinomios de grado 1 y todos distintos tal que:

$$q(x) = (x - r_1)\ldots(x - r_k), \quad \text{con } r_j \neq r_i \text{ si } j \neq i$$

En tal caso buscamos constantes $A_1, \ldots, A_k$ (una por cada polinomio) tales que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - r_1} + \ldots + \frac{A_k}{x - r_k}, \quad \text{luego cada término } \frac{A_i}{(x - r_i)} \text{ es fácil de integrar.}$$

2) q es producto de polinomios de grado 1 y todos iguales tal que:

$$q(x) = (x - r)^k$$

En tal caso buscamos constantes $A_1, \ldots, A_k$ (una por cada polinomio) tales que:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x - r)} + \frac{A_2}{(x - r)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x - r)^k}, \quad \text{luego cada término } \frac{A_i}{(x - r)^i} \text{ es fácil de integrar.}$$

3) q es producto de polinomios de grado 1 algunos de los cuales se repiten tal que:

$$q(x) = (x - r_1)\ldots(x - r_{i-1})(x - r_i)^{k \cdot i}\ldots(x - r_n)^{k \cdot n}$$

En este caso aplicamos los procedimientos de los casos 1) y 2).

4) q es producto de factores $(x - r_i)^{k \cdot i}$ y/o de polinomios de grado 2 sin raíces reales y no se repiten tal que:

$$q(x) = (x - r_1)^{k_1}\ldots(x - r_n)^{k \cdot n}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)\ldots(x^2 + \alpha_m x + \beta_m)$$

En este caso $\frac{p}{q}$ se escribe como una suma donde por cada “factor lineal” aparecen tantos términos como indican los casos 1 y 2, y para cada “factor cuadrático” aparecen términos de la forma

$$\frac{Bx + C}{x^2 + \alpha x + \beta} \text{ con constantes } B \text{ y } C \text{ a encontrar.}$$

1.e) Integrales impropias

Extendemos la definición de integral definida para el caso en que a ó $b \notin \mathbb{R}$ o en que f no esté acotada en $[a, b]$.

1.e.a) Integrales impropias de tipo I

Funciones continuas y al menos uno de los límites de integración no es finito.

- **Definición**: Sea $a \in \mathbb{R}$
  - Si f es continua en $[a, \infty)$ definimos $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{dx} \doteq \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\ \mathrm{dx}$ si este límite existe y es finito. En tal caso, diremos que $\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{dx}$ converge, sino, diverge.
  - Si f es continua en $(-\infty, a]$ definimos $\int_{-\infty}^a f(x)\ \mathrm{dx} \doteq \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\ \mathrm{dx}$ y decidimos si converge o diverge según corresponda.
  - Si f es continua en $\mathbb{R}$ definimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ \mathrm{dx} \doteq \int_{-\infty}^a f(x)\ \mathrm{dx} + \int_a^\infty f(x)\ \mathrm{dx}$ siempre que estas <u>dos</u> integrales converjan y en tal caso, decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\ \mathrm{dx}$ converge, pero si alguna no converge, entonoces diremos que diverge.

1.e.b) Integrales impropias de tipo II

Límites de integración finitos ($a, b \in \mathbb{R}$) pero funciones que tienen una asíntota vertical en un punto $c \in [a, b]$

- **Definición**:
  - Sea f es continua en $[a, b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Definimos:

    $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \doteq \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\ \mathrm{dx}$$

    si este límite existe y es finito.
  - Sea f es continua en $(a, b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$. Definimos:

    $$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \doteq \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\ \mathrm{dx}$$

    si este límite existe y es finito.
  - Sea $c \in (a, b)$. Si f es continua en $[a, c) \cup (c, b]$ y las integrales $\int_a^c f(x)\ \mathrm{dx}$ y $\int_c^b f(x)\ \mathrm{dx}$ existen y son finitos definimos:

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \doteq \int_a^c f(x)\ \mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\ \mathrm{dx}$$

1.e.c) Criterio de comparación para integrales impropias

- **Teorema** (criterio de comparación para integrales impropias de tipo I): Sean f y g funciones continuas y $a \in \mathbb{R}$.
  - Si $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in [a, \infty)$. Entonces:

    $$\int_a^\infty g(x)\ \mathrm{dx}\text{ converge} \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\ \mathrm{dx}\text{ converge}$$

    o equivalentemente:

    $$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{dx}\text{ diverge} \Rightarrow \int_a^\infty g(x)\ \mathrm{dx}\text{ diverge}$$

  - Análogamente, si $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in (-\infty, a]$. Entonces:

    $$\int_{-\infty}^a g(x)\ \mathrm{dx}\text{ converge} \Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x)\ \mathrm{dx}\text{ converge}$$

    o equivalentemente:

    $$\int_{-\infty}^a f(x)\ \mathrm{dx}\text{ diverge} \Rightarrow \int_{-\infty}^a g(x)\ \mathrm{dx}\text{ diverge}$$

- **Teorema** (criterio de comparación para integrales impropias de tipo II): Sean f y g funciones continuas en $[a, b)$ y tal que $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in [a, b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$. Entonces:

$$\int_a^b g(x)\ \mathrm{dx}\text{ converge} \Rightarrow \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}\text{ converge}$$

o equivalentemente

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}\text{ diverge} \Rightarrow \int_a^b g(x)\ \mathrm{dx}\text{ diverge}$$

2) Sucesiones